CENGAGE Learning®

Novena edición

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

para ingeniería y ciencias

Jay L. Devore

5 RAZONES

Para comprar sus libros de texto y materiales de apoyo en

CENGAGE brain .com*

1 AHORRO:
Precios de hasta 75% menos, cupones diarios, envío gratuito en pedidos de más de $25 dólares.

2 ELECCIÓN:
Múltiples opciones de formatos que incluyen libro de texto, eBook y rentas de eChapter.

3 CONVENIENCIA:
Acceso a los eBooks y a los eChapters en cualquier lugar y en cualquier momento a través de dispositivos móviles.

4 SERVICIO:
Acceso gratuito al eBook mientras su libro de texto es enviado, así como acceso instantáneo a los productos de tareas en línea.

5 HERRAMIENTAS DE ESTUDIO:
Herramientas de estudio** para su libro de texto, además de herramientas de escritura, investigación y fuentes de búsqueda de empleo

---

Encuentre sus materiales y comience a ahorrar en:

www.cengagebrain.com*

**Este material se encuentra disponible en inglés.*
***Disponibilidad variable*

Código de fuente: 14M-AA0107

Engaged with you.
www.cengage.com

CENGAGE Learning®

PROBABILIDAD
Y ESTADÍSTICA
para ingeniería y ciencias

Novena edición

Jay L. Devore

California Polytechnic State University, San Luis Obispo

Traducción

Mtro. Javier León Cárdenas
Formación básica ESIQIE/IPN

M. en C. Jesús Miguel Torres Flores
ENCB/IPN

Revisión técnica

Dra. Ana Elizabeth García Hernández
Instituto Politécnico Nacional

CENGAGE Learning®

Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur

***Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*. Novena edición.**
Jay L. Devore

Presidente de Cengage Learning Latinoamérica:
Fernando Valenzuela Migoya

Director Editorial para Latinoamérica:
Ricardo H. Rodríguez

Editora de Adquisiones para Latinoamérica:
Claudia C. Garay Castro

Gerente de Manufactura para Latinoamérica:
Antonio Mateos Martínez

Gerente Editorial de Contenidos en Español para Latinoamérica:
Pilar Hernández Santamarina

Gerente de Proyectos Especiales:
Luciana Rabuffetti

Coordinador de Manufactura:
Rafael Pérez González

Editora:
Abril Vega Orozco

Diseño de portada:
Anneli Daniela Torres Arroyo

Imagen de portada:
© Valentina Razumova/Shutterstock
© Valeri Potapova/Shutterstock

Composición tipográfica:
Humberto Núñez Ramos

© D.R. 2016 por Cengage Learning Editores, S.A. de C.V., una compañía de Cengage Learning, Inc.
Corporativo Santa Fe
Av. Santa Fe núm. 505, piso 12
Col. Cruz Manca, Santa Fe
C.P. 05349, México, D.F.
Cengage Learning® es una marca registrada usada bajo permiso.

DERECHOS RESERVADOS. Ninguna parte de este trabajo, amparado por la Ley Federal del Derecho de Autor, podrá ser reproducida, transmitida, almacenada o utilizada en cualquier forma o por cualquier medio, ya sea gráfico, electrónico o mecánico, incluyendo, pero sin limitarse a lo siguiente: fotocopiado, reproducción, escaneo, digitalización, grabación en audio, distribución en internet, distribución en redes de información o almacenamiento y recopilación en sistemas de información a excepción de lo permitido en el Capítulo III, Artículo 27 de la Ley Federal del Derecho de Autor, sin el consentimiento por escrito de la Editorial.

Traducido del libro *Probability and Statistics for Engineering and the Sciences*, Ninth Edition. Jay L. Devore. Publicado en inglés por Cengage Learning ©2016.
ISBN: 978-1-305-25180-9

Datos para catalogación bibliográfica:
Devore, Jay L. *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*. Novena edición.
ISBN: 978-607-522-827-3

Visite nuestro sitio en:
http://latinoamerica.cengage.com

Impreso en México
1 2 3 4 5 6 7 18 17 16 15

Para mis queridos nietos

Philip y Elliot quienes son

estadísticamente significativos.

Contenido

1 Generalidades y estadística descriptiva

Introducción 1
1.1 Poblaciones, muestras y procesos 3
1.2 Métodos pictóricos y tabulares en la estadística descriptiva 13
1.3 Medidas de ubicación 29
1.4 Medidas de variabilidad 36
Ejercicios suplementarios 47
Bibliografía 51

2 Probabilidad

Introducción 52
2.1 Espacios muestrales y eventos 53
2.2 Axiomas, interpretaciones y propiedades de la probabilidad 58
2.3 Técnicas de conteo 66
2.4 Probabilidad condicional 75
2.5 Independencia 85
Ejercicios suplementarios 91
Bibliografía 94

3 Variables aleatorias discretas y distribuciones de probabilidad

Introducción 95
3.1 Variables aleatorias 96
3.2 Distribuciones de probabilidad para variables aleatorias discretas 99
3.3 Valores esperados 109
3.4 Distribución de probabilidad binomial 117
3.5 Distribuciones hipergeométrica y binomial negativa 126
3.6 Distribución de probabilidad de Poisson 131
Ejercicios suplementarios 137
Bibliografía 140

4 Variables aleatorias continuas y distribuciones de probabilidad

Introducción 141
4.1 Funciones de densidad de probabilidad 142
4.2 Funciones de distribución acumulada y valores esperados 147
4.3 Distribución normal 156
4.4 Distribuciones exponencial y gamma 170
4.5 Otras distribuciones continuas 177
4.6 Gráficas de probabilidad 184
Ejercicios suplementarios 193
Bibliografía 197

5 Distribuciones de probabilidad conjunta y muestras aleatorias

Introducción 198
5.1 Variables aleatorias conjuntamente distribuidas 199
5.2 Valores esperados, covarianza y correlación 213
5.3 Estadísticos y distribuciones 220
5.4 Distribución de la media muestral 230
5.5 Distribución de una combinación lineal 238
Ejercicios suplementarios 243
Bibliografía 246

6 Estimación puntual

Introducción 247
6.1 Algunos conceptos generales de estimación puntual 248
6.2 Métodos de estimación puntual 264
Ejercicios suplementarios 274
Bibliografía 275

7 Intervalos estadísticos basados en una sola muestra

Introducción 276
7.1 Propiedades básicas de los intervalos de confianza 277
7.2 Intervalos de confianza de muestra grande para una media y para una proporción de población 285
7.3 Intervalos basados en una distribución de población normal 295
7.4 Intervalos de confianza para la varianza y la desviación estándar de una población normal 304
Ejercicios suplementarios 307
Bibliografía 309

8 Pruebas de hipótesis basadas en una sola muestra

Introducción 310
8.1 Hipótesis y procedimientos de prueba 311
8.2 Pruebas de hipótesis *z* sobre una media de población 326
8.3 Prueba *t* de una sola muestra 335
8.4 Pruebas relacionadas con una proporción de población 346
8.5 Otros aspectos de las pruebas de hipótesis 352
Ejercicios suplementarios 357
Bibliografía 360

9 Inferencias basadas en dos muestras

Introducción 361
9.1 Pruebas *z* e intervalos de confianza para una diferencia entre dos medias de población 362
9.2 Prueba *t* con dos muestras e intervalo de confianza 374
9.3 Análisis de datos apareados 382
9.4 Inferencias sobre una diferencia entre proporciones de población 391
9.5 Inferencias sobre dos varianzas de población 399
Ejercicios suplementarios 403
Bibliografía 408

10 Análisis de varianza

Introducción 409
10.1 ANOVA unifactorial 410
10.2 Comparaciones múltiples en ANOVA 420
10.3 Más sobre ANOVA unifactorial 426
Ejercicios suplementarios 435
Bibliografía 436

11 Análisis multifactorial de la varianza

Introducción 437
11.1 ANOVA bifactorial con $K_{ij} = 1$ 438
11.2 ANOVA bifactorial con $K_{ij} > 1$ 451
11.3 ANOVA con tres factores 460
11.4 Experimentos 2^p factoriales 469
Ejercicios suplementarios 483
Bibliografía 486

12 Regresión lineal simple y correlación

Introducción 487
12.1 Modelo de regresión lineal simple 488
12.2 Estimación de parámetros de modelo 496
12.3 Inferencias sobre el parámetro de la pendiente β_1 510
12.4 Inferencias sobre $\mu_{Y \cdot x^*}$ y predicción de valores Y futuros 519
12.5 Correlación 527
Ejercicios suplementarios 537
Bibliografía 541

13 Regresión múltiple y no lineal

Introducción 542
13.1 Aptitud y verificación del modelo 543
13.2 Regresión con variables transformadas 550
13.3 Regresión polinomial 562
13.4 Análisis de regresión múltiple 572
13.5 Otros problemas en regresión múltiple 595
Ejercicios suplementarios 610
Bibliografía 618

14 Pruebas de bondad de ajuste y análisis de datos categóricos

Introducción 619
14.1 Pruebas de bondad de ajuste cuando las probabilidades categóricas son dadas por completo 620
14.2 Pruebas de bondad de ajuste para hipótesis compuestas 627
14.3 Tablas de contingencia mutuas (o bidireccionales) 639
Ejercicios suplementarios 648
Bibliografía 651

15 Procedimientos libres de distribución

Introducción 652
15.1 La prueba Wilcoxon de rango con signo 653
15.2 Prueba Wilcoxon de suma de rangos 661
15.3 Intervalos de confianza libres de distribución 667
15.4 ANOVA libres de distribución 671
Ejercicios suplementarios 675
Bibliografía 677

16 Métodos de control de calidad

Introducción 678
16.1 Comentarios generales sobre las gráficas de control 679
16.2 Gráficas de control para la ubicación de proceso 681
16.3 Gráficas de control para variación de proceso 690
16.4 Gráficas de control para atributos 695
16.5 Procedimientos CUSUM 700
16.6 Muestreo de aceptación 708
Ejercicios suplementarios 714
Bibliografía 715

Apéndice de tablas

Tabla A.1 Distribución binomial acumulada A-2
Tabla A.2 Distribución acumulada de Poisson A-4
Tabla A.3 Áreas de la curva normal estándar A-6
Tabla A.4 La función gamma incompleta A-8
Tabla A.5 Valores críticos para distribuciones *t* A-9
Tabla A.6 Valores críticos de tolerancia para distribuciones normales de población A-10
Tabla A.7 Valores críticos para distribuciones ji-cuadrada A-11
Tabla A.8 Áreas de cola de la curva *t* A-12
Tabla A.9 Valores críticos de la distribución F A-14
Tabla A.10 Valores críticos para la distribución de rango estudentizado A-20
Tabla A.11 Áreas de cola de la curva ji-cuadrada A-21
Tabla A.12 Valores críticos para la prueba de normalidad Ryan-Joiner A-23
Tabla A.13 Valores críticos para la prueba Wilcoxon de rangos con signo A-24
Tabla A.14 Valores críticos para la prueba Wilcoxon de suma de rangos A-25
Tabla A.15 Valores críticos para el intervalo Wilcoxon de rangos con signo A-26
Tabla A.16 Valores críticos para el intervalo Wilcoxon de suma de rangos A-27
Tabla A.17 Curvas β para pruebas *t* A-28

Respuestas a ejercicios seleccionados de número impar R-29
Glosario de símbolos y abreviaturas G-1
Índice analítico I-1

Prefacio

Propósito

El uso de modelos de probabilidad y métodos estadísticos para analizar datos se ha convertido en una práctica común en virtualmente todas las disciplinas científicas. Este libro pretende introducir con amplitud aquellos modelos y métodos que con mayor probabilidad encuentran y utilizan los estudiantes en sus carreras de ingeniería y las ciencias naturales. Aun cuando los ejemplos y ejercicios se diseñaron pensando en los científicos y los ingenieros, la mayoría de los métodos tratados son básicos en los análisis estadísticos de muchas otras disciplinas, por lo que los estudiantes de las ciencias administrativas y sociales también se beneficiarán con la lectura de este libro.

Enfoque

Los estudiantes de un curso de estadística diseñado para servir a otras especialidades de estudio al principio es posible que duden del valor y la relevancia del material, pero mi experiencia es que los estudiantes pueden conectarse con la estadística mediante buenos ejemplos y ejercicios que combinen sus experiencias diarias con sus intereses científicos. Así pues, he trabajado duro para encontrar ejemplos reales y no artificiales, que alguien pensó que valía la pena recopilar y analizar. Muchos de los métodos presentados, sobre todo en los últimos capítulos sobre inferencia estadística, se ilustran analizando datos tomados de una fuente publicada y muchos de los ejercicios también implican trabajar con dichos datos. En ocasiones es posible que el lector no esté familiarizado con el contexto de un problema particular (como muchas veces yo lo estuve), pero me di cuenta de que los problemas reales con un contexto un tanto extraño atraen más a los estudiantes que aquellos problemas definitivamente artificiales en un entorno conocido.

Nivel matemático

La exposición es relativamente modesta en función de desarrollo matemático. El uso sustancial del cálculo se hace sólo en el capítulo 4 y en partes de los capítulos 5 y 6. En particular, con excepción de una observación o nota ocasional, el cálculo aparece en la parte de inferencia del libro sólo en la segunda sección del capítulo 6. No se utiliza álgebra matricial en absoluto. Por tanto, casi toda la exposición deberá de ser accesible para aquellos cuyo conocimiento matemático incluye un semestre o dos trimestres de cálculo diferencial e integral.

Contenido

El capítulo 1 inicia con algunos conceptos y terminología básicos (población, muestra, estadística descriptiva e inferencial, estudios enumerativos contra analíticos y así sucesivamente) y continúa con el estudio de métodos descriptivos gráficos y numéricos importantes. En el capítulo 2 se da un desarrollo un tanto tradicional de la probabilidad, seguido por distribuciones de probabilidad de variables aleatorias continuas y discretas en los capítulos 3 y 4, respectivamente. Las distribuciones conjuntas y sus propiedades se analizan en la primera parte del capítulo 5. La última parte de este capítulo introduce la estadística y sus distribuciones muestrales, las cuales constituyen el puente entre la probabilidad y la inferencia. Los siguientes tres capítulos se ocupan de la estimación

puntual, los intervalos estadísticos y la comprobación de hipótesis basados en una muestra única. Los métodos de inferencia que implican dos muestras independientes y datos apareados se presentan en el capítulo 9. El análisis de la varianza es el tema de los capítulos 10 y 11 (unifactorial y multifactorial, respectivamente). La regresión aparece por primera vez en el capítulo 12 (el modelo de regresión lineal simple y correlación) y regresa para una amplia repetición en el capítulo 13. Los últimos tres capítulos analizan métodos de ji-cuadrada, procedimientos sin distribución (no paramétricos) y técnicas de control estadístico de calidad.

Ayuda para el aprendizaje de los estudiantes

Aunque el nivel matemático del libro representará poca dificultad para la mayoría de los estudiantes de ciencias e ingeniería, es posible que el trabajo dirigido hacia la comprensión de los conceptos y la apreciación del desarrollo lógico de la metodología en ocasiones requiera un esfuerzo sustancial. Para ayudar a que los estudiantes ganen en comprensión y apreciación he proporcionado numerosos ejercicios de dificultad variable, desde muchos que implican la aplicación rutinaria del material incluido en el texto hasta algunos que le piden al lector que extienda los conceptos analizados en el texto a situaciones un tanto nuevas. Existen muchos ejercicios más que la mayoría de los profesores desearía asignar durante cualquier curso particular, pero recomiendo que se les pida a los estudiantes que resuelvan un número sustancial de los mismos; en una disciplina de solución de problemas, el compromiso activo de esta clase es la forma más segura de identificar y cerrar las brechas en el entendimiento que inevitablemente surgen. Las respuestas a la mayoría de los ejercicios impares aparecen en la sección de respuestas al final del texto.

Para acceder a material adicional del curso y recursos de apoyo, por favor visite www.cengagebrain.com.* Este le llevará a la página en donde encontrará material de apoyo para el libro.

Nuevo en esta edición

- El mayor cambio en esta edición es que se eliminó la sección de pruebas de hipótesis por rechazo de región. Las conclusiones de los análisis por pruebas de hipótesis se basan ahora únicamente en valores *P*. Esto ha requerido volver a escribir la sección 8.1 por completo la cual ahora incluye las hipótesis y los procedimientos de prueba basados en valores *P*. Por tanto, se requirió una revisión sustancial de las secciones del capítulo 8, y esto a su vez se extendió a lo largo de las secciones y subsecciones basadas en pruebas de hipótesis de los capítulos 9-15.
- Muchos ejemplos nuevos y ejercicios, casi todos basados en datos reales o problemas reales. Algunos de estos escenarios son menos técnicos o de alcance más amplio que lo que se ha incluido en las ediciones anteriores; por ejemplo, investigar el efecto nocebo (la inclinación que tienen quienes conocen los efectos secundarios de un medicamento a experimentarlos), la comparación de los contenidos de sodio en cereales producidos por tres fabricantes distintos, la predicción de la altura a partir de una medición simple de una característica anatómica, el modelaje de la relación entre la edad de una madre adolescente y el peso de su bebé al nacer, la medición de la abstinencia a corto plazo de un fumador sobre la percepción correcta del tiempo transcurrido y la exploración del impacto del fraseo en una prueba literaria cuantitativa.
- Más ejemplos y ejercicios sobre el material de probabilidad (capítulos 2-5) basados en información de fuentes publicadas.
- La exposición ha sido pulida siempre que ha sido posible para ayudar a los estudiantes a adquirir una comprensión intuitiva de los diferentes conceptos.

* Este material se encuentra disponible en inglés.

Reconocimientos

Mis colegas en Cal Poly me proporcionaron apoyo y retroalimentación invaluables durante el curso de los años. También agradezco a los muchos usuarios de ediciones previas que me sugirieron mejoras (y en ocasiones errores identificados). Una nota especial de agradecimiento va para Matt Carlton por su trabajo en los dos manuales de soluciones, uno para profesores y el otro para estudiantes.

La generosa retroalimentación provista por los siguientes revisores de esta edición y de ediciones previas, ha sido de mucha ayuda para mejorar el libro: Robert L. Armacost, University of Central Florida; Bill Bade, Lincoln Land Community College; Douglas M. Bates, University of Wisconsin–Madison; Michael Berry, West Virginia Wesleyan College; Brian Bowman, Auburn University; Linda Boyle, University of Iowa; Ralph Bravaco, Stonehill College; Linfield C. Brown, Tufts University; Karen M. Bursic, University of Pittsburgh; Lynne Butler, Haverford College; Troy Butler, Colorado State University; Barrett Caldwell, Purdue University; Kyle Caudle, South Dakota School of Mines & Technology; Raj S. Chhikara, University of Houston–Clear Lake; Edwin Chong, Colorado State University; David Clark, California State Polytechnic University at Pomona; Ken Constantine, Taylor University; Bradford Crain, Portland State University; David M. Cresap, University of Portland; Savas Dayanik, Princeton University; Don E. Deal, University of Houston; Annjanette M. Dodd, Humboldt State University; Jimmy Doi, California Polytechnic State University–San Luis Obispo; Charles E. Donaghey, University of Houston; Patrick J. Driscoll, U.S. Military Academy; Mark Duva, University of Virginia; Nassir Eltinay, Lincoln Land Community College; Thomas English, College of the Mainland; Nasser S. Fard, Northeastern University; Ronald Fricker, Naval Postgraduate School; Steven T. Garren, James Madison University; Mark Gebert, University of Kentucky; Harland Glaz, University of Maryland; Ken Grace, Anoka-Ramsey Community College; Celso Grebogi, University of Maryland; Veronica Webster Griffis, Michigan Technological University; José Guardiola, Texas A&M University–Corpus Christi; K. L. D. Gunawardena, University of Wisconsin–Oshkosh; James J. Halavin, Rochester Institute of Technology; James Hartman, Marymount University; Tyler Haynes, Saginaw Valley State University; Jennifer Hoeting, Colorado State University; Wei-Min Huang, Lehigh University; Aridaman Jain, New Jersey Institute of Technology; Roger W. Johnson, South Dakota School of Mines & Technology; Chihwa Kao, Syracuse University; Saleem A. Kassam, University of Pennsylvania; Mohammad T. Khasawneh, State University of New York–Binghamton; Kyungduk Ko, Boise State University; Stephen Kokoska, Colgate University; Hillel J. Kumin, University of Oklahoma; Sarah Lam, Binghamton University; M. Louise Lawson, Kennesaw State University; Jialiang Li, University of Wisconsin–Madison; Wooi K. Lim, William Paterson University; Aquila Lipscomb, The Citadel; Manuel Lladser, University of Colorado at Boulder; Graham Lord, University of California–Los Ángeles; Joseph L. Macaluso, DeSales University; Ranjan Maitra, Iowa State University; David Mathiason, Rochester Institute of Technology; Arnold R. Miller, University of Denver; John J. Millson, University of Maryland; Pamela Kay Miltenberger, West Virginia Wesleyan College; Monica Molsee, Portland State University; Thomas Moore, Naval Postgraduate School; Robert M. Norton, College of Charleston; Steven Pilnick, Naval Postgraduate School; Robi Polikar, Rowan University; Justin Post, North Carolina State University; Ernest Pyle, Houston Baptist University; Xianggui Qu, Oakland University; Kingsley Reeves, University of South Florida; Steve Rein, California Polytechnic State University–San Luis Obispo; Tony Richardson, University of Evansville; Don Ridgeway, North Carolina State University; Larry J. Ringer, Texas A&M University; Nabin Sapkota, University of Central Florida; Robert M. Schumacher, Cedarville University; Ron Schwartz, Florida Atlantic University; Kevan Shafizadeh, California State University– Sacramento; Mohammed Shayib, Prairie View A&M; Alice E. Smith, Auburn University; James MacGregor Smith, University of Massachusetts;

Paul J. Smith, University of Maryland; Richard M. Soland, The George Washington University; Clifford Spiegelman, Texas A&M University; Jery Stedinger, Cornell University; David Steinberg, Tel Aviv University; William Thistleton, State University of New York Institute of Technology; J A Stephen Viggiano, Rochester Institute of Technology; G. Geoffrey Vining, University of Florida; Bhutan Wadhwa, Cleveland State University; Gary Wasserman, Wayne State University; Elaine Wenderholm, State University of New York–Oswego; Samuel P. Wilcock, Messiah College; Michael G. Zabetakis, University of Pittsburgh; y Maria Zack, Point Loma Nazarene University.

Preeti Longia Sinha de MPS Limited ha realizado un trabajo excelente al supervisar la producción del libro. Una vez más me veo obligado a expresar mi gratitud a todas aquellas personas en Cengage que han hecho contribuciones importantes a lo largo de mi carrera como escritor de libros de texto. Para esta edición más reciente, un agradecimiento especial a Jay Campbell (por su información oportuna y retroalimentación a través del proyecto), Molly Taylor, Ryan Ahern, Spencer Arritt Cathy Brooks y Andrew Coppola. También apreciamos la labor estelar de todos los representantes de ventas de Cengage Learning que han trabajado para hacer que mis libros sean más visibles para la comunidad estadística. Por último, pero no por ello menor, un sincero agradecimiento a mi esposa Carol por sus décadas de apoyo, y a mis hijas por proporcionar inspiración a través de sus propios logros.

Jay L. Devore

Generalidades y estadística descriptiva

1

"Cursé estadística en la escuela de negocios y fue una experiencia transformadora. La formación analítica le brinda un conjunto de habilidades que le permiten distinguirse de la mayoría de las personas en el mercado laboral."

—Laszlo Bock, vicepresidente senior de People Operations (a cargo de todas las contrataciones) en Google.

The New York Times, entrevista con el columnista Thomas Friedman, 20 de abril de 2014.

"No soy muy dado a lamentar, pero esto me desconcertó un tiempo. Creo que debería haber estudiado mucho más estadística en la universidad."

—Max Levchin, cofundador de Paypal, fundador de Slide Founder.

Cita de la semana tomada del sitio web de la American Statistical Association, 23 de noviembre de 2010.

"Sigo diciendo que el trabajo sexy en los próximos 10 años será la estadística, y no estoy bromeando."

—Hal Varian, economista en jefe de Google.

The New York Times, 6 de agosto de 2009.

INTRODUCCIÓN

Los conceptos y métodos estadísticos no son sólo útiles sino que con frecuencia son indispensables para entender el mundo que nos rodea. Proporcionan formas de obtener ideas nuevas acerca del comportamiento de muchos fenómenos que usted encontrará en el campo de especialización que haya escogido en ingeniería o ciencias.

La estadística como disciplina nos enseña a realizar juicios inteligentes y tomar decisiones informadas en la presencia de incertidumbre y variación. Sin estas habría poca necesidad de métodos estadísticos o de profesionales en estadística. Si los componentes de un tipo particular tuvieran exactamente la misma duración, si todos los resistores producidos por un fabricante tuvieran el mismo valor de resistencia, si las determinaciones del pH en las muestras de suelo de un lugar en particular dieran

resultados idénticos, etcétera, entonces una sola observación revelaría toda la información deseada.

Al determinar la forma "más verde" de viajar surgió una interesante muestra de la variación. El artículo **"Carbon Conundrum" (*Consumer Reports*, 2008: 9)** identifica organizaciones que ayudan a los consumidores a calcular la producción de carbono. Se registraron los siguientes resultados en el despegue de un vuelo de Nueva York a Los Ángeles:

Cálculo de carbono	CO_2 (lb)
Terra Pass	1924
Conservation International	3000
Cool It	3049
World Resources Institute/Safe Climate	3163
National Wildlife Federation	3465
Sustainable Travel International	3577
Native Energy	3960
Environmental Defense	4000
Carbonfund.org	4820
The Climate Trust/CarbonCounter.org	5860
Bonneville Environmental Foundation	6732

Claramente hay un importante desacuerdo entre estos cálculos respecto a la cantidad exacta de carbono emitido , caracterizado en el articulo como la diferencia que hay entre "una bailarina y Bigfoot (Pie grande)". El artículo proporciona una dirección web donde los lectores podrán aprender más acerca del funcionamiento de estas calculadoras.

¿Cómo se pueden utilizar técnicas estadísticas para reunir información y sacar conclusiones? Suponga, por ejemplo, que un ingeniero de materiales ha inventado un recubrimiento para retardar la corrosión en tuberías de metal en circunstancias específicas. Si este recubrimiento se aplica a diferentes segmentos de la tubería, la variación de las condiciones ambientales y de los segmentos mismos producirá más corrosión en algunos segmentos que en otros. Para decidir si la cantidad *promedio* de corrosión excede un límite superior especificado de alguna clase, o cuánta corrosión ocurrirá en una sola pieza de tubería se puede utilizar un análisis estadístico con los datos del experimento.

Por otra parte, suponga que el ingeniero inventó el recubrimiento con la creencia de que será superior al recubrimiento que se utiliza actualmente. Se podría realizar un experimento comparativo para investigar esta cuestión aplicando a algunos segmentos de la tubería el recubrimiento actual y el nuevo a otros segmentos. Esto debe realizarse con cuidado o se obtendrá una conclusión errónea. Por ejemplo, tal vez la cantidad promedio de corrosión sea idéntica con ambos recubrimientos. Sin embargo, el recubrimiento nuevo puede ser aplicado a segmentos que tengan una resistencia superior a la corrosión y en condiciones ambientales menos severas en comparación con los segmentos y condiciones del recubrimiento actual. El investigador probablemente observaría una diferencia entre los dos recubrimientos atribuible no a los recubrimientos mismos, sino a extrañas variaciones. La

estadística ofrece no sólo métodos para analizar resultados de experimentos una vez que se han realizado sino también sugerencias sobre cómo pueden llevarse a cabo los experimentos de una manera eficiente para mitigar los efectos de la variación y tener una mejor oportunidad de llegar a conclusiones correctas.

1.1 Poblaciones, muestras y procesos

Los ingenieros y científicos constantemente están expuestos a la recolección de hechos o **datos**, tanto en sus actividades profesionales como en sus actividades diarias. La estadística proporciona métodos de organizar y resumir datos, y de obtener conclusiones basadas en la información contenida en los mismos.

Usualmente una investigación se centrará en una colección bien definida de objetos que constituyen una **población** de interés. En un estudio la población podría consistir en todas las cápsulas de gelatina de un tipo particular producidas durante un periodo específico. Otra investigación podría implicar la población compuesta de todos los individuos que obtuvieron una licenciatura de ingeniería durante el último ciclo académico. Cuando la información deseada está disponible para todos los objetos de la población, se tiene lo que se conoce como **censo**. Las restricciones de tiempo, dinero y otros recursos escasos casi siempre hacen que un censo sea impráctico o poco factible. En su lugar, se selecciona un subconjunto de la población —**una muestra**—, de alguna manera recomendada. Así pues, se podría obtener una muestra de cojinetes de una corrida de producción particular como base para investigar si se ajustan a las especificaciones de fabricación; o se podría seleccionar una muestra de los graduados de ingeniería del último año para obtener retroalimentación sobre la calidad de los programas de estudio de ingeniería.

Por lo general existe interés sólo en ciertas características de los objetos de una población: el número de grietas en la superficie de cada recubrimiento, el espesor de cada pared de la cápsula, el género de un graduado de ingeniería, la edad a la cual el individuo se graduó, etcétera. Una característica puede ser categórica, tal como el género o el tipo de funcionamiento defectuoso, o puede ser de naturaleza numérica. En el primer caso el *valor* de la característica es una categoría (p. ej., femenino o soldadura insuficiente), mientras que en el segundo caso, el valor es un número (p. ej., edad = 23 años, o diámetro = 502 cm). Una **variable** es cualquier característica cuyo valor puede cambiar de un objeto a otro en la población. Las últimas letras de nuestro alfabeto, en minúscula, denotarán las variables. Por ejemplo:

x = marca de la calculadora de un estudiante

y = número de visitas a un sitio web particular durante un periodo específico

z = la distancia de frenado de un automóvil en condiciones específicas

Los datos se obtienen al observar una sola variable o dos o más variables simultáneamente. Un conjunto de datos **univariantes** se compone de observaciones realizadas en una sola variable. Por ejemplo, se podría determinar el tipo de transmisión automática (A) o manual (M) en cada uno de diez automóviles recientemente adquiridos con cierto concesionario y el resultado sería el siguiente conjunto de datos categóricos

M A A A M A A M A A

La siguiente muestra del ritmo cardiaco (latidos por minuto) para pacientes de recién ingreso en una unidad de cuidados intensivos para adultos es un conjunto de datos numéricos univariantes:

88 80 71 103 154 132 67 110 60 105

Se tienen datos **bivariantes** cuando se realizan observaciones en cada una de dos variables. El conjunto de datos podría consistir en un par (altura, peso) por cada integrante del equipo de basquetbol, con la primera observación como (72, 168), la segunda como (75, 212), etcétera. Si un ingeniero determina el valor de x = componente de duración y y = razón de la falla del componente, el conjunto de datos resultante es bivariante, con una variable numérica y otra categórica. Los datos **multivariantes** surgen cuando se realizan observaciones en más de una variable (por tanto, bivariante es un caso especial de multivariante). Por ejemplo, un médico investigador podría determinar la presión sanguínea sistólica, la presión sanguínea diastólica y el nivel de colesterol en suero de cada paciente participante en un estudio. Cada observación sería una terna de números, tal como (120, 80, 146). En muchos conjuntos de datos multivariantes algunas variables son numéricas y otras son categóricas. Por tanto, el número anual dedicado al automóvil de *Consumer Reports* da valores de dichas variables como tipo de vehículo (pequeño, deportivo, compacto, mediano, grande), eficiencia de consumo de combustible en la ciudad y en carretera en millas por galón (mpg), tipo de transmisión (ruedas traseras, ruedas delanteras, cuatro ruedas), etcétera.

Ramas de la estadística

Posiblemente un investigador que ha recopilado datos desee resumir y describir características importantes de los mismos. Esto implica utilizar métodos de **estadística descriptiva**. Algunos de estos son de naturaleza gráfica; la construcción de histogramas, diagramas de caja y gráficas de puntos son ejemplos primordiales. Otros métodos descriptivos implican calcular medidas numéricas, tales como medias, desviaciones estándar y coeficientes de correlación. La amplia disponibilidad de paquetes de software de computación para estadística ha vuelto estas tareas más fáciles de realizar que antes. Las computadoras son mucho más eficientes que los seres humanos para calcular y crear imágenes (una vez que han recibido las instrucciones apropiadas por parte del usuario). Esto significa que el investigador no tendrá que dedicarse al "trabajo tedioso" y tendrá más tiempo para estudiar los datos y extraer información importante. A lo largo de este libro se presentarán los datos de salida de varios paquetes tales como Minitab, SAS, JMP y R. El programa R puede ser descargado sin costo del sitio **http://www.r-project.org**. Este programa ha ganado popularidad entre la comunidad estadística, y existen muchos libros que describen sus diferentes usos (lo cual implica programar, contrario a los menús desplegables de Minitab y JMP).

EJEMPLO 1.1 La caridad es un gran negocio en los Estados Unidos. El sitio web **charitynavigator.com** proporciona información de aproximadamente 6000 organizaciones de caridad y otro gran número de pequeñas organizaciones de beneficiencia. Algunas organizaciones caritativas operan eficientemente, con gastos administrativos y de recaudación de fondos que apenas son un pequeño porcentaje de los gastos totales, mientras que otras gastan un alto porcentaje de lo que obtienen en tal actividad. Enseguida se muestran datos sobre los gastos en la recaudación de fondos como un porcentaje de los gastos totales para una muestra aleatoria de 60 asociaciones de caridad:

6.1	12.6	34.7	1.6	18.8	2.2	3.0	2.2	5.6	3.8
2.2	3.1	1.3	1.1	14.1	4.0	21.0	6.1	1.3	20.4
7.5	3.9	10.1	8.1	19.5	5.2	12.0	15.8	10.4	5.2
6.4	10.8	83.1	3.6	6.2	6.3	16.3	12.7	1.3	0.8
8.8	5.1	3.7	26.3	6.0	48.0	8.2	11.7	7.2	3.9
15.3	16.6	8.8	12.0	4.7	14.7	6.4	17.0	2.5	16.2

Sin organización es difícil tener una idea de las características más importantes de los datos, que podrían significar un valor típico (o representativo): si los valores están muy concentrados en torno a un valor típico o dispersos, si existen brechas en los datos, qué porcentajes de los valores son menores a 20%, etcétera. La figura 1.1 muestra una *gráfica*

```
Stem-and-leaf of FundRsng N = 60
Leaf Unit = 1.0
     0 | 01111122223333344
     0 | 55556666666778888
     1 | 0001222244
     1 | 55666789
     2 | 01
     2 | 6
     3 | 4
     3 |
     4 |
     4 | 8
     5 |
     5 |
     6 |
     6 |
     7 |
     7 |
     8 | 3
```

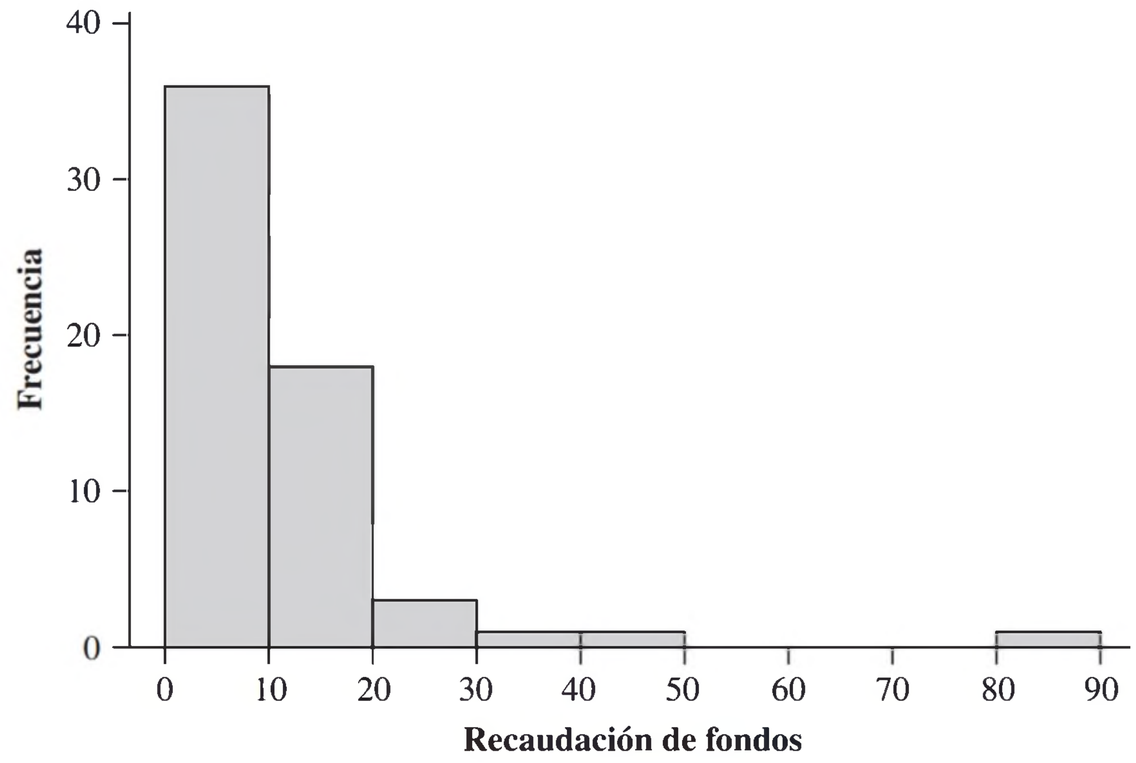


Figura 1.1 Gráfica de tallos y hojas (truncada a diez dígitos) de Minitab e histograma para los datos del porcentaje de recaudación de fondos para caridad

de tallo y hojas de los datos y un *histograma*. En la sección 1.2 se discutirá la construcción e interpretación de estos resúmenes gráficos; por el momento se espera que se vea cómo los porcentajes están distribuidos sobre el rango de valores de 0 a 100. Es claro que la mayoría de las organizaciones de caridad en el ejemplo gastan menos de 20% en recaudar fondos y sólo unos pequeños porcentajes podrían ser vistos más allá del límite de una práctica sensible. ■

Después de haber obtenido la muestra de una población, comúnmente un investigador desearía utilizar la información muestral para sacar una conclusión (hacer una inferencia de alguna clase) respecto a la población. Es decir, la muestra es un medio para llegar a un fin en lugar de un fin en sí misma. Las técnicas para generalizar desde una muestra hasta una población se conjuntan en la rama de la **estadística inferencial**.

EJEMPLO 1.2 Las investigaciones sobre la de resistencia de los materiales constituye una rica área de aplicación de métodos estadísticos. El artículo **"Effects of Aggregates and Microfillers on the Flexural Properties of Concrete" (*Magazine of Concrete Research*, 1997: 81-98)** reporta sobre un estudio de propiedades de resistencia de concreto de alto desempeño mediante el uso de superplastificantes y ciertos aglomerantes. La resistencia a la compresión de dicho concreto había sido investigada previamente, pero no se sabía mucho sobre la resistencia a la flexión (una medida de la capacidad de resistir fallas por flexión). Los datos anexos sobre resistencia a la flexión (en megapascales, MPa, donde 1 Pa (Pascal) = 1.45×10^{-4} lb/pulg^2) aparecen en el artículo citado:

5.9	7.2	7.3	6.3	8.1	6.8	7.0	7.6	6.8	6.5	7.0	6.3	7.9	9.0
8.2	8.7	7.8	9.7	7.4	7.7	9.7	7.8	7.7	11.6	11.3	11.8	10.7	

Suponga que se desea *estimar* el valor promedio de resistencia a la flexión de todas las vigas que pudieran ser fabricadas de esta manera (si se conceptualiza una población de todas esas vigas, se trata de estimar la media poblacional). Se puede demostrar que con un alto grado de confianza la resistencia media de la población se encuentra entre 7.48 MPa y 8.80 MPa; esto se llama *intervalo de confianza* o *estimación de intervalo*. Alternativamente se podrían utilizar estos datos para predecir la resistencia a la flexión de una *sola* viga de este tipo. Con un alto grado de confianza, la resistencia de una sola viga excederá de 7.35 MPa; el número 7.35 se conoce como *límite de predicción inferior*. ■

El objetivo principal de este libro es presentar e ilustrar métodos de estadística inferencial útiles en el trabajo científico. Los tipos más importantes de procedimientos inferenciales,

estimación puntual, comprobación de hipótesis y estimación mediante intervalos de confianza se introducen en los capítulos 6 al 8 y luego se utilizan escenarios más complicados en los capítulos 9 al 16. El resto de este capítulo presenta métodos de estadística descriptiva que se utilizan mucho en el desarrollo de la inferencia.

Los capítulos 2 al 5 presentan material de la disciplina de probabilidad. Este material finalmente tiende un puente entre las técnicas descriptivas e inferenciales. El dominio de la probabilidad permite entender mejor cómo se desarrollan y utilizan los procedimientos inferenciales, cómo las conclusiones estadísticas pueden ser traducidas e interpretadas en un lenguaje cotidiano, y cuándo y dónde pueden ocurrir errores al aplicar los métodos. La probabilidad y la estadística se ocupan de cuestiones que implican poblaciones y muestras, pero lo hacen de "manera inversa", una respecto a la otra.

En un problema de probabilidad se supone que las propiedades de la población estudiada son conocidas (p. ej., en una población numérica se puede suponer una cierta distribución especificada de valores de la población) y se pueden plantear y responder preguntas respecto a una muestra tomada de una población. En un problema de estadística el experimentador dispone de las características de una muestra y esta información le permite sacar conclusiones respecto a la población. La relación entre las dos disciplinas se resume diciendo que la probabilidad discurre de la población a la muestra (razonamiento deductivo), mientras que la estadística inferencial lo hace de la muestra a la población (razonamiento inductivo). Lo anterior se ilustra en la figura 1.2.

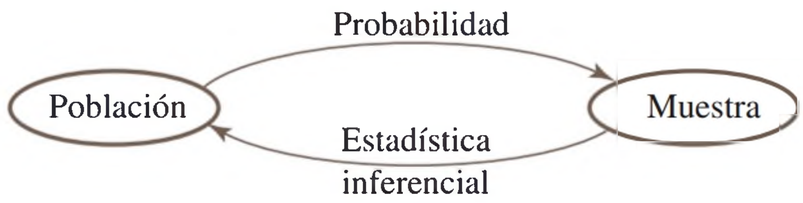


Figura 1.2 Relación entre probabilidad y estadística inferencial

Antes de querer entender lo que una muestra particular dice sobre la población, primero se debe entender la incertidumbre asociada con la toma de una muestra de una población dada. Por esto es que se estudia la probabilidad antes que la estadística.

EJEMPLO 1.3 Para ejemplificar el enfoque contrastante de la probabilidad y la estadística inferencial considere el uso que hacen los automovilistas del cinturón de seguridad manual de regazo en autos que están equipados con sistemas automáticos de cinturones de hombro. (El artículo **"Automobile Seat Belts: Usage Patterns in Automatic Belt Systems", *Human Factors*, 1998: 126-135**, resume datos sobre su uso.) Se podría suponer que probablemente 50% de todos los conductores de automóviles equipados de esta manera, en cierta área metropolitana utilizan regularmente el cinturón de regazo (una suposición sobre la población), por lo que uno puede preguntarse "¿qué tan probable es que una muestra de 100 conductores incluya al menos 70 que utilicen regularmente el cinturón de regazo?", o "¿cuántos de los conductores en una muestra de 100 se puede esperar que utilicen con regularidad el cinturón de regazo?". Por otra parte, en estadística inferencial se dispone de información sobre la muestra; por ejemplo, una muestra de 100 conductores de tales vehículos reveló que 65 utilizan con regularidad su cinturón de regazo. Podemos entonces preguntarnos: "¿Proporciona esto evidencia sustancial para concluir que más de 50% de todos los conductores en dicha área metropolitana utilizan con regularidad el cinturón de regazo?". En el último escenario se intenta utilizar la información sobre la muestra para responder una pregunta respecto a la estructura de toda la población de la cual se seleccionó la muestra. ■

En el ejemplo del cinturón de regazo la población es concreta y está bien definida: todos los conductores de automóviles equipados de una cierta manera en un área metropolitana en particular. En el ejemplo 1.2, sin embargo, las mediciones de resistencia provienen de una muestra de vigas prototipo que no tuvieron que seleccionarse de una población existente. En su lugar conviene pensar en una población compuesta de todas las posibles

mediciones de resistencia que podrían hacerse en condiciones experimentales similares. Tal población se conoce como **población conceptual** o **hipotética.** Existen varias situaciones en las cuales las preguntas encajan en el marco de referencia de la estadística inferencial al conceptualizar una población.

Ámbito de la estadística moderna

Actualmente la metodología estadística la emplean los investigadores de prácticamente todas las disciplinas, incluyendo áreas como

- biología molecular (en el análisis de datos de microarreglos)
- ecología (en la descripción cuantitativa del modo en que se distribuyen espacialmente los individuos de varias poblaciones de plantas y animales)
- ingeniería de materiales (en el estudio de las propiedades de distintos procesos para retardar la corrosión)
- marketing (en el desarrollo de estudios de mercado y estrategias para la comercialización de nuevos productos)
- salud pública (en la identificación de las fuentes de enfermedades y sus formas de tratamiento)
- ingeniería civil (en la evaluación del efecto del esfuerzo en los elementos estructurales y los impactos del flujo de vehículos en las comunidades)

A medida que se avance en la lectura de este libro se encontrará un amplio espectro de escenarios diferentes en los ejemplos y ejercicios que ilustran la aplicación de técnicas de probabilidad y estadística. Muchos de estos escenarios involucran datos u otros materiales extraídos de artículos sobre ingeniería y de revistas de ciencia. Los métodos aquí presentados convierten herramientas establecidas y confiables en el arsenal de todo aquel que trabaja con datos. Mientras tanto, los estadísticos continúan desarrollando nuevos modelos para describir aleatoriedad, incertidumbre y una metodología nueva para el análisis de datos. Como evidencia de los continuos esfuerzos creativos en la comunidad estadística, existen títulos y cápsulas con descripciones de artículos de publicación reciente en revistas de estadística (*Journal of the American Statistical Association* y los *Annals of Applied Statistics* cuyas siglas son *JASA* y *AAS*, respectivamente, dos de las revistas más importantes en esta disciplina):

- **"How Many People Do You Know? Efficiently Estimating Personal Network Size" (*JASA*, 2010: 59-70).** ¿A cuántas de las N personas de su colegio conoce? Se podría seleccionar una muestra aleatoria de alumnos de la población y usar una estimación basada en la fracción de personas que conoce de dicha muestra. Lamentablemente esto no es muy efectivo para grandes poblaciones porque la fracción de la población que una persona conoce suele ser muy pequeña. Los autores proponen un "modelo de mezcla latente" con el que afirman haber remediado las deficiencias en las técnicas utilizadas anteriormente. También fue incluido un estudio de simulación de la eficacia del método, basado en grupos formados por nombres ("¿Cuánta gente llamada Michael conoce?"), así como una aplicación del método de datos de la encuesta real. El artículo concluye con algunas recomendaciones prácticas para la construcción de futuros estudios diseñados para estimar el tamaño de la red social.
- **"Active Learning Through Sequential Design, with Applications to the Detection of Money Laundering" (*JASA*, 2009: 969-981).** El lavado de dinero consiste en ocultar el origen de los fondos obtenidos a través de actividades ilegales. El enorme número de transacciones que ocurren a diario en las instituciones financieras dificulta la detección del lavado de capitales. El planteamiento más común ha sido extraer un resumen de diversas cantidades de la historia de las transacciones y llevar a cabo una investigación de mucho tiempo de las actividades sospechosas. El artículo propone un método estadístico más eficiente e ilustra su uso en un caso de estudio.

- **"Robust Internal Benchmarking and False Discovery Rates for Detecting Racial Bias in Police Stops" (*JASA*, 2009: 661-668).** Los alegatos de las acciones de la policía atribuidas, al menos en parte, a los prejuicios raciales se han convertido en un tema polémico en muchas comunidades. En este artículo se propone un nuevo método diseñado para reducir el riesgo de marcar un número sustancial de "falsos positivos" (personas falsamente identificadas como la manifestación de un sesgo). El método se aplicó a los datos de 500 000 peatones detenidos en la ciudad de Nueva York en 2006; de los 3000 agentes que participan regularmente en la detención de peatones, 15 fueron identificados por haber detenido una fracción mucho mayor de negros e hispanos de lo que podría predecirse en ausencia del sesgo.
- **"Records in Athletics Through Extreme Value Theory" (*JASA*, 2008: 1382-1391).** El documento se centra en el modelado de los extremos relacionados con los récords mundiales en atletismo. Los autores comienzan planteando dos cuestiones: 1) ¿Cuál es el último récord mundial en un evento específico (por ejemplo, el salto de altura para las mujeres)? y 2) ¿Cuán "bueno" es el actual récord mundial y cómo es la calidad de los actuales récords del mundo al comparar los diferentes eventos? Se considera un total de 28 eventos (ocho carreras, tres lanzamientos y tres saltos para hombres y mujeres). Por ejemplo, una conclusión es que el récord masculino de maratón sólo se ha reducido 20 segundos, pero el que registran las mujeres actualmente en el maratón es casi 5 minutos más de lo que en última instancia se puede lograr. La metodología también tiene aplicaciones para problemas tales como asegurarse de que las pistas de aterrizaje sean lo suficientemente largas o que los diques en Holanda sean lo suficientemente altos.
- **"Self-Exciting Hurdle Models for Terrorist Activity" (*AAS*, 2012: 106-124).** Los autores desarrollaron un modelo de predicción de actividad terrorista teniendo en cuenta el número diario de ataques terroristas en Indonesia desde 1994 hasta 2007. El modelo estima la probabilidad de futuros ataques en función de los tiempos a partir de los últimos ataques. Una característica del modelo considera muchos días sin que ocurra un ataque junto con la presencia de múltiples ataques coordinados en un mismo día. El artículo proporciona una interpretación de diversas características del modelo y evalúa su funcionamiento predictivo.
- **"Prediction of Remaining Life of Power Transformers Based on Left Truncated and Right Censored Lifetime Data" (*AAS*, 2009: 857-879).** Hay aproximadamente 150 000 transformadores de transmisión de energía de alta tensión en los Estados Unidos. Fallas inesperadas pueden causar grandes pérdidas económicas, por lo cual es importante contar con las predicciones de vida de los transformadores. Los datos pertinentes pueden ser complicados porque la vida útil de algunos transformadores se extiende por varias décadas durante las cuales los registros no son necesariamente completos. En particular, los autores del artículo utilizan datos de una empresa de energía que comenzó a llevar registros detallados en 1980. Sin embargo, algunos transformadores se habían instalado antes del 1° de enero de 1980 y todavía funcionaban después de esa fecha ("truncamiento a la izquierda" de datos), mientras que otras unidades estaban aún en servicio en el momento de la investigación, por lo que su vida completa no está disponible ("truncamiento a la derecha" de datos). El artículo describe los diversos procedimientos para obtener un intervalo de valores posibles (un *intervalo de predicción*) para toda la vida restante y el número acumulado de fallas en un periodo especificado.
- **"The BARISTA: A Model for Bid Arrivals in Online Auctions" (*AAS*, 2007: 412-441).** Las subastas en línea como eBay y uBid a menudo tienen características que las diferencian de las subastas tradicionales. Una diferencia muy importante es que el número de oferentes al inicio de muchas subastas tradicionales es fijo, mientras que en las subastas en línea este número y el número de ofertas resultantes no está predeterminado. El artículo propone un nuevo modelo de BARISTA (Bid ARrivals In STAges) para describir la forma en que llegan las ofertas en línea. El modelo permite una mayor intensidad de ofertas al inicio de la subasta y también cuando ésta llega a su fin. Varias

propiedades del modelo son investigadas y validadas con datos de las subastas de eBay.com para asistentes personales Palm M515, juegos de Microsoft Xbox y relojes Cartier.

- **"Statistical Challenges in the Analysis of Cosmic Microwave Background Radiation" (*AAS*, 2009: 61-95).** El fondo cósmico de microondas (CMB, por sus siglas en inglés) es una fuente importante de información sobre la historia temprana del universo. Su nivel de radiación es uniforme y para medir las fluctuaciones se han desarrollado instrumentos extremadamente delicados. Los autores proporcionan una revisión de las cuestiones estadísticas del CMB con el análisis de datos, también proporcionan muchos ejemplos de aplicación de procedimientos estadísticos a los datos obtenidos de una reciente misión del satélite de la NASA, la *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*.

La información estadística aparece con mayor frecuencia en los medios populares y en ocasiones el centro de atención son los estadísticos. Por ejemplo, el **23 de noviembre de 2009**, el ***New York Times*** reportó en el artículo "Behind Cancer Guidelines, Quest for Data" que la nueva ciencia para la investigación del cáncer y los métodos más sofisticados para el análisis de datos realizados por los servicios preventivos de los Estados Unidos impulsaron un grupo de trabajo para reexaminar las directrices respecto a la frecuencia con que las mujeres de mediana edad en adelante deben someterse a una mamografía. El panel formó seis grupos independientes para hacer modelos estadísticos. El resultado fue un nuevo conjunto de conclusiones, incluida la afirmación de que las mamografías cada dos años son tan beneficiosas para las pacientes como las mamografías anuales, pero otorga la mitad del riesgo de sufrir daños. Se cita a Donald Berry, un prominente bioestadístico, quien dice estar gratamente sorprendido de que el grupo de trabajo tomara en serio la nueva investigación para formular sus recomendaciones. El informe del grupo de trabajo ha generado mucha controversia entre organizaciones del cáncer, políticos y las propias mujeres.

Esperamos que usted cada vez se convenza más de la importancia y la pertinencia de la disciplina de la estadística, y que profundice en el libro y en el tema. Esperamos también motivarlo lo suficiente para que continúe con su aprendizaje de la estadística más allá de este curso.

Estudios enumerativos contra analíticos

W. E. Deming, influyente estadístico estadounidense y un fuerte propulsor de la revolución de calidad de Japón durante las décadas de 1950 y 1960, introdujo la distinción entre *estudios enumerativos* y *estudios analíticos*. En los primeros el interés se enfoca en un conjunto finito, identificable y no cambiante de individuos u objetos que conforman una población. Un *marco de muestreo*, es decir, una lista de los individuos u objetos que tienen que ser muestreados, se halla disponible para el investigador o puede ser construido. Por ejemplo, el marco se podría componer de todas las firmas incluidas en una petición para calificar cierta iniciativa respecto a las boletas de una próxima votación electoral; por lo general se elige una muestra para indagar si el número de firmas *válidas* sobrepasa un valor especificado. En otro ejemplo el marco puede contener números de serie de todos los hornos fabricados por una compañía particular durante cierto lapso de tiempo; se puede seleccionar una muestra para inferir algo sobre la duración promedio de estas unidades. El uso de los métodos inferenciales que se presentan en este libro es razonablemente no controversial en tales escenarios (aun cuando los estadísticos continúan debatiendo sobre cuáles métodos en particular deben utilizarse).

Un estudio analítico se define como aquel que no es de naturaleza enumerativa. Este tipo de estudios a menudo se realizan con el objetivo de mejorar un producto al actuar sobre un proceso de cierta clase (p. ej., recalibrar el equipo o ajustar el nivel de alguna sustancia como puede ser la cantidad de un catalizador). A menudo se obtienen datos sólo sobre un proceso existente, uno que puede diferir en aspectos importantes del proceso futuro. No existe, por tanto, un marco de muestreo que enliste los individuos o los objetos de interés. Por ejemplo, una muestra de cinco turbinas con un nuevo diseño puede ser fabricada y

probada para investigar su eficiencia. Estas cinco turbinas podrían ser consideradas como una muestra de la población conceptual de todos los prototipos que podrían ser fabricados experimentalmente en condiciones similares, pero *no* necesariamente representativas de la población de las unidades fabricadas una vez que la producción futura esté en proceso. Los métodos para utilizar la información sobre las muestras para sacar conclusiones sobre las unidades de producción futuras pueden ser problemáticos. Se debe acudir con alguien que tenga los conocimientos necesarios en el área de diseño e ingeniería de turbinas (o de cualquier otra área pertinente) para que juzgue si tal extrapolación es sensible. Una buena exposición de estos temas se encuentra en el artículo **"Assumptions for Statistical Inference", de Gerald Hahn y William Meeker (*The American Statistician*, 1993: 1-11)**.

Recopilación de datos

La estadística se ocupa no sólo de la organización y el análisis de datos una vez que han sido recopilados, sino también del desarrollo de las técnicas de recopilación de datos. Si éstos no son apropiadamente reunidos, el investigador será incapaz de responder las preguntas que se tengan consideradas con un razonable grado de confianza. Un problema común es que la población objetivo, aquella sobre la cual se van a sacar conclusiones, puede ser diferente de la población realmente muestreada. Por ejemplo, a los publicistas les gustaría contar con varias clases de información sobre los hábitos de sus clientes potenciales para ver televisión. La información más sistemática de esta clase se obtuvo tras colocar dispositivos de monitoreo en un pequeño número de casas a través de los Estados Unidos. Se ha conjeturado que la colocación de semejantes dispositivos por sí misma modifica el comportamiento del televidente, de modo que las características de la muestra pueden ser diferentes de aquellas de la población objetivo.

Cuando la recopilación de datos implica seleccionar individuos u objetos de un marco, el método más simple para garantizar una selección representativa es tomar una *muestra aleatoria simple*. Esta es una para la cual cualquier subconjunto particular del tamaño especificado (p. ej., una muestra de tamaño 100) tiene la misma oportunidad de ser seleccionada. Por ejemplo, si el marco se compone de 1 000 000 de números en serie, los números 1, 2, …, hasta 1 000 000 podrían ser anotados en hojitas de papel idénticas. Después de reunir los papelitos en una caja y revolverlos perfectamente se sacan uno por uno hasta obtener el tamaño de muestra requerido. De manera alternativa (y preferible), se podría utilizar una tabla de números aleatorios o algún software generador de números aleatorios.

En ocasiones se pueden utilizar otros métodos de muestreo para facilitar el proceso de selección, a fin de obtener información extra o para incrementar el grado de confianza en las conclusiones. Un método como el *muestreo estratificado* implica separar las unidades de la población en grupos que no se traslapen y tomar una muestra de cada uno. Por ejemplo, un fabricante de reproductores de DVD desea información sobre la satisfacción del cliente respecto a las unidades producidas durante el año previo. Si se fabricaran y se vendieran tres modelos diferentes, se seleccionaría una muestra distinta de cada uno de los estratos correspondientes. Esto daría información sobre los tres modelos y garantizaría que ningún modelo estuviera sobrerrepresentado o subrrepresentado en toda la muestra.

Con frecuencia se obtiene una muestra de "conveniencia" seleccionando individuos u objetos sin aleatorización sistemática. Por ejemplo, un conjunto de ladrillos puede ser apilado de tal modo que sea extremadamente difícil seleccionar aquellos que se encuentran en el centro. Si los ladrillos colocados en la parte superior y a los lados de la pila fueran de algún modo diferentes de los demás, los datos muestrales resultantes no representarían la población. A menudo un investigador supondrá que tal muestra de conveniencia representa en forma aproximada una muestra aleatoria, en cuyo caso se utiliza el repertorio de métodos inferenciales de un estadístico; sin embargo, esta es una cuestión de criterio. La mayoría de los métodos aquí analizados se basa en una variación del muestreo aleatorio simple, descrito en el capítulo 5.

Los ingenieros y científicos a menudo reúnen datos realizando alguna clase de experimento. Esto implica decidir cómo asignar varios tratamientos diferentes (tales como fertilizantes o recubrimientos anticorrosivos) a las varias unidades experimentales (parcelas

o tramos de tubería). Por otra parte, un investigador puede variar sistemáticamente los niveles o categorías de ciertos factores (p. ej., presión o tipo de material aislante) y observar el efecto en alguna variable de respuesta (tal como rendimiento de un proceso de producción).

EJEMPLO 1.4 Un artículo en el *New York Times* (27 de enero de 1987) reporta que el riesgo de sufrir un ataque cardiaco puede disminuirse tomando aspirinas. Esta conclusión se basa en un experimento diseñado que incluía un grupo de control de individuos que consumieron un placebo con apariencia de aspirina pero del que se sabía que era inerte, y un grupo de tratamiento que consumió aspirina de acuerdo con un régimen específico. Los sujetos fueron asignados a cada grupo al azar para protegerlos contra cualquier prejuicio, de modo que se pudieran utilizar métodos basados en la probabilidad para analizar los datos. De los 11 034 individuos del grupo de control, 189 experimentaron subsecuentemente ataques cardiacos, mientras que sólo 104 de los 11 037 en el grupo de aspirina sufrieron un ataque cardiaco. La tasa de incidencia de ataques cardiacos en el grupo de tratamiento fue de casi sólo la mitad de aquella en el grupo de control. Una posible explicación de este resultado es la variación de la probabilidad de que la aspirina en realidad no tiene el efecto deseado y la diferencia observada es sólo una variación típica, del mismo modo que lanzar dos monedas idénticas por lo general producirá diferente número de veces que caiga cara. No obstante, en este caso, los métodos inferenciales sugieren que la variación de la probabilidad por sí misma no puede explicar en forma adecuada la magnitud de la diferencia observada. ■

EJEMPLO 1.5 Un ingeniero desea investigar los efectos tanto del tipo de adhesivo como del material conductor en la fuerza adhesiva cuando se monta un circuito integrado (CI) sobre cierto sustrato. Se consideraron dos tipos de adhesivo y dos materiales conductores. Se realizaron dos observaciones por cada combinación de tipo de adhesivo/material conductor y se obtuvieron los datos siguientes.

Tipo de adhesivo	Material conductor	Fuerza adhesiva observada	Promedio
1	1	82, 77	79.5
1	2	75, 87	81.0
2	1	84, 80	82.0
2	2	78, 90	84.0

En la figura 1.3 se ilustran las fuerzas adhesivas promedio resultantes. El adhesivo tipo 2 mejora la fuerza adhesiva en comparación con el tipo 1 en aproximadamente la misma cantidad siempre que se utiliza uno de los materiales conductores, con la combinación 2, 2 como la mejor. De nuevo se pueden utilizar métodos inferenciales para juzgar si estos efectos son reales o si simplemente se deben a la variación de la probabilidad.

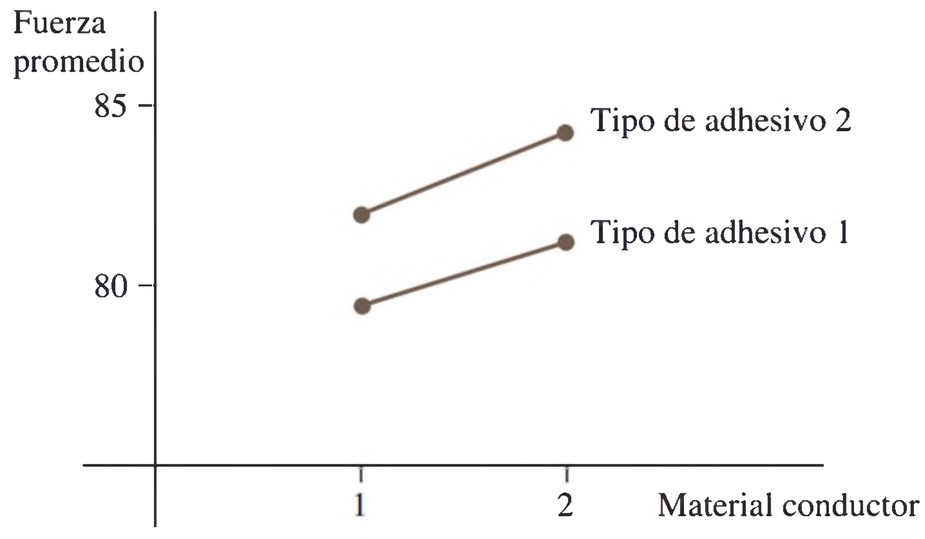


Figura 1.3 Fuerzas adhesivas promedio en el ejemplo 1.5

Suponga además que se consideran dos tiempos de secado y también dos tipos de posrecubrimientos de los circuitos integrados. Existen entonces $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ combinaciones

de estos cuatro factores y es posible que el ingeniero no disponga de suficientes recursos para hacer incluso una observación sencilla para cada una de estas combinaciones. En el capítulo 11 se verá cómo la cuidadosa selección de una fracción de estas posibilidades usualmente permitirá obtener la información deseada. ■

EJERCICIOS **Sección 1.1 (1–9)**

1. Dé una posible muestra de tamaño 4 de cada una de las siguientes poblaciones.
- **a.** Todos los periódicos publicados en los Estados Unidos.
- **b.** Todas las compañías listadas en la Bolsa de Valores de Nueva York.
- **c.** Todos los estudiantes en su colegio o universidad.
- **d.** Todas las calificaciones promedio de los estudiantes en su colegio o universidad.

2. Para cada una de las siguientes poblaciones hipotéticas, dé una muestra posible de tamaño 4:
- **a.** Todas las distancias que podrían resultar cuando usted lanza un balón de futbol americano.
- **b.** Las longitudes de las páginas de los libros publicados de aquí a 5 años.
- **c.** Todas las posibles mediciones de intensidad de los terremotos (escala de Richter) que pudieran registrarse en California durante el siguiente año.
- **d.** Todos los posibles rendimientos (en gramos) de una cierta reacción química realizada en un laboratorio.

3. Considere la población compuesta por todas las computadoras de una cierta marca y modelo y enfóquese en si una de ellas necesita servicio mientras se encuentra dentro del periodo de garantía.
- **a.** Plantee varias preguntas de probabilidad con base en la selección de 100 de estas computadoras.
- **b.** ¿Qué pregunta de estadística inferencial podría ser respondida determinando el número de dichas computadoras en una muestra de tamaño 100 que requieren servicio de garantía?

4. **a.** Dé tres ejemplos diferentes de poblaciones concretas y tres ejemplos distintos de poblaciones hipotéticas.
- **b.** Por cada una de sus poblaciones concretas e hipotéticas dé un ejemplo de una pregunta de probabilidad y un ejemplo de pregunta de estadística inferencial.

5. Muchas universidades y colegios han instituido programas de instrucción suplementaria (IS) en los cuales un facilitador regularmente se reúne con un pequeño grupo de estudiantes inscritos en el curso para promover discusiones sobre el material incluido en el curso y mejorar el dominio de la materia. Suponga que los estudiantes inscritos en un largo curso de estadística (¿de qué más?) se dividen al azar en un grupo de control que no participará en la instrucción suplementaria y en un grupo de tratamiento que sí participará. Al final del curso se determina la calificación total de cada estudiante en el curso.
- **a.** ¿Son las calificaciones del grupo IS muestra de una población existente? De ser así, ¿de cuál se trata? De no ser así, ¿cuál es la población conceptual pertinente?
- **b.** ¿Cuál piensa que es la ventaja de dividir al azar a los estudiantes en los dos grupos en lugar de permitir que cada estudiante elija el grupo al que desea unirse?
- **c.** ¿Por qué los investigadores no pusieron a todos los estudiantes en el grupo de tratamiento? [*Nota*: El artículo **"Supplemental Instruction: An Effective Component of Student Affairs Programming" (*J. of College Student Devel.*, 1997: 577-586)** aborda el análisis de datos de varios programas de instrucción suplementaria.]

6. El sistema de la Universidad Estatal de California (CSU, por sus siglas en inglés) consta de 23 campus universitarios, desde la Estatal de San Diego en el sur hasta la Estatal Humboldt cerca de la frontera con Oregon. Un administrador de la CSU desea hacer una inferencia sobre la distancia promedio entre la ciudad natal de los estudiantes y sus campus universitarios. Describa y discuta varios diferentes métodos de muestreo que pudieran ser empleados. ¿Sería éste un estudio enumerativo o un estudio analítico? Explique su razonamiento.

7. Cierta ciudad se divide naturalmente en diez distritos. ¿Cómo podría un valuador de bienes raíces seleccionar una muestra de casas unifamiliares que pudiera ser utilizada como base para desarrollar una ecuación y así predecir el valor estimado a partir de características tales como antigüedad, tamaño, número de baños, distancia a la escuela más cercana, etcétera? ¿El estudio es enumerativo o analítico?

8. La cantidad de flujo a través de una válvula solenoide en el sistema de control de emisiones de un automóvil es una característica importante. Se realizó un experimento para estudiar cómo la velocidad de flujo depende de tres factores: la longitud de la armadura, la fuerza del resorte y la profundidad de la bobina. Se eligieron dos niveles diferentes (alto y bajo) de cada factor y se realizó una sola observación del flujo por cada combinación de niveles.
- **a.** ¿Cuántas observaciones conformaron el conjunto de datos resultante?
- **b.** ¿Este estudio es enumerativo o analítico? Explique su razonamiento.

9. En un famoso experimento, realizado en 1882, Michelson y Newcomb obtuvieron 66 observaciones del tiempo que requería la luz para viajar entre dos lugares en Washington, D.C. Algunas de las mediciones (codificadas en cierta manera) fueron, 31, 23, 32, 36, –2, 26, 27 y 31.
- **a.** ¿Por qué no son idénticas estas mediciones?
- **b.** ¿Es este un estudio enumerativo? ¿Por qué sí o por qué no?

1.2 Métodos pictóricos y tabulares en estadística descriptiva

La estadística descriptiva se divide en dos temas generales. En esta sección se considera la representación de un conjunto de datos mediante técnicas visuales. En las secciones 1.3 y 1.4 se desarrollarán algunas medidas numéricas para conjuntos de datos. Es posible que usted ya conozca muchas técnicas visuales; tablas de frecuencia, hojas de contabilidad, histogramas, gráficas de pastel, gráficas de barras, diagramas de puntos y similares. Aquí se seleccionan algunas de estas técnicas que son más útiles y pertinentes para la probabilidad y la estadística inferencial.

Notación

Alguna notación general facilitará la aplicación de métodos y fórmulas a una amplia variedad de problemas prácticos. El número de observaciones en una muestra única, es decir, el *tamaño de la muestra*, a menudo será denotado por n, de modo que $n = 4$ para la muestra de universidades {Stanford, Iowa State, Wyoming, Rochester} y también para la muestra de lecturas de pH {6.3, 6.2, 5.9, 6.5}. Si se consideran dos muestras al mismo tiempo, m y n o n_1 y n_2 se pueden utilizar para denotar los números de observaciones. En un experimento para comparar la eficiencia térmica de dos tipos diferentes de motores diésel se obtienen las siguientes muestras {29.7, 31.6, 30.9} y {28.7, 29.5, 29.4, 30.3} en este caso $m = 3$ y $n = 4$.

Dado un conjunto de datos compuesto de n observaciones de alguna variable x, las observaciones individuales serán denotadas por $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. El subíndice no guarda ninguna relación con la magnitud de una observación particular. Por tanto x_1 en general no será la observación más pequeña del conjunto, ni x_n será la más grande. En muchas aplicaciones x_1 será la primera observación realizada por el experimentador, x_2 la segunda y así sucesivamente. La observación i-ésima del conjunto de datos será denotada por x_i.

Gráficas de tallos y hojas

Considere un conjunto de datos numéricos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ para el cual cada x_i se compone de al menos dos dígitos. Una forma rápida de obtener la representación visual informativa del conjunto de datos es construir una *gráfica de tallos y hojas*.

Pasos para construir una gráfica de tallos y hojas

1. Seleccione uno o más de los primeros dígitos para los valores de tallo. Los segundos dígitos se convierten en hojas.
2. Enumere los posibles valores de tallos en una columna vertical.
3. Anote la hoja para cada observación junto al correspondiente valor de tallo.
4. Indique las unidades para tallos y hojas en algún lugar de la gráfica.

Para un conjunto de datos que se compone de calificaciones de exámenes, cada uno entre 0 y 100, la calificación de 83 tendría un tallo de 8 y una hoja de 3. Si todas las calificaciones del examen están en 90, 80 y 70 (¡el sueño del profesor!), usar los diez dígitos como el tallo daría una gráfica de sólo tres filas. En este caso es deseable estirar la gráfica

repitiendo dos veces el valor de cada tallo, 9H, 9L, 8H, . . . , 7L, una vez para las hojas altas 9, . . . , 5 y otra vez para las hojas bajas 4, . . . , 0. Después de una calificación de 93 tendría un tallo de 9L y una hoja de 3. En general, se recomienda una gráfica basada en tallos entre 5 y 20.

EJEMPLO 1.6 Una queja común entre los estudiantes universitarios es que no duermen lo suficiente. El artículo **"Class Start Times, Sleep, and Academic Performance in College: A Path Analysis" (*Chronobiology Intl.*, 2012: 318-335)** investigó los factores que afectan el tiempo de sueño. La gráfica de tallo y hojas de la figura 1.4 muestra el número promedio de horas de sueño diario durante un periodo de dos semanas para una muestra de 253 estudiantes.

5L	00
5H	6889
6L	0001111123444444
6H	55556778899999
7L	00001111111222222333333344444444
7H	55555555666666666667777778888888899999999999999999
8L	000000000000111111222222222222222233333333334444444444444
8H	555555556666666667777778888888899999999999
9L	000011111111222223334
9H	666678999
10L	00
10H	56

Tallo: dígitos uno
Hoja: dígitos diez

Figura 1.4 Gráfica de tallo y hojas para un tiempo promedio de sueño por día

La primera observación en la fila superior de la gráfica es 5.0, correspondiente a un tallo de 5 y una hoja de 0, y la última observación en la parte inferior de la pantalla es 10.6. Observe que en ausencia de un contexto, sin la identificación del tallo y los dígitos de la hoja en la gráfica, no sabríamos si la observación del tallo 7 y hoja 9 es .79, 7.9 o 79. Las hojas en cada fila se ordenan de menor a mayor; esto se realiza comúnmente mediante paquetes de software pero no es necesario si se ha creado a mano una gráfica.

La gráfica sugiere que un valor típico o representativo del tiempo de sueño se encuentra en la fila 8L del tallo, quizás sea 8.1 u 8.2. Las observaciones no aparecen muy centradas en torno a este valor típico, como sería el caso si todos los estudiantes durmieran entre 7.5 y 9.5 horas en promedio. La gráfica parece subir suavemente a una cresta en la fila 8L y luego declinar suavemente (conjeturamos que la cresta menor en la fila 6L desaparecería si se tuvieran más datos disponibles). La forma general de la gráfica es bastante simétrica, teniendo gran parecido a una curva en forma de campana; no se extiende más en una dirección que en otra. Los dos valores más pequeños y los dos más grandes parecen estar un poco separados del resto de los datos, tal vez ligeramente, pero ciertamente no son extremos "atípicos". Una referencia en el artículo citado sugiere que los individuos en este grupo de edad necesitan alrededor de 8.4 horas de sueño por día. Al parecer, un porcentaje sustancial de los estudiantes en la muestra no duerme lo suficiente. ■

Una gráfica de tallos y hojas aporta información sobre los siguientes aspectos de los datos:

- identificación de un valor típico o representativo
- grado de dispersión en torno al valor típico
- presencia de brechas en los datos

- grado de simetría en la distribución de los valores
- número y localización de crestas
- presencia de cualquier *valor atípico* de la gráfica

EJEMPLO 1.7 La figura 1.5 presenta gráficas de tallos y hojas de una muestra aleatoria de longitudes de campos de golf (yardas) designados por ***Golf Magazine*** como los de mayor desafío en los Estados Unidos. Entre la muestra de 40 campos, el más corto es de 6 433 yardas de largo y el más largo es de 7 280. Las longitudes parecen estar distribuidas de una manera más o menos uniforme dentro del rango de valores presentes en la muestra. Obsérvese que la selección de tallo, en este caso de un solo dígito (6 o 7) o de tres (643,…, 728), produciría una gráfica no informativa, primero porque son pocos tallos y segundo porque son demasiados.

64	35	64	33	70	Tallo: Dígitos de millares y centenas		
65	26	27	06	83	Hojas: Dígitos de decenas y unidades		
66	05	94	14				
67	90	70	00	98	70	45	13
68	90	70	73	50			
69	00	27	36	04			
70	51	05	11	40	50	22	
71	31	69	68	05	13	65	
72	80	09					

(a)

```
Stem-and-leaf of yardage  N = 40
Leaf Unit = 10

    4          64   3367
    8          65   0228
   11          66   019
   18          67   0147799
  (4)          68   5779
   18          69   0023
   14          70   012455
    8          71   013666
    2          72   08
```

(b)

Figura 1.5 Gráficas de tallos y hojas de la longitud de los campos de golf: (a) hojas de dos dígitos; (b) gráfica Minitab de hojas con truncamiento a un dígito

Los programas computacionales de estadística en general no producen gráficas con tallos de dígitos múltiples. La gráfica Minitab que aparece en la figura 1.5(b) es resultado de *truncar* cada observación al borrar los dígitos uno. ■

Gráficas de puntos

Una gráfica de puntos es un atractivo resumen de datos numéricos cuando el conjunto de datos es razonablemente pequeño o cuando existen pocos valores de distintos datos. Cada observación está representada por un punto sobre la ubicación correspondiente en una escala de medición horizontal. Cuando un valor ocurre más de una vez, existe un punto por cada ocurrencia y estos puntos se apilan verticalmente. Como con la gráfica de tallos y hojas, una gráfica de puntos aporta información sobre localización, dispersión, extremos y brechas.

EJEMPLO 1.8 Existe una creciente preocupación en los Estados Unidos debido a que no se gradúan suficientes estudiantes de la universidad. Los Estados Unidos solían ser el número 1 en el mundo en porcentaje de adultos con títulos universitarios, pero recientemente ha descendido al lugar 16. Aquí se presentan datos acerca del porcentaje de personas de entre 25 y 34 años de edad en cada estado que tenían algún tipo de grado de educación superior, a partir de 2010 (se enumeran en orden alfabético, se incluye el Distrito de Columbia):

31.5	32.9	33.0	28.6	37.9	43.3	45.9	37.2	68.8	36.2	35.5
40.5	37.2	45.3	36.1	45.5	42.3	33.3	30.3	37.2	45.5	54.3
37.2	49.8	32.1	39.3	40.3	44.2	28.4	46.0	47.2	28.7	49.6
37.6	50.8	38.0	30.8	37.6	43.9	42.5	35.2	42.2	32.8	32.2
38.5	44.5	44.6	40.9	29.5	41.3	35.4				

La figura 1.6 muestra una gráfica de puntos para los datos. Los puntos correspondientes a algunos valores muy cercanos (por ejemplo, 28.6 y 28.7) se han apilado verticalmente para evitar la aglomeración. Hay claramente una enorme variabilidad de un estado a otro. El valor más alto, para D.C., es obviamente un extremo atípico, y los otros cuatro valores en el extremo superior de los datos son candidatos a valores atípicos leves (MA, MN, Nueva York y ND). También hay un grupo de estados en el extremo inferior, situado principalmente en el sur y el suroeste. El porcentaje global para todo el país es de 39.3%; este no es un promedio simple de los 51 números, sino un promedio ponderado por tamaño de la población.

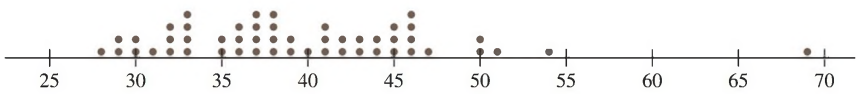


Figura 1.6 Gráfica de puntos para los datos del ejemplo 1.8 ☒

Una gráfica de puntos puede ser bastante enfadosa de construir y se ve muy saturada cuando el número de observaciones es grande. La siguiente técnica es muy adecuada en estas situaciones.

Histogramas

Para determinar el valor de una variable algunos datos numéricos se obtienen contando (el número de citatorios de tráfico que una persona recibió durante el año pasado, el número de personas que solicitan empleo durante un periodo específico), mientras que otros datos se obtienen tomando mediciones (el peso de un individuo, el tiempo de reacción a un estímulo particular). La prescripción para trazar un histograma es, en general, diferente en estos dos casos.

DEFINICIÓN

Una variable numérica es **discreta** si su conjunto de valores posibles es finito o si se puede enumerar en una secuencia infinita (una en la cual exista un primer número, un segundo número y así sucesivamente). Una variable numérica es **continua** si sus valores posibles abarcan un intervalo completo sobre la recta numérica.

Una variable discreta x casi siempre resulta de haber contado, en cuyo caso los posibles valores son 0, 1, 2, 3, …, o algún subconjunto de estos enteros. De la toma de mediciones surgen variables continuas. Por ejemplo, si x es el pH de una sustancia química, en teoría x podría ser cualquier número entre 0 y 14: 7.0, 7.03, 7.032, y así sucesivamente. Desde luego, en la práctica existen limitaciones en el grado de precisión de cualquier instrumento de medición, por lo que es posible que no se puedan determinar el pH, el tiempo de reacción, la altura y la concentración con un número arbitrariamente grande de decimales. Sin embargo, con la perspectiva de crear modelos matemáticos de distribuciones de datos, conviene imaginar todo un conjunto continuo de valores posibles.

Considere los datos compuestos de las observaciones de una variable discreta x. La **frecuencia** de cualquier valor particular x es el número de veces que ocurre un valor en el conjunto de datos. La **frecuencia relativa** de un valor es la fracción o proporción de las veces que ocurre el valor:

$$\text{frecuencia relativa de un valor} = \frac{\text{número de veces que ocurre el valor}}{\text{número de observaciones en el conjunto de datos}}$$

Suponga, por ejemplo, que el conjunto de datos se compone de 200 observaciones de x = el número de cursos que un estudiante está tomando en este semestre. Si 70 de estos valores x son 3, entonces

$$\text{frecuencia del valor } x \text{ 3:} \quad 70$$

$$\text{frecuencia relativa del valor } x \text{ 3:} \quad \frac{70}{200} = .35$$

Si se multiplica una frecuencia relativa por 100 se obtiene un porcentaje; en el ejemplo de los cursos universitarios, 35% de los estudiantes de la muestra están tomando tres cursos. Las frecuencias relativas, o porcentajes, por lo general interesan más que las frecuencias mismas. En teoría, las frecuencias relativas deberán sumar 1, pero en la práctica la suma puede diferir un poco de 1 debido al redondeo. Una **distribución de frecuencia** es una tabla con las frecuencias o las frecuencias relativas, o ambas.

Construcción de un histograma para datos discretos

En primer lugar, se determinan la frecuencia y la frecuencia relativa de cada valor x. Luego se marcan los valores x posibles en una escala horizontal. Sobre cada valor se traza un rectángulo cuya altura es la frecuencia relativa (o alternativamente, la frecuencia) de dicho valor: Los rectángulos deben medir lo mismo de ancho.

Esta construcción garantiza que el *área* de cada rectángulo sea proporcional a la frecuencia relativa del valor. Por tanto, si las frecuencias relativas de $x = 1$ y $x = 5$ son .35 y .07, respectivamente, el área del rectángulo por encima de 1 es cinco veces el área del rectángulo por encima de 5.

EJEMPLO 1.9 ¿Qué tan inusual es un juego de béisbol sin *hit* o de un solo *hit* en las ligas mayores y con qué frecuencia un equipo pega más de 10, 15 o incluso 20 *hits*? La tabla 1.1 es una distribución de frecuencia del número de *hits* por equipo y por cada uno de los juegos de nueve episodios que se jugaron entre 1989 y 1993.

Tabla 1.1 Distribución de frecuencia de hits en juegos de nueve entradas

Hits/juego	Número de juegos	Frecuencia relativa	Hits/juego	Número de juegos	Frecuencia relativa
0	20	.0010	14	569	.0294
1	72	.0037	15	393	.0203
2	209	.0108	16	253	.0131
3	527	.0272	17	171	.0088
4	1048	.0541	18	97	.0050
5	1457	.0752	19	53	.0027
6	1988	.1026	20	31	.0016
7	2256	.1164	21	19	.0010
8	2403	.1240	22	13	.0007
9	2256	.1164	23	5	.0003
10	1967	.1015	24	1	.0001
11	1509	.0779	25	0	.0000
12	1230	.0635	26	1	.0001
13	834	.0430	27	1	.0001
				19 383	1.0005

El histograma correspondiente en la figura 1.7 se eleva suavemente hasta una sola cresta y luego declina. El histograma se extiende un poco más hacia la derecha (hacia valores mayores) que hacia la izquierda, un ligero "asimétrico positivo".

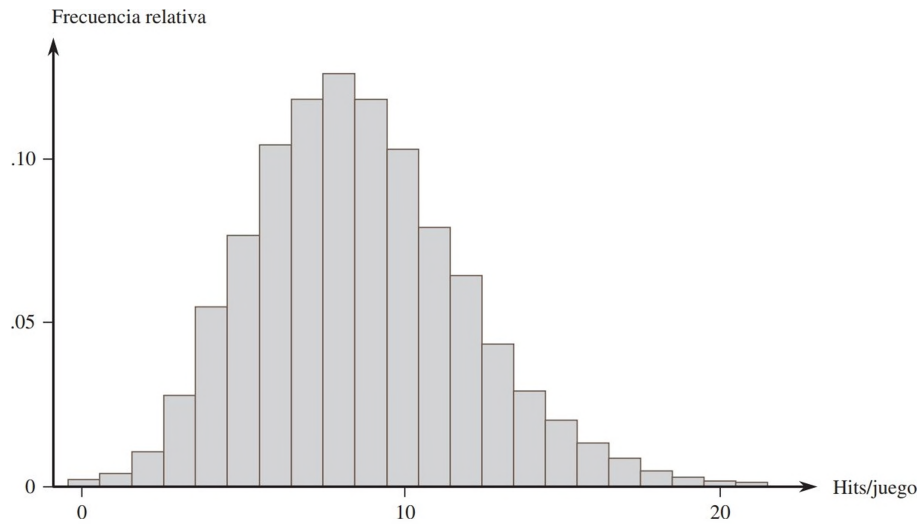


Figura 1.7 Histograma del número de hits por juego de nueve entradas

Con la información tabulada o con el histograma mismo se puede determinar lo siguiente:

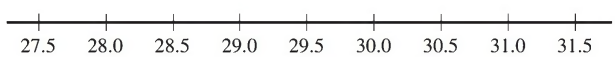
$$\begin{aligned}\text{proporción de juegos de dos hits a lo sumo} &= \begin{matrix}\text{frecuencia}\\ \text{relativa}\\ \text{para } x = 0\end{matrix} + \begin{matrix}\text{frecuencia}\\ \text{relativa}\\ \text{para } x = 1\end{matrix} + \begin{matrix}\text{frecuencia}\\ \text{relativa}\\ \text{para } x = 2\end{matrix}\\ &= .0010 + .0037 + .0108 = .0155\end{aligned}$$

De manera similar,

$$\begin{aligned}\text{proporción de juegos con entre 5 y 10 hits (inclusive)} &= .0752 + .1026 + \cdots + .1015 = .6361\end{aligned}$$

Esto es, aproximadamente 64% de todos los juegos fueron de entre 5 y 10 *hits* (inclusive). ■

La construcción de un histograma para datos continuos (mediciones) implica subdividir el eje de medición entre un número adecuado de **intervalos de clase** o **clases**, de tal suerte que cada observación quede contenida exactamente en una clase. Suponga, por ejemplo, que se hacen 50 observaciones de x = eficiencia de consumo de combustible de un automóvil (mpg), la menor de las cuales es 27.8 y la mayor 31.4. Se podrían utilizar los límites de clase 27.5, 28.0, 28.5, … y 31.55 como se muestra a continuación:



Una dificultad potencial es que de vez en cuando una observación está en un límite de clase, por consiguiente, no cae exactamente en un intervalo, por ejemplo, 29.0. Una forma de tratar este problema es utilizar límites como 27.55, 28.05,…, 31.55. La adición de centésimas a los límites de clase evita que las observaciones queden en los límites resultantes. Otro método es utilizar las clases 27.5 – <28.0, 28.0 – <28.5,…, 31.0 – <31.5. En ese caso 29.0 queda en la clase 29.0 – <29.5 y no en la clase 28.5 – <29.0. En otras palabras, con esta convención una observación que queda en el límite se coloca en el intervalo a la *derecha* del mismo. Así es como Minitab construye un histograma.

Construcción de un histograma para datos continuos: clases con ancho igual

Se determinan la frecuencia y la frecuencia relativa de cada clase. Se marcan los límites de clase sobre un eje de medición horizontal. Sobre cada intervalo de clase se traza un rectángulo cuya altura es la frecuencia relativa correspondiente (o frecuencia).

EJEMPLO 1.10 Las compañías generadoras de electricidad requieren información sobre el consumo de los clientes para obtener pronósticos precisos de la demanda. Investigadores de Wisconsin Power and Light determinaron el consumo de energía (en BTU) durante un periodo particular con una muestra de 90 hogares que utilizan gas. Se calculó un valor de consumo ajustado como sigue:

$$\text{consumo ajustado} = \frac{\text{consumo}}{\text{(clima, en grados-días) (área de la casa)}}$$

Esto dio como resultado los siguientes datos (una parte del conjunto de datos guardados FURNACE.MTW está disponible en Minitab), los cuales se ordenaron desde el valor más pequeño al más grande.

2.97	4.00	5.20	5.56	5.94	5.98	6.35	6.62	6.72	6.78
6.80	6.85	6.94	7.15	7.16	7.23	7.29	7.62	7.62	7.69
7.73	7.87	7.93	8.00	8.26	8.29	8.37	8.47	8.54	8.58
8.61	8.67	8.69	8.81	9.07	9.27	9.37	9.43	9.52	9.58
9.60	9.76	9.82	9.83	9.83	9.84	9.96	10.04	10.21	10.28
10.28	10.30	10.35	10.36	10.40	10.49	10.50	10.64	10.95	11.09
11.12	11.21	11.29	11.43	11.62	11.70	11.70	12.16	12.19	12.28
12.31	12.62	12.69	12.71	12.91	12.92	13.11	13.38	13.42	13.43
13.47	13.60	13.96	14.24	14.35	15.12	15.24	16.06	16.90	18.26

En la figura 1.8 la característica del histograma que más llama la atención es su parecido a una curva en forma de campana, con el punto de simetría aproximadamente en 10.

Clase	1–<3	3–<5	5–<7	7–<9	9–<11	11–<13	13–<15	15–<17	17–<19
Frecuencia	1	1	11	21	25	17	9	4	1
Frecuencia relativa	.011	.011	.122	.233	.278	.189	.100	.044	.011

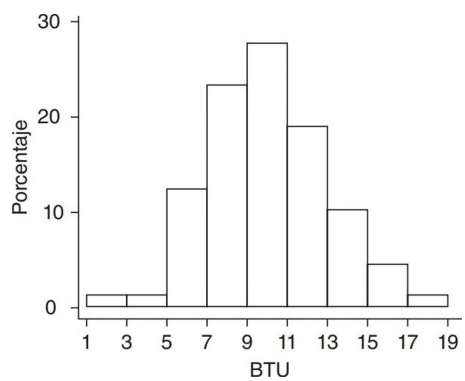


Figura 1.8 Histograma de los datos de consumo de energía del ejemplo 1.10

De acuerdo con el histograma,

$$\begin{matrix}\text{proporción de}\\ \text{observaciones}\\ \text{menores que 9}\end{matrix} \approx .01 + .01 + .12 + .23 = .37 \text{ (valor exacto} = \frac{34}{90} = .378)$$

La frecuencia relativa para la clase 9–<11 es aproximadamente .27, entonces se estima que aproximadamente la mitad de esta, o .135, queda entre 9 y 10. Por tanto,

$$\begin{matrix}\text{proporción de observaciones}\\ \text{menores que 10}\end{matrix} \approx .37 + .135 = .505 \text{ (poco más de 50\%)}$$

El valor exacto de esta proporción es 47/90 = .522. ■

No existen reglas inviolables en cuanto al número de clases o a la selección de las mismas. Entre 5 y 20 será satisfactorio para la mayoría de los conjuntos de datos. En general, mientras más grande es el número de observaciones en un conjunto de datos, más clases deberán utilizarse. Una regla empírica razonable es

$$\text{número de clases} \approx \sqrt{\text{número de observaciones}}$$

Es posible que las clases con ancho igual no sean una opción sensible si hay regiones en la escala de medición con una alta concentración de valores y otras donde los datos son muy escasos. La figura 1.9 muestra una gráfica de puntos de dicho conjunto de datos; hay una alta concentración en el medio y relativamente pocas observaciones que se extienden a ambos lados. Con un pequeño número de clases con ancho igual, casi todas las observaciones quedan exactamente en una o dos de las clases. Si se utiliza un número grande de clases con ancho igual, las frecuencias de muchas clases serán cero. Una buena opción es utilizar intervalos más anchos cerca de las observaciones extremas e intervalos más angostos en la región de alta concentración.

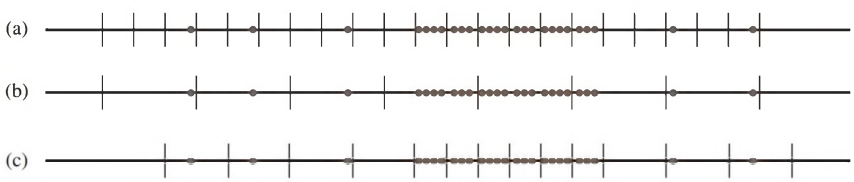


Figura 1.9 Selección de intervalos de clase para datos de "densidad variable": (a) intervalos de ancho igual muy cortos; (b) algunos intervalos de ancho igual; (c) intervalos de ancho desigual

Construcción de un histograma para datos continuos: clases con ancho desigual

Después de determinar las frecuencias y las frecuencias relativas, se calcula la altura de cada rectángulo mediante la fórmula

$$\text{altura del rectángulo} = \frac{\text{frecuencia relativa de la clase}}{\text{ancho de clase}}$$

Las alturas del rectángulo resultante se conocen usualmente como *densidades* y la escala vertical es la **escala de densidades**. Esta prescripción también funcionará cuando las clases tengan anchos iguales.

EJEMPLO 1.11 La corrosión del acero de refuerzo es un serio problema en las estructuras de concreto en ambientes afectados por condiciones climáticas severas. Por ello los investigadores han analizado el uso de barras de refuerzo fabricadas de un material compuesto. Se realizó un estudio para desarrollar directrices para adherir barras de refuerzo reforzadas con fibra de vidrio al concreto (**"Design Recommendations for Bond of GFRP Rebars to Concrete", *J. of Structural Engr.*, 1996: 247-254**). Considere las siguientes 48 observaciones de mediciones de fuerza adhesiva:

11.5	12.1	9.9	9.3	7.8	6.2	6.6	7.0	13.4	17.1	9.3	5.6
5.7	5.4	5.2	5.1	4.9	10.7	15.2	8.5	4.2	4.0	3.9	3.8
3.6	3.4	20.6	25.5	13.8	12.6	13.1	8.9	8.2	10.7	14.2	7.6
5.2	5.5	5.1	5.0	5.2	4.8	4.1	3.8	3.7	3.6	3.6	3.6

Clase	2 – < 4	4 – < 6	6 – < 8	8 – < 12	12 – < 20	20 – < 30
Frecuencia	9	15	5	9	8	2
Frecuencia relativa	.1875	.3125	.1042	.1875	.1667	.0417
Densidad	.094	.156	.052	.047	.021	.004

El histograma resultante se muestra en la figura 1.10. La cola derecha o superior se alarga mucho más que la izquierda o inferior, un sustancial alejamiento de la simetría.

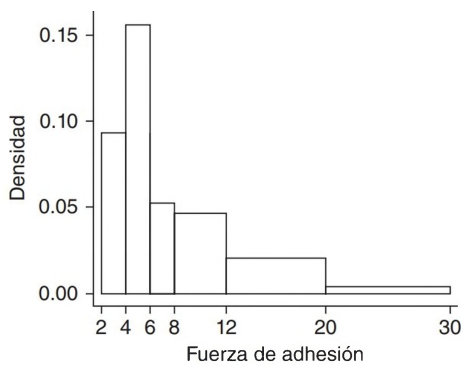


Figura 1.10 Histograma Minitab de densidad para la fuerza de adhesión del ejemplo 1.11 ■

Cuando las clases tienen anchos desiguales, sin utilizar una escala de densidades se obtendrá una gráfica con áreas distorsionadas. Para clases con anchos iguales el divisor es el mismo en cada cálculo de densidad y la aritmética adicional simplemente implica cambiar la escala en el eje vertical (es decir, el histograma que utiliza frecuencia relativa y el que utiliza densidad tendrán exactamente la misma apariencia). Un histograma de densidad tiene una propiedad interesante. Si se multiplican ambos miembros de la fórmula para la densidad por el ancho de clase, se obtiene

$$\begin{matrix}\text{frecuencia} \\ \text{relativa}\end{matrix} = \begin{matrix}\text{(ancho de clase)} \\ \text{(densidad)}\end{matrix} = \begin{matrix}\text{(ancho del rectángulo)} \\ \text{(altura del rectángulo)}\end{matrix} = \begin{matrix}\text{área del} \\ \text{rectángulo}\end{matrix}$$

Es decir, *el área de cada rectángulo es la frecuencia relativa de la clase correspondiente*. Además, puesto que la suma de frecuencias relativas debe ser 1, *el área total de todos los rectángulos en un histograma de densidad es* 1. Siempre es posible trazar un

histograma de modo que el área sea igual a la frecuencia relativa (esto es cierto también para un histograma de datos discretos); simplemente se utiliza la escala de densidad. Esta propiedad desempeñará un papel importante al crear modelos de distribución en el capítulo 4.

Formas de histograma

Los histogramas se presentan en varias formas. Un histograma **unimodal** es el que se eleva a una sola cresta y luego declina. Uno **bimodal** tiene dos crestas diferentes. Puede ocurrir bimodalidad cuando el conjunto de datos se compone de observaciones de dos clases, bastante diferentes, de individuos u objetos. Por ejemplo, considere un gran conjunto de datos compuesto de los tiempos de manejo de automóviles en el trayecto entre San Luis Obispo, California y Monterey, California (sin contar el tiempo que se utilice para visitar lugares de interés, en comer, etc.). Este histograma mostraría dos crestas, una para los autos que toman la ruta interior (aproximadamente 2.5 horas) y otra para los que recorren la costa (3.5-4 horas). La bimodalidad no se presenta automáticamente en dichas situaciones. Sólo si los dos distintos histogramas están "muy alejados" respecto a sus dispersiones, la bimodalidad ocurrirá en el histograma de datos combinados. Por consiguiente, un conjunto de datos grande compuesto de las estaturas de los estudiantes universitarios no producirá un histograma bimodal porque la altura típica de los hombres, que aproximadamente es de 69 pulgadas, no está demasiado por encima de la altura típica de las mujeres, que es aproximadamente de 64-65 pulgadas. Se dice que un histograma con más de dos crestas es **multimodal**. Por supuesto, el número de crestas dependerá de la selección de intervalos de clase, en particular, con un pequeño número de observaciones. Mientras más grande es el número de clases, más probable es que se manifiesten bimodalidad o multimodalidad.

EJEMPLO 1.12 La figura 1.11(a) muestra un histograma Minitab de los pesos (en libras, lb) de los 124 jugadores que figuraban en las listas de los 49's de San Francisco y de los Patriotas de Nueva Inglaterra (equipos que al autor le gustaría ver reunidos en el Súper Tazón) el 20 de noviembre de 2009. La figura 1.11(b) es un histograma suavizado (que en realidad se llama *densidad estimada*) de los datos del paquete de software R. Tanto el histograma como el histograma suavizado muestran tres picos diferentes; el primero a la derecha es para los *linieros*, el del centro corresponde al peso de los *apoyadores* y el pico de la izquierda es para todos los demás jugadores (receptores abiertos, mariscales de campo, etc.).

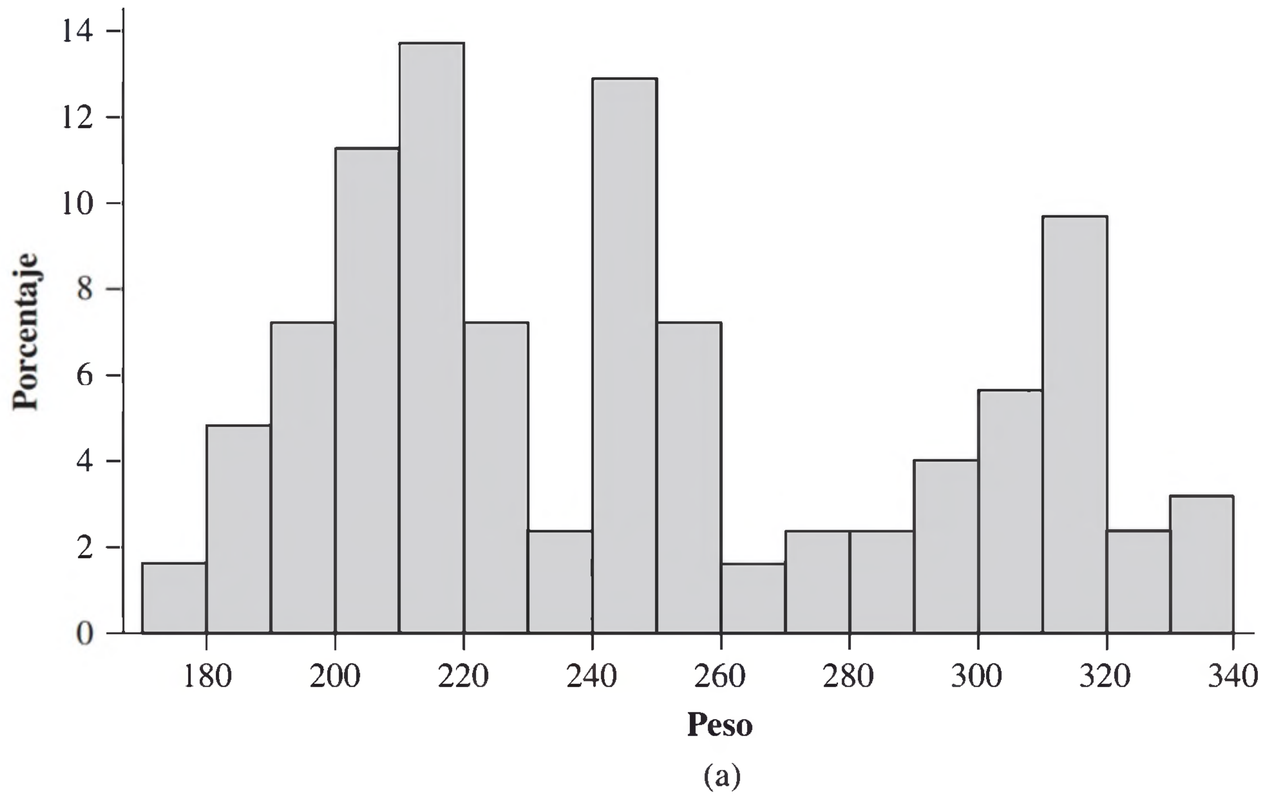
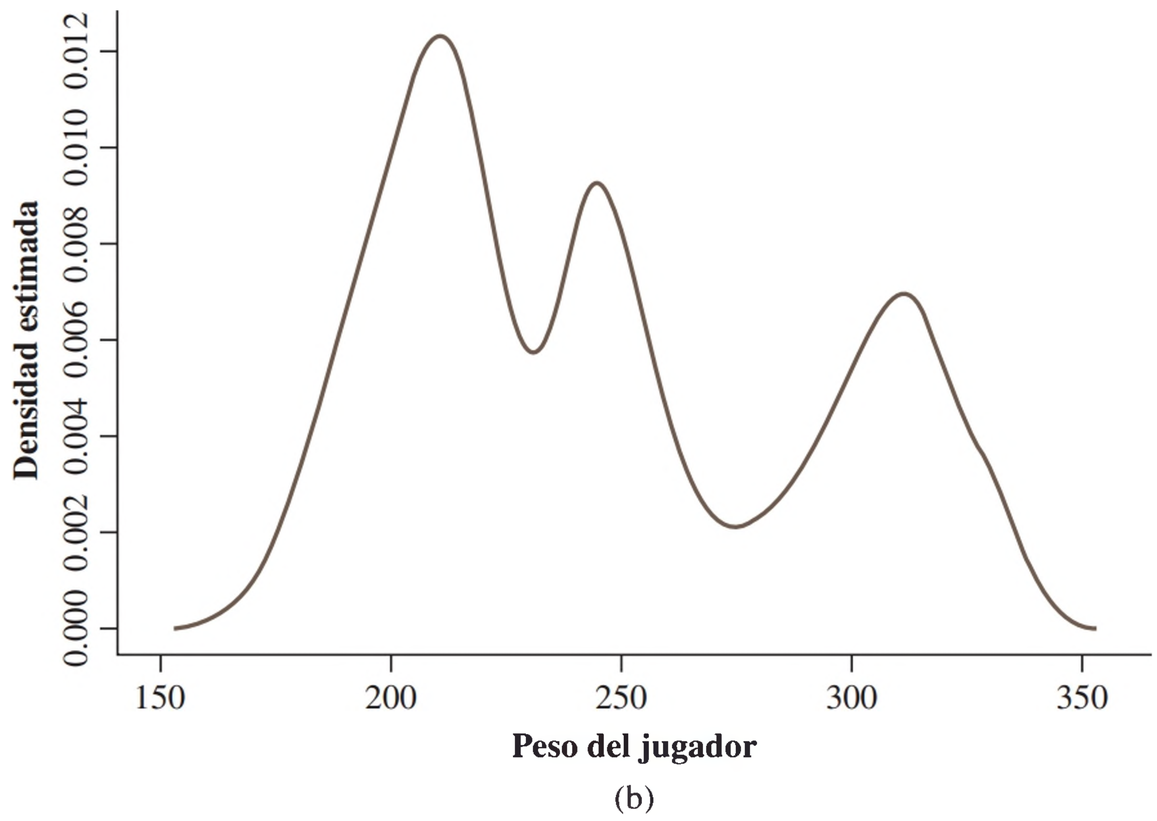


Figura 1.11 Peso de los jugadores de la NFL. (a) histograma y (b) histograma suavizado



(b)

Figura 1.11 (continuación) ■

Un histograma es **simétrico** si la mitad izquierda es una imagen en espejo de la mitad derecha. Un histograma unimodal es **positivamente asimétrico** si la cola derecha o superior se alarga en comparación con la cola izquierda o inferior, y **negativamente asimétrico** si el alargamiento es hacia la izquierda. La figura 1.12 muestra histogramas "suavizados", que se obtuvieron superponiendo una curva suavizada sobre los rectángulos e ilustran las varias posibilidades.

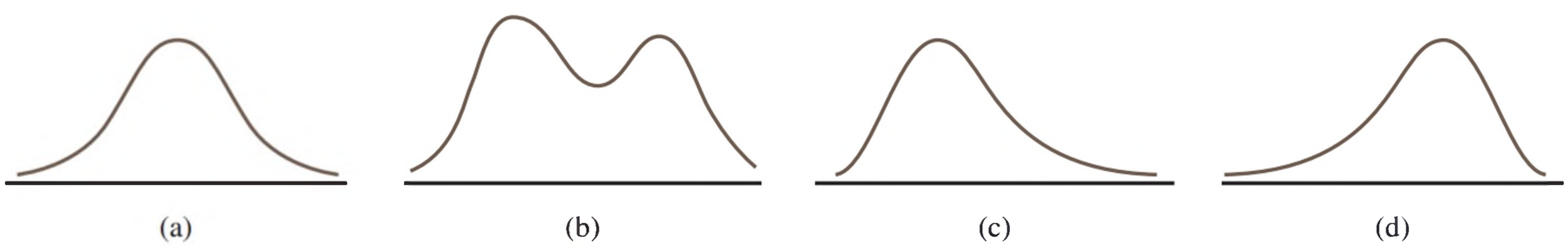


Figura 1.12 Histogramas suavizados: (a) unimodal simétrico; (b) bimodal; (c) positivamente asimétrico y (d) negativamente asimétrico

Datos cualitativos

Tanto una distribución de frecuencia como un histograma pueden ser construidos cuando el conjunto de datos es de naturaleza *cualitativa* (categórico). En algunos casos habrá un ordenamiento natural de las clases, por ejemplo, estudiantes de primer año, de segundo, de tercero, de cuarto y graduados, mientras que en otros casos el orden será arbitrario, por ejemplo, católico, judío, protestante, etcétera. Con estos datos categóricos los intervalos sobre los cuales se construyen los rectángulos deberán ser de ancho igual.

EJEMPLO 1.13 El **Public Policy Institute of California** realizó una encuesta telefónica entre 2501 residentes adultos durante abril de 2006 para indagar lo que pensaban sobre varios aspectos de la educación pública K-12. Una pregunta fue "En general, ¿cómo calificaría la calidad de las escuelas públicas de su vecindario hoy en día?". La tabla 1.2 muestra las frecuencias y las frecuencias relativas, y la figura 1.13 muestra el histograma correspondiente (gráfica de barras).

Tabla 1.2 Distribución de frecuencia para los datos de la calificación de las escuelas

Calificación	Frecuencia	Frecuencia relativa
A	478	.191
B	893	.357
C	680	.272
D	178	.071
F	100	.040
No sabe	172	.069
	2501	1.000

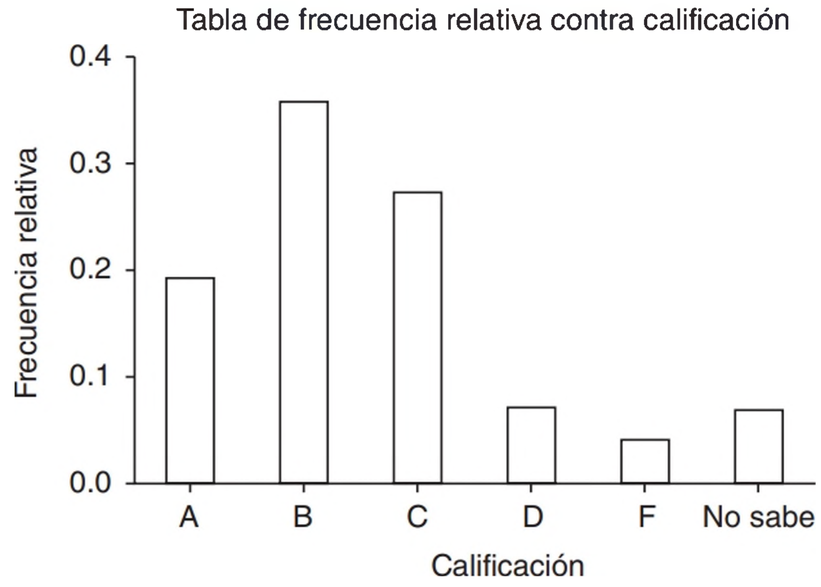


Figura 1.13 Histograma Minitab de los datos de la calificación

Más de la mitad de los encuestados otorgó una calificación A o B y sólo poco más de 10% otorgó una calificación D o F. Los porcentajes de los padres de niños que asisten a escuelas públicas fueron un poco más favorables para las escuelas: 24%, 40%, 24%, 6%, 4% y 2%. ■

Datos multivariantes

En general los datos multivariantes son más difíciles de describir de forma visual. Más adelante se muestran varios métodos para ello, particularmente gráficas de dispersión para datos numéricos bivariantes.

EJERCICIOS Sección 1.2 (10–32)

10. Considere los datos de resistencia de las vigas del ejemplo 1.2.
- **a.** Construya una gráfica de tallos y hojas de los datos. ¿Cuál parece ser el valor de resistencia representativo? ¿Parecen estar las observaciones altamente concentradas en torno al valor representativo, o algo dispersas?
- **b.** ¿Parece la gráfica razonablemente simétrica en torno a un valor representativo, o describiría su forma de otra manera?
- **c.** ¿Habrá algunos valores de resistencia extremos?
- **d.** ¿Qué proporción de las observaciones de resistencia en esta muestra exceden de 10 MPa?

11. En el artículo **"Bolted Connection Design Values Based on European Yield Model" (*J. of Structural Engr.*, 1993: 2169-2186)** se publican los valores de gravedad específica de varios tipos de madera que se utilizan en la construcción:

.31	.35	.36	.36	.37	.38	.40	.40	.40
.41	.41	.42	.42	.42	.42	.42	.43	.44
.45	.46	.46	.47	.48	.48	.48	.51	.54
.54	.55	.58	.62	.66	.66	.67	.68	.75

Construya una gráfica de tallos y hojas con tallos repetidos y comente sobre cualquier característica interesante de la gráfica.

12. Los datos adjuntos de granulometrías (nm) de CeO_2 bajo ciertas condiciones experimentales fueron leídos de una gráfica en el artículo **"Nanoceria—Energetics of Surfaces, Interfaces and Water Adsorption" (*J. of the Amer. Ceramic Soc.*, 2011: 3992-3999):**

3.0–<3.5	3.5–<4.0	4.0–<4.5	4.5–<5.0	5.0–<5.5
5	15	27	34	22
5.5–<6.0	6.0–<6.5	6.5–<7.0	7.0–<7.5	7.5–<8.0
14	7	2	4	1

a. ¿Qué proporción de las observaciones son menores de 5?

b. ¿Qué proporción de las observaciones son al menos 6?

c. Construya un histograma con frecuencia relativa en el eje vertical y comente las características interesantes. En particular, la distribución de tamaños de partícula ¿parece razonablemente simétrica o algo sesgada? [*Nota*: Los investigadores ajustan los datos a una distribución logarítmica-normal; esto se analiza en el capítulo 4.]

d. Construya un histograma con la densidad en el eje vertical y compárelo con el histograma del inciso c).

13. Las propiedades mecánicas permisibles para el diseño estructural de vehículos aeroespaciales metálicos requieren un método aprobado para analizar estadísticamente los datos de prueba empíricos. El artículo **"Establishing Mechanical Property Allowables for Metals" (*J. of Testing and Evaluation*, 1998: 293-299)** utilizó los datos anexos sobre resistencia a la tensión última (kg/pulg^2) como base para abordar las dificultades que se presentan en el desarrollo de dicho método.

122.2	124.2	124.3	125.6	126.3	126.5	126.5	127.2	127.3
127.5	127.9	128.6	128.8	129.0	129.2	129.4	129.6	130.2
130.4	130.8	131.3	131.4	131.4	131.5	131.6	131.6	131.8
131.8	132.3	132.4	132.4	132.5	132.5	132.5	132.5	132.6
132.7	132.9	133.0	133.1	133.1	133.1	133.1	133.2	133.2
133.2	133.3	133.3	133.5	133.5	133.5	133.8	133.9	134.0
134.0	134.0	134.0	134.1	134.2	134.3	134.4	134.4	134.6
134.7	134.7	134.7	134.8	134.8	134.8	134.9	134.9	135.2
135.2	135.2	135.3	135.3	135.4	135.5	135.5	135.6	135.6
135.7	135.8	135.8	135.8	135.8	135.8	135.9	135.9	135.9
135.9	136.0	136.0	136.1	136.2	136.2	136.3	136.4	136.4
136.6	136.8	136.9	136.9	137.0	137.1	137.2	137.6	137.6
137.8	137.8	137.8	137.9	137.9	138.2	138.2	138.3	138.3
138.4	138.4	138.4	138.5	138.5	138.6	138.7	138.7	139.0
139.1	139.5	139.6	139.8	139.8	140.0	140.0	140.7	140.7
140.9	140.9	141.2	141.4	141.5	141.6	142.9	143.4	143.5
143.6	143.8	143.8	143.9	144.1	144.5	144.5	147.7	147.7

a. Construya una gráfica de tallos y hojas de los datos eliminando (truncando) los dígitos de décimos y luego repitiendo cada valor de tallo cinco veces (una vez para las hojas 1 y 2, una segunda vez para las hojas 3 y 4, etc.). ¿Por qué es relativamente fácil identificar un valor de resistencia representativo?

b. Construya un histograma utilizando clases con ancho igual con la primera clase que tiene un límite inferior de 122 y un límite superior de 124. Enseguida comente sobre cualquier característica interesante del histograma.

14. El conjunto de datos adjunto se compone de observaciones del flujo de una regadera (L/min) para una muestra de $n = 129$ casas en Perth, Australia **("An Application of Bayes Methodology to the Analysis of Diary Records in a Water Use Study", *J. Amer. Stat. Assoc.*, 1987: 705-711)**:

4.6	12.3	7.1	7.0	4.0	9.2	6.7	6.9	11.5	5.1
11.2	10.5	14.3	8.0	8.8	6.4	5.1	5.6	9.6	7.5
7.5	6.2	5.8	2.3	3.4	10.4	9.8	6.6	3.7	6.4
8.3	6.5	7.6	9.3	9.2	7.3	5.0	6.3	13.8	6.2
5.4	4.8	7.5	6.0	6.9	10.8	7.5	6.6	5.0	3.3
7.6	3.9	11.9	2.2	15.0	7.2	6.1	15.3	18.9	7.2
5.4	5.5	4.3	9.0	12.7	11.3	7.4	5.0	3.5	8.2
8.4	7.3	10.3	11.9	6.0	5.6	9.5	9.3	10.4	9.7
5.1	6.7	10.2	6.2	8.4	7.0	4.8	5.6	10.5	14.6
10.8	15.5	7.5	6.4	3.4	5.5	6.6	5.9	15.0	9.6
7.8	7.0	6.9	4.1	3.6	11.9	3.7	5.7	6.8	11.3
9.3	9.6	10.4	9.3	6.9	9.8	9.1	10.6	4.5	6.2
8.3	3.2	4.9	5.0	6.0	8.2	6.3	3.8	6.0	

a. Construya una gráfica de tallos y hojas de los datos.

b. ¿Cuál es una velocidad de flujo o gasto típico o representativo?

c. La gráfica ¿parece estar altamente concentrada o dispersa?

d. ¿Es la distribución de valores razonablemente simétrica? Si no, ¿cómo describiría el alejamiento de la simetría?

e. ¿Describiría alguna observación como alejada del resto de los datos (un valor atípico)?

15. Los tiempos de duración de las películas estadounidenses ¿difieren de alguna manera de las del cine francés? El autor investigó esta cuestión seleccionando aleatoriamente 25 películas recientes de cada tipo, lo que resulta en los siguientes tiempos de duración (min):

Am:	94	90	95	93	128	95	125	91	104	116	162	102	90
	110	92	113	116	90	97	103	95	120	109	91	138	
Fr:	123	116	90	158	122	119	125	90	96	94	137	102	
	105	106	95	125	122	103	96	111	81	113	128	93	92

Construya una gráfica de tallos y hojas *comparativa* y haga una lista de tallos a la mitad de la página, y luego ubique las hojas Am a la izquierda y las Fr a la derecha. A continuación comente las características interesantes de la gráfica.

16. El artículo citado en el ejemplo 1.2 también dio las observaciones de resistencia adjuntas para los cilindros:

6.1 5.8 7.8 7.1 7.2 9.2 6.6 8.3 7.0 8.3
7.8 8.1 7.4 8.5 8.9 9.8 9.7 14.1 12.6 11.2

a. Construya una gráfica de tallos y hojas comparativa (véase el ejercicio previo) de los datos de la viga y el cilindro y luego responda las preguntas de los incisos b) al d) del ejercicio 10 para las observaciones de los cilindros.
b. ¿En qué formas son similares los dos lados de la gráfica? ¿Existen diferencias obvias entre las observaciones de la viga y las observaciones del cilindro?
c. Construya una gráfica de puntos de los datos del cilindro.

17. Los datos adjuntos proceden de un estudio de contubernios en las licitaciones dentro de la industria de la construcción (**"Detection of Collusive Behavior"**, ***J. of Construction Engr. and Mgmnt*, 2012: 1251-1258**).

Núm. Concursantes	Núm. Contratos
2	7
3	20
4	26
5	16
6	11
7	9
8	6
9	8
10	3
11	2

a. ¿Qué proporción de contratos implica a lo más a cinco concursantes? ¿Y al menos a cinco concursantes?
b. ¿Qué proporción de contratos implica entre cinco y 10 concursantes, inclusive? ¿Y estrictamente entre cinco y 10 concursantes?
c. Construya un histograma y comente las características interesantes.

18. Cada corporación tiene un consejo de directores. El número de personas en un consejo varía de una empresa a otra. Uno de los autores del artículo **"Does Optimal Corporate Board Size Exist? An Empirical Analysis"** (***J. of Applied Finance*, 2010: 57-69**) proporciona los datos del número de directores en cada consejo, en una muestra aleatoria de 204 corporaciones.

Núm. de directores:	4	5	6	7	8	9
Frecuencia:	3	12	13	25	24	42
Núm. de directores:	10	11	12	13	14	15
Frecuencia:	23	19	16	11	5	4
Núm. de directores:	16	17	21	24	32	
Frecuencia:	1	3	1	1	1	

a. Construya un histograma de los datos con base en frecuencias relativas y comente cualquier característica interesante.
b. Construya una distribución de frecuencia en la cual se incluyan en la última fila todos los consejos con al menos 18 directores. ¿Si esta distribución se muestra en el citado artículo, podría dibujar un histograma? Explique.
c. ¿Qué proporción de estas corporaciones tienen a lo más 10 directores?
d. ¿Qué proporción de estas empresas tiene más de 15 directores?

19. Se determinó el número de partículas contaminantes en una oblea de silicio antes de cierto proceso de enjuague para cada oblea en una muestra de tamaño 100 y se obtuvieron las siguientes frecuencias:

Número de partículas	0	1	2	3	4	5	6	7
Frecuencia	1	2	3	12	11	15	18	10
Número de partículas	8	9	10	11	12	13	14	
Frecuencia	12	4	5	3	1	2	1	

a. ¿Qué proporción de las obleas de la muestra tuvo al menos una partícula? ¿Y al menos cinco partículas?
b. ¿Qué proporción de las obleas de la muestra tuvo entre cinco y diez partículas, inclusive? ¿Y estrictamente entre cinco y diez partículas?
c. Trace un histograma con la frecuencia relativa en el eje vertical. ¿Cómo describiría la forma del histograma?

20. El artículo **"Determination of Most Representative Subdivision"** (***J. of Energy Engr.*, 1993: 43-55**) proporciona datos sobre varias características de subdivisiones que podrían utilizarse para decidir si se suministra energía eléctrica mediante líneas elevadas o por medio de líneas subterráneas. He aquí los valores de la variable x = longitud total de calles dentro de una subdivisión:

1280 5320 4390 2100 1240 3060 4770
1050 360 3330 3380 340 1000 960
1320 530 3350 540 3870 1250 2400
960 1120 2120 450 2250 2320 2400
3150 5700 5220 500 1850 2460 5850
2700 2730 1670 100 5770 3150 1890
510 240 396 1419 2109

a. Construya una gráfica de hojas y tallos con el dígito de los millares como tallo y el dígito de las centenas como las hojas, y comente sobre las diferentes características de la gráfica.
b. Construya un histograma con los límites de clase, 0, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000 y 6000. ¿Qué proporción de subdivisiones tiene una longitud total menor que 2000? ¿Entre 2000 y 4000? ¿Cómo describiría la forma del histograma?

21. El artículo citado en el ejercicio 20 también aporta los siguientes valores de las variables y = número de calles cerradas y z = número de intersecciones:

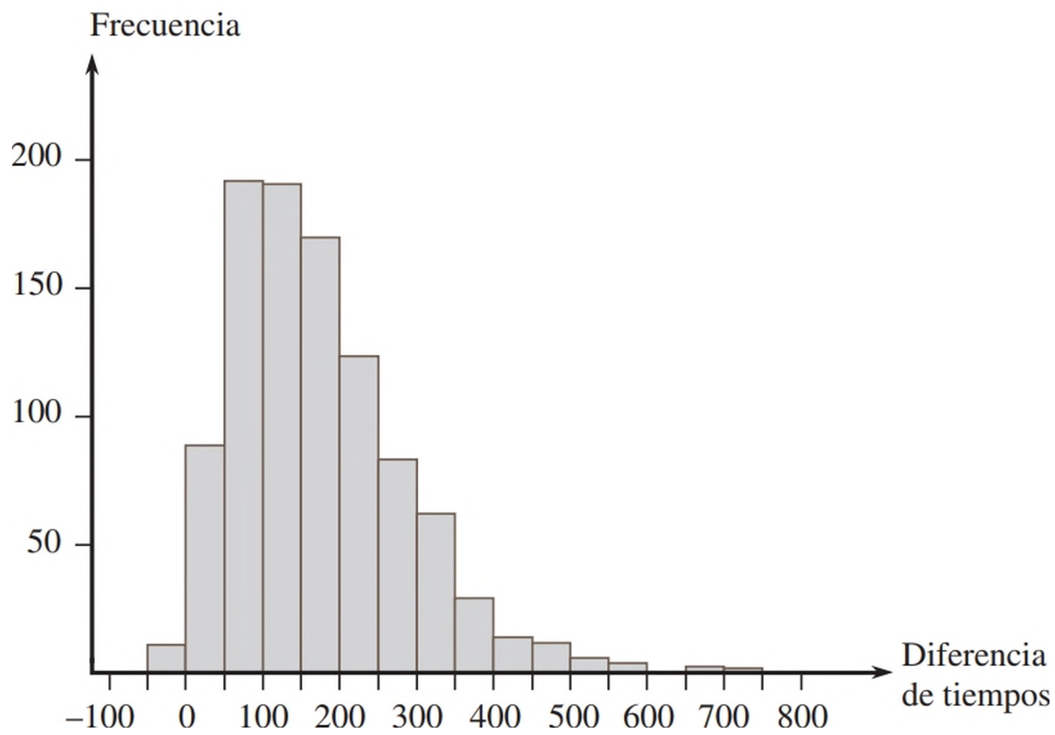
y	1	0	1	0	0	2	0	1	1	1	2	1	0	0	1	1	0	1	1
z	1	8	6	1	1	5	3	0	0	4	4	0	0	1	2	1	4	0	4
y	1	1	0	0	0	1	1	2	0	1	2	2	1	1	0	2	1	1	0
z	0	3	0	1	1	0	1	3	2	4	6	6	0	1	1	8	3	3	5
y	1	5	0	3	0	1	1	0	0										
z	0	5	2	3	1	0	0	0	3										

a. Construya un histograma con los datos y. ¿Qué proporción de estas subdivisiones no tenía calles cerradas? ¿Al menos una calle cerrada?

b. Construya un histograma con los datos z. ¿Qué proporción de estas subdivisiones tenía cuando mucho cinco intersecciones? ¿Y menos de cinco intersecciones?

22. ¿Cómo varía la velocidad de un corredor durante un maratón (una distancia de 42.195 km)? Considere determinar tanto el tiempo de recorrido de los primeros 5 km como el tiempo de recorrido entre los 35 y los 40 km, y luego reste el primer tiempo del segundo. Un valor positivo de esta diferencia corresponde a un corredor que avanza más lento hacia el final de la carrera. El histograma adjunto está basado en los tiempos de corredores que participaron en varios maratones japoneses (**"Factors Affecting Runners' Maraton Performance", *Chance*, otoño de 1993: 24-30**). ¿Cuáles son algunas características interesantes de este histograma? ¿Cuál es un valor de diferencia típico? ¿Aproximadamente qué proporción de los participantes corren la última distancia más rápido que la primera?

Histograma para el ejercicio 22



23. El artículo **"Statistical Modeling of the Time Course of Tantrum Anger" (*Annals of Applied Stats*, 2009: 1013-1034)** analiza cómo la intensidad de la ira en los berrinches de los niños puede estar relacionada con la duración de la rabieta, así como con los indicadores de comportamiento, tales como gritar, arañar y empujar o tirar. Se proporciona siguiente la distribución de frecuencias (y también el histograma correspondiente):

0–<2:	136	2–<4:	92	4–<11:	71
11–<20:	26	20–<30:	7	30–<40:	3

Construya un histograma y comente sobre las características interesantes.

24. El conjunto de datos adjuntos consiste en observaciones de resistencia al esfuerzo cortante (lb) de soldaduras de puntos ultrasónicas aplicadas en un cierto tipo de lámina alclad. Construya un histograma de frecuencia relativa basado en diez clases de ancho igual con límites 4000, 4200, … [El histograma concordará con el que se muestra en **"Comparison of Properties of Joints Prepared by Ultrasonic Welding and Other Means" (*J. of Aircraft*, 1983: 552-556)**. Comente sobre sus características.

5434	4948	4521	4570	4990	5702	5241
5112	5015	4659	4806	4637	5670	4381
4820	5043	4886	4599	5288	5299	4848
5378	5260	5055	5828	5218	4859	4780
5027	5008	4609	4772	5133	5095	4618
4848	5089	5518	5333	5164	5342	5069
4755	4925	5001	4803	4951	5679	5256
5207	5621	4918	5138	4786	4500	5461
5049	4974	4592	4173	5296	4965	5170
4740	5173	4568	5653	5078	4900	4968
5248	5245	4723	5275	5419	5205	4452
5227	5555	5388	5498	4681	5076	4774
4931	4493	5309	5582	4308	4823	4417
5364	5640	5069	5188	5764	5273	5042
5189	4986					

25. Una transformación de valores de datos mediante alguna función matemática, tal como $\sqrt{x}$ o $1/x$ a menudo produce un conjunto de números con "mejores" propiedades estadísticas que los datos originales. En particular, es posible encontrar una función para la cual el histograma de valores transformados es más simétrico (o, incluso, mejor, más como una curva en forma de campana) que los datos originales. Por ejemplo, el artículo **"Time Lapse Cinematographic Analysis of Beryllium-Lung Fibroblast Interactions" (*Environ. Research*, 1983: 34-43)** reportó los resultados de los experimentos diseñados para estudiar el comportamiento de ciertas células individuales que habían estado expuestas a berilio. Una importante característica de dichas células individuales es su tiempo de interdivisión (IDT, por sus siglas en inglés). Se determinaron tiempos de interdivisión de un gran número de células, tanto en condiciones expuestas (tratamiento) como en no expuestas (control).

Los autores del artículo utilizaron una transformación logarítmica, es decir, valor transformado = log(valor original). Considere los siguientes tiempos de interdivisión representativos.

IDT	$\log_{10}$(IDT)	IDT	$\log_{10}$(IDT)	IDT	$\log_{10}$(IDT)
28.1	1.45	60.1	1.78	21.0	1.32
31.2	1.49	23.7	1.37	22.3	1.35
13.7	1.14	18.6	1.27	15.5	1.19
46.0	1.66	21.4	1.33	36.3	1.56
25.8	1.41	26.6	1.42	19.1	1.28
16.8	1.23	26.2	1.42	38.4	1.58
34.8	1.54	32.0	1.51	72.8	1.86
62.3	1.79	43.5	1.64	48.9	1.69
28.0	1.45	17.4	1.24	21.4	1.33
17.9	1.25	38.8	1.59	20.7	1.32
19.5	1.29	30.6	1.49	57.3	1.76
21.1	1.32	55.6	1.75	40.9	1.61
31.9	1.50	25.5	1.41		
28.9	1.46	52.1	1.72		

Use los intervalos de clase 10–<20, 20–<30,... para construir un histograma de los datos originales. Use los intervalos 1.1–<1.2, 1.2–<1.3,... para hacer lo mismo con los datos transformados. ¿Cuál es el efecto de la transformación?

26. En la actualidad se está utilizando la difracción retrodispersada de electrones en el estudio de fenómenos de fractura. La siguiente información sobre ángulo de desorientación (grados) se extrajo del artículo **"Observations on the Faceted Initiation Site in the Dwell-Fatigue Tested Ti-6242 Alloy: Crystallographic Orientation and Size Effects" (*Metallurgical and Materials Trans.*, 2006: 1507-1518)**.

Clase:	0–<5	5–<10	10–<15	15–<20
Frecuencia relativa:	.177	.166	.175	.136
Clase:	20–<30	30–<40	40–<60	60–<90
Frecuencia relativa:	.194	.078	.044	.030

a. ¿Será verdad que más de 50% de los ángulos muestreados son más pequeños de 15°, como se afirma en el artículo?

b. ¿Qué proporción de los ángulos muestreados son al menos de 30°?

c. ¿Aproximadamente qué proporción de los ángulos está entre 10 y 25°?

d. Construya un histograma y comente sobre cualquier característica interesante.

27. El artículo **"Study on the Life Distribution of Microdrills" (*J. of Engr. Manufacture*, 2002: 301-305)** reporta las siguientes observaciones, listadas en orden ascendente, sobre la duración de las brocas (número de agujeros que fresa una broca antes de romperse) cuando se fresaron agujeros en una cierta aleación de latón.

11	14	20	23	31	36	39	44	47	50
59	61	65	67	68	71	74	76	78	79
81	84	85	89	91	93	96	99	101	104
105	105	112	118	123	136	139	141	148	158
161	168	184	206	248	263	289	322	388	513

a. ¿Por qué una distribución de frecuencia no puede estar basada en los intervalos de clase 0–50, 50–100, 100–150, y así sucesivamente?

b. Construya una distribución de frecuencia e histograma de los datos con los límites de clase 0, 50, 100,..., y luego comente sobre las características interesantes.

c. Construya una distribución de frecuencia y el histograma de los logaritmos naturales de las observaciones de duración y comente sobre las características interesantes.

d. ¿Qué proporción de las observaciones de duración en esta muestra es menor de 100? ¿Qué proporción de las observaciones es al menos de 200?

28. La distribución de frecuencia adjunta en energía depositada (mJ) fue extraída del artículo **"Experimental Analysis of Laser-Induced Spark Ignition of Lean Turbulent Premixed Flames" (*Combustion and Flame*, 2013: 1414-1427)**.

1.0–<2.0	5	2.0–<2.4	11
2.4–<2.6	13	2.6–<2.8	30
2.8–<3.0	46	3.0–<3.2	66
3.2–<3.4	133	3.4–<3.6	141
3.6–<3.8	126	3.8–<4.0	92
4.0–<4.2	73	4.2–<4.4	38
4.4–<4.6	19	4.6–<5.0	11

a. ¿Qué proporción de estos ensayos de ignición da como resultado una energía depositada de menos de 3 mJ?

b. ¿Qué proporción de estos ensayos de ignición resulta en una energía depositada de al menos 4 mJ?

c. Aproximadamente, ¿qué proporción de ensayos resulta en una energía depositada de al menos 3.5 mJ?

d. Construya un histograma y comente acerca de su forma.

29. En el artículo **"Finding Occupational Accident Patterns in the Extractive Industry Using a Systematic Data Mining Approach" (*Reliability Engr. and System Safety*, 2012: 108-122)** se presentaron las siguientes categorías por tipo de actividad física, cuando ocurrió un accidente industrial:

A. Trabajo con herramientas manuales

B. Movimiento

C. Portar a mano

D. Manipulación de objetos

E. Operación de una máquina

F. Otros

Construya una distribución de frecuencia, incluyendo frecuencias relativas y un histograma para los datos adjuntos de 100 accidentes (los porcentajes concuerdan con los del artículo citado):

A B D A A F C A C B E B A C
F D B C D A A C B E B C E A
B A A A B C C D F D B B A F
C B A C B E E D A B C E A A
F C B D D D B D C A F A A B
D E A E D B C A F A C D D A
A B A F D C A C B F D A E A
C D

30. Un **diagrama de Pareto** es una variación de un histograma de datos categóricos producidos por un estudio de control de calidad. Cada categoría representa un tipo diferente de no conformidad del producto o problema de producción. Las categorías se ordenaron de tal modo que en el extremo izquierdo aparezca la categoría con la frecuencia más grande, enseguida la categoría con la segunda frecuencia más grande, y así sucesivamente. Suponga que se obtiene la siguiente información sobre no conformidades en paquetes de circuito: componentes averiados, 126; componentes incorrectos, 210; soldadura insuficiente, 67; soldadura excesiva, 54; componente faltante, 131. Construya un diagrama de Pareto.

31. La **frecuencia acumulada** y la frecuencia relativa acumulada de un intervalo de clase particular son la suma de las frecuencias y las frecuencias relativas, respectivamente, del intervalo y todos los intervalos que quedan debajo de él. Si, por ejemplo, tenemos cuatro intervalos con frecuencias 9, 16, 13 y 12, entonces las frecuencias acumuladas serán 9, 25, 38 y 50; y las frecuencias relativas acumuladas serán .18, .50, .76 y 1.00. Calcule las frecuencias acumuladas y las frecuencias relativas acumuladas de los datos del ejercicio 24.

32. La carga de fuego (MJ/m^2) es la energía calorífica que podría ser liberada por cada metro cuadrado de área de piso debido a la combustión del contenido y la propia estructura. El artículo **"Fire Loads in Office Buildings" (*J. of Structural Engr.*, 1997: 365-368)** dio los siguientes porcentajes acumulados (tomados de una gráfica) de cargas de fuego en una muestra de 388 cuartos:

Valor	0	150	300	450	600
% acumulado	0	19.3	37.6	62.7	77.5
Valor	750	900	1050	1200	1350
% acumulado	87.2	93.8	95.7	98.6	99.1
Valor	1500	1650	1800	1950	
% acumulado	99.5	99.6	99.8	100.0	

a. Construya un histograma de frecuencia relativa y comente sobre las características interesantes.
b. ¿Qué proporción de cargas de fuego es menor de 600? ¿Y al menos menor de 1200?
c. ¿Qué proporción de las cargas está entre 600 y 1200?

1.3 Medidas de ubicación

Los resúmenes visuales de datos son herramientas excelentes para obtener impresiones y percepciones preliminares. Un análisis de datos más formal a menudo requiere el cálculo y la interpretación de medidas resumidas numéricas. Es decir, se trata de extraer varios números resumidos a partir de los datos, números que podrían servir para caracterizar el conjunto de datos y comunicar algunas de sus características prominentes. El interés principal se concentrará en los datos numéricos; al final de la sección aparecen algunos comentarios respecto a los datos categóricos.

Suponga, entonces, que el conjunto de datos es de la forma $x_1, x_2, \ldots, x_n$, donde cada x_i es un número. ¿Qué características del conjunto de números son de mayor interés y merecen énfasis? Una importante característica de un conjunto de números es su ubicación y en particular su centro. Esta sección presenta métodos para describir la ubicación de un conjunto de datos; en la sección 1.4 se regresará a los métodos para medir la variabilidad en un conjunto de números.

La media

Para un conjunto dado de números $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la medida más conocida y útil del centro es la *media* o el promedio aritmético del conjunto. Como casi siempre pensaremos que los números x_i constituyen una muestra, a menudo se hará referencia al promedio aritmético como la *media muestral* y se la denotará mediante $\bar{x}$.

DEFINICIÓN

La **media muestral** $\bar{x}$ de las observaciones $x_1, x_2, \ldots, x_n$ está dada por

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

El numerador de $\bar{x}$ se escribe más informalmente como $\sum x_i$, donde la suma incluye todas las observaciones muestrales.

Para reportar $\bar{x}$ se recomienda utilizar una precisión decimal de un dígito más que la precisión de los números x_i. Por consiguiente, si las observaciones son distancias de detención con $x_1 = 125$, $x_2 = 131$, y así sucesivamente, se podría tener $\bar{x} = 127.3$ pies.

EJEMPLO 1.14 En los últimos años ha habido un creciente interés comercial en el uso de lo que se conoce como *concreto internamente curado*. Este concreto comúnmente tiene inclusiones porosas en forma de agregado ligero (LWA). El artículo **"Characterizing Lightweight Aggregate Desorption at High Relative Humidities Using a Pressure Plate Apparatus" (*J. of Materials in Civil Engr*, 2012: 961-969)** reporta sobre un estudio en el cual los investigadores examinaron diversas propiedades físicas de 14 especímenes LWA. Estos son los porcentajes de absorción de agua de los especímenes durante 24 horas:

$x_1 = 16.0$	$x_2 = 30.5$	$x_3 = 17.7$	$x_4 = 17.5$	$x_5 = 14.1$
$x_6 = 10.0$	$x_7 = 15.6$	$x_8 = 15.0$	$x_9 = 19.1$	$x_{10} = 17.9$
$x_{11} = 18.9$	$x_{12} = 18.5$	$x_{13} = 12.2$	$x_{14} = 6.0$	

La figura 1.14 muestra una gráfica de puntos de los datos; un porcentaje de absorción de agua en medio de la decena entre diez y veinte parece ser "típico". Con $\sum x_i = 229.0$, la media muestral es

$$\bar{x} = \frac{229.0}{14} = 16.36$$

Una interpretación física de la media muestral nos indica cómo se evalúa el centro de una muestra. Cada punto en la gráfica de puntos se considera la representación de un peso de 1 lb. Entonces un punto de apoyo colocado con su punta en el eje horizontal estará en equilibrio precisamente cuando se encuentra en $\bar{x}$ (véase la figura 1.14). Por lo que la media muestral puede considerarse el punto de equilibrio de la distribución de las observaciones.

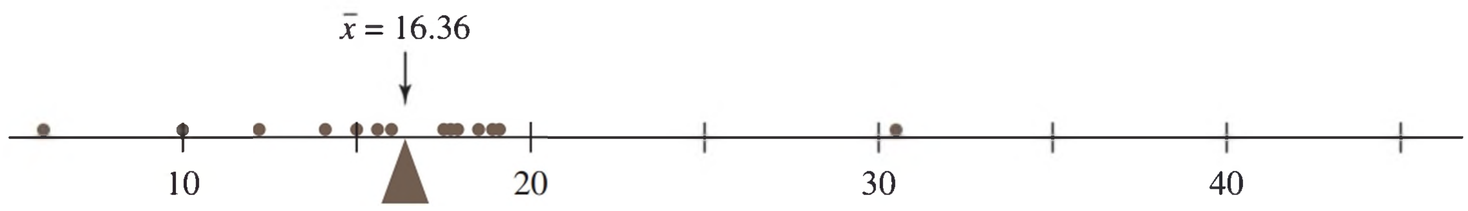


Figura 1.14 Gráfica de puntos de los datos del ejemplo 1.14 ■

Así como $\bar{x}$ representa el valor promedio de las observaciones incluidas en una muestra, es posible calcular el promedio de todos los valores de la población. Este promedio se conoce como la **media de la población** y se denota por la letra griega μ. Cuando existen N valores de la población (una población finita), entonces μ = (suma de los valores de población N)/N. En los capítulos 3 y 4 se dará una definición más general de μ, que se aplica a poblaciones tanto finitas como (conceptualmente) infinitas. Así como $\bar{x}$ es una medida interesante e importante de la ubicación de la muestra, μ es una interesante e importante característica (con frecuencia la más importante) de una

población. Una de nuestras primeras tareas en inferencia estadística será presentar métodos basados en la media muestral para sacar conclusiones respecto una media de población. Por ejemplo, podríamos usar la media muestral $\bar{x} = 16.36$ calculada en el ejemplo 1.14 como una *estimación puntual* (un solo número que es nuestra "mejor" conjetura) de $\mu =$ el porcentaje de absorción de agua promedio verdadera para todos los especímenes tratados como se describe.

La media sufre de una deficiencia que, en algunas circunstancias, la convierte en una medida inapropiada del centro: su valor puede ser afectado en gran medida por la presencia incluso de un solo valor extremo (una observación inusualmente grande o pequeña). Por ejemplo, si en una muestra hay nueve empleados que ganan \$50 000 al año y un empleado cuyo salario anual es de \$150 000, el salario promedio de la muestra es \$60 000; en realidad este valor no parece representar los datos. En estas situaciones es conveniente recurrir a una medida menos sensible a los valores de $\bar{x}$ y por el momento propondremos una. Sin embargo, aunque $\bar{x}$ sí tiene este defecto potencial sigue siendo la medida más ampliamente utilizada, básicamente porque existen muchas poblaciones para las cuales un valor atípico extremo en la muestra sería altamente improbable. Cuando se muestrea una población como esa (una población normal o en forma de campana es el ejemplo más importante), la media muestral tenderá a ser estable y bastante representativa de la muestra.

La mediana

La palabra *mediana* es sinónimo de "medio" y la media muestral es en realidad el valor medio una vez que se ordenan las observaciones de la más pequeña a la más grande. Cuando las observaciones están denotadas por $x_1, x_2, \ldots, x_n$, se utilizará el símbolo $\tilde{x}$ para representar la mediana muestral.

DEFINICIÓN

La mediana muestral se obtiene ordenando primero las n observaciones de la más pequeña a la más grande (con cualesquiera valores repetidos incluidos de modo que cada observación muestral aparezca en la lista ordenada). Entonces,

$$\tilde{x} = \begin{cases} \text{El valor medio único si } n \text{ es impar} & = \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^{\text{ésimo}} \text{ valor ordenado} \\ \text{El promedio de los dos valores medios si } n \text{ es par} & = \text{promedio de } \left(\dfrac{n}{2}\right)^{\text{ésimo}} \text{ y } \left(\dfrac{n}{2}+1\right)^{\text{ésimo}} \text{ valores ordenados} \end{cases}$$

EJEMPLO 1.15 Quienes no están familiarizados con la música clásica pueden creer que las instrucciones de un compositor para la reproducción de una pieza en particular son tan específicas que la duración no depende en absoluto del los intérpretes. Sin embargo, normalmente hay mucho espacio para la interpretación y para que los directores de orquesta y músicos puedan sacar el máximo provecho de ello. El autor se dirigió al sitio web **ArkivMusic.com** y seleccionó una muestra de 12 grabaciones de la Sinfonía # 9 de Beethoven ("Coral", una obra impresionante y hermosa), y generó las duraciones siguientes (en minutos) clasificadas en orden creciente:

62.3 62.8 63.6 65.2 65.7 66.4 67.4 68.4 68.8 70.8 75.7 79.0

He aquí una gráfica de puntos de los datos:

Figura 1.15 Gráfica de puntos de los datos para el ejemplo 1.15

Puesto que $n = 12$ es par, la mediana de la muestra es el promedio de los $n/2 = 6^{o}$ y $(n/2 + 1) = 7^{o}$ valores de la lista ordenada:

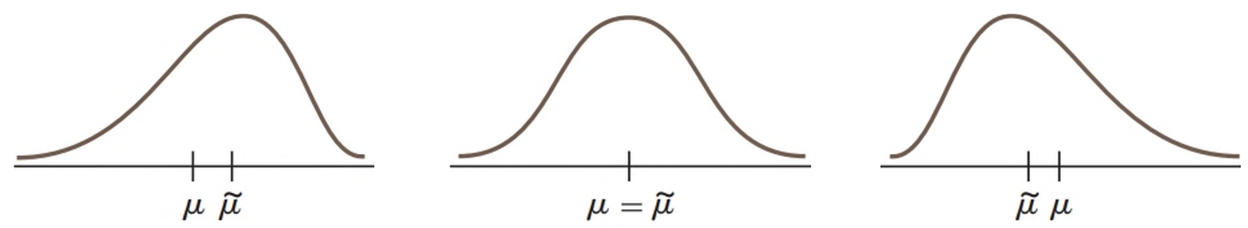
$$\tilde{x} = \frac{66.4 + 67.4}{2} = 66.90$$

Note que si la observación más grande, 79.0, no hubiera aparecido en la muestra, la mediana muestral resultante de las $n = 11$ observaciones restantes habría sido el valor medio 66.4 (el $[n + 1]/2 = 6^{o}$ valor ordenado, es decir, el sexto valor contado desde cualquier extremo de la lista ordenada). La media muestral es $\bar{x} = \sum x_i = 816.1/12 = 68.01$, la cual es poco más de un minuto más grande que la mediana. La media se sale un poco respecto a la mediana, ya que la muestra "se extiende" un poco más en el extremo superior que en el extremo inferior. ■

Los datos del ejemplo 1.15 ilustran una importante propiedad de $\tilde{x}$ en contraste con $\bar{x}$. La mediana muestral es muy insensible a los valores atípicos. Si, por ejemplo, las dos x_i más grandes se incrementan desde 75.7 y 79.0 hasta 85.7 y 89.0, respectivamente, $\tilde{x}$ no se vería afectada. Por tanto, en el tratamiento de valores atípicos, $\bar{x}$ y $\tilde{x}$ no son extremos opuestos de un espectro. Ambas cantidades describen el lugar donde se centran los datos, pero en general no serán iguales porque se enfocan en aspectos diferentes de la muestra.

Análogo a $\tilde{x}$ como valor medio de la muestra existe un valor medio de la población, la **mediana poblacional**, denotada por $\tilde{\mu}$. Tal como con $\bar{x}$ y μ, puede pensarse en utilizar la mediana muestral $\tilde{x}$ para hacer una inferencia sobre $\tilde{\mu}$. En el ejemplo 1.15 se podría utilizar $\tilde{x} = 66.90$ como una estimación de la mediana de tiempo para la población de todas las grabaciones.

La media μ y la mediana $\tilde{\mu}$ poblacionales en general no serán idénticas. Si la distribución de la población es positivamente o negativamente asimétrica, como se ilustra en la figura 1.16, entonces $\mu \neq \tilde{\mu}$. Cuando es este el caso, al hacer inferencias primero se debe decidir cuál de las dos características de la población es de mayor interés y luego proceder como corresponda.



(a) Sesgo negativo (b) Simétrica (c) Sesgo positivo

Figura 1.16 Tres formas diferentes de distribución de la población

Otras medidas de ubicación: cuartiles, percentiles y medias recortadas

La mediana (poblacional o muestral) divide el conjunto de datos en dos partes iguales. Para obtener medidas de ubicación más finas se dividen los datos en más de dos partes. Tentativamente, los cuartiles dividen el conjunto de datos en cuatro partes iguales y las observaciones arriba del tercer cuartil constituyen el cuarto superior del conjunto de

datos, el segundo cuartil es idéntico a la mediana y el primer cuartil separa el cuarto inferior de los tres cuartos superiores. Asimismo, un conjunto de datos (muestra o población) puede ser incluso más finamente dividido mediante percentiles, el 99º percentil separa el más alto 1% del más bajo 99% y así sucesivamente. A menos que el número de observaciones sea un múltiplo de 100, se debe tener cuidado al obtener percentiles. En el capítulo 4 se utilizarán percentiles en conexión con ciertos modelos de poblaciones infinitas.

La media es bastante sensible a un solo valor extremo mientras que la mediana es insensible a muchos valores atípicos. Puesto que el comportamiento extremo de uno u otro tipo podría ser indeseable se consideran brevemente medidas alternativas que no son ni sensibles como $\bar{x}$ ni tan insensibles como $\tilde{x}$. Para motivar estas alternativas observe que $\bar{x}$ y $\tilde{x}$ se encuentran en extremos opuestos de la misma "familia" de medidas. La media es el promedio de todos los datos, mientras que la mediana resulta de eliminar todos excepto uno o dos valores medios y luego promediar. Parafraseando, la media implica recortar 0% de cada extremo de la muestra, mientras que en el caso de la mediana se recorta la cantidad máxima posible de cada extremo. Una **media recortada** es un compromiso entre $\bar{x}$ y $\tilde{x}$. Una media 10% recortada, por ejemplo, se calcularía eliminando el 10% más pequeño y el 10% más grande de la muestra para luego promediar lo que queda.

EJEMPLO 1.16 La producción de Bidri es una artesanía tradicional de India. Las artesanías Bidri (tazones, recipientes, etc.) se funden en una aleación que contiene principalmente zinc y algo de cobre. Considere las siguientes observaciones sobre el contenido de cobre (%) de una muestra de artefactos Bidri tomada del Museo Victoria y Albert de Londres (**"Enigmas of Bidri", *Surface Engr.*, 2005: 333-339**), enlistadas en orden creciente:

2.0	2.4	2.5	2.6	2.6	2.7	2.7	2.8	3.0	3.1	3.2	3.3	3.3
3.4	3.4	3.6	3.6	3.6	3.6	3.7	4.4	4.6	4.7	4.8	5.3	10.1

La figura 1.17 es una gráfica de puntos de los datos. Una característica prominente es el valor atípico único en el extremo superior; la distribución está un tanto más dispersa en la región de valores grandes que en el caso de valores pequeños. La media muestral y la mediana son 3.65 y 3.35, respectivamente. Se obtiene una media recortada con un porcentaje de recorte de 100(2/26) = 7.7% al eliminar las dos observaciones más pequeñas y las dos más grandes; esto da $\bar{x}_{tr(7.7)} = 3.42$. El recorte en este caso elimina el valor extremo más grande y, por tanto, acerca la media recortada hacia la mediana.

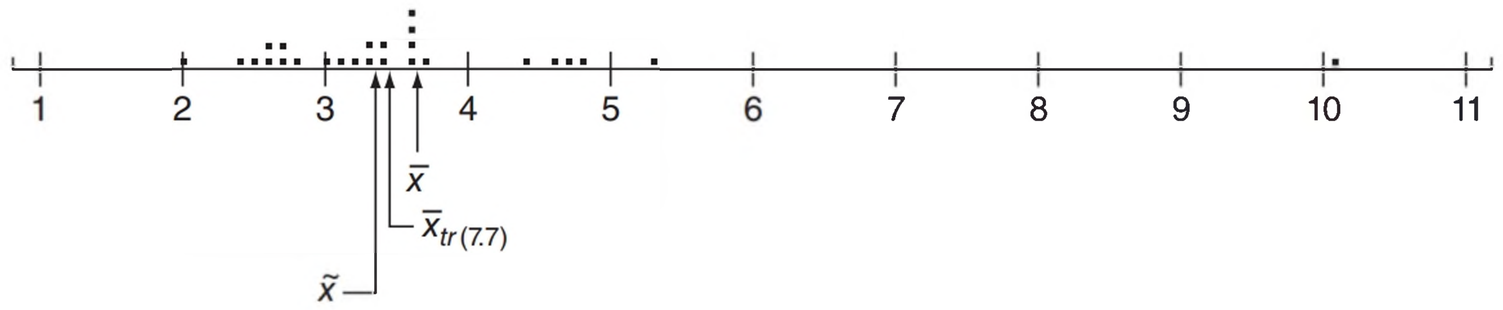


Figura 1.17 Gráfica de puntos del contenido de cobre para el ejemplo 1.16 ■

Una media recortada con un porcentaje de recorte moderado, algo entre 5 y 25%, producirá una medida del centro que no es ni tan sensible a los valores atípicos como la media ni tan insensible como la mediana. Si el porcentaje de recorte deseado es $100\alpha\%$ y $n\alpha$ no es un entero, la media recortada debe ser calculada por interpolación. Por ejemplo, considere $\alpha = .10$ para un porcentaje de recorte de 10% y $n = 26$ como en el ejemplo 1.16. Entonces $\bar{x}_{tr(10)}$ sería el promedio ponderado apropiado de la media recortada 7.7% calculada allí y la media recortada 11.5% que resulta de recortar tres observaciones de cada extremo.

Datos categóricos y proporciones muestrales

Cuando los datos son categóricos, una distribución de frecuencia o una distribución de frecuencia relativa proporcionan un resumen tabular efectivo de los datos. Las cantidades resumidas numéricas naturales en esta situación son las frecuencias individuales y las frecuencias relativas. Por ejemplo, si para estudiar la preferencia de marcas se realiza una encuesta de personas que poseen cámara digital y cada persona en la muestra identifica la marca de cámara que usa, entonces se podría contar el número de personas que tienen Canon, Sony, Kodak, etcétera. Considere muestrear una población dividida en dos partes, una consistente en sólo dos categorías (tal como votó o no votó en la última elección, si posee o no una cámara digital, etc.). Si x denota el número en la muestra que cae en la categoría 1, entonces el número en la categoría 2 es $n - x$. La frecuencia relativa o proporción muestral en la categoría 1 es x/n y la *proporción muestral* en la categoría 2 es $1 - x/n$. Designemos con 1 una respuesta que cae en la categoría 1 y con 0 una que cae en la categoría 2. Un tamaño de muestra de $n = 10$ podría dar entonces las respuestas 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1. La media muestral de esta muestra numérica es (como la cantidad de números $1s = x = 7$)

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1 + 1 + 0 + \cdots + 1 + 1}{10} = \frac{7}{10} = \frac{x}{n} = \text{proporción muestral}$$

Más generalmente, *centre la atención en una categoría particular y codifique los resultados de modo que se anote un* 1 *para una observación comprendida en la categoría y un* 0 *para una observación no comprendida en la categoría. Entonces la proporción muestral de observaciones comprendidas en la categoría es la media muestral de la secuencia de los* 1 *y los* 0. Por consiguiente se puede utilizar una media muestral para resumir los resultados de una muestra categórica. Estos comentarios también se aplican a situaciones en las cuales las categorías se definen agrupando valores en una muestra o población numérica (p. ej., podría existir interés en saber si las personas han tenido su automóvil actual durante al menos 5 años, en lugar de estudiar el tiempo exacto que se ha poseído algo).

Análogo a la proporción muestral x/n de personas u objetos que caen en una categoría particular, represente con p la proporción de aquellos que se hallan en la población entera que caen en la categoría. Tal como con x/n, p es una cantidad entre 0 y 1 y mientras que x/n es una característica de la muestra, p es una característica de la población. La relación entre las dos es igual a la relación entre $\tilde{x}$ y $\tilde{\mu}$ y entre $\bar{x}$ y μ. En particular, subsecuentemente se utilizará x/n para hacer inferencias sobre p. Si una muestra de 100 estudiantes de una gran universidad revela que 38 tienen computadoras Macintosh, entonces se podría usar $38/100 = .38$ como estimación puntual de la proporción de todos los estudiantes de la universidad que tienen una Mac. O se puede preguntar si esta muestra proporciona fuerte evidencia para concluir que al menos 1/3 de todos los estudiantes son dueños de una Mac. Con k categorías ($k > 2$) se pueden utilizar las k proporciones muestrales para responder preguntas sobre las proporciones de población $p_1, \ldots, p_k$.

EJERCICIOS Sección 1.3 (33–43)

33. El **1° de mayo de 2009** ***The Montclarian*** reportó los siguientes aumentos a los precios de venta de una muestra de casas en Alameda, CA, después de las que se vendieron el mes anterior (miles de dólares):

590 815 575 608 350 1285 408 540 555 679

a. Calcule e interprete la media y la mediana muestrales.

b. Suponga que la 6ª observación hubiera sido 985 en lugar de 1285. ¿Cómo cambiarían la media y la mediana?

c. Calcule una media recortada 20% eliminando primero las dos observaciones muestrales más pequeñas y las dos más grandes.

d. Calcule una media recortada 15%.

34. La exposición a productos microbianos, especialmente endotoxina, puede tener un impacto en la vulnerabilidad respecto a enfermedades alérgicas. El artículo **"Dust Sampling Methods for Endotoxin–An Essential, But Underestimated Issue" (*Indoor Air*, 2006: 20-27)** consideró temas asociados con la determinación de la concentración de endotoxina. Los siguientes datos sobre concentración (EU/mg) en polvo asentada de una muestra de hogares urbanos y otra de casas campestres fueron proporcionados por los autores del artículo citado.

U: 6.0 5.0 11.0 33.0 4.0 5.0 80.0 18.0 35.0 17.0 23.0

F: 4.0 14.0 11.0 9.0 9.0 8.0 4.0 20.0 5.0 8.9 21.0
9.2 3.0 2.0 0.3

a. Determine la media muestral de cada muestra. ¿Cómo se comparan?

b. Determine la mediana muestral de cada muestra. ¿Cómo se comparan? ¿Por qué la mediana de la muestra urbana es tan diferente de la media de dicha muestra?

c. Calcule la media recortada de cada muestra eliminando la observación más pequeña y la más grande. ¿Cuáles son los porcentajes de recorte correspondientes? ¿Cómo se comparan los valores de estas medias recortadas con las medias y las medianas correspondientes?

35. El mercurio es un contaminante del ambiente persistente y dispersivo en muchos ecosistemas alrededor del mundo. Cuando se libera como un subproducto industrial a menudo encuentra su camino en los sistemas acuáticos donde puede tener efectos deletéreos sobre diferentes especies acuáticas y en aves. Los datos adjuntos en la concentración de mercurio de la sangre (μg/g) para las hembras adultas cerca de ríos contaminados en Virginia se obtuvieron de un gráfico en el artículo **"Mercury Exposure Effects the Reproductive Success of a Free-Living Terrestrial Songbird, the Carolina Wren" (*The Auk*, 2011: 759-769**; esta es una publicación de la American Ornithologists' Union).

.20 .22 .25 .30 .34 .41 .55 .56
1.42 1.70 1.83 2.20 2.25 3.07 3.25

a. Determine los valores de la media y la mediana muestrales y explique por qué son diferentes. [*Sugerencia:* $\sum x_1 = 18.55$.]

b. Determine el valor de la media recortada 10% y compare con la media y la mediana.

c. ¿Cuánto podría aumentar la observación .20 sin afectar el valor de la mediana de la muestra?

36. Una muestra de 26 trabajadores de plataforma petrolera marina tomó parte en un ejercicio de escape y se obtuvieron los datos adjuntos de tiempo (s) para completar el escape (**"Oxygen Consumption and Ventilation During Escape from an Offshore Platform", *Ergonomics*, 1997: 281-292**):

389 356 359 363 375 424 325 394 402
373 373 370 364 366 364 325 339 393
392 369 374 359 356 403 334 397

a. Construya una gráfica de tallo y hojas de los datos. ¿Cómo sugiere la gráfica que se comparen la media y la mediana muestrales?

b. Calcule los valores de la media y la mediana muestrales [*Sugerencia:* $\sum x_i = 9638$.]

c. ¿En cuánto se podría incrementar el tiempo más largo, actualmente de 424, sin afectar el valor de la mediana muestral? ¿En cuánto se podría disminuir este valor sin afectar el valor de la mediana muestral?

d. ¿Cuáles son los valores de $\bar{x}$ y $\tilde{x}$ cuando las observaciones se vuelven a expresan en minutos?

37. El artículo **"Snow Cover and Temperature Relationships in North America and Eurasia" (*J. Climate and Applied Meteorology*, 1983: 460-469)** utilizó técnicas estadísticas para relacionar la cobertura de la capa de nieve en cada continente con la temperatura promedio continental. Los datos allí presentados incluyeron las siguientes diez observaciones de la capa de nieve en octubre en Eurasia durante el periodo 1970-1979 (en millones de km^2):

6.5 12.0 14.9 10.0 10.7 7.9 21.9 12.5 14.5 9.2

¿Qué reportaría como valor representativo, o típico, de la cobertura de la capa de nieve en octubre durante este periodo y qué motivaría su elección?

38. Los valores de presión sanguínea a menudo se reportan en los 5 mmHg más cercanos (100, 105, 110, etc.). Suponga que los valores de presión sanguínea reales de nueve individuos seleccionados al azar son

118.6 127.4 138.4 130.0 113.7 122.0 108.3
131.5 133.2

a. ¿Cuál es la mediana de los valores de presión sanguínea reportados?

b. Suponga que la presión sanguínea del segundo individuo es 127.6 en lugar de 127.4 (un pequeño cambio en un solo valor). ¿Cómo afecta esto a la mediana de los valores reportados? ¿Qué dice esto sobre la sensibilidad de la mediana al redondeo o al agrupamiento de los datos?

39. La propagación de grietas provocadas por fatiga en diferentes partes de un avión ha sido el tema de extensos estudios en años recientes. Los datos adjuntos se componen de vidas de propagación (horas de vuelo/10^4) para alcanzar un cierto tamaño de las grietas en los orificios para los sujetadores en aviones militares (**"Statistical Crack Propagation in Fastener Holes Under Spectrum Loading", *J. Aircraft*, 1983: 1028-1032**):

.736 .863 .865 .913 .915 .937 .983 1.007
1.011 1.064 1.109 1.132 1.140 1.153 1.253 1.394

a. Calcule y compare los valores de la media y la mediana muestrales.

b. ¿En cuánto se podría disminuir la observación muestral más grande sin afectar el valor de la mediana?

40. Calcule la mediana muestral, la media recortada 25%, la media recortada 10% y la media muestral de los datos de duración dados en el ejercicio 27 y compare las medidas.

41. Se eligió una muestra de $n = 10$ automóviles y cada una se sometió a una prueba de choque a 5 mph. Se denotó un auto sin daños visibles con S y uno con daños con F y los resultados fueron los siguientes:

S S F S S S F F S S

a. ¿Cuál es el valor de la proporción muestral de éxitos x/n?

b. Reemplace cada S con 1 y cada F con 0. Después calcule $\bar{x}$ de esta muestra numéricamente codificada. ¿Cómo se compara $\bar{x}$ con x/n?

c. Suponga que se decide incluir 15 autos más en el experimento. ¿Cuántos de estos tendrían que ser S para obtener $x/n = .80$ para toda la muestra de 25 carros?

42. **a.** Si se agrega una constante c a cada x_i en una muestra y se obtiene $y_i = x_i + c$, ¿cómo se relacionan la media y la mediana muestrales de las y_i con la media y la mediana muestrales de las x_i? Verifique sus conjeturas.

b. Si cada x_i se multiplica por una constante c y se obtiene $y_i = cx_i$, responda la pregunta del inciso a). Nuevamente verifique sus conjeturas.

43. Un experimento para estudiar la duración (en horas) de un cierto tipo de componente implicaba poner diez componentes en operación y observarlos durante 100 horas. Ocho de ellos fallaron durante dicho periodo y se registraron las duraciones. Se denotan con 100+ las duraciones de los dos componentes que continuaron funcionando después de 100 horas. Las observaciones muestrales resultantes fueron:

48 79 100+ 35 92 86 57 100+ 17 29

¿Cuáles de las medidas centrales discutidas en esta sección pueden ser calculadas y cuáles son los valores de dichas medidas? [*Nota:* se dice que los datos obtenidos con este experimento están "censados a la derecha".]

1.4 Medidas de variabilidad

El reporte de una medida de centro sólo da información parcial sobre un conjunto o distribución de datos. Diferentes muestras o poblaciones pueden tener medidas idénticas de centro y aun así diferir una de otra en otras importantes maneras. La figura 1.18 muestra gráficas de puntos de tres muestras con las mismas media y mediana, aunque el grado de dispersión en torno al centro es diferente para las tres muestras. La primera tiene la cantidad más grande de variabilidad, la tercera tiene la cantidad más pequeña y la segunda es intermedia respecto a las otras dos en este aspecto.

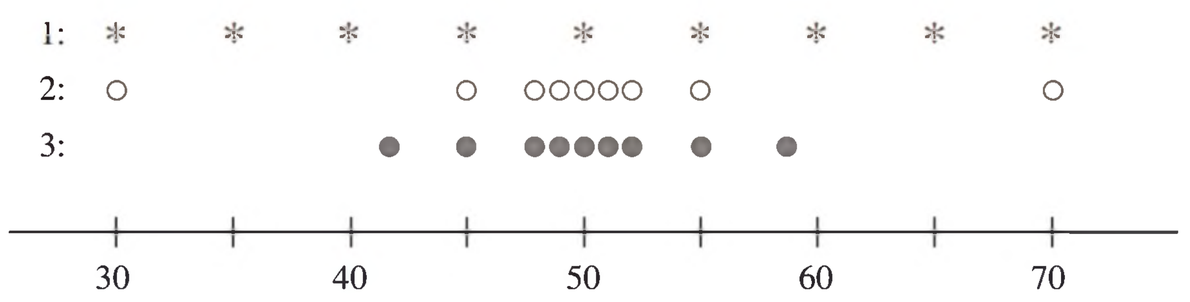


Figura 1.18 Muestras con medidas de centro idénticas pero diferentes cantidades de variabilidad

Medidas de variabilidad de datos muestrales

La medida más simple de variabilidad en una muestra es el **rango**, que es la diferencia entre el valor muestral más grande y el más pequeño. El valor del rango de la muestra 1 en la figura 1.18 es mucho más grande que el de la muestra 3, lo que refleja más variabilidad en la primera muestra que en la tercera. Un defecto del rango, no obstante, es que depende de sólo las dos observaciones más extremas y hace caso omiso de las posiciones de los valores restantes. Las muestras 1 y 2 en la figura 1.18 tienen rangos idénticos aunque, cuando se toman en cuenta las observaciones entre los dos extremos, existe mucho menos variabilidad o dispersión en la segunda muestra que en la primera.

Las medidas principales de variabilidad implican las **desviaciones de la media**, $x_1 - \bar{x}, x_2 - \bar{x}, \ldots, x_n - \bar{x}$. Es decir, las desviaciones de la media se obtienen restando $\bar{x}$ de cada una de la n observaciones muestrales. Una desviación será positiva si la observación

es más grande que la media (a la derecha de la media sobre el eje de medición) y negativa si la observación es más pequeña que la media. Si todas las desviaciones son pequeñas en magnitud, entonces todas las x_i se aproximan a la media y hay poca variabilidad. Alternativamente, si algunas de las desviaciones son grandes en magnitud, entonces algunas x_i quedan lejos de lo que sugiere una mayor cantidad de variabilidad. Una forma simple de combinar las desviaciones en una sola cantidad es promediarlas. Desafortunadamente, esto es una mala idea:

$$\text{suma de desviaciones} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$$

por lo que la desviación promedio siempre es cero. La verificación utiliza varias reglas estándar de la suma y el hecho de que $\Sigma\bar{x} = \bar{x} + \bar{x} + \cdots + \bar{x} = n\bar{x}$:

$$\sum(x_i - \bar{x}) = \sum x_i - \sum\bar{x} = \sum x_i - n\bar{x} = \sum x_i - n\left(\frac{1}{n}\sum x_i\right) = 0$$

Existen maneras de evitar que las desviaciones negativas y positivas se neutralicen entre sí cuando se combinan. Una posibilidad es trabajar con los valores absolutos de las desviaciones y calcular la desviación absoluta promedio $\sum|x_i - \bar{x}|/n$. Debido a que la operación de valor absoluto conduce a un número de dificultades teóricas considere, en cambio, las desviaciones al cuadrado $(x_1 - \bar{x})^2, (x_2 - \bar{x})^2, \ldots, (x_n - \bar{x})^2$. En vez de utilizar la desviación al cuadrado promedio $\sum(x_i - \bar{x})^2/n$, por varias razones se divide la suma de desviaciones al cuadrado entre $n - 1$ en lugar de entre n.

DEFINICIÓN

La **varianza muestral**, denotada por s^2 está dada por

$$s^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n - 1} = \frac{S_{xx}}{n - 1}$$

La **desviación estándar muestral**, denotada por s, es la raíz cuadrada (positiva) de la varianza:

$$s = \sqrt{s^2}$$

Observe que s^2 y s son no negativas. La unidad de s es la misma que la de cada una de las x_i. Si, por ejemplo, las observaciones son eficiencias de combustible en millas por galón se podría tener $s = 2.0$ mpg. Una interpretación preliminar de la desviación estándar muestral es que es el tamaño de una desviación típica o representativa de la media muestral dentro de la muestra dada. Por tanto, si $s = 2.0$ mpg algunas x_i en la muestra se aproximan más que 2.0 a $\bar{x}$, en tanto que otras están más alejadas; 2.0 es una desviación representativa (o "estándar") de la eficiencia de combustible media. Si $s = 3.0$ para una segunda muestra de autos de otro tipo, una desviación típica en esta muestra es aproximadamente 1.5 veces la de la primera, una indicación de más variabilidad en la segunda muestra.

EJEMPLO 1.17

El sitio web **www.fueleconomy.gov** contiene gran cantidad de información acerca de las características del combustible de varios vehículos. Además de las calificaciones de millaje de la Environmental Protection Agency (EPA), hay muchos usuarios de vehículos que han informado respecto a sus propios valores de eficiencia de combustible (mpg). Considere la siguiente muestra de $n = 11$ eficiencias para el Ford Focus 2009 equipado con transmisión

automática (para este modelo, la EPA informa de una calificación general de 27 mpg-24 mpg en ciudad y 33 mpg en carretera):

Automóvil	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	
1	27.3	−5.96	35.522	
2	27.9	−5.36	28.730	
3	32.9	−0.36	0.130	
4	35.2	1.94	3.764	
5	44.9	11.64	135.490	
6	39.9	6.64	44.090	
7	30.0	−3.26	10.628	
8	29.7	−3.56	12.674	
9	28.5	−4.76	22.658	
10	32.0	−1.26	1.588	
11	37.6	4.34	18.836	
	$\Sigma x_i = 365.9$	$\Sigma(x_i - \bar{x}) = .04$	$\Sigma(x_i - \bar{x})^2 = 314.110$	$\bar{x} = 33.26$

Debido al redondeo la suma de las desviaciones no da exactamente cero. El numerador de s^2 es $S_{xx} = 314.110$, por consiguiente

$$s^2 = \frac{S_{xx}}{n-1} = \frac{314.110}{11-1} = 31.41, \qquad s = 5.60$$

El tamaño de una desviación representativa de la media de la muestra 33.26 es de aproximadamente 5.6 mpg. *Nota:* De las nueve personas que también reportaron hábitos de conducción, sólo tres condujeron más de 80% en la autopista; apostamos a que puede adivinar los automóviles que conducían. Todavía no tenemos idea de por qué los 11 valores registrados exceden la cifra de la EPA, tal vez sólo los conductores con una realmente buena eficiencia de combustible comunican sus resultados. ■

Motivación para s^2

Para explicar el porqué del divisor $n - 1$ en s^2, observe primero que en tanto que s^2 mide la variabilidad muestral, existe una medida de variabilidad en la población llamada **varianza poblacional**. Se utilizará σ^2 (el cuadrado de la letra griega sigma minúscula) para denotar la varianza poblacional y σ para denotar la **desviación estándar poblacional** (la raíz cuadrada de σ^2). El valor de σ se puede interpretar como aproximadamente del tamaño de una desviación típica de μ dentro de toda la población de x valores. Cuando la población es finita y se compone de N valores,

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2 / N$$

la cual es el promedio de todas las desviaciones al cuadrado respecto a la media poblacional (para la población, el divisor es N y no $N - 1$). En los capítulos 3 y 4 se presentan definiciones más generales de σ^2.

Así como se utilizará $\bar{x}$ para hacer inferencias sobre la media poblacional μ, se deberá definir la varianza muestral de modo que pueda ser utilizada para hacer inferencias sobre σ^2. Ahora observe que σ^2 implica desviaciones cuadradas respecto a la media poblacional μ. Si en realidad se conociera el valor de μ, entonces se podría definir la varianza muestral como la desviación al cuadrado promedio de las x_i de la muestra x_i respecto a μ. Sin embargo, el valor de μ casi nunca es conocido, por lo que se debe utilizar el cuadrado de la suma de las

desviaciones respecto a $\bar{x}$. Pero *las x_i tienden a acercarse más a su valor promedio $\bar{x}$ que el promedio poblacional μ*. Para compensar lo anterior se utiliza el divisor $n - 1$ en lugar de n. En otras palabras, si se utiliza un divisor n en la varianza muestral, entonces la cantidad resultante tendería a subestimar σ^2 (en promedio se producen valores demasiado pequeños), mientras que si se divide entre el divisor un poco más pequeño $n - 1$ se corrige esta subestimación.

Es costumbre referirse a s^2 como si estuviera basada en $n - 1$ **grados de libertad** (gl). Esta terminología se deriva del hecho de que aunque s^2 está basada en las n cantidades $x_1 - \bar{x}, x_2 - \bar{x}, \ldots, x_n - \bar{x}$, estas suman 0, por lo que al especificar los valores de cualquier $n - 1$ de las cantidades se determina el valor restante. Por ejemplo, si $n = 4$ y $x_1 - \bar{x} = 8$, $x_2 - \bar{x} = 6$ y $x_4 - \bar{x} = -4$, automáticamente $x_3 - \bar{x} = 2$, por lo que sólo tres de los cuatro valores de $x_i - \bar{x}$ son determinados libremente (3 grados de libertad).

Una fórmula para calcular s^2

Es mejor obtener s^2 con software estadístico, o bien utilizar una calculadora que permita ingresar datos en la memoria y luego ver s^2 con un solo golpe de tecla. Si su calculadora no tiene esta capacidad, existe una fórmula alternativa que evita calcular las desviaciones. La fórmula implica a $(\sum x_i)^2$, sumar y luego elevar al cuadrado; y a $\sum x_i^2$, elevar al cuadrado y luego sumar.

Una expresión alternativa para el numerador de s^2 es

$$S_{xx} = \sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}$$

Demostración Debido a que $\bar{x} = \Sigma x_i / n$, $n(\bar{x})^2 = (\Sigma x_i)^2 / n$. Entonces

$$\begin{aligned} \sum (x_i - \bar{x})^2 &= \sum (x_i^2 - 2\bar{x} \cdot x_i + \bar{x}^2) = \sum x_i^2 - 2\bar{x} \sum x_i + \sum (\bar{x})^2 \\ &= \sum x_i^2 - 2\bar{x} \cdot n\bar{x} + n(\bar{x})^2 = \sum x_i^2 - n(\bar{x})^2 \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 1.18 La luxación traumática de rodilla a menudo requiere cirugía para reparar los ligamentos rotos. Una medida de la recuperación es la amplitud de movimiento (medido como el ángulo formado cuando, a partir de la pierna estirada, la rodilla se dobla en la medida de lo posible). Los datos que figuran en el rango de movimiento posquirúrgico aparecen en el artículo **"Reconstruction of the Anterior and Posterior Cruciate Ligaments After Knee Dislocation" (*Amer. J. Sports Med.*, 1999: 189-197):**

154 142 137 133 122 126 135 135 108 120 127 134 122

La suma de estas 13 muestras observadas es $\sum x_i = 1695$ y la suma de sus cuadrados es

$$\sum x_i^2 = (154)^2 + (142)^2 + \cdots + (122)^2 = 222.581$$

Por tanto, el numerador de la varianza muestral es

$$S_{xx} = \sum x_i^2 - \left[(\sum x_i)^2\right]/n = 222.581 - (1695)^2/13 = 1579.0769$$

de donde $s^2 = 1579.0769/12 = 131.59$ y $s = 11.47$. ■

Tanto la fórmula de la definición como la fórmula de cálculo para s^2 pueden ser sensibles al redondeo, por lo que en los cálculos intermedios se debe utilizar la mayor precisión decimal que sea posible.

Varias propiedades de s^2 pueden mejorar la comprensión y facilitar el cálculo.

PROPOSICIÓN

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ una muestra y c cualquier constante diferente de cero.

1. Si $y_1 = x_1 + c, y_2 = x_2 + c, \ldots, y_n = x_n + c$, entonces $s_y^2 = s_x^2$ y
2. Si $y_1 = cx_1, \ldots, y_n = cx_n$, entonces $s_y^2 = c^2 s_x^2$, $s_y = |c| s_x$

donde s_x^2 es la varianza muestral de las x y s_y^2 es la varianza muestral de las y.

En otras palabras, el resultado 1 dice que si se suma (o se resta) una constante c de cada valor de dato, la varianza no cambia. Esto es intuitivo puesto que la adición o sustracción de c cambia la ubicación del conjunto de datos, pero deja inalteradas las distancias entre los valores de datos. De acuerdo con el resultado 2, la multiplicación de cada x_i por c hace que s^2 sea multiplicada por un factor de c^2. Estas propiedades pueden ser comprobadas al observar en el resultado 1 que $\bar{y} = \bar{x} + c$ y en el resultado 2 que $\bar{y} = c\bar{x}$.

Gráficas de caja

Las gráficas de tallo y hojas y los histogramas transmiten impresiones un tanto generales sobre un conjunto de datos, mientras que un resumen único tal como la media o la desviación estándar se enfoca en sólo un aspecto de los datos. En años recientes se ha utilizado con éxito un resumen gráfico llamado *gráfica de caja* para describir varias de las características más prominentes de un conjunto de datos. Estas características incluyen 1) el centro, 2) la dispersión, 3) el grado y la naturaleza de cualquier alejamiento de la simetría, y 4) la identificación de las observaciones "atípicas" inusualmente alejadas del cuerpo principal de los datos. Puesto que incluso un solo valor extremo puede afectar drásticamente los valores de $\bar{x}$ y s, una gráfica de caja está basada en medidas "resistentes" a la presencia de unos cuantos valores atípicos: la mediana y una medida de variabilidad llamada *distancia entre cuartos*.

DEFINICIÓN

Se ordenan las n observaciones de la más pequeña a la más grande y se separa la mitad más pequeña de la más grande; si n es impar se incluye la mediana en ambas mitades. En tal caso el **cuarto inferior** es la mediana de la mitad más pequeña y **el cuarto superior** es la mediana de la mitad más grande. Una medida de dispersión resistente a los valores atípicos es la distancia entre cuartos f_s, dada por

$$f_s = \text{cuarto superior} - \text{cuarto inferior}$$

En general, la distancia entre cuartos no se ve afectada por las posiciones de las observaciones comprendidas en el 25% más pequeño o el 25% más grande de los datos. Por consiguiente es resistente a valores atípicos. Por tanto, es resistente a valores atípicos. Los cuartos son muy similares a los cuartiles y la cuarta extensión es similar al *rango intercuartil*, la diferencia entre los cuartiles superiores e inferiores. Pero los cuartiles son un poco más enfadosos que los cuartos para calcular a mano, y existen diferentes maneras razonables para calcular los cuartiles (así los valores pueden variar de un programa informático a otro).

La gráfica de caja más simple se basa en el siguiente resumen de cinco números:

x_i más pequeñas cuarto inferior mediana cuarto superior x_i más grandes

Primero, se coloca un rectángulo sobre una escala de medición horizontal; el lado izquierdo del rectángulo está arriba en el cuarto inferior y el derecho en el cuarto superior (por lo que el ancho de la caja $= f_s$). Se coloca un segmento de línea vertical o algún otro símbolo adentro del rectángulo en la ubicación de la mediana; la posición del símbolo de la mediana respecto a los dos lados da información sobre asimetría en el 50% medio de los datos. Por

último, se trazan "bigotes" hacia ambos extremos del rectángulo hacia las observaciones más pequeñas y más grandes. También se puede trazar una gráfica de caja con orientación vertical mediante modificaciones obvias en el proceso de construcción.

EJEMPLO 1.19 Los datos adjuntos se componen de observaciones en el tiempo hasta la falla (miles de horas) para una muestra de turbocompresores de un tipo de motor (de **"The Beta Generalized Weibull Distribution: Properties and Applications",** ***Reliability Engr. and System Safety*****, 2012: 5-15**).

1.6	2.0	2.6	3.0	3.5	3.9	4.5	4.6	4.8	5.0
5.1	5.3	5.4	5.6	5.8	6.0	6.0	6.1	6.3	6.5
6.5	6.7	7.0	7.1	7.3	7.3	7.3	7.7	7.7	7.8
7.9	8.0	8.1	8.3	8.4	8.4	8.5	8.7	8.8	9.0

El resumen de cinco números es el siguiente.

más pequeño:	cuarto inferior:	mediana:	cuarto superior:	más grande:
1.6	5.05	6.5	7.85	9.0

La figura 1.19 muestra la salida de Minitab de una solicitud para describir los datos. Q1 y Q3 son los cuartiles inferiores y superiores, respectivamente, e IQR (rango intercuartil) es la diferencia entre los cuartiles. La media SE es $s/\sqrt{n}$, el "error estándar de la media"; este será importante en nuestro desarrollo subsecuente de varios procedimientos utilizados para hacer inferencias sobre la media de la población μ.

```
Variable  Count   Mean  SE Mean  StDev  Minimum     Q1  Median     Q3  Maximum    IQR
lifetime     40  6.253    0.309  1.956    1.600  5.025   6.500  7.875    9.000  2.850
```

Figura 1.19 Descripción de Minitab de los datos del tiempo de vida del turbocompresor

La figura 1.20 muestra una gráfica de puntos de los datos y una gráfica de caja. Ambas gráficas indican que hay una cantidad razonable de la simetría en el medio 50% de los datos, pero en general los valores estiran más hacia el extremo inferior que hacia el extremo superior, un sesgo negativo. La caja en sí misma es no muy estrecha, lo que indica una buena cantidad de variabilidad en la parte media de los datos, y el bigote inferior es especialmente largo.

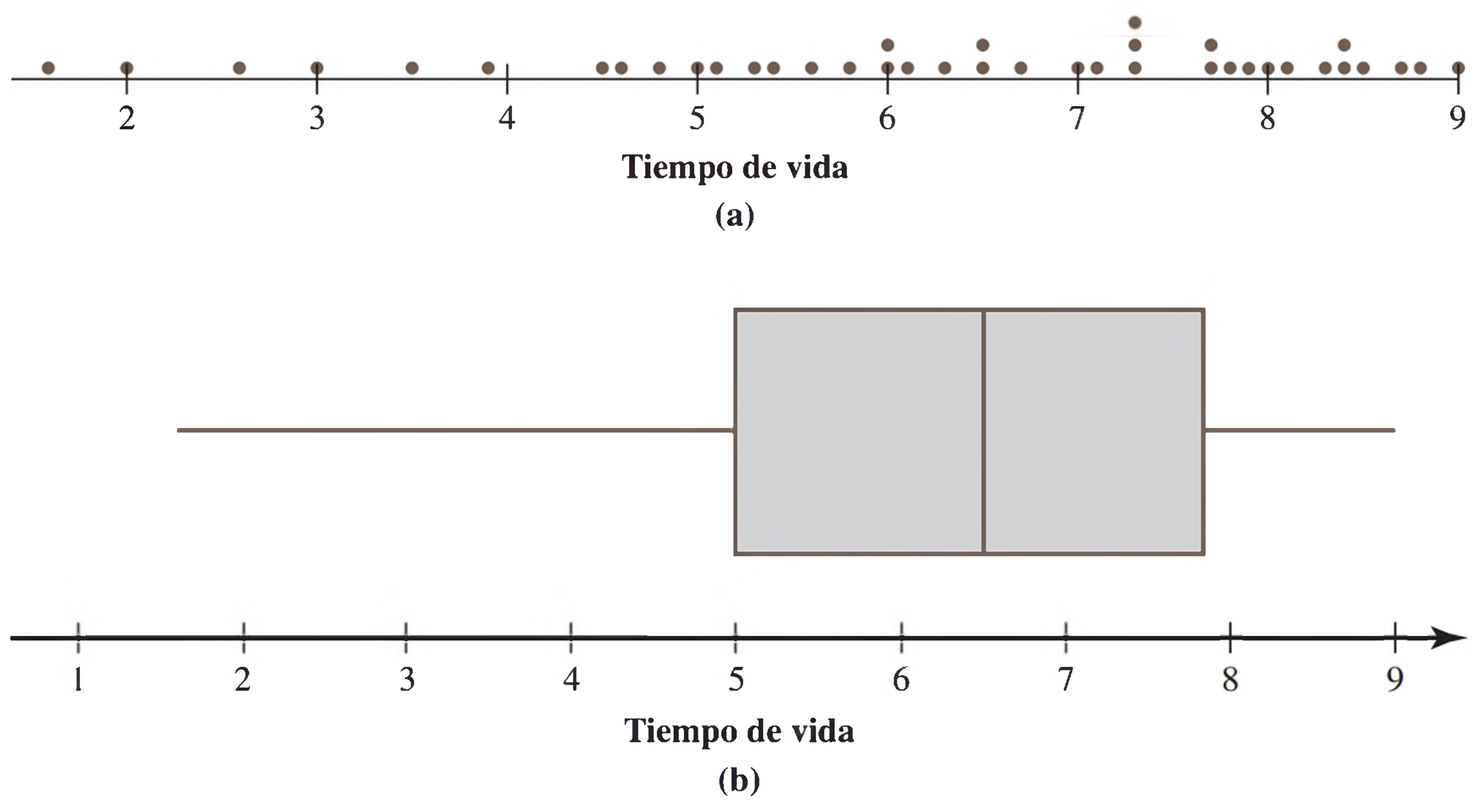


Figura 1.20 (a) Gráfica de puntos y (b) gráfica de caja para los datos del tiempo de vida ■

Gráficas de caja que muestran valores atípicos

Una gráfica de caja puede ser embellecida para indicar explícitamente la presencia de valores atípicos. Muchos procedimientos inferenciales se basan en la suposición de que la distribución de la población es normal (un cierto tipo de curva en forma de campana). Incluso un solo valor apartado extremo que aparezca en la muestra advierte al investigador que tales procedimientos pueden ser no confiables, y la presencia de varios valores atípicos moderados transmite el mismo mensaje.

DEFINICIÓN

Cualquier observación a más de $1.5f_s$ del cuarto más cercano es un valor **atípico**. Un valor atípico es **extremo** si se encuentra a más de $3f_s$ del cuarto más cercano, y **moderado** en caso contrario.

Modifíque ahora la construcción previa de una gráfica de caja trazando un bigote que sale de cada extremo de la caja hacia las observaciones más pequeñas y más grandes que *no* son valores atípicos. Cada valor atípico moderado está representado por un círculo cerrado y cada valor atípico extremo, por uno abierto. Algunos programas de computadora estadísticos no distinguen entre valores atípicos moderados y extremos.

EJEMPLO 1.19 La ley Clean Water (agua limpia) y las modificaciones posteriores requieren que todas las aguas en los Estados Unidos alcancen los objetivos de reducción de la contaminación para garantizar que el agua sea "apta para la pesca y para nadar". El artículo **"Spurious Correlation in the USEPA Rating Curve Method for Estimating Pollutant Loads" (*J. of Environ. Engr.*, 2008: 610-618)** ha investigado diferentes técnicas para estimar las cargas contaminantes en las cuencas hidrográficas; los autores "discuten la necesidad imperiosa del uso racional de los métodos estadísticos" para este fin. Entre los datos que se consideran está la siguiente muestra de cargas de NT (nitrógeno total) (kg N/día), a partir de una determinada ubicación en la Bahía de Chesapeake, que aparece aquí en orden creciente.

9.69	13.16	17.09	18.12	23.70	24.07	24.29	26.43
30.75	31.54	35.07	36.99	40.32	42.51	45.64	48.22
49.98	50.06	55.02	57.00	58.41	61.31	64.25	65.24
66.14	67.68	81.40	90.80	92.17	92.42	100.82	101.94
103.61	106.28	106.80	108.69	114.61	120.86	124.54	143.27
143.75	149.64	167.79	182.50	192.55	193.53	271.57	292.61
312.45	352.09	371.47	444.68	460.86	563.92	690.11	826.54
1529.35							

El resumen de las cantidades pertinentes es

$$\tilde{x} = 92.17 \qquad 4°\text{inferior} = 45.64 \qquad 4°\text{superior} = 167.79$$

$$f_s = 122.15 \qquad 1.5f_s = 183.225 \qquad 3f_s = 366.45$$

Restando $1.5f_s$ del 4° inferior da un número negativo y ninguna de las observaciones es negativa, así que no hay valores atípicos en el extremo inferior de los datos. Sin embargo,

$$4° \text{ superior} + 1.5f_s = 351.015 \qquad 4° \text{ superior} + 3f_s = 534.24$$

Por tanto, las cuatro observaciones más grandes: 563.92, 690.11, 826.54 y 1529.35, son valores atípicos extremos; y 352.09, 371.47, 444.68 y 460.86 son valores atípicos moderados.

Los bigotes en la gráfica de caja de la figura 1.22 se extienden hacia afuera de la observación más pequeña, 9.69, en el extremo inferior y 312.45, la observación más grande en el extremo superior que no es un valor apartado. Hay cierta asimetría positiva en la mitad central de los datos (la línea mediana está un poco más cerca del borde izquierdo de la caja que del extremo derecho) y, en general, una gran asimetría positiva.

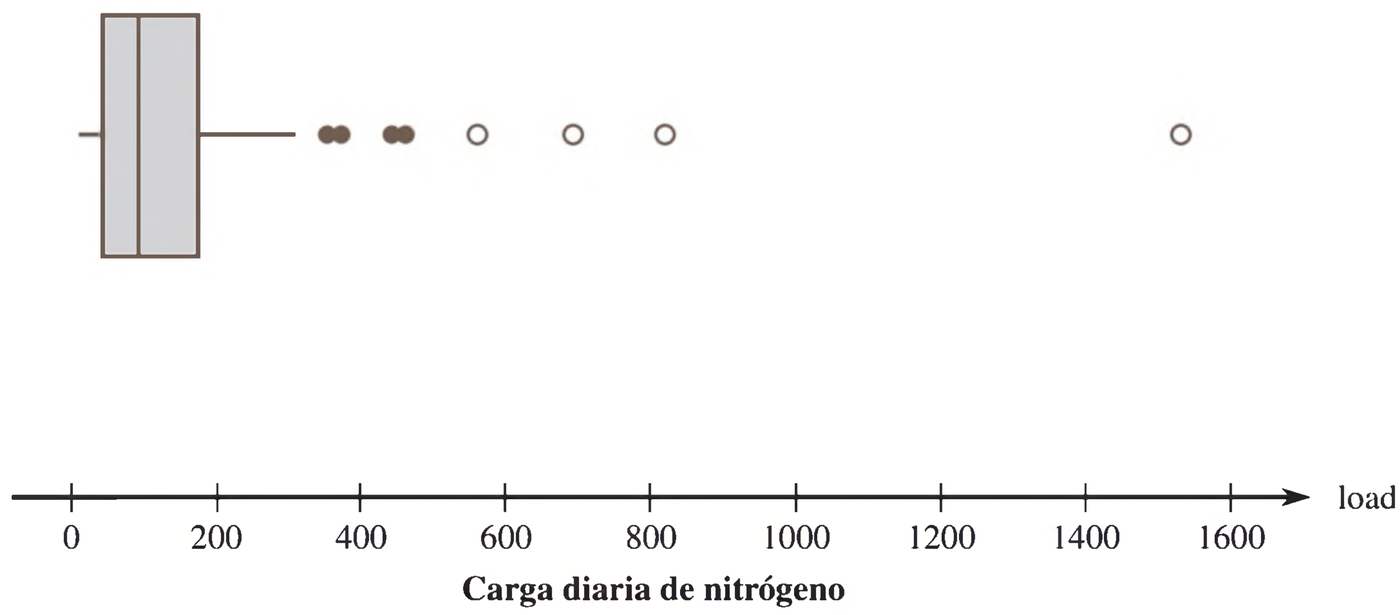


Figura 1.21 Gráfica de caja de los datos de la carga de nitrógeno mostrando los valores atípicos moderados y extremos

Gráficas de caja comparativas

Una gráfica de caja comparativa o lado a lado es una forma muy efectiva de revelar similitudes y diferencias entre dos o más conjuntos de datos compuestos de observaciones de la misma variable, observaciones de eficiencia de consumo de combustible de cuatro tipos distintos de automóviles, rendimientos de cosechas de tres variedades diferentes, etcétera.

EJEMPLO 1.21 Los altos niveles de sodio en los productos alimenticios representan un creciente para la salud. Los datos adjuntos se componen de los valores del contenido de sodio en una porción de cereal para una muestra de cereales fabricado por General Mills, otra muestra fabricada por Kellogg y una tercera muestra producida por Post (consulte el sitio web **http://www.nutritionresource.com/foodcomp2.cfm?id50800** ¡en lugar de visitar el supermercado de su colonia!).

G:	211	408	171	178	359	249	205	203	201	223	234	256	218
K:	143	202	120	229	150	5	207	362	252	275	224		
P:	253	220	212	41	140	215	266	3	214	280			

La figura 1.22 muestra una gráfica de caja comparativa de los datos usando el paquete de software R. El contenido típico de sodio (mediana) es aproximadamente el mismo para las tres empresas. Pero las distribuciones difieren marcadamente en otros aspectos. Los

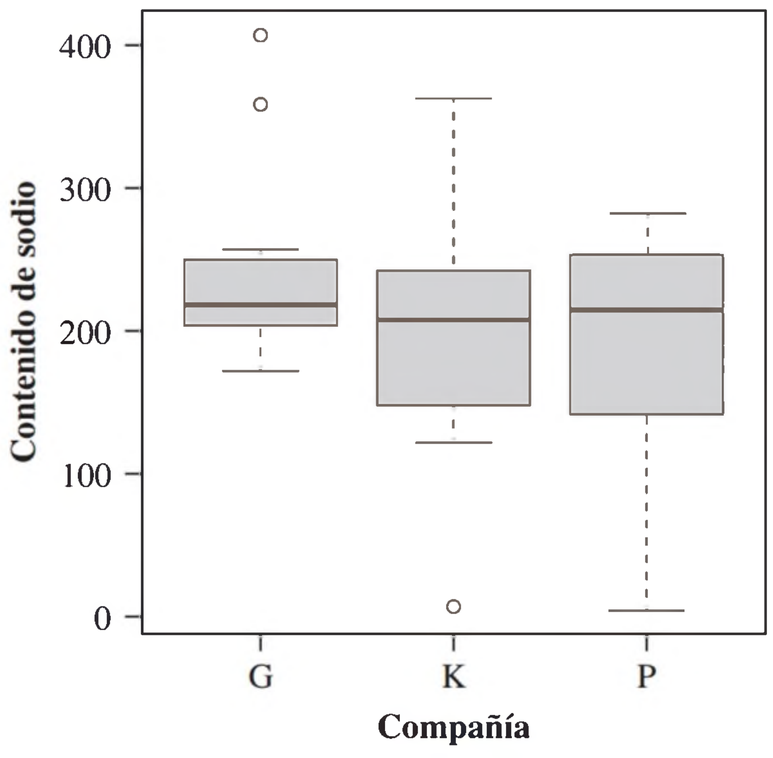


Figura 1.22 Gráfica de caja comparativa de los datos del ejemplo 1.21, obtenida usando R

datos de Kellogg muestran un sesgo positivo considerable tanto en el medio del 50% y, en general, con dos valores atípicos en el extremo superior. Los datos de Kellogg exhiben un sesgo negativo en el medio del 50% y un sesgo positivo en general, con excepción del valor atípico en el extremo inferior (este valor atípico no está identificado por Minitab). Y los datos Post están sesgados negativamente tanto en el medio del 50% y en general con ningún valor atípico. La variabilidad, según lo determinado por la longitud de la caja (aquí el rango intercuartil en lugar de la cuarta extensión) es más pequeña para la marca G y más grande para la marca P, con la marca K intermedia de las otras dos; observando, por otro lado, las desviaciones estándar, s_K y s_P son más o menos lo mismo y ambas mucho más grandes que s_G. ■

EJERCICIOS **Sección 1.4 (44–61)**

44. El polihidroxibutirato (PHB), un polímero semicristalino completamente biodegradable y biocompatible, se obtiene a partir de recursos renovables. Desde una perspectiva de sostenibilidad, el PHB ofrece muchas características atractivas, aunque es más caro de producir que los plásticos estándar. En el artículo **"The Melting Behaviour of Poly(3-Hydroxybutyrate) por DSC. Reproducibility Study" (*Polymer Testing*, 2013: 215–220)** aparecen adjuntos los datos en el punto de fusión (°C) para cada uno de 12 ejemplares del polímero usando un calorímetro de barrido diferencial.

```
180.5  181.7  180.9  181.6  182.6  181.6
181.3  182.1  182.1  180.3  181.7  180.5
```

Calcule lo siguiente:

a. El rango de la muestra.

b. La varianza de la muestra s^2 de la definición. [*Sugerencia*: primero reste 180 de cada observación.]

c. La desviación estándar de la muestra.

d. s^2 utilizando el método directo.

45. Se determinó el valor del módulo de Young (GPa) de placas fundidas compuestas de ciertos sustratos intermetálicos y se obtuvieron las siguientes observaciones muestrales (**"Strength and Modulus of a Molybdenum-Coated Ti-25A1-10Nb-3U-1Mo Intermetallic", *J. of Materials Engr. and Performance*, 1997: 46-50):**

116.4 115.9 114.6 115.2 115.8

a. Calcule $\bar{x}$ y las desviaciones de la media.

b. Use las desviaciones calculadas en el inciso a) para obtener la varianza muestral y la desviación estándar muestral.

c. Calcule s^2 utilizando la fórmula computacional para el numerador S_{xx}.

d. Reste 100 de cada observación para obtener una muestra de valores transformados. Ahora calcule la varianza muestral de estos valores transformados y compárela con s^2 de los datos originales.

46. El artículo **"Effects of Short-Term Warming on Low and High Latitude Forest Ant Communities" (*Ecoshpere*, mayo de 2011, artículo 62)** describe un experimento en el que las observaciones de diferentes características fueron hechas usando minicámaras de tres tipos: 1) enfriamiento (marcos de policloruro de vinilo [PVC] cubiertos con tela de cortina), 2) control (sólo marcos de PVC) y 3) calentamiento (marcos de PVC recubiertos de plástico). Uno de los autores del artículo amablemente suministra los datos adjuntos de la diferencia entre las temperaturas del aire y del suelo (°C).

Enfriamiento	Control	Calentamiento
1.59	1.92	2.57
1.43	2.00	2.60
1.88	2.19	1.93
1.26	1.12	1.58
1.91	1.78	2.30
1.86	1.84	0.84
1.90	2.45	2.65
1.57	2.03	0.12
1.79	1.52	2.74
1.72	0.53	2.53
2.41	1.90	2.13
2.34		2.86
0.83		2.31
1.34		1.91
1.76		

a. Compare las medidas del centro para las tres muestras diferentes.

b. Calcule, interprete y compare las desviaciones estándar para las tres muestras diferentes.

c. La cuarta extendida para las tres muestras ¿transmite el mismo mensaje como lo hacen las desviaciones estándar sobre variabilidad relativa?

d. Construya una gráfica de caja comparativa (la cual se incluye en el artículo citado) y comente cualquier característica interesante.

47. Zinfandel es un popular vino tinto varietal producido casi exclusivamente en California. Es bastante controvertido entre los conocedores del vino porque su contenido en alcohol varía bastante de un productor a otro. En mayo de 2013 el autor visitó la página web **klwines.com**, seleccionó al azar

10 zinfandels entre los 325 disponibles y obtuvo los siguientes valores de contenido de alcohol (%):

14.8	14.5	16.1	14.2	15.9
13.7	16.2	14.6	13.8	15.0

a. Calcule e interprete varias medidas del centro.
b. Calcule la varianza muestral utilizando la fórmula definitoria.
c. Calcule la varianza muestral utilizando la fórmula de acceso directo después de restar 13 de cada observación.

48. El ejercicio 34 presentó los siguientes datos sobre concentración de endotoxina en polvo asentada obtenidos con una muestra de casas urbanas y una muestra de casas campestres:

U: 6.0 5.0 11.0 33.0 4.0 5.0 80.0 18.0 35.0 17.0 23.0
C: 4.0 14.0 11.0 9.0 9.0 8.0 4.0 20.0 5.0 8.9 21.0
9.2 3.0 2.0 0.3

a. Determine el valor de la desviación estándar muestral de cada muestra, interprete estos valores y luego contraste la variabilidad en las dos muestras. [*Sugerencia:* $\sum x_i = 237.0$ para la muestra urbana y $= 128.4$ para la muestra campestre; y $\sum x_i^2 = 10\,079$ para la muestra urbana y 1617.94 para la muestra campestre.]
b. Calcule la distancia entre cuartos de cada muestra y compare. ¿La distancia entre cuartos transmite el mismo mensaje sobre la variabilidad que las desviaciones estándar? Explique.
c. Los autores del artículo citado también proporcionan concentraciones de endotoxina en el polvo presente en bolsas captadoras de polvo:

U: 34.0 49.0 13.0 33.0 24.0 24.0 35.0 104.0 34.0 40.0 38.0 1.0
C: 2.0 64.0 6.0 17.0 35.0 11.0 17.0 13.0 5.0 27.0 23.0
28.0 10.0 13.0 0.2

Construya una gráfica de caja comparativa (como se hizo en el artículo citado) y compare y contraste las cuatro muestras.

49. Un estudio de la relación entre edad y varias funciones visuales (tales como agudeza y percepción de profundidad) reportó las siguientes observaciones en el área de la lámina esclerótica (mm^2) de las cabezas del nervio óptico humano (**"Morphometry of Nerve Fiber Bundle Pores in the Optic Nerve Head of the Human", *Experimental Eye Research*, 1988: 559-568**):

2.75 2.62 2.74 3.85 2.34 2.74 3.93 4.21 3.88
4.33 3.46 4.52 2.43 3.65 2.78 3.56 3.01

a. Calcule $\sum x_i$ y $\sum x_i^2$.
b. Use los valores calculados en el inciso a) para calcular la varianza muestral s^2 y luego la desviación estándar muestral s.

50. En 1997 una mujer demandó a un fabricante de teclados de computadora y lo acusó de que sus repetidas lesiones por el esfuerzo eran debido al teclado (*Genessy v. Digital Equipment Corp.*). El jurado le adjudicó $3.5 millones por el dolor y sufrimiento, pero la corte anuló dicha adjudicación por considerarla una compensación irrazonable. Al hacer esta determinación, la corte identificó un grupo "normativo" de 27 casos similares y especificó que una adjudicación razonable estaría dentro de dos desviaciones estándar de la media de las adjudicaciones en los 27 casos. Las 27 adjudicaciones fueron (en el rango de los $1000 dólares) 37, 60, 75, 115, 135, 140, 149, 150, 238, 290, 340, 410, 600, 750, 750, 750, 1050, 1100, 1139, 1150, 1200, 1200, 1250, 1576, 1700, 1825 y 2000, con las cuales $\sum x_i = 20\,179$, $\sum x_i^2 = 24\,657\,511$. ¿Cuál es la cantidad máxima posible que podría ser adjudicada conforme a la regla de dos desviaciones estándar?

51. El artículo **"A Thin-Film Oxygen Uptake Test for the Evaluation of Automotive Crankcase Lubricants" (*Lubric. Engr.*, 1984: 75-83)** reportó los siguientes datos sobre tiempo de inducción de oxidación (min) de varios aceites comerciales:

87 103 130 160 180 195 132 145 211 105 145
153 152 138 87 99 93 119 129

a. Calcule la varianza y la desviación estándar muestrales.
b. Si las observaciones se volvieran a expresar en horas, ¿cuáles serían los valores resultantes de la varianza de la muestra y la desviación estándar muestral? Responda sin llegar a expresarlas nuevamente.

52. Las primeras cuatro desviaciones de la media en una muestra de $n = 5$ tiempos de reacción fueron .3, .9, 1.0 y 1.3. ¿Cuál es la quinta desviación de la media? Proporcione una muestra para la cual estas sean las cinco desviaciones de la media.

53. Un fondo mutuo es un esquema de inversiones administrado por profesionales que invierten el dinero de muchas personas en una variedad de valores. Los fondos de crecimiento se centran principalmente en el aumento del valor de las inversiones, mientras que los fondos mezclados buscan un equilibrio entre ingresos corrientes y crecimiento. Aquí hay datos sobre la proporción de gastos (gastos en % de los activos, de **www.morningstar.com**) para las muestras de los 20 fondos de gran capitalización equilibrada y 20 fondos de crecimiento de gran capitalización ("gran capitalización" se refiere al tamaño de las empresas en las cuales se invierten los fondos; los tamaños de la población son 825 y 762, respectivamente):

Bal	1.03	1.23	1.10	1.64	1.30
	1.27	1.25	0.78	1.05	0.64
	0.94	2.86	1.05	0.75	0.09
	0.79	1.61	1.26	0.93	0.84
Gr	0.52	1.06	1.26	2.17	1.55
	0.99	1.10	1.07	1.81	2.05
	0.91	0.79	1.39	0.62	1.52
	1.02	1.10	1.78	1.01	1.15

a. Calcule y compare los valores de $\bar{x}$, $\tilde{x}$ y s para los dos tipos de fondos.
b. Construya una gráfica de caja comparativa para los dos tipos de fondos y comente acerca de las características interesantes.

54. El agarre se aplica para producir fuerzas superficiales normales que comprimen el objeto que se quiere aferrar. Los ejemplos incluyen a dos personas dándose la mano, o una enfermera apretando el antebrazo del paciente para detener el sangrado. El artículo **"Investigation of Grip Force, Normal Force, Contact Area, Hand Size, and Handle Size for Cylindrical Handles" (*Human Factors*, 2008: 734-744)** incluye los siguientes datos sobre la fuerza de prensión (N) para una muestra de 42 individuos:

16 18 18 26 33 41 54 56 66 68 87 91 95
98 106 109 111 118 127 127 135 145 147 149 151 168
172 183 189 190 200 210 220 229 230 233 238 244 259
294 329 403

a. Construya un diagrama de tallo y hojas sobre la base de repetir cada valor de tallo dos veces y comente sobre las características interesantes.

b. Determine los valores de los cuartos y distancia entre cuartos.

c. Construya una gráfica de caja basada en el resumen de cinco números y comente sobre sus características.

d. ¿Qué tan grande o pequeña tiene que ser una observación para calificarla como valor atípico? ¿Y cómo valor atípico extremo? ¿Hay valores atípicos?

e. ¿Por cuánto podría disminuir la observación 403, actualmente la más grande, sin afectar f_s?

55. He aquí una gráfica de tallo y hojas de los datos de tiempo de escape introducidos en el ejercicio 36 de este capítulo.

32	55
33	49
34	
35	6699
36	34469
37	03345
38	9
39	2347
40	23
41	
42	4

a. Determine el valor de la distancia entre cuartos.

b. ¿Hay algunos valores atípicos en la muestra? ¿Hay algún valor atípico extremo?

c. Construya una gráfica de caja y comente sobre sus características.

d. ¿En cuánto se podría disminuir la observación más grande, actualmente de 424, sin afectar el valor de la distancia entre cuartos?

56. Los siguientes datos sobre el contenido de alcohol destilado (%) para una muestra de 35 vinos de Oporto fueron extraídos del artículo **"A Method for the Estimation of Alcohol in Fortified Wines Using Hydrometer Baumé and Refractometer Brix" (*Amer. J. Enol. Vitic.*, 2006: 486–490)**. Cada valor es un promedio de dos medidas por duplicado.

16.35 18.85 16.20 17.75 19.58 17.73 22.75 23.78 23.25
19.08 19.62 19.20 20.05 17.85 19.17 19.48 20.00 19.97
17.48 17.15 19.07 19.90 18.68 18.82 19.03 19.45 19.37
19.20 18.00 19.60 19.33 21.22 19.50 15.30 22.25

Utilice los métodos de este capítulo, incluyendo un diagrama de caja que muestre los valores atípicos, para describir y resumir los datos.

57. Se seleccionó una muestra de 20 botellas de vidrio de un tipo particular y se determinó la resistencia de cada botella a la presión interna. Considere la siguiente información parcial sobre la muestra:

mediana = 202.2 cuarto inferior = 196.0
cuarto superior = 216.8

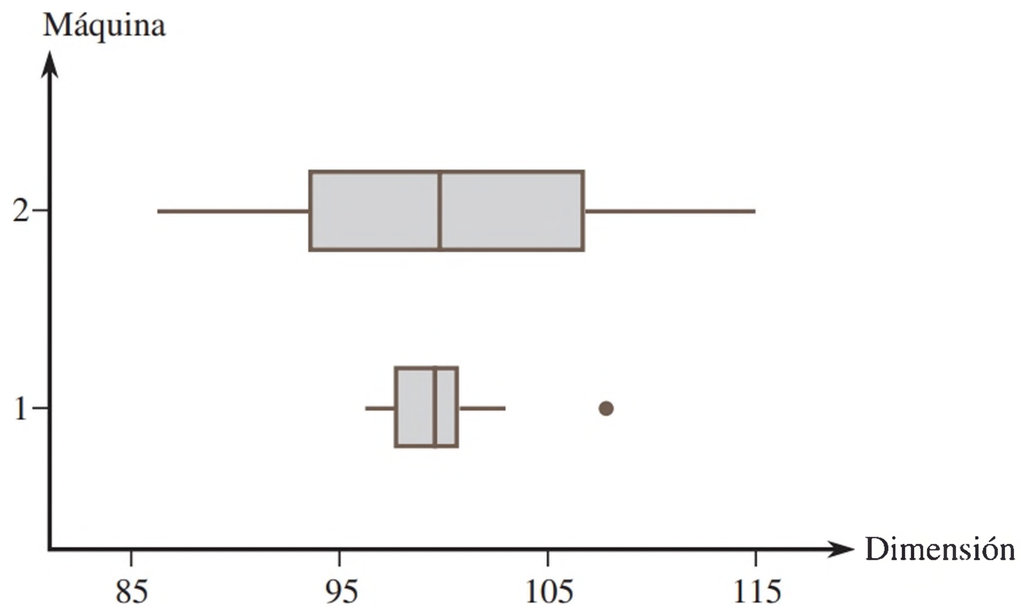
Las tres observaciones más pequeñas	125.8	188.1	193.7
Las tres observaciones más grandes	221.3	230.5	250.2

a. ¿Hay valores atípicos en la muestra? ¿Hay algún valor atípico extremo?

b. Construya una gráfica de caja que muestre los valores atípicos y comente sobre cualquier característica interesante.

58. Una compañía utiliza dos máquinas diferentes para fabricar piezas de cierto tipo. Durante un solo turno se obtuvo una muestra de $n = 20$ piezas producidas por cada máquina y se determinó el valor de una dimensión crítica particular de cada pieza. La gráfica de caja comparativa que aparece en la parte inferior de esta página se construyó con los datos resultantes. Compare y contraste las dos muestras.

Gráfica de caja comparativa para el ejercicio 58



59. Se determinó la concentración de cocaína (mg/L) mediante una muestra de individuos que murieron de delirio excitado (DE) inducido por el consumo de cocaína y mediante una muestra de aquellos que murieron de una sobredosis de cocaína sin delirio excitado; el tiempo de sobrevivencia de las personas en ambos grupos fue a lo sumo de 6 horas. Los datos adjuntos se tomaron de una gráfica de caja comparativa incluida en el artículo **"Fatal Excited Delirium Following Cocaine Use" (*J. of Forensic Sciences*, 1997: 25-31).**

DE	0	0	0	0	.1	.1	.1	.1	.2	.2	.3	.3
		.3	.4	.5	.7	.8	1.0	1.5	2.7	2.8		
		3.5	4.0	8.9	9.2	11.7	21.0					
DE	0	0	0	0	0	.1	.1	.1	.1	.2	.2	.2
	.3	.3	.3	.4	.5	.5	.6	.8	.9	1.0		
	1.2	1.4	1.5	1.7	2.0	3.2	3.5	4.1				
	4.3	4.8	5.0	5.6	5.9	6.0	6.4	7.9				
	8.3	8.7	9.1	9.6	9.9	11.0	11.5					
	12.2	12.7	14.0	16.6	17.8							

a. Determine las medianas, los cuartos y las distancias entre cuartos de las dos muestras.

b. ¿Existen algunos valores atípicos en una u otra muestra? ¿Algún valor atípico extremo?

c. Construya una gráfica de caja comparativa y utilícela como base para comparar y contrastar las muestras con DE y sin DE.

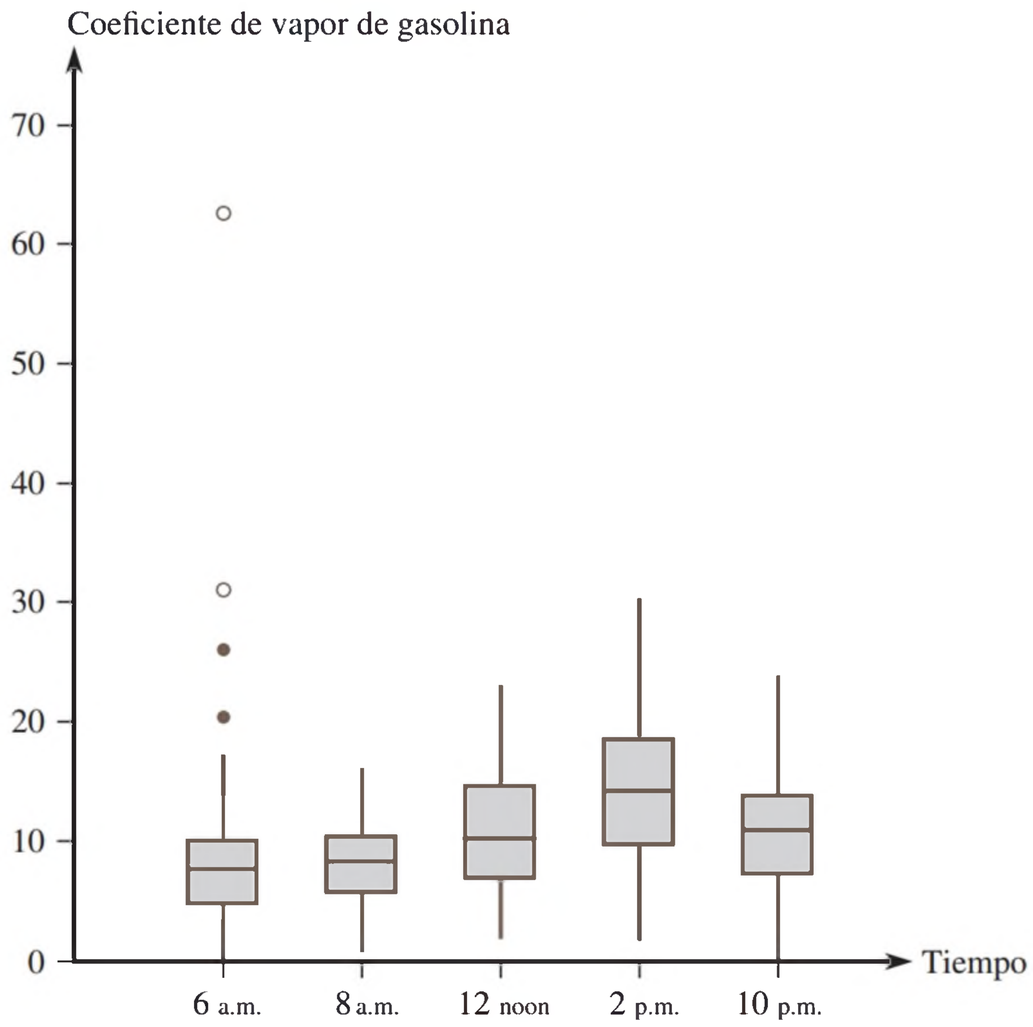
60. Se obtuvieron observaciones de resistencia al estallamiento (lb/pulg^2) mediante pruebas con soldaduras de cierre de tobera, así como con soldaduras para tobera de envases de producción (**"Proper Procedures Are the Key to Welding Radioactive Waste Cannisters", *Welding J.*, agosto de 1997: 61-67**).

Prueba	7200	6100	7300	7300	8000	7400
	7300	7300	8000	6700	8300	
Envase	5250	5625	5900	5900	5700	6050
	5800	6000	5875	6100	5850	6600

Construya una gráfica de caja comparativa y comente sobre las características interesantes (el artículo citado no incluía esta gráfica, pero los autores comentaron haber visto una).

61. La gráfica de caja comparativa adjunta de coeficientes de vapor de gasolina para vehículos en Detroit apareció en el artículo **"Receptor Modeling Approach to VOC Emission Inventory Validation" (*J. of Envir. Engr.*, 1995: 483-490).** Discuta las características interesantes.

Gráfica de caja comparativa para el ejercicio 61



EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS (62–83)

62. Considere la siguiente información sobre resistencia a la tensión final (lb/pulg) de una muestra de $n = 4$ probetas de alambre de cobre de zirconio duro (de **"Characterization Methods for Fine Copper Wire", *Wire J. Intl.*, agosto de 1997: 74–80**):

$\bar{x} = 76\,831$ $\quad s = 180$ $\quad x_i$ más pequeña $= 76\,683$

x_i más grande $= 77\,048$

Determine los valores de las dos observaciones muestrales intermedias (¡pero no lo haga mediante conjeturas sucesivas!).

63. Se tomó una muestra de 77 personas que trabajan en una oficina particular y se determinó el nivel de ruido (dBA) experimentado por cada individuo, mediante los siguientes datos (**"Acceptable Noise Levels for Construction Site Offices", *Building Serv. Engr. Research and Technology*, 2009: 87–94**).

55.3	55.3	55.3	55.9	55.9	55.9	55.9	56.1	56.1	56.1	56.1
56.1	56.1	56.8	56.8	57.0	57.0	57.0	57.8	57.8	57.8	57.9
57.9	57.9	58.8	58.8	58.8	59.8	59.8	59.8	62.2	62.2	63.8
63.8	63.8	63.9	63.9	63.9	64.7	64.7	64.7	65.1	65.1	65.1
65.3	65.3	65.3	65.3	67.4	67.4	67.4	67.4	68.7	68.7	68.7
68.7	69.0	70.4	70.4	71.2	71.2	71.2	73.0	73.0	73.1	73.1
74.6	74.6	74.6	74.6	79.3	79.3	79.3	79.3	83.0	83.0	83.0

Use algunos de los métodos estudiados en este capítulo para organizar, describir y resumir estos datos.

64. La corrosión por fricción es un proceso de desgaste que resulta de los movimientos oscilatorios tangenciales de pequeña amplitud en las piezas de una máquina. El artículo **"Grease Effect on Fretting Wear of Mild Steel" (*Industrial Lubrication and***

***Tribology*, 2008: 67-78)** incluye los siguientes datos sobre el desgaste de volumen (10^{-4} mm^3) para los aceites base que tienen cuatro diferentes viscosidades.

Viscocidad			Desgaste			
20.4	58.8	30.8	27.3	29.9	17.7	76.5
30.2	44.5	47.1	48.7	41.6	32.8	18.3
89.4	73.3	57.1	66.0	93.8	133.2	81.1
252.6	30.6	24.2	16.6	38.9	28.7	23.6

a. El *coeficiente de variación muestral* $100s/\bar{x}$ evalúa el grado de variabilidad respecto a la media (específicamente, la desviación estándar como porcentaje de la media). Calcule el coeficiente de variación para la muestra en cada viscosidad. Después, compare los resultados y coméntelos.

b. Construya una gráfica de caja comparativa de los datos y comente las características interesantes.

65. La distribución de frecuencia adjunta de observaciones de resistencia a la fractura (MPa) de barras de cerámica cocidas en un horno particular aparece en el artículo **"Evaluating Tunnel Kiln Performance" (*Amer. Ceramic Soc. Bull.*, agosto de 1997: 59-63).**

Clase	81−<83	83−<85	85−<87	87−<89	89−<91
Frecuencia	6	7	17	30	43
Clase	91−<93	93−<95	95−<97	97−<99	
Frecuencia	28	22	13	3	

a. Construya un histograma basado en frecuencias relativas y comente sobre cualquier característica interesante.

b. ¿Qué proporción de las observaciones de resistencia son al menos de 85? ¿Y menores de 95?

c. Aproximadamente, ¿qué proporción de las observaciones son menores de 90?

66. Una deficiencia del microelemento selenio en la dieta puede impactar negativamente en el crecimiento, la inmunidad, la función muscular y neuromuscular y en la fertilidad. La introducción de suplementos de selenio en vacas lecheras se justifica cuando las pasturas contienen niveles bajos de dicho elemento. Los autores del artículo **"Effects of Short-Term Supplementation with Selenised Yeast on Milk Production and Composition of Lactating Cows" (*Australian J. of Dairy Tech.*, 2004: 199–203)** aportan los siguientes datos sobre la concentración de selenio en la leche (mg/L) obtenidos mediante una muestra de vacas a las que se les administró un suplemento de selenio, y una muestra de control de vacas a las que no se les administró ningún suplemento, tanto al inicio como después de un periodo de 9 días.

Obs	Se inicial	Contenido inicial	Se final	Contenido Final
1	11.4	9.1	138.3	9.3
2	9.6	8.7	104.0	8.8
3	10.1	9.7	96.4	8.8
4	8.5	10.8	89.0	10.1
5	10.3	10.9	88.0	9.6
6	10.6	10.6	103.8	8.6
7	11.8	10.1	147.3	10.4
8	9.8	12.3	97.1	12.4
9	10.9	8.8	172.6	9.3
10	10.3	10.4	146.3	9.5
11	10.2	10.9	99.0	8.4
12	11.4	10.4	122.3	8.7
13	9.2	11.6	103.0	12.5
14	10.6	10.9	117.8	9.1
15	10.8		121.5	
16	8.2		93.0	

a. ¿Parecen similares las concentraciones iniciales de Se en las muestras de suplemento y en las muestras de control? Use varias técnicas de este capítulo para resumir los datos y responder la pregunta.

b. De nuevo use métodos de este capítulo para resumir los datos y luego describa cómo los valores finales de concentración de Se en el grupo de tratamiento difieren de aquellos en el grupo de control.

67. La *estenosis aórtica* se refiere al estrechamiento de la válvula aórtica en el corazón. El artículo **"Correlation Analysis of Stenotic Aortic Valve Flow Patterns Using Phase Contrast MRI" (*Annals of Biomed. Engr.*, 2005: 878-887)** aporta los siguientes datos sobre el diámetro de la raíz aórtica (cm) y el género de una muestra de pacientes con varios grados de estenosis aórtica:

H: 3.7 3.4 3.7 4.0 3.9 3.8 3.4 3.6 3.1 4.0 3.4 3.8 3.5

M: 3.8 2.6 3.2 3.0 4.3 3.5 3.1 3.1 3.2 3.0

a. Compare y contraste los diámetros observados en los dos géneros.

b. Calcule una media recortada 10% de cada una de las dos muestras y compare las demás medidas del centro (para la muestra de hombres se debe utilizar el método de interpolación que se menciona en la sección 1.3).

68. **a.** ¿Con qué valor de c es mínima la cantidad $\sum(x_i - c)^2$? [*Sugerencia:* Saque la derivada respecto a c, iguale a 0 y resuelva.]

b. Utilizando el resultado del inciso a), ¿cuál de las dos cantidades $\sum(x_i - \bar{x})^2$ y $\sum(x_i - \mu)^2$ es más pequeña que la otra (suponiendo que $\bar{x} \neq \mu$)?

69. **a.** Sean a y b constantes y sea $y_i = ax_i + b$ con $i = 1, 2, \ldots, n$. ¿Cuáles son las relaciones entre $\bar{x}$ y $\bar{y}$ y entre s_x^2 y s_y^2?

b. Una muestra de temperaturas para iniciar una cierta reacción química dio un promedio muestral (°C) de 87.3 y una desviación estándar muestral de 1.04. ¿Cuáles son el promedio muestral y la desviación estándar medidos en °F? [*Sugerencia:* $F + \frac{9}{5}C + 32$.]

70. El elevado consumo de energía que ocurre durante el ejercicio continúa incluso después de que termina la actividad. Puesto que las calorías quemadas debido al ejercicio contribuyen a la pérdida de peso además de tener otras consecuencias, es importante entender el proceso. El artículo **"Effect of Weight Training Exercise and Treadmill Exercise on Post-Exercise**

Oxygen Consumption" (*Medicine and Science in Sports and Exercise*, 1998: 518-522) reporta los datos adjuntos tomados de un estudio en el cual se midió el consumo de oxígeno (litros) de forma continua durante 30 minutos de cada uno de 15 sujetos después de un entrenamiento con pesas, así como después de una sesión de ejercicio en una caminadora.

Sujeto	1	2	3	4	5	6	7
Pesas (x)	14.6	14.4	19.5	24.3	16.3	22.1	23.0
Caminadora (y)	11.3	5.3	9.1	15.2	10.1	19.6	20.8
Sujeto	8	9	10	11	12	13	14	15
Pesas (x)	18.7	19.0	17.0	19.1	19.6	23.2	18.5	15.9
Caminadora (y)	10.3	10.3	2.6	16.6	22.4	23.6	12.6	4.4

a. Construya una gráfica de caja comparativa de las observaciones tanto del ejercicio con pesas como en la caminadora y comente sobre lo que ve.

b. Debido a que estos datos se muestran en pares (x, y), con mediciones de x y y de la misma variable en dos condiciones distintas, es natural centrarse en las diferencias que existen en ellos: $d_1 = x_1 - y_1, \ldots, d_n = x_n - y_n$. Construya una gráfica de caja de las diferencias muestrales. ¿Qué sugiere la gráfica?

71. La siguiente es una descripción dada por Minitab de los datos de resistencia del ejercicio 13.

```
Variable    N    Mean Median TrMean  StDev SE Mean
resistencia 153135.39135.40 135.41   4.59    0.37

Variable    Minimum    Maximum        Q1        Q3
resistencia  122.20     147.70    132.95    138.25
```

a. Comente sobre cualquier característica interesante (los cuartiles y los cuartos son virtualmente idénticos en este caso).

b. Construya una gráfica de caja de los datos basada en los cuartiles y comente sobre lo que ve.

72. Los desórdenes y síntomas de ansiedad con frecuencia pueden ser tratados exitosamente con benzodiazepina. Se sabe que los animales expuestos a estrés exhiben una disminución de la ligadura del receptor de benzodiazepina en la corteza frontal. El artículo **"Decreased Benzodiazepine Receptor Binding in Prefrontal Cortex in Combat-Related Posttraumatic Stress Disorder" (*Amer. J. of Psychiatry*, 2000: 1120–1126)** describe el primer estudio de ligadura del receptor de benzodiazepina en individuos que sufren trastorno por estrés postraumático (PTSD, por sus siglas en inglés). Los datos anexos sobre una medición de ligadura al receptor (volumen de distribución ajustado) se tomaron de una gráfica que aparece en el artículo.

PTSD: 10, 20, 25, 28, 31, 35, 37, 38, 38, 39, 39, 42, 46

Saludables: 23, 39, 40, 41, 43, 47, 51, 58, 63, 66, 67, 69, 72

Use varios métodos de este capítulo para describir y resumir los datos.

73. El artículo **"Can We Really Walk Straight?" (*Amer. J. of Physical Anthropology*, 1992: 19-27)** reporta sobre un experimento en el cual a cada uno de 20 hombres saludables se le pidió que caminara en línea recta hacia un punto a 60 m de distancia a velocidad normal. Considere las siguientes observaciones de cadencia (número de pasos por segundo):

.95	.85	.92	.95	.93	.86	1.00	.92	.85	.81
.78	.93	.93	1.05	.93	1.06	1.06	.96	.81	.96

Use los métodos desarrollados en este capítulo para resumir los datos; incluya una interpretación o discusión en los casos en que sea apropiado. [*Nota*: El autor del artículo utilizó un análisis estadístico un tanto complejo para concluir que las personas no pueden caminar en línea recta para lo cual sugirió varias explicaciones.]

74. La **moda** de un conjunto de datos numéricos es el valor que ocurre con más frecuencia en el conjunto.

a. Determine la moda de los datos de cadencia dados en el ejercicio 73.

b. Para una muestra categórica, ¿cómo definiría la categoría modal?

75. Se seleccionaron especímenes de tres tipos diferentes de cable, se determinó el límite de fatiga (MPa) de cada espécimen y se obtuvieron los datos adjuntos.

Tipo 1	350	350	350	358	370	370	370	371
	371	372	372	384	391	391	392	
Tipo 2	350	354	359	363	365	368	369	371
	373	374	376	380	383	388	392	
Tipo 3	350	361	362	364	364	365	366	371
	377	377	377	379	380	380	392	

a. Construya una gráfica de caja comparativa y comente sobre las similitudes y diferencias.

b. Construya una gráfica de puntos comparativa (una gráfica de puntos de cada muestra con una escala común). Comente sobre las similitudes y diferencias.

c. La gráfica de caja comparativa del inciso a) ¿aporta alguna evaluación informativa de similitudes y diferencias? Explique su razonamiento.

76. Las tres medidas centrales introducidas en este capítulo son la media, la mediana y la media recortada. Dos medidas centrales adicionales que de vez en cuando se utilizan son el *rango medio* el cual es el promedio de las observaciones más pequeñas y más grandes, y el cuarto medio el cual es el promedio de los dos cuartos. ¿Cuáles de estas cinco medidas centrales son resistentes a los efectos de los valores atípicos y cuáles no? Explique su razonamiento.

77. Los autores del artículo **"Predictive Model for Pitting Corrosion in Buried Oil and Gas Pipelines" (*Corrosion* 2009: 332–342)** proporcionan los datos en los cuales basaron sus investigaciones.

a. Considere la muestra siguiente de 61 mediciones de la profundidad máxima, a la cual se corroen los pozos (mm) del tipo de tubería enterrada en suelo de arcilla limo.

0.41	0.41	0.41	0.41	0.43	0.43	0.43	0.48	0.48
0.58	0.79	0.79	0.81	0.81	0.81	0.91	0.94	0.94
1.02	1.04	1.04	1.17	1.17	1.17	1.17	1.17	1.17
1.17	1.19	1.19	1.27	1.40	1.40	1.59	1.59	1.60
1.68	1.91	1.96	1.96	1.96	2.10	2.21	2.31	2.46
2.49	2.57	2.74	3.10	3.18	3.30	3.58	3.58	4.15
4.75	5.33	7.65	7.70	8.13	10.41	13.44		

Construya una gráfica de tallos y hojas en la que los dos valores más grandes se muestran en la última fila HI.

b. Remítase de nuevo el inciso a) y construya un histograma basado en las ocho clases con 0 como el límite inferior de la primera clase y con anchos de clase de .5, .5, .5, 1, 2 y 5, respectivamente.

c. La gráfica de caja comparativa de Minitab que se observa al final de esta columna muestra lotes de la profundidad de los pozos para cuatro tipos diferentes de suelos. Describa sus características importantes.

78. Considere una muestra $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y suponga que los valores de $\bar{x}$, s^2 y s han sido calculados.

a. Sea $y_i = x_i - \bar{x}$, con $i = 1, \ldots, n$. ¿Cómo se comparan los valores de s^2 y s de las y_i con los valores correspondientes de las x_i? Explique.

b. Sea $z_i = (x_i - \bar{x})/s$ con $i = 1, \ldots, n$. ¿Cuáles son los valores de la varianza muestral y la desviación estándar muestral de las z_i?

79. Sea que $\bar{x}_n$ y s_n^2 denotan la media y la varianza de la muestra $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y $\bar{x}_{n+1}$ y s_{n+1}^2 denotan estas cantidades cuando se agrega una observación adicional a la muestra.

a. Demuestre cómo se puede calcular $\bar{x}_{n+1}$ con x_n y x_{n+1}.

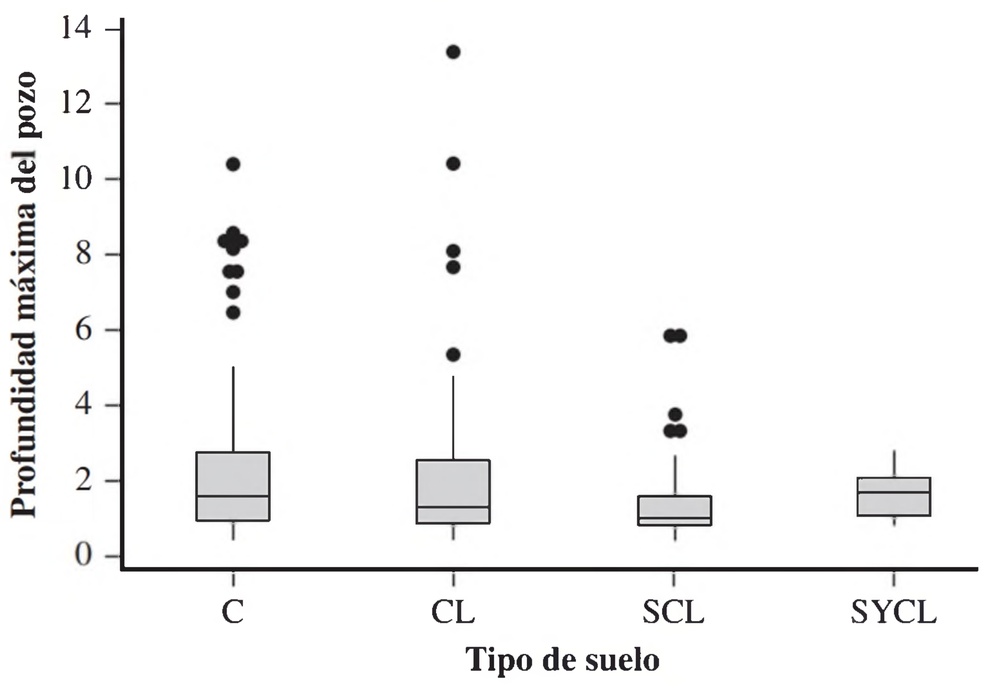
b. Demuestre que

$$ns_{n+1}^2 = (n-1)s_n^2 + \frac{n}{n+1}(x_{n+1} - \bar{x}_n)^2$$

de modo que s_{n+1}^2 pueda ser calculada con x_{n+1}, $\bar{x}_n$ y s_n^2.

c. Suponga que una muestra de 15 torzales de hilo dio por resultado una media muestral del alargamiento del hilo de 12.58 mm y una desviación estándar muestral de .512 mm. Un 16^{av} de torzal resulta en un valor de alargamiento de 11.8. ¿Cuáles son los valores de la media muestral y la desviación estándar muestral de las 16 observaciones de alargamiento?

Gráfica de caja comparativa para el ejercicio 77



80. Por lo general las distancias que recorren las rutas de autobuses para cualquier sistema particular de tránsito varían de una ruta a otra. El artículo **"Planning of City Bus Routes" (*J. of the Institution of Engineers*, 1995: 211–215)** aporta la siguiente información sobre las distancias (km) de un sistema particular.

Distancia de recorrido	6−<8	8−<10	10−<12	12−<14	14−<16
Frecuencia	6	23	30	35	32
Distancia de recorrido	16−<18	18−<20	20−<22	22−<24	24−<26
Frecuencia	48	42	40	28	27
Distancia de recorrido	26−<28	28−<30	30−<35	35−<40	40−<45
Frecuencia	26	14	27	11	2

a. Trace un histograma correspondiente a estas frecuencias.

b. ¿Qué proporción de estas distancias de ruta es menor de 20? ¿Qué proporción de estas rutas tiene distancias de recorrido de al menos 30?

c. ¿Aproximadamente cuál es el valor del 90º percentil de la distribución de distancia de recorrido de las rutas?

d. Aproximadamente, ¿cuál es la mediana de la distancia de los recorridos?

81. Un estudio realizado para investigar la distribución de tiempo de frenado total (tiempo de reacción más el tiempo del cambio entre acelerar y frenar, en ms) en condiciones de manejo reales a 60 km/h da la siguiente información sobre la distribución de los tiempos **("A Field Study on Braking Responses During Driving", *Ergonomics*, 1995: 1903–1910):**

media = 535 mediana = 500 moda = 500
d. estándar = 96 mínima = 220 máxima = 925
5º percentil = 400 10º percentil = 430
90º percentil = 640 95º percentil = 720

¿Qué se puede concluir sobre la forma de un histograma de estos datos? Explique su razonamiento.

82. Los datos muestrales $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en ocasiones representan una **serie de tiempo**, donde x_t = el valor observado de una variable de respuesta x en el tiempo t. A menudo la serie observada muestra gran cantidad de variación aleatoria, lo que dificulta estudiar el comportamiento a plazos más largos. En tales situaciones es deseable producir una versión suavizada de la serie. Una técnica para hacerlo implica el **suavizamiento exponencial**. Se elige el valor de una constante de suavizamiento α $(0 < \alpha < 1)$. Luego con valor suavizado en el tiempo t, se hace $\bar{x}_1 = x_1$, y para $t = 2, 3, \ldots, n$, $\bar{x}_t = \alpha x_t + (1 - \alpha)\bar{x}_{t-1}$.

a. Considere la siguiente serie de tiempo en la cual x_t = temperatura (°F) del efluente en una planta de tratamiento de aguas negras en el día t: 47, 54, 53, 50, 46, 46, 47, 50, 51, 50, 46, 52, 50, 50. Trace cada x_t contra t en un sistema de coordenadas de dos dimensiones (una gráfica de tiempo-serie). ¿Parece haber algún patrón?

b. Calcule las $\bar{x}_t$ con $\alpha = .1$. Repita con $\alpha = .5$. ¿Qué valor de α da una serie $\bar{x}_t$ más atenuada?

c. Sustituya $\bar{x}_{t-1} = \alpha x_{t-1} + (1 - \alpha)\bar{x}_{t-2}$ en el miembro de la derecha de la expresión para $\bar{x}_t$, luego sustituya $\bar{x}_{t-2}$ en función de x_{t-2} y $\bar{x}_{t-3}$, y así sucesivamente. ¿De cuántos de los valores x_t, x_{t-1}, ..., x_1 depende $\bar{x}_t$? ¿Qué le sucede al coeficiente $\bar{x}_{t-k}$ conforme k se incrementa?

d. Remítase al inciso c). Si t es grande, ¿qué tan sensible es a la inicialización? Explique.

[*Nota*: Una referencia pertinente es el artículo **"Simple Statistics for Interpreting Environmental Data"**, ***Water Pollution Control Fed. J.*, 1981: 167–175.**]

83. Considere las observaciones numéricas $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Con frecuencia interesa saber si las x_i están (al menos en forma aproximada) simétricamente distribuidas en torno a algún mismo valor. Si n es al menos grande de manera moderada, el grado de simetría puede ser valorado con una gráfica de tallo y hojas o con un histograma. Sin embargo, si n no es muy grande las gráficas mencionadas no son informativas en particular. Considere la siguiente alternativa. Que y_1 denote la x_i más pequeña, y_2 la segunda x_i más pequeña, y así sucesivamente. Luego grafique los siguientes pares como puntos en un sistema de coordenadas de dos dimensiones $(y_n - \tilde{x}, \tilde{x} - y_1)$, $(y_{n-1} - \tilde{x}, \tilde{x} - y_2)$, $(y_{n-2} - \tilde{x}, \tilde{x} - y_3), \ldots$. Existen $n/2$ puntos cuando n es par y $(n - 1)/2$ cuando n es impar.

a. ¿Qué apariencia tiene esta gráfica cuando la simetría en los datos es perfecta? ¿Qué apariencia tiene cuando las observaciones se alargan más sobre la mediana que debajo de ella (una larga cola superior)?

b. Los datos adjuntos sobre la cantidad de lluvia (acres-pies) producida por 26 nubes bombardeadas se tomaron del artículo **"A Bayesian Analysis of a Multiplicative Treatment Effect in Weather Modification" (*Technometrics*, 1975: 161-166).** Construya la gráfica y comente sobre el grado de simetría o la naturaleza del alejamiento de la misma.

4.1	7.7	17.5	31.4	32.7	40.6	92.4
115.3	118.3	119.0	129.6	198.6	200.7	242.5
255.0	274.7	274.7	302.8	334.1	430.0	489.1
703.4	978.0	1656.0	1697.8	2745.6		

84. Considere una muestra $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con par n. Sea que $\bar{x}_L$ y $\bar{x}_U$ denotan el promedio de las observaciones $n/2$ más pequeñas y las $n/2$ más grandes, respectivamente. Demuestre que la desviación absoluta de la mediana para esta muestra satisface

$$\Sigma|x_i - \tilde{x}|/n = (\bar{x}_U - \bar{x}_L)/2$$

Después demuestre que si n es impar y se calculan los dos promedios después de excluir la mediana de cada mitad y reemplazar n de la izquierda con $n - 1$, se obtiene el resultado correcto. [*Sugerencia*: Separe la suma en dos partes, la primera que implique las observaciones menores o iguales a la mediana y la segunda que contenga las observaciones mayores o iguales a la mediana.]

BIBLIOGRAFÍA

Albert, Jim y Maria Rizzo, *R by Example, Springer*, Nueva York, 2012. Una introducción actualizada que trata acerca de la aplicación de técnicas estadísticas más que de los detalles del lenguaje de programación R.

Chambers, John *et al., Graphical Methods for Data Analysis*, Brooks/Cole, Pacific Grove, CA, 1983. Una presentación muy recomendable de diversas metodologías gráficas y pictóricas de estadística.

Cleveland, William, *Visualizing Data*, Hobart Press, Summit, NJ, 1993. Un entretenido recorrido de las técnicas pictóricas.

Freedman, David, Robert Pisani y Roger Purves, *Statistics* (4ª ed.), Norton, Nueva York, 2007. Un estudio excelente y muy "no matemático" razonamiento de la estadística básica y la metodología.

Hoaglin, David, Frederick Mosteller y John Tukey, *Understanding Robust and Exploratory Data Analysis*, Wiley, Nueva York, 1983. Explica por qué y también cómo deben emplearse los métodos exploratorios; es bueno para los detalles de las gráficas de tallo y hojas y para las gráficas de caja.

Moore, David y William Notz, *Statistics: Concepts and Controversies* (7ª ed.), Freeman, San Francisco, 2009. Un libro en edición rústica muy legible y entretenido que contiene un análisis intuitivo de los problemas relacionados con el muestreo y el diseño de experimentos.

Peck, Roxy y Jay Devore, *Statistics: The Exploration and Analysis of Data* (7ª ed.), Cengage Brooks/Cole, Belmont, CA, 2012. Los primeros capítulos brindan un estudio no muy matemático de métodos para describir y resumir datos.

Peck, Roxy *et al.* (eds.), *Statistics: A Guide to the Unknown* (4ª ed.), Cengage Learning, Belmont, CA, 2006. Contiene muchos artículos cortos no matemáticos que describen diversas aplicaciones de la estadística.

Verzani, John, *Using R for Introductory Statistics*, Chapman and Hall/CRC, Boca Ratón, FL, 2005. Una muy buena introducción para el paquete de software R.

2 Probabilidad

INTRODUCCIÓN

El término **probabilidad** se refiere al estudio del azar y la incertidumbre en cualquier situación en la que varios posibles sucesos pueden ocurrir; la disciplina de la probabilidad proporciona métodos para cuantificar las oportunidades y probabilidades asociadas con los varios sucesos. El lenguaje de probabilidad se utiliza constantemente de manera informal tanto en el contexto escrito como en el hablado. Algunos ejemplos incluyen enunciados tales como "Es probable que el índice Dow-Jones se incremente al final del año", "Existen 50–50 probabilidades de que la persona en posesión de su cargo busque la reelección", "Probablemente se ofrezca al menos una sección del curso el próximo año", "Las probabilidades favorecen la rápida solución de la huelga", "Se espera que se vendan al menos 20 000 boletos para el concierto". En este capítulo se introducen algunos conceptos de probabilidad, se indica cómo pueden ser interpretadas las probabilidades y se demuestra cómo pueden ser aplicadas las reglas de probabilidad para calcular las probabilidades de muchos eventos interesantes. La metodología de la probabilidad permite expresar en lenguaje preciso enunciados informales como los expresados.

El estudio de la probabilidad como una rama de las matemáticas se remonta más de 300 años y su origen se relaciona con cuestiones que implican juegos de azar. Muchos libros se han ocupado exclusivamente de la probabilidad, pero el objetivo en este caso es abarcar sólo la parte de la materia que tiene más aplicación directa en problemas de inferencia estadística.

2.1 Espacios muestrales y eventos

Un **experimento** es cualquier acción o proceso cuyo resultado está sujeto a la incertidumbre. Aunque la palabra *experimento* en general sugiere una situación de prueba cuidadosamente controlada en un laboratorio, aquí se usa en un sentido mucho más amplio. Por tanto, experimentos que pueden ser interesantes incluyen lanzar al aire una moneda una o varias veces, seleccionar una carta o más de un mazo, pesar una hogaza de pan, medir el tiempo del recorrido entre la casa y el trabajo en una mañana particular, obtener tipos de sangre de un grupo de individuos, o medir las resistencias a la compresión de diferentes vigas de acero.

El espacio muestral de un experimento

DEFINICIÓN

El **espacio muestral** de un experimento, denotado por $\mathcal{S}$, es el conjunto de todos los posibles resultados de dicho experimento.

EJEMPLO 2.1 El experimento más simple en el que aplica la probabilidad es aquel con dos posibles resultados. Tal experimento consiste en examinar una soldadura para saber si está defectuosa. El espacio muestral de este experimento se abrevia como $\mathcal{S} = \{N, D\}$, donde N representa no defectuosa, D representa defectuosa y los paréntesis se utilizan para encerrar los elementos de un conjunto. Otro experimento como este implicaría lanzar al aire una tachuela y observar si cae punta arriba (U) o punta abajo (D), con espacio muestral $\mathcal{S} = \{U, D\}$; otro más consistiría en observar el sexo del siguiente niño nacido en el hospital, con $\mathcal{S} = \{M, F\}$. ■

EJEMPLO 2.2 Si se examinan tres soldaduras en secuencia y se anota el resultado de cada examen, entonces un resultado del experimento es cualquier secuencia de letras N y D de longitud 3, por tanto

$$\mathcal{S} = \{NNN, NND, NDN, NDD, DNN, DND, DDN, DDD\}$$

Si se hubiera lanzado una tachuela tres veces, el espacio muestral se obtendría reemplazando N por U en la expresión anterior para $\mathcal{S}$, y con un cambio de notación similar se obtendría el espacio muestral para el experimento en el cual se observan los sexos de tres niños recién nacidos. ■

EJEMPLO 2.3 Dos gasolineras están localizadas en cierta intersección. Cada una dispone de seis bombas de gasolina. Considere el experimento en el cual se determina el número de bombas en uso a una hora particular del día en cada una de las gasolineras. Un resultado experimental especifica cuántas bombas están en uso en la primera gasolinera y cuántas están en uso en la segunda. Un posible resultado es (2, 2), otro es (4, 1) y otro más es (1, 4). Los 49 resultados en $\mathcal{S}$ se muestran en la tabla adjunta. El espacio muestral del experimento en el cual un dado de seis lados es lanzado dos veces se obtiene eliminando la fila 0 y la columna 0 de la tabla, lo cual da 36 resultados.

		Segunda estación						
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
	0	(0, 0)	(0, 1)	(0, 2)	(0, 3)	(0, 4)	(0, 5)	(0, 6)
	1	(1, 0)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
	2	(2, 0)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
Primera estación	**3**	(3, 0)	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
	4	(4, 0)	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
	5	(5, 0)	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
	6	(6, 0)	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

■

EJEMPLO 2.4 Un porcentaje bastante grande de programas C++ escritos en una empresa particular, se compilan en la primera ejecución, pero algunos otros no (un *compilador* es un programa que traduce el código fuente, en este caso programas C++, en lenguaje de máquina para que los programas puedan ser ejecutados). Supongamos que un experimento consiste en seleccionar y compilar programas C++ en este lugar uno por uno hasta encontrar uno que se compile en la primera ejecución. Se denota mediante S (éxito) un programa que se compila en la primera ejecución y uno que no lo hace se denota mediante F (falla). Aunque tal vez no sea muy probable, un posible resultado de este experimento es que los primeros 5 (o 10 o 20 o ...) sean F y el siguiente sea S. Es decir, para cualquier entero positivo n, es posible que se tenga que examinar n programas antes de ver la primera S. El espacio muestral es $\mathcal{S} = \{S, FS, FFS, FFFS, \ldots\}$, el cual contiene un número infinito de posibles resultados. La misma forma abreviada del espacio muestral es apropiada para un experimento en el cual, a partir de una hora específica, se anota el sexo de cada recién nacido hasta que nazca un varón. ■

Eventos

En el estudio de la probabilidad, interesan no sólo los resultados individuales de $\mathcal{S}$ sino también varias recopilaciones de los resultados de $\mathcal{S}$.

DEFINICIÓN

> Un **evento** es cualquier recopilación (subconjunto) de resultados contenidos en el espacio muestral $\mathcal{S}$. Un evento es **simple** si consiste en exactamente un resultado y **compuesto** si consiste en más de un resultado.

Cuando se realiza un experimento se dice que ocurre un evento particular A si el resultado experimental resultante está contenido en A. En general, ocurrirá exactamente un evento simple, pero muchos eventos compuestos ocurrirán al mismo tiempo.

EJEMPLO 2.5 Considere un experimento en el cual cada tres vehículos que toman la salida de una autopista particular viran ya sea a la izquierda (L) o a la derecha (R) al final de la rampa de salida. Los ocho posibles resultados que constituyen el espacio muestral son LLL, RLL, LRL, LLR, LRR, RLR, RRL y RRR. Así pues existen ocho eventos simples, entre los cuales están $E_1 = \{LLL\}$, $E_5 = \{LRR\}$. Algunos eventos compuestos incluyen

$A = \{RLL, LRL, LLR\}$ = el evento en que sólo uno de los tres vehículos vira a la derecha

$B = \{LLL, RLL, LRL, LLR\}$ = el evento en que al menos uno de los vehículos vira a la derecha

$C = \{LLL, RRR\}$ = el evento en que los tres vehículos viran en la misma dirección

Suponga que cuando se realiza el experimento, el resultado es LLL. Entonces ha ocurrido el evento simple E_1 y, por tanto, también comprende los eventos B y C (pero no A). ■

EJEMPLO 2.6 (Continuación del ejemplo 2.3) Cuando se observa el número de bombas en uso en cada una de dos gasolineras de seis bombas, existen 49 posibles resultados, por lo que existen 49 eventos simples: $E_1 = \{(0, 0)\}$, $E_2 = \{(0, 1)\}$, ..., $E_{49} = \{(6, 6)\}$. Ejemplos de eventos compuestos son

$A = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$ = el evento en que el número de bombas en uso es el mismo en ambas gasolineras

$B = \{(0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0)\}$ = el evento en que el número total de bombas en uso es cuatro

$C = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ = el evento en que a lo sumo una bomba está en uso en cada gasolinera. ■

EJEMPLO 2.7 (Continuación del ejemplo 2.4) El espacio muestral del experimento del programa de compilación contiene un número infinito de resultados, por lo que existe un número infinito de eventos simples. Los eventos compuestos incluyen

$A = \{S, FS, FFS\}$ = el evento en que cuando mucho se examinan tres programas

$E = \{FS, FFFS, FFFFFS, \ldots\}$ = el evento en que se examina un número par de programas ■

Algunas relaciones de la teoría de conjuntos

Un evento es simplemente un conjunto, así que las relaciones y los resultados de la teoría elemental de conjuntos pueden ser utilizados para estudiar eventos. Se utilizarán las siguientes operaciones para crear eventos nuevos a partir de los ya dados.

DEFINICIÓN

1. El **complemento** de un evento A, denotado por A', es el conjunto de todos los resultados en $\mathcal{S}$ que no están contenidos en A.
2. La **unión** de dos eventos A y B, denotados por $A \cup B$ y leídos "A *o* B", es el evento que consiste en todos los resultados que están *en A o en B o en ambos eventos* (de tal suerte que la unión incluya resultados en los que ocurren tanto A como B, así también resultados donde ocurre exactamente uno), es decir, todos los resultados en al menos uno de los eventos.
3. La **intersección** de dos eventos A y B, denotada por $A \cap B$ y leída "A *y* B", es el evento que consiste en todos los resultados que están *tanto en A como en B*.

EJEMPLO 2.8 (Continuación del ejemplo 2.3) Para el experimento en el cual se observa el número de bombas en uso en una sola gasolinera de seis bombas, sea $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ y $C = \{1, 3, 5\}$. Por tanto

$$A' = \{5, 6\}, \quad A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \mathcal{S}, \quad A \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\},$$
$$A \cap B = \{3, 4\}, \quad A \cap C = \{1, 3\}, (A \cap C)' = \{0, 2, 4, 5, 6\}$$ ■

EJEMPLO 2.9 (Continuación del ejemplo 2.4) En el experimento de compilación de programas defina A, B y C como

$$A = \{S, FS, FFS\}, \quad B = \{S, FFS, FFFFS\}, \quad C = \{FS, FFFS, FFFFFS, \ldots\}$$

Por tanto

$$A' = \{FFFS, FFFFS, FFFFFS, \ldots\}, \quad C' = \{S, FFS, FFFFS, \ldots\}$$
$$A \cup B = \{S, FS, FFS, FFFFS\}, \quad A \cap B = \{S, FFS\}$$ ■

En ocasiones A y B no tienen resultados en común, por lo que la intersección de A y B no contiene resultados.

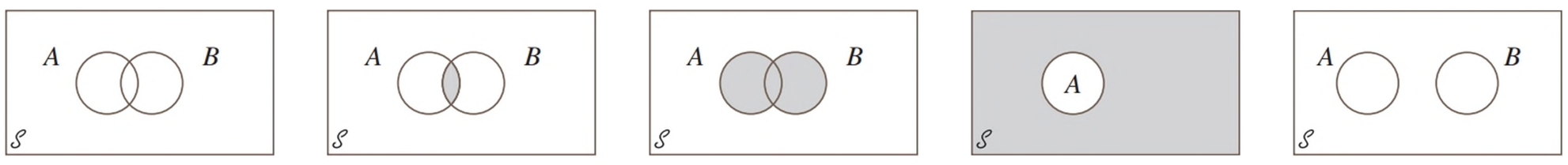
DEFINICIÓN

Sea que $\emptyset$ denote el *evento nulo* (el evento sin resultados). Cuando $A \cap B = \emptyset$, se dice que A y B son eventos **mutuamente excluyentes** o **disjuntos.**

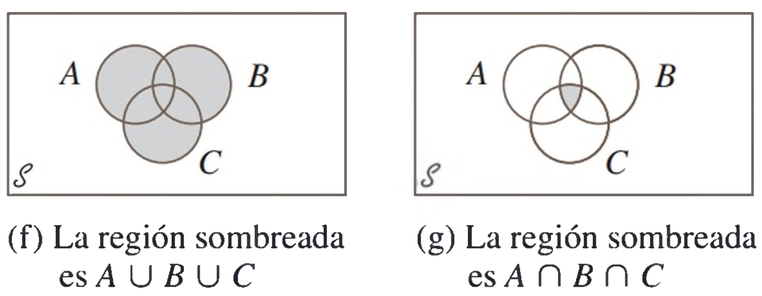
EJEMPLO 2.10 En una pequeña ciudad hay tres distribuidores de automóviles: un distribuidor GM que vende Chevrolet y Buick, un distribuidor Ford que vende Ford y Lincoln, y un distribuidor Toyota. Si un experimento consiste en observar la marca del siguiente automóvil vendido, entonces los eventos {Chevrolet, Buick} y {Ford, Lincoln} son mutuamente excluyentes porque el siguiente automóvil vendido no puede ser a la vez un producto GM y un producto Ford (¡a menos que las empresas se fusionen!). ■

Las operaciones de unión e intersección pueden ser ampliadas a más de dos eventos. Para tres eventos cualesquiera A, B y C, el evento $A \cup B \cup C$ es el conjunto de resultados contenidos en al menos uno de los tres eventos, mientras que $A \cap B \cap C$ es el conjunto de resultados contenidos en los tres eventos. Se dice que los eventos dados A_1, A_2, A_3, son mutuamente excluyentes (disjuntos por pares) si ninguno de dos eventos tiene resultados en común.

Con diagramas de Venn se obtiene una representación pictórica de eventos y manipulaciones con eventos. Para construir un diagrama de Venn se traza un rectángulo cuyo interior representará el espacio muestral $\mathcal{S}$. En tal caso cualquier evento A se representa como el interior de una curva cerrada (a menudo un círculo) contenido en $\mathcal{S}$. La figura 2.1 muestra ejemplos de diagramas de Venn.



(a) Diagrama de Venn de los eventos A y B (b) La región sombreada es $A \cap B$ (c) La región sombreada es $A \cup B$ (d) La región sombreada es A' (e) Eventos mutuamente excluyentes



(f) La región sombreada es $A \cup B \cup C$ (g) La región sombreada es $A \cap B \cap C$

Figura 2.1 Diagramas de Venn

EJERCICIOS Sección 2.1 (1–10)

1. Cuatro universidades, 1, 2, 3 y 4, están participando en un torneo de basquetbol. En la primera ronda, 1 jugará con 2 y 3 jugará con 4. Acto seguido los dos ganadores jugarán por el campeonato y los dos perdedores también jugarán. Un posible resultado puede ser denotado por 1324 (1 derrota a 2 y 3 derrota a 4 en los juegos de la primera ronda, y luego 1 derrota a 3 y 2 derrota a 4).
   a. Enumere todos los resultados en $\mathcal{S}$.
   b. Sea que A denote el evento en que 1 gana el torneo. Enumere los resultados en A.
   c. Sea que B denote el evento en que 2 gana el juego de campeonato. Enumere los resultados en B.
   d. ¿Cuáles son los resultados en $A \cup B$ y en $A \cap B$? ¿Cuáles son los resultados en A'?

2. Suponga que un vehículo que toma una salida particular de una autopista puede virar a la derecha (R), virar a la izquierda (L) o continuar de frente (S). Observe la dirección de cada uno de tres vehículos sucesivamente.

a. Elabore una lista con todos los resultados en el evento A en que los tres vehículos circulan en la misma dirección.

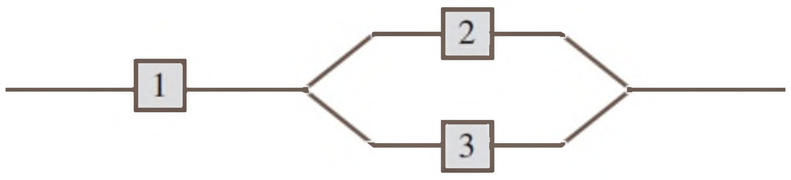
b. Elabore una lista de todos los resultados en el evento B en que los tres vehículos toman direcciones diferentes.

c. Elabore una lista de todos los resultados en el evento C en que sólo dos de los tres vehículos viran a la derecha.

d. Elabore una lista de todos los resultados en el evento D en que dos vehículos circulan en la misma dirección.

e. Enumere los resultados en D', $C \cup D$ y $C \cap D$.

3. Tres componentes están conectados para formar un sistema como se muestra en el diagrama adjunto. Como los componentes del subsistema 2–3 están conectados en paralelo, dicho subsistema funcionará si al menos uno de los dos componentes individuales funciona. Para que todo el sistema funcione, el componente 1 debe hacerlo y, por tanto, el subsistema 2–3 también.



El experimento consiste en determinar la condición de cada componente [S (éxito) para un componente que funciona y F (falla) para un componente que no funciona].

a. ¿Qué resultados están contenidos en el evento A en el que exactamente dos de los tres componentes funcionan?

b. ¿Qué resultados están contenidos en el evento B en el cual al menos dos de los componentes funcionan?

c. ¿Qué resultados están contenidos en el evento C en el que el sistema funciona?

d. Ponga en lista los resultados en C', $A \cup C$, $A \cap C$, $B \cup C$ y $B \cap C$.

4. Cada hipoteca de una muestra de cuatro hipotecas residenciales está clasificada como tasa fija (F) o tasa variable (V).

a. ¿Cuáles son los 16 resultados en $\mathcal{S}$?

b. ¿Qué resultados están en el evento en el que exactamente tres de las hipotecas seleccionadas son de tasa fija?

c. ¿Qué resultados están en el evento en el que las cuatro hipotecas son del mismo tipo?

d. ¿Qué resultados están en el evento en el que a lo más una de las cuatro hipotecas es de tasa variable?

e. ¿Cuál es la unión de eventos en los incisos c) y d), y cuál es la intersección de estos dos eventos?

f. ¿Cuáles son la unión y la intersección de los dos eventos en los incisos b) y c)?

5. Una familia compuesta de tres personas, A, B y C, acude a una clínica médica que siempre tiene disponible un doctor para cada una de las estaciones 1, 2 y 3. Durante cierta semana, cada miembro de la familia visita la clínica una vez y es asignado al azar a una estación. El experimento consiste en registrar la estación para cada miembro. Un resultado es (1, 2, 1) para A a la estación 1, B a la estación 2 y C a la estación 1.

a. Elabore una lista de los 27 resultados en el espacio muestral.

b. Elabore una lista de todos los resultados en el evento en que los tres miembros van a la misma estación.

c. Haga una lista de los resultados en el evento en el que todos los miembros van a diferentes estaciones.

d. Elabore una lista de los resultados en el evento en el que ninguno va a la estación 2.

6. La biblioteca de una universidad dispone de cinco ejemplares de un cierto texto en reserva. Dos ejemplares (1 y 2) son primeras impresiones y los otros tres (3, 4 y 5) son segundas impresiones. Un estudiante examina estos libros en orden aleatorio y se detiene sólo cuando una segunda impresión ha sido seleccionada. Un posible resultado es 5 y otro 213.

a. Ponga en lista los resultados en $\mathcal{S}$.

b. Sea A el evento en el que exactamente un libro debe ser examinado. ¿Qué resultados están en A?

c. Sea B el evento en el que el libro 5 es seleccionado. ¿Qué resultados están en B?

d. Sea C el evento en el que el libro 1 no es examinado. ¿Qué resultados están en C?

7. Un departamento académico acaba de votar en secreto para elegir al jefe del mismo. La urna contiene cuatro boletas con votos para el candidato A y tres con votos para el candidato B. Suponga que estas boletas se sacan de la urna una por una.

a. Haga una lista con todos los posibles resultados.

b. Suponga que mantiene un conteo continuo de las boletas que se retiran de la urna. ¿Para cuáles resultados A se mantiene adelante de B durante todo el conteo?

8. Actualmente una firma constructora de ingeniería trabaja en plantas eléctricas en tres sitios diferentes. Sea que A_i denote el evento en que la planta localizada en el sitio i se completa alrededor de la fecha contratada. Use las operaciones de unión, intersección y complementación para describir cada uno de los siguientes eventos en función de A_1, A_2 y A_3, trace un diagrama de Venn y sombree la región que corresponde a cada uno.

a. Al menos una planta se completa alrededor de la fecha contratada.

b. Todas las plantas se completan alrededor de la fecha contratada.

c. Sólo la planta localizada en el sitio 1 se completa alrededor de la fecha contratada.

d. Exactamente una planta se completa alrededor de la fecha contratada.

e. La planta localizada en el sitio 1 o las otras dos plantas se completan alrededor de la fecha contratada.

9. Use diagramas de Venn para verificar las dos siguientes relaciones para los eventos A y B (estas se conocen como leyes de De Morgan):

a. $(A \cup B)' = A' \cap B'$

b. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

[*Sugerencia:* Para cada inciso dibuje un diagrama que corresponda al lado derecho y otro al izquierdo.]

10. **a.** En el ejemplo 2.10 identifique tres eventos que sean mutuamente excluyentes.

b. Suponga que no hay resultado común a los tres eventos A, B y C. ¿Son estos tres eventos mutuamente excluyentes necesariamente? Si su respuesta es afirmativa, explique por qué; si su respuesta es no, dé un contraejemplo valiéndose del experimento del ejemplo 2.10.

2.2 Axiomas, interpretaciones y propiedades de la probabilidad

Dados un experimento y un espacio muestral $\mathcal{S}$, *el objetivo de la probabilidad es asignar a cada evento A un número P(A), llamado la probabilidad del evento A, que dará una medida precisa de la oportunidad de que A ocurra*. Para garantizar que las asignaciones serán consistentes con las nociones intuitivas de la probabilidad, todas las asignaciones deberán satisfacer los siguientes axiomas (propiedades básicas) de probabilidad.

AXIOMA 1 Para cualquier evento A, $P(A) \geq 0$.

AXIOMA 2 $P(\mathcal{S}) = 1$

AXIOMA 3 Si $A_1, A_2, A_3, \ldots$ es un conjunto de eventos disjuntos, entonces

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Se podría preguntar por qué el tercer axioma no contiene ninguna referencia a un conjunto *finito* de eventos disjuntos. Es porque la propiedad correspondiente para un conjunto finito puede ser derivada de los tres axiomas. Se pretende que la lista de axiomas sea tan corta como sea posible y que no contenga ninguna propiedad que pueda deducirse a partir de las demás que aparecen en la lista. El axioma 1 refleja la noción intuitiva de que la probabilidad de que A ocurra sea no negativa. El espacio muestral es por definición el evento que debe ocurrir cuando se realiza el experimento ($\mathcal{S}$ contiene todos los posibles resultados), así que el axioma 2 dice que la máxima probabilidad posible de 1 está asignada a $\mathcal{S}$. El tercer axioma formaliza la idea que si se desea la probabilidad de que al menos uno de varios eventos ocurra y dado que dos eventos no pueden ocurrir al mismo tiempo, la probabilidad de que al menos ocurra uno es la suma de las probabilidades de los eventos individuales.

PROPOSICIÓN $P(\emptyset) = 0$ donde $\emptyset$ es el evento nulo (el evento que no contiene resultados en absoluto). Esto a su vez implica que la propiedad contenida en el axioma 3 es válida para un conjunto *finito* de eventos disjuntos.

Demostración Primero considere el conjunto infinito $A_1 = \emptyset, A_2 = \emptyset, A_3 = \emptyset, \ldots$. Puesto que $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$, los eventos en este conjunto están disjuntos y $\cup A_i = \emptyset$. El tercer axioma da entonces

$$P(\emptyset) = \Sigma P(\emptyset)$$

Esto puede suceder sólo si $P(\emptyset) = 0$.

Ahora suponga que $A_1, A_2, \ldots, A_k$ son eventos disjuntos y anexe a estos el conjunto infinito $A_{k+1} = \emptyset, A_{k+2} = \emptyset, A_{k+3} = \emptyset, \ldots$. Si de nuevo se invoca el tercer axioma,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$$

como se deseaba. ■

EJEMPLO 2.11 Considere lanzar una tachuela al aire. Cuando se detenga en el suelo, la punta estará hacia arriba (resultado U) o hacia abajo (resultado D). El espacio muestral de este evento es, por consiguiente, $\mathcal{S} = \{U, D\}$. Los axiomas especifican $P(\mathcal{S}) = 1$, por lo que la asignación de probabilidad se completará determinando $P(U)$ y $P(D)$. Debido a que U y D están disjuntos y su unión es $\mathcal{S}$, la siguiente proposición implica que

$$1 = P(\mathcal{S}) = P(U) + P(D)$$

Se deduce que $P(D) = 1 - P(U)$. Una posible asignación de probabilidades es $P(U) = .5$, $P(D) = .5$, mientras que otra posible asignación es $P(U) = .75$, $P(D) = .25$. De hecho, si p representa cualquier número fijo entre 0 y 1, $P(U) = p$, $P(D) = 1 - p$ es una asignación compatible con los axiomas. ■

EJEMPLO 2.12 Considere probar las baterías que salen de la línea de ensamble una por una hasta que se encuentre una con el voltaje dentro de los límites prescritos. Los eventos simples son $E_1 = \{S\}$, $E_2 = \{FS\}$, $E_3 = \{FFS\}$, $E_4 = \{FFFS\}$,.... Suponga que la probabilidad de que cualquier batería resulte satisfactoria es de .99. Entonces se puede demostrar que se trata de una asignación de probabilidades a los eventos simples que satisface los axiomas. En particular, puesto que los E_i son disjuntos y $\mathcal{S} = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \dots$, debe ser el caso de que

$$\begin{aligned} 1 = P(\mathcal{S}) &= P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + \cdots \\ &= .99[1 + .01 + (.01)^2 + (.01)^3 + \cdots] \end{aligned}$$

Aquí se utilizó la fórmula para la suma de una serie geométrica:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \frac{a}{1 - \mathrm{r}}$$

Sin embargo, otra asignación de probabilidad legítima (de acuerdo con los axiomas) del mismo tipo "geométrico" se obtiene reemplazando .99 por cualquier otro número p entre 0 y 1 (y .01 por $1 - p$). ■

Interpretación de probabilidad

Los ejemplos 2.11 y 2.12 muestran que los axiomas no determinan por completo una asignación de probabilidades de eventos. Los axiomas sirven sólo para excluir las asignaciones incompatibles con las nociones intuitivas de probabilidad. En el experimento del ejemplo 2.11 de lanzar al aire tachuelas se sugirieron dos asignaciones particulares. La asignación apropiada o correcta depende de la naturaleza de la tachuela y también de la interpretación de probabilidad. La interpretación que más frecuentemente se utiliza y que es más fácil de entender se basa en el concepto de frecuencias relativas.

Considere un experimento que pueda ser realizado repetidamente de una manera idéntica e independiente, y sea A un evento que consiste en un conjunto fijo de resultados del experimento. Ejemplos simples de experimentos repetibles incluyen el lanzamiento al aire de tachuelas y dados que ya se mencionó. Si el experimento se realiza n veces, en algunas de las réplicas ocurrirá el evento A (el resultado estará en el conjunto A) y en otras, no ocurrirá A. Denote con $n(A)$ el número de réplicas en las cuales A sí ocurre. El cociente $n(A)/n$ se conoce como la *frecuencia relativa* de ocurrencia del evento A en la secuencia de n réplicas.

Por ejemplo, sea A el evento de que un paquete enviado al interior del estado de California para ser entregado en dos días en realidad llega en un día. Los resultados de enviar 10 paquetes de este tipo (las primeras 10 repeticiones) son los siguientes:

Paquete #	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
¿Ocurre A?	N	Y	Y	Y	N	N	Y	Y	N	N
Frecuencia relativa de A	0	.5	.667	.75	.6	.5	.571	.625	.556	.5

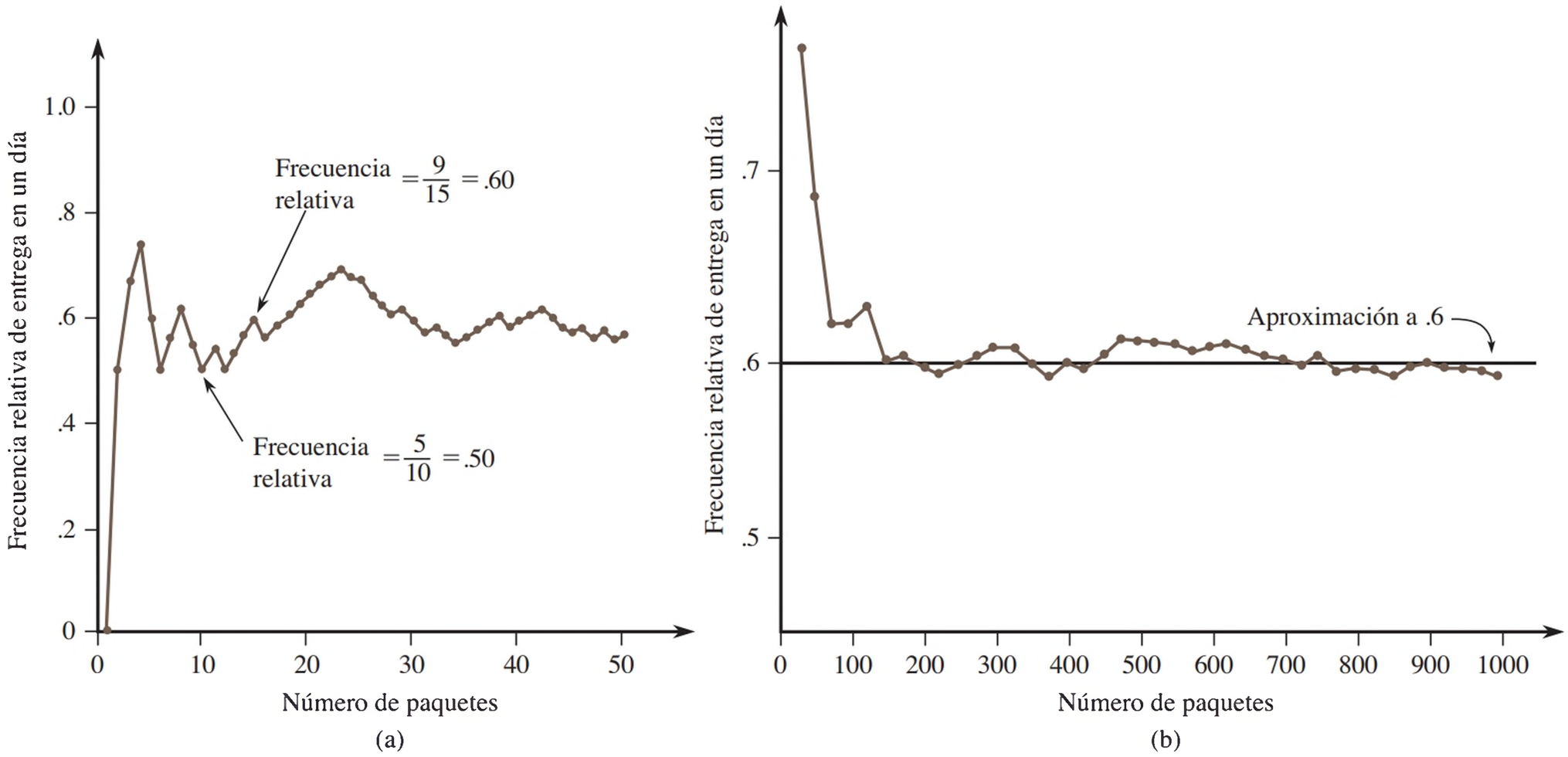


Figure 2.2 Comportamiento de la frecuencia relativa (a) fluctuación inicial (b) estabilización a largo plazo.

La figura 2.2(a) muestra cómo la frecuencia relativa fluctúa sustancialmente en el curso de las primeras 50 repeticiones. Pero puesto que el número de repeticiones sigue aumentando, la figura 2.2(b) ilustra cómo se estabiliza la frecuencia relativa.

En términos más generales, la evidencia empírica con base en los resultados de muchos experimentos repetibles, indica que cualquier frecuencia relativa de este tipo se estabilizará conforme el número de repeticiones n aumente. Es decir, puesto que n se hace arbitrariamente grande, $n(A)/n$ se aproxima a un valor límite, que se denomina *límite* (o *largo plazo*) *de la frecuencia relativa* del evento A. La *interpretación objetiva de probabilidad* identifica esta frecuencia límite en relación con $P(A)$. Suponga que las probabilidades se asignan a los acontecimientos de acuerdo con su límite de frecuencias relativas. Una afirmación como "la probabilidad de que un paquete se entregue en un día de envío es .6" significa que de un gran número de paquetes enviados por correo, aproximadamente 60% llegará en un día. Del mismo modo, si B es el evento de que un tipo particular de aparato necesitará servicio mientras la garantía es válida, entonces $P(B) = .1$ se interpreta en el sentido de que en el largo plazo, 10% de estos aparatos necesitará un servicio de garantía. Esto no quiere decir exactamente que uno de cada 10 necesitará servicio o que exactamente 10 de cada 100 necesitarán servicio, ya que 10 y 100 no son a largo plazo.

Se dice que esta interpretación de frecuencia relativa de probabilidad es objetiva porque se apoya en una propiedad del experimento y no en algún individuo particular interesado en el experimento. Por ejemplo, dos observadores diferentes de una secuencia de lanzamiento de una moneda deberán utilizar la misma asignación de probabilidad puesto que los observadores no tienen nada que ver con la frecuencia relativa límite. En la práctica, la interpretación no es tan objetiva como podría parecer, puesto que la frecuencia relativa límite de un evento no será conocida. Por tanto, se tendrán que asignar probabilidades con base en creencias sobre la frecuencia relativa límite de los eventos en estudio. Afortunadamente, existen muchos experimentos para los cuales habrá consenso respecto a las asignaciones de probabilidad. Cuando se habla de una moneda imparcial, significa que $P(H) = P(T) = .5$ y un dado imparcial es aquel para el cual las frecuencias relativas limitativas de los seis resultados son 1/6, lo cual sugiere las asignaciones de probabilidad $P(\{1\}) = \cdots = P(\{6\}) = 1/6$.

Debido a que la interpretación objetiva de probabilidad se basa en el concepto de frecuencia limitativa, su aplicabilidad está limitada a situaciones experimentales repetibles.

No obstante, el lenguaje de probabilidad a menudo se utiliza en referencia a situaciones que son inherentemente irrepetibles. Incluimos algunos ejemplos: "Las probabilidades de un tratado de paz son buenas"; "Es probable que el contrato le sea otorgado a nuestra compañía"; y "Debido a que su mejor mariscal de campo está lesionado, espero que no anoten más de 10 puntos contra nosotros". En tales situaciones se desearía, como antes, asignar probabilidades numéricas a varios resultados y eventos (p. ej., la probabilidad de que obtengamos el contrato es .9). Por consiguiente se debe adoptar una interpretación alternativa de estas probabilidades. Puesto que diferentes observadores pueden tener información y opiniones previas respecto a tales situaciones experimentales, las asignaciones de probabilidad ahora pueden diferir de un individuo a otro. Las interpretaciones en tales situaciones se conocen, por tanto, como *subjetivas*. El libro de Robert Winkler que se cita en las referencias del capítulo ofrece un recuento sencillo de varias interpretaciones subjetivas.

Más propiedades de probabilidad

PROPOSICIÓN

Para cualquier evento A, $P(A) + P(A') = 1$, a partir de lo cual $P(A) = 1 - P(A')$.

Demostración En el axioma 3, sea $k = 2$, $A_1 = A$, y $A_2 = A'$. A partir de la definición de A', $A \cup A' = \mathcal{S}$ mientras A y A' sean eventos disjuntos, $1 = P(\mathcal{S}) = P(A \cup A') = P(A) + P(A')$. ■

Esta proposición es sorprendentemente útil porque se presentan muchas situaciones en las cuales $P(A')$ es más fácil de obtener mediante métodos directos que $P(A)$.

EJEMPLO 2.13 Considere un sistema de cinco componentes idénticos conectados en serie, como se ilustra en la figura 2.3.

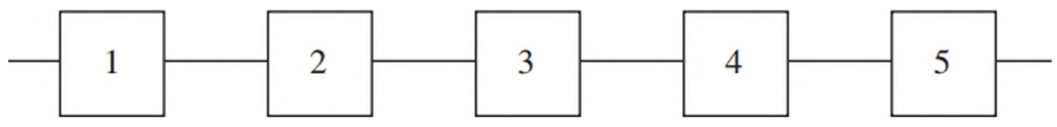


Figure 2.3 Sistema de cinco componentes conectados en serie

Denote con F un componente que falla y con S uno que no falla (por *éxito)*. Sea A el evento en el que el *sistema* falla. Para que ocurra A, al menos uno de los componentes individuales debe fallar. Los resultados en A incluyen *SSFSS* (1, 2, 4 y 5 funcionarán, pero 3 no), *FFSSS*, etcétera. Existen, de hecho, 31 resultados diferentes en A. Sin embargo, A', el evento en que el sistema funciona, consiste en el resultado único *SSSSS*. En la sección 2.5 se verá que si 90% de todos estos componentes no falla y diferentes componentes fallan independientemente uno de otro $P(A') = P(SSSSS) = .9^5 = .59$. Así, $P(A) = 1 - .59 = .41$; por tanto, entre un gran número de sistemas como ese, aproximadamente 41% fallará. ■

En general, la proposición anterior es útil cuando el evento de interés puede ser expresado como "al menos …", puesto que en ese caso puede ser más fácil trabajar con el complemento "menos que …" (en algunos problemas es más fácil trabajar con "más que …" que con "cuando mucho …"). Cuando se tenga dificultad al calcular $P(A)$ directamente habrá que pensar en determinar $P(A')$.

PROPOSICIÓN

Para cualquier evento A, $P(A) \leq 1$.

Esto se debe a que $1 = P(A) + P(A') \geq P(A)$ puesto que $P(A') \geq 0$.

Cuando los eventos A y B son mutuamente excluyentes, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Para eventos que no son mutuamente excluyentes la adición de $P(A)$ y $P(B)$ da como resultado

un "doble conteo" de los resultados en la intersección. El siguiente resultado, la *regla de la adición* para la probabilidad de una unión doble, muestra cómo corregir esto.

PROPOSICIÓN

Para dos eventos cualesquiera A y B,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Demostración Note primero que $A \cup B$ se puede descomponer en dos eventos *excluyentes*, A y $B \cap A'$; la última es la parte de B que queda afuera de A (véase la figura 2.4). Además, por sí mismo B es la unión de los dos eventos excluyentes $A \cap B$ y $A' \cap B$, por tanto, $P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B)$. Así

$$\begin{aligned} P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap A') &= P(A) + [P(B) - P(A \cap B)] \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

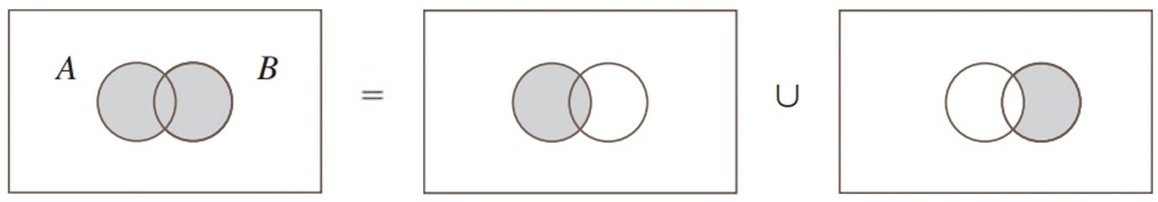


Figura 2.4 Representación de A ∪ B como la unión de dos eventos excluyentes ■

EJEMPLO 2.14 En cierto suburbio residencial 60% de las familias se suscribe al servicio de internet de la compañía de televisión por cable, 80% contrata el servicio de televisión de esa misma compañía y 50% de todas las familias contrata ambos servicios. Si se elige una familia al azar, ¿cuál es la probabilidad de que contrate al menos uno de los dos servicios, y cuál es la probabilidad de que contrate exactamente uno de ambos servicios?

Con $A = \{$se suscribe al servicio de internet$\}$ y $B = \{$se suscribe al servicio de televisión por cable$\}$, la información dada implica que $P(A) = .6$, $P(B) = .8$ y $P(A \cap B) = .5$. La proposición precedente ahora lleva a

$P($se suscribe al menos a uno de los dos servicios$)$

$$= P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = .6 + .8 - .5 = .9$$

El evento de que una familia se suscribe sólo al servicio de televisión por cable se escribe como $A' \cap B$ [(no internet) y televisión]. Ahora la figura 2.4 implica que

$$.9 = P(A \cup B) = P(A) + P(A' \cap B) = .6 + P(A' \cap B)$$

a partir de la cual $P(A' \cap B) = .3$. Asimismo, $P(A \cap B') = P(A \cup B) - P(B) = .1$. Todo esto se ilustra en la figura 2.5, donde se ve que

$$P(\text{exactamente uno}) = P(A \cap B') + P(A' \cap B) = .1 + .3 = .4$$

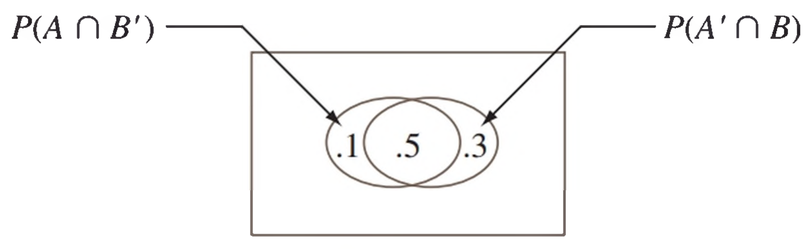


Figura 2.5 Probabilidades para el ejemplo 2.14 ■

La regla de adición para la probabilidad de una unión triple es similar a la regla anterior.

PROPOSICIÓN

Para tres eventos cualesquiera A, B y C,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Esto se puede verificar al examinar el diagrama de Venn de $A \cup B \cup C$, el cual se muestra en la figura 2.6. Cuando $P(A)$, $P(B)$ y $P(C)$ se agregan, las probabilidades de intersección $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$ y $P(B \cap C)$ se cuentan dos veces. Por tanto cada una se debe restar. Pero entonces $P(A \cap B \cap C)$ se ha sumado tres veces y se ha restado también tres veces, por lo que hay que agregarla de nuevo. En general, la probabilidad de unión de k eventos se obtiene sumando las probabilidades de cada uno, restando las probabilidades de doble intersección, sumando las probabilidades de triple intersección, restando las probabilidades de cuádruple intersección y así sucesivamente.

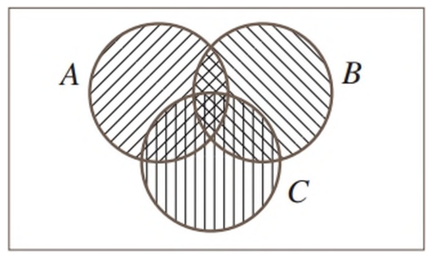


Figura 2.6 $A \cup B \cup C$

Determinación sistemática de probabilidades

Considere un espacio muestral finito o "contablemente infinito" (esto último significa que los resultados pueden ser puestos en lista en una secuencia infinita, por lo que existen un primer resultado, un segundo resultado, un tercer resultado y así sucesivamente; por ejemplo, el escenario de prueba de baterías del ejemplo 2.12). Denote con E_1, E_2, E_3,… los eventos simples correspondientes, cada uno de ellos compuesto de un solo resultado. Una estrategia sensata para el cálculo de probabilidad es determinar primero cada probabilidad del evento simple, con la condición de que $\sum P(E_i) = 1$. Entonces la probabilidad de cualquier evento compuesto A se calcula agregando los $P(E_i)$ para todos los E_i que existen en A:

$$P(A) = \sum_{\text{todas las } E_i \text{ en } A} P(E_i)$$

EJEMPLO 2.15 Durante las horas no pico el tren que viaja entre los suburbios y la ciudad utiliza cinco carros. Suponga que existe el doble de probabilidades de que un usuario seleccione el carro intermedio (#3) a cualquier carro adyacente (#2 o #4) y hay también el doble de probabilidades de que seleccione cualquier carro adyacente a cualquier carro de los extremos (#1 o #5). Sea $p_i = P(\text{carro } i \text{ es seleccionado}) = P(E_i)$. Entonces se tiene $p_3 = 2p_2 = 2p_4$ y $p_2 = 2p_1 = 2p_5 = p_4$. Esto da

$$1 = \sum P(E_i) = p_1 + 2p_1 + 4p_1 + 2p_1 + p_1 = 10p_1$$

lo cual implica $p_1 = p_5 = .1$, $p_2 = p_4 = .2$, $p_3 = .4$. La probabilidad de que uno de los tres carros intermedios se seleccione (un evento compuesto) es entonces $p_2 + p_3 + p_4 = .8$. ■

Resultados igualmente probables

En muchos experimentos compuestos de N resultados es razonable asignar probabilidades iguales a todos los N eventos simples. Esto incluye ejemplos tan obvios como lanzar al aire una moneda o un dado una o dos veces (o cualquier número fijo de veces) o seleccionar una o varias cartas de un mazo de 52 cartas bien barajado. Con $p = P(E_i)$ por cada i,

$$1 = \sum_{i=1}^{N} P(E_i) = \sum_{i=1}^{N} p = p \cdot N \quad \text{por lo que } p = \frac{1}{N}$$

Es decir, si existen N resultados igualmente probables, la probabilidad de cada uno es $1/N$.

Ahora considere un evento A, con $N(A)$ como el número de resultados contenidos en A. En seguida

$$P(A) = \sum_{E_i \text{ en } A} P(E_i) = \sum_{E_i \text{ en } A} \frac{1}{N} = \frac{N(A)}{N}$$

Así, cuando los resultados son igualmente probables, el cálculo de probabilidades se reduce a contar: determine tanto el número de resultados $N(A)$ en A como el número de resultados N en $\mathcal{S}$ y forme su cociente.

EJEMPLO 2.16 Usted tiene en su biblioteca seis libros de misterios y seis de ciencia ficción, todos sin leer. Los tres primeros de cada tipo son de tapa dura y los tres últimos son de bolsillo. Considere la posibilidad de seleccionar al azar uno de los seis libros de misterios y luego seleccionar al azar uno de los seis libros de ciencia ficción para sus vacaciones en Acapulco (después de todo, necesita algo para leer en la playa). Numere los libros de misterio 1, 2,…, 6, y haga lo mismo con los libros de ciencia ficción. A continuación, cada resultado es un par de números, tales como (4, 1) y hay $N = 36$ resultados posibles (para una representación visual de esta situación consulte la tabla en el ejemplo 2.3 y elimine la primera fila y la primera columna). Con la selección al azar, como se ha descrito, los 36 resultados son igualmente probables. Nueve de estos resultados son tales que los libros seleccionados son libros de bolsillo (aquellos en la esquina inferior derecha de la tabla de referencia): (4, 4), (4, 5),…, (6, 6). Así que la probabilidad del evento A de que ambos libros seleccionados sean libros de bolsillo es

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{9}{36} = .25$$ ■

EJERCICIOS Sección 2.2 (11–28)

11. Una compañía de fondos mutuos de inversión ofrece a sus clientes varios fondos: un fondo de mercado de dinero, tres fondos de bonos (a corto, intermedio y largo plazos), dos fondos de acciones (de riesgo moderado y de alto riesgo) y un fondo balanceado. Entre los clientes que poseen acciones en un solo fondo los porcentajes de clientes en los diferentes fondos son como sigue:

Mercado de dinero	20%	Acciones de alto riesgo	18%
Bonos a corto plazo	15%	Acciones de riesgo moderado	25%
Bonos a plazo intermedio	10%	Balanceados	7%
Bonos a largo plazo	5%		

Se selecciona al azar un cliente que posea acciones en solo un fondo.

- **a.** ¿Cuál es la probabilidad de que el cliente seleccionado posea acciones en el fondo balanceado?
- **b.** ¿Cuál es la probabilidad de que el mismo cliente posea acciones en un fondo de bonos?
- **c.** ¿Cuál es la probabilidad de que ese cliente no posea acciones en un fondo de acciones?

12. Considere seleccionar al azar a un estudiante en cierta universidad y que A denote el evento en que el individuo seleccionado tenga una tarjeta de crédito Visa y que B denote el evento análogo para la tarjeta MasterCard. Suponga que $P(A) = .6$, y $P(B) = .4$.

- **a.** ¿Podría darse el caso de que $P(A \cap B) = .5$? ¿Por qué sí o por qué no? [*Sugerencia*: Véase el ejercicio 24.]
- **b.** De aquí en adelante suponga que $P(A \cap B) = .3$. ¿Cuál es la probabilidad de que el alumno seleccionado tenga al menos uno de ambos tipos de tarjeta?
- **c.** ¿Cuál es la probabilidad de que el alumno seleccionado no tenga ningún tipo de tarjeta?
- **d.** Describa, en términos de A y B, el evento en que el alumno seleccionado tenga una tarjeta Visa pero no una tarjeta MasterCard y después calcule la probabilidad de este evento.
- **e.** Calcule la probabilidad de que el alumno seleccionado tenga exactamente uno de los dos tipos de tarjeta.

13. Una firma consultora de computación presentó propuestas en tres proyectos. Sea $A_i = \{\text{proyecto otorgado } i\}$, con $i = 1, 2, 3$ y suponga que $P(A_1) = .22$, $P(A_2) = .25$, $P(A_3) = .28$, $P(A_1 \cap A_2) = .11$, $P(A_1 \cap A_3) = .05$, $P(A_2 \cap A_3) = .07$, $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = .01$. Exprese en palabras siguientes eventos y calcule la probabilidad de cada uno:

- **a.** $A_1 \cup A_2$
- **b.** $A'_1 \cap A'_2$ [*Sugerencia:* $(A_1 \cup A_2)' = A'_1 \cap A'_2$]
- **c.** $A_1 \cup A_2 \cup A_3$
- **d.** $A'_1 \cap A'_2 \cap A'_3$
- **e.** $A'_1 \cap A'_2 \cap A_3$
- **f.** $(A'_1 \cap A'_2) \cup A_3$

14. Suponga que 55% de todos los adultos consume regularmente café, 45% consume regularmente refrescos con gas y 70% consume con frecuencia al menos uno de estos dos productos.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que un adulto al azar regularmente consuma café y soda?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que un adulto al azar no consuma regularmente al menos uno de estos dos productos?

15. Considere el tipo de secadora de ropa (de gas o eléctrica) adquirida por cada uno de cinco clientes diferentes en cierta tienda.

a. Si la probabilidad de que al menos uno de ellos adquiera una secadora eléctrica es .428, ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos adquieran una secadora eléctrica?

b. Si P(los cinco compran una secadora de gas) = .116 y P(los cinco compran una secadora eléctrica) = .005, ¿cuál es la probabilidad de que al menos se adquiera una secadora de cada tipo?

16. A un individuo se le presentan tres vasos diferentes de refresco de cola, designados C, D y P. Se le pide que pruebe los tres y que los anote en orden de preferencia. Suponga que se sirvió el mismo refresco de cola en los tres vasos.

a. ¿Cuáles son los eventos simples en este evento de clasificación y qué probabilidad le asignaría a cada uno?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que C obtenga el primer lugar?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que C obtenga el primer lugar y D el último?

17. Denote con A el evento en que la siguiente solicitud de asesoría de un consultor de software estadístico tiene que ver con el paquete SPSS y que B denote el evento en que la siguiente solicitud de ayuda tiene que ver con SAS. Suponga que $P(A) = .30$ y y $P(B) = .50$.

a. ¿Por qué no es el caso de que $P(A) + P(B) = 1$?

b. Calcule $P(A')$.

c. Calcule $P(A \cup B)$.

d. Calcule $P(A' \cap B)$.

18. Una cartera contiene cinco billetes de \$10, cuatro de \$5 y seis de \$1 (nada más). Si se seleccionan los billetes uno por uno en orden aleatorio, ¿cuál es la probabilidad de que se deban seleccionar al menos dos billetes para obtener un primer billete de \$10?

19. La inspección visual humana de uniones soldadas en un circuito impreso puede ser muy subjetiva. Una parte del problema se deriva de los numerosos tipos de defectos de soldadura (p. ej., almohadilla seca, visibilidad en escuadra, picaduras) incluso del grado al cual una unión posee uno o más de estos defectos. Por consiguiente, incluso inspectores altamente entrenados pueden discrepar en cuanto a la disposición particular de una unión particular. En un lote de 10 000 uniones el inspector A encontró 724 defectuosas y el inspector B, 751 mientras que 1159 fueron consideradas defectuosas por al menos uno de los inspectores. Suponga que se selecciona una de las 10 000 uniones al azar.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la unión seleccionada no sea juzgada defectuosa por ninguno de los dos inspectores?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la unión seleccionada sea juzgada defectuosa por el inspector B, pero no por el inspector A?

20. En cierta fábrica se trabajan tres turnos diferentes. Durante el año pasado ocurrieron en la fábrica 200 accidentes. Algunos de ellos pueden ser atribuidos, al menos en parte, a condiciones de trabajo inseguras mientras que las otras no se relacionan con las condiciones de trabajo. La tabla adjunta da el porcentaje de accidentes que ocurren en cada tipo de categoría accidente-turno.

		Condiciones inseguras	**No vinculados a las condiciones**
Turno	***Diurno***	10%	35%
	Mixto	8%	20%
	Nocturno	5%	22%

Suponga que uno de los 200 reportes de accidente se selecciona al azar de un archivo de reportes y que el turno, y el tipo de accidente se han determinado.

a. ¿Cuáles son los eventos simples?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el accidente seleccionado se atribuya a condiciones inseguras?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que el accidente seleccionado no haya ocurrido en el turno diurno?

21. Una compañía de seguros ofrece cuatro diferentes niveles de deducible: ninguno, bajo, medio y alto para sus tenedores de pólizas de propietario de casa; y tres diferentes niveles: bajo, medio y alto para sus tenedores de pólizas de automóviles. La tabla adjunta muestra las proporciones de las varias categorías de tenedores de pólizas que tienen ambos tipos de seguro. Por ejemplo, la proporción de individuos con deducible bajo de casa y deducible bajo de automóvil es .06 (6% de todos los individuos).

	Propietarios de viviendas			
Auto	**N**	**L**	**M**	**H**
L	.04	.06	.05	.03
M	.07	.10	.20	.10
H	.02	.03	.15	.15

Suponga que se elige al azar un individuo que posee ambos tipos de pólizas.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que esta persona tenga un deducible de auto medio y un deducible de casa alto?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga un deducible de casa bajo y un deducible de auto bajo?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que este individuo se encuentre en la misma categoría de deducibles de casa y auto?

d. Basado en su respuesta para el inciso c), ¿cuál es la probabilidad de que las dos categorías sean diferentes?

e. ¿Cuál es la probabilidad de que el individuo tenga al menos un nivel deducible bajo?

f. Utilizando la respuesta para el inciso e), ¿cuál es la probabilidad de que ningún nivel deducible sea bajo?

22. En la ruta que un automovilista recorre para trasladarse a su trabajo existen dos intersecciones con señalamientos de tránsito.

La probabilidad de que el automovilista tenga que detenerse en la primera señal es .4, la probabilidad análoga para la segunda señal es .5 y la probabilidad de que tenga que detenerse en al menos una de las dos señales es .7. Cuál es la probabilidad de que tenga que detenerse:

a. ¿En ambas señales?

b. ¿En la primera señal, pero no en la segunda?

c. ¿En exactamente una señal?

23. Las computadoras de seis profesores de la facultad deberán ser reemplazadas. Dos de los profesores seleccionaron computadoras portátiles y los otros cuatro escogieron computadoras de escritorio. Suponga que sólo se pueden realizar dos configuraciones en un día particular y que las dos computadoras que van a ser configuradas se seleccionan al azar de entre las seis (lo cual implica 15 resultados igualmente probables; si las computadoras se numeran 1, 2,…, 6, entonces un resultado se compone de las computadoras 1 y 2; otro resultado, de las computadoras 1 y 3, y así sucesivamente).

a. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos configuraciones seleccionadas sean para las computadoras portátiles?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas configuraciones seleccionadas sean para las computadoras de escritorio?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una configuración seleccionada sea para una computadora de escritorio?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una computadora de cada tipo sea elegida para ser configurada?

24. Demuestre que si un evento A está contenido en otro evento B (es decir, A es un subconjunto de B), entonces $P(A) \le P(B)$. [*Sugerencia*: Para tales A y B, A y $B \cap A'$ son disjuntos y $B = A \cup (B \cap A')$, como se puede ver en el diagrama de Veen.] Para A y B en general, ¿qué implica esto respecto a la relación entre $P(A \cap B)$, $P(A)$ y $P(A \cup B)$?

25. Las tres opciones más populares en un cierto tipo de automóvil nuevo son GPS (sistema de posicionamiento global) (A), quemacocos (B) y transmisión automática (C). Si 40% de todos los compradores solicita A, 55% solicita B, 70% pide C, 63% A o B, 77% A o C, 80% B o C y 85% solicita A o B o C, calcule las probabilidades de los siguientes eventos. [*Sugerencia*: "A o B" es el evento en el que se solicita al menos una de las dos opciones; intente trazar un diagrama de Venn y rotule todas las regiones.]

a. El siguiente comprador solicitará al menos una de las tres opciones.

b. El siguiente comprador no seleccionará ninguna de las tres opciones.

c. El siguiente comprador solicitará sólo transmisión automática y ninguna de las otras dos opciones.

d. El siguiente comprador seleccionará exactamente una de estas tres opciones.

26. Un sistema puede experimentar tres tipos diferentes de defectos. Sea A_i $(i = 1, 2, 3)$ el evento en que el sistema tiene un defecto de tipo i. Suponga que

$P(A_1) = .12 \quad P(A_2) = .07 \quad P(A_3) = .05$

$P(A_1 \cup A_2) = .13 \quad P(A_1 \cup A_3) = .14$

$P(A_2 \cup A_3) = .10 \quad P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = .01$

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema no tenga un defecto de tipo 1?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema tenga defectos de tipo 1 así como de tipo 2?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema tenga defectos de tipo 1 y de tipo 2 pero no de tipo 3?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema tenga a lo más dos de estos defectos?

27. El departamento académico formado por cinco profesores de la facultad: Anderson, Box, Cox, Cramer y Fisher, debe seleccionar a dos de ellos para que participen en un comité de revisión de personal. Puesto que el trabajo requerirá mucho tiempo, ninguno parece ansioso de participar, por lo que se decidió anotar en trozos de papel idénticos el nombre de cada uno y seleccionarlos al azar.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que tanto Anderson como Box sean seleccionados? [*Sugerencia*: Mencione los resultados igualmente probables.]

b. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los dos miembros cuyo nombre comienza con C sea seleccionado?

c. Si los cinco miembros del cuerpo de profesores han impartido clases en la universidad durante 3, 6, 7, 10 y 14 años, respectivamente, ¿cuál es la probabilidad de que los dos representantes seleccionados tengan al menos 15 años de experiencia académica?

28. En el ejercicio 5 suponga que cualquier individuo que entre a la clínica tiene las mismas probabilidades de ser asignado a cualquiera de las tres estaciones independientemente de a dónde hayan sido asignados otros individuos. Cuál es la probabilidad de que:

a. ¿Los tres miembros de una familia sean asignados a la misma estación?

b. ¿Al menos dos miembros de la familia sean asignados a la misma estación?

c. ¿Cada miembro de la familia sea asignado a una estación diferente?

2.3 Técnicas de conteo

Cuando los diversos resultados de un experimento son igualmente probables (la misma probabilidad es asignada a cada evento simple), la tarea de calcular probabilidades se reduce a contar. Sea N el número de resultados en un espacio muestral y $N(A)$ el número de resultados contenidos en un evento A,

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} \tag{2.1}$$

Si una lista de resultados es fácil de obtener y N es pequeña, entonces N y $N(A)$ pueden ser determinadas sin utilizar ningún principio de conteo.

Existen, sin embargo, muchos experimentos en los cuales el esfuerzo implicado al elaborar la lista es prohibitivo porque N es bastante grande. Explotando algunas reglas de conteo generales, es posible calcular probabilidades de la forma (2.1) sin una lista de resultados. Estas reglas también son útiles en muchos problemas que implican resultados que no son igualmente probables. Se utilizarán varias de las reglas desarrolladas aquí al estudiar distribuciones de probabilidad en el siguiente capítulo.

Regla de producto para pares ordenados

La primera regla de conteo se aplica a cualquier situación en la cual un conjunto (evento) se compone de pares ordenados de objetos y se desea contar el número de pares. Por par ordenado se quiere decir que si O_1 y O_2 son objetos, entonces el par (O_1, O_2) es diferente del par (O_2, O_1). Por ejemplo, si un individuo selecciona una línea aérea para viajar de Los Ángeles a Chicago y (luego de realizar algunas transacciones de negocios en Chicago) una segunda para continuar a Nueva York, una posibilidad es (American, United), otra es (United, American) y una más es (United, United).

PROPOSICIÓN

Si el primer elemento u objeto de un par ordenado puede ser seleccionado de n_1 maneras, y si por cada una de estas n_1 maneras el segundo elemento del par puede ser seleccionado de n_2 maneras, entonces el número de pares es n_1n_2.

Una interpretación alternativa consiste en llevar a cabo una operación que consta de dos etapas. Si la primera etapa se puede realizar en cualquiera n_1 maneras y para cada una hay n_2 formas de realizar la segunda etapa, entonces, n_1n_2 es el número de maneras de llevar a cabo las dos etapas en la secuencia.

EJEMPLO 2.17 El propietario de una casa va a llevar a cabo una remodelación y requiere los servicios de un contratista de fontanería y un contratista de electricidad. Si existen 12 contratistas de fontanería y nueve de electricidad disponibles en el área, ¿de cuántas maneras pueden ser elegidos? Si $P_1,\ldots, P_{12}$ son los fontaneros y $Q_1,\ldots, Q_9$ son los electricistas, entonces se desea el número de pares de la forma (P_i, Q_j). Con $n_1 = 12$ y $n_2 = 9$, la regla de producto da $N = (12)(9) = 108$ formas posibles de seleccionar los dos tipos de contratistas. ■

En el ejemplo 2.17 la selección del segundo elemento del par no dependió de cuál primer elemento ocurrió o fue elegido. En tanto exista el mismo número de opciones del segundo elemento por cada primer elemento, la regla de producto es válida incluso cuando el conjunto de posibles segundos elementos depende del primero.

EJEMPLO 2.18 Una familia recién se cambió a una nueva ciudad y requiere los servicios de un obstetra y de un pediatra. Existen dos clínicas médicas de fácil acceso y cada una tiene dos obstetras y tres pediatras. La familia obtendrá los máximos beneficios del seguro de salud si se afilia a una clínica y selecciona a ambos doctores de dicha clínica. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto? Denote a los obstetras con O_1, O_2, O_3 y O_4 y a los pediatras con $P_1,\ldots, P_6$. Se desea el número de pares (O_i, P_j) para los cuales O_i y P_j están asociados a la misma clínica. Puesto que existen cuatro obstetras, $n_1 = 4$; y por cada uno existen tres opciones de pediatras, por tanto, $n_2 = 3$. Aplicando la regla de producto se obtiene $N = n_1n_2 = 12$ posibles opciones. ■

En muchos problemas de conteo y probabilidad se puede utilizar una configuración conocida como **diagrama de árbol** para representar pictóricamente todas las posibilidades. En la figura 2.7 aparece el diagrama de árbol asociado al ejemplo 2.18. Partiendo de un punto

localizado en el lado izquierdo del diagrama, por cada posible primer elemento de un par emana un segmento de línea recta hacia la derecha. Cada una de estas rectas se conoce como rama de primera generación. Ahora, para cualquier rama de primera generación se construye otro segmento de recta que emana de la punta de la rama por cada posible opción de un segundo elemento del par. Cada segmento de recta es una rama de segunda generación. Puesto que hay cuatro obstetras, hay cuatro ramas de primera generación, y tres pediatras por cada obstetra resultan en tres ramas de segunda generación que emanan de cada rama de primera generación.

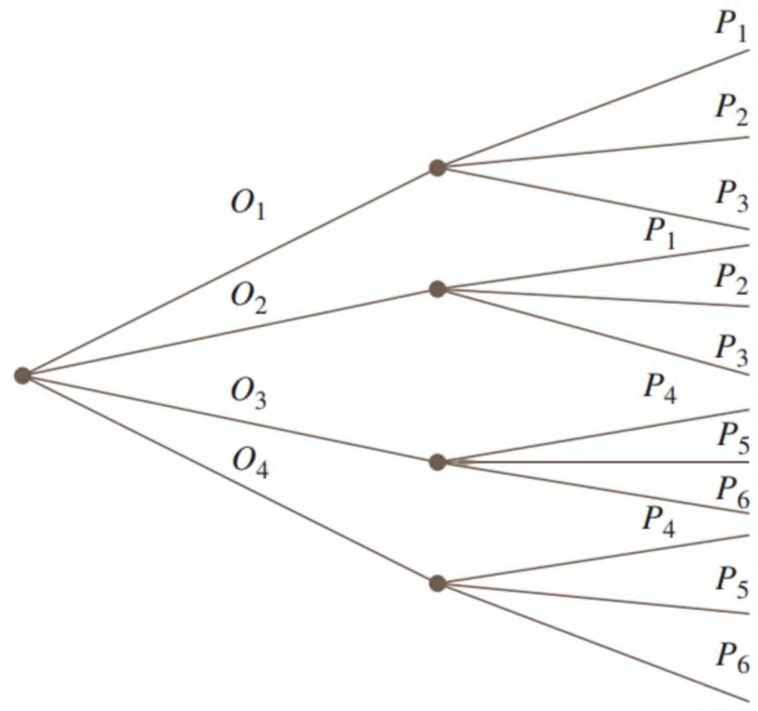


Figura 2.7 Diagrama de árbol para el ejemplo 2.18

Generalizando, suponga que existen n_1 ramas de primera generación y que por cada rama de primera generación existen n_2 ramas de segunda generación. El número total de ramas de segunda generación es entonces n_1n_2. Debido a que el extremo de cada rama de segunda generación corresponde a exactamente un posible par (la selección de un primer elemento y luego de un segundo elemento nos sitúa en el extremo de exactamente una rama de segunda generación) existen n_1n_2 pares, con lo cual se verifica la regla de producto.

La construcción de un diagrama de árbol no depende de que se tenga el mismo número de ramas de segunda generación que emanen de cada rama de primera generación. Si la segunda clínica tuviera cuatro pediatras, entonces habría sólo tres ramas emanando de dos de las ramas de primera generación y cuatro emanando de cada una de las otras dos ramas de primera generación. Un diagrama de árbol puede ser utilizado, por tanto, para representar pictóricamente experimentos diferentes de aquellos en los que se aplica la regla de producto.

Una regla de producto más general

Si se lanza al aire un dado de seis lados cinco veces en sucesión en lugar de sólo dos veces, entonces cada posible resultado es un conjunto ordenado de cinco números como (1, 3, 1, 2, 4) o (6, 5, 2, 2, 2). Un conjunto ordenado de k objetos recibirá el nombre de ***k-tupla*** (por tanto, un par es una 2-tupla y una terna es una 3-tupla). Cada resultado del experimento de lanzar al aire un dado es entonces una 5-tupla.

Regla de producto para *k*-tuplas

Suponga que un conjunto se compone de conjuntos ordenados de k elementos (k-tuplas) y que existen n_1 posibles opciones para el primer elemento; por cada opción del primer elemento, existen n_2 posibles opciones del segundo elemento; …; por cada posible opción de los primeros $k - 1$ elementos, existen n_k opciones del elemento k-ésimo. Existen entonces $n_1n_2 \cdot \cdots \cdot n_k$ posibles k-tuplas.

Una interpretación alternativa consiste en llevar a cabo una operación en k etapas. Si la primera etapa se puede realizar en cualesquiera n_1 maneras, si para cada una de tales maneras hay n_2 formas de realizar la segunda etapa, y si para cada forma de llevar a cabo las dos primeras etapas hay n_3 formas de realizar la tercera fase, y así sucesivamente, entonces $n_1 n_2 \cdot \cdots \cdot n_k$ es el número de formas para llevar a cabo toda la k-etapa de operación en secuencia. Esta regla más general también se puede visualizar con un diagrama de árbol. Para el caso $k = 3$ sólo se debe añadir un número adecuado de 3ª generación en las ramas de la punta de cada rama de 2ª generación. Si, por ejemplo, una ciudad universitaria tiene cuatro pizzerías, un complejo de cine con seis pantallas y tres lugares para ir a bailar, entonces habrá cuatro ramas de 1ª generación, seis ramas de 2ª generación que emanan de la punta de cada rama de 1ª generación, y tres ramas de 3ª generación que abren cada rama de 2ª generación. Cada posible 3-tupla corresponde a la punta de una rama de 3ª generación.

EJEMPLO 2.19 (Continuación del ejemplo 2.17)

Suponga que el trabajo de remodelación de la casa implica adquirir primero varios utensilios de cocina. Se adquirirán en la misma tienda y hay cinco tiendas en el área. Mediante las tiendas denotadas con $D_1,\ldots,D_5$, existen $N = n_1 n_2 n_3 = (5)(12)(9) = 540$ 3-tuplas de la forma (D_i, P_j, Q_k), entonces existen 540 formas de elegir primero una tienda, luego un contratista de fontanería y finalmente un contratista electricista. ■

EJEMPLO 2.20 (Continuación del ejemplo 2.18)

Si cada clínica tiene dos especialistas en medicina interna y dos médicos generales, existen $n_1 n_2 n_3 n_4 = (4)(3)(3)(2) = 72$ formas de seleccionar un doctor de cada tipo, de tal suerte que todos los doctores practiquen en la misma clínica. ■

Permutaciones y combinaciones

Considere un grupo de n individuos u objetos distintos ("distintos" significa que existe alguna característica que diferencia a cualquier individuo u objeto de cualquier otro). ¿Cuántas maneras existen de seleccionar un subconjunto de tamaño k del grupo? Por ejemplo, si un equipo de ligas pequeñas tiene 15 jugadores registrados, ¿cuántas maneras existen de seleccionar nueve jugadores para una alineación inicial? O, si una librería universitaria vende diez computadoras portátiles diferentes, pero tiene espacio para mostrar sólo tres de ellas, de cuántas maneras pueden ser elegidas las tres?

Una respuesta a la pregunta general que se acaba de plantear requiere distinguir entre dos casos. En algunas situaciones, tal como en el escenario del béisbol, el orden de la selección es importante. Por ejemplo, con Ángela como lanzador y Beto como receptor se obtiene una alineación diferente de aquella con Ángela como receptor y Beto como lanzador. No obstante, con frecuencia el orden no es importante y a nadie le interesa qué individuos u objetos son seleccionados, como sería el caso en el escenario para seleccionar las computadoras portátiles.

DEFINICIÓN

Un subconjunto ordenado se llama **permutación**. El número de permutaciones de tamaño k que se puede formar con los n individuos u objetos en un grupo será denotado con $P_{k,n}$. Un subconjunto no ordenado se llama **combinación**. Una forma de denotar el número de combinaciones es $C_{k,n}$, pero en su lugar se utilizará una notación bastante común en los libros sobre probabilidad: $\binom{n}{k}$, que se lee así: "de n se elige k".

El número de permutaciones se determina utilizando la primera regla de conteo para k-tuplas. Suponga, por ejemplo, que un colegio de ingeniería tiene siete departamentos, denotados con a, b, c, d, e, f y g. Cada departamento tiene un representante frente al consejo de estudiantes del colegio. De estos siete representantes, uno tiene que ser elegido como presidente, otro como vicepresidente y un tercero como secretario. ¿Cuántas maneras existen

de seleccionar a los tres funcionarios? Es decir, ¿cuántas permutaciones de tamaño 3 pueden ser formadas con los 7 representantes? Para responder esta pregunta habrá que pensar en formar una terna (3-tupla) en la que el primer elemento es el presidente, el segundo es el vicepresidente y el tercero es el secretario. Una terna es (a, g, b), otra es (b, g, a) y otra más es (d, f, b). Ahora bien, el presidente puede ser seleccionado en cualesquiera $n_1 = 7$ formas. Por cada forma de seleccionar al presidente, existen $n_2 = 6$ formas de seleccionar al vicepresidente y, por consiguiente, $7 \times 6 = 42$ (pares de presidente, vicepresidente). Por último, por cada forma de seleccionar un presidente y un vicepresidente, existen $n_3 = 5$ formas de seleccionar al secretario. Esto da

$$P_{3,7} = (7)(6)(5) = 210$$

como el número de permutaciones de tamaño 3 que se pueden formar con 7 individuos distintos. Una representación de diagrama de árbol mostraría tres generaciones de ramas.

La expresión para $P_{3,7}$ puede volver a escribirse con ayuda de la *notación factorial*. Recuerde que 7! (que se lee así: "factorial de 7") es una notación compacta para el producto descendente de enteros (7)(6)(5)(4)(3)(2)(1). Más generalmente, para cualquier entero positivo m, $m! = m(m-1)(m-2)\cdot\cdots\cdot(2)(1)$. Esto da $1! = 1$, y también se define $0! = 1$. Por tanto,

$$P_{3,7} = (7)(6)(5) = \frac{(7)(6)(5)(4!)}{(4!)} = \frac{7!}{4!}$$

Al generalizar para un grupo arbitrario de tamaño n y un subconjunto de tamaño k se obtiene

$$P_{k,n} = n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-(k-2))(n-(k-1))$$

Al multiplicar y dividir esta ecuación por $(n-k)!$ se obtiene una expresión compacta para el número de permutaciones.

PROPOSICIÓN

$$P_{k,n} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

EJEMPLO 2.21 Hay diez asistentes de profesor disponibles para calificar exámenes en un curso de cálculo en una gran universidad. El primer examen se compone de cuatro preguntas y el profesor desea seleccionar un asistente diferente para calificar cada pregunta (sólo un asistente por pregunta). ¿De cuántas maneras se pueden elegir los asistentes? En este caso n = tamaño del grupo = 10 y k = tamaño del subconjunto = 4. El número de permutaciones es

$$P_{4,10} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 10(9)(8)(7) = 5040$$

Es decir, el profesor podría aplicar 5040 exámenes diferentes de cuatro preguntas utilizando calificadores diferentes para cada una de las preguntas, ¡tiempo en el cual todos los asistentes seguramente habrán terminado sus programas de licenciatura! ■

Considere ahora las combinaciones (es decir, los subconjuntos no ordenados). De nuevo tendrá que remitirse al escenario de consejo estudiantil, y suponga que tres de los siete representantes tienen que ser seleccionados para asistir a una convención estatal. El orden de selección no es importante; lo que importa es cuáles tres son seleccionados. Así que se busca $\binom{7}{3}$, el número de combinaciones de 3 que se pueden formar con los

7 individuos. Considere por un momento las combinaciones a, c, g. Estos tres individuos pueden ser ordenados en $3! = 6$ formas para producir el número de permutaciones:

$$a, c, g \quad a, g, c \quad c, a, g \quad c, g, a \quad g, a, c \quad g, c, a$$

De manera similar, hay $3! = 6$ maneras de ordenar la combinación b, c, e para producir permutaciones y, de hecho, hay 3! modos de ordenar cualquier combinación particular de tamaño 3 para producir permutaciones. Esto implica la siguiente relación entre el número de combinaciones y el número de permutaciones:

$$P_{3,7} = (3!) \cdot \binom{7}{3} \Rightarrow \binom{7}{3} = \frac{P_{3,7}}{3!} = \frac{7!}{(3!)(4!)} = \frac{(7)(6)(5)}{(3)(2)(1)} = 35$$

No sería difícil poner en lista las 35 combinaciones, pero no hay necesidad de hacerlo si sólo interesa cuántas son. Observe que el número de 210 permutaciones excede por mucho el número de combinaciones; ¡el primero es más grande que el segundo por un factor de 3! puesto que así es como cada combinación puede ser ordenada.

Generalizando la línea de razonamiento anterior se obtiene una relación simple entre el número de permutaciones y el número de combinaciones que produce una expresión concisa para la última cantidad.

PROPOSICIÓN

$$\binom{n}{k} = \frac{P_{k,n}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Note que $\binom{n}{n} = 1$ y $\binom{n}{0} = 1$ puesto que sólo hay una forma de seleccionar un conjunto de n (todos) elementos, o de ningún elemento, y $\binom{n}{1} = n$ puesto que existen n subconjuntos de tamaño 1.

EJEMPLO 2.22 Una lista de reproducción de iPod contiene 100 canciones de las cuales 10 son de los Beatles. Supongamos que la función de reproducción aleatoria se utiliza para reproducir las canciones en orden aleatorio (la aleatoriedad del proceso de barajar es investigada en **"Does Your iPod *Really* Play Favorites?" (*The Amer. Statistician*, 2009: 263–268)**. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera canción escuchada de los Beatles sea la quinta canción en reproducirse?

Para que este evento ocurra, debe ser el caso de que las primeras cuatro canciones que se reproducen no sean canciones de los Beatles (NB) y que la quinta canción sí sea de los Beatles (B). El número de maneras de seleccionar las primeras cinco canciones es de 100(99)(98)(97)(96). El número de maneras de seleccionar estas cinco canciones para que las cuatro primeras sean NB y la siguiente sea B es de 90(89)(88)(87)(10). La suposición aleatoria implica que cualquier conjunto particular de 5 canciones de entre las 100 tiene la misma probabilidad de ser seleccionado como los primeros cinco reproducidos al igual que cualquier otro conjunto de cinco canciones; cada resultado es igualmente probable. Por tanto, la probabilidad deseada es el cociente entre el número de resultados para que el evento de interés ocurra con el número de resultados posibles:

$$P(1^{a}\text{ B es la }5^{a}\text{ canción reproducida}) = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 10}{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96} = \frac{P_{4,90} \cdot (10)}{P_{5,100}} = .0679$$

Esta es una línea alternativa de razonamiento que implica combinaciones. En lugar de centrarse en la selección de sólo las primeras cinco canciones, piense en reproducir las 100 canciones en orden aleatorio. El número de formas de elegir 10 de estas canciones que sean (sin tener en cuenta el orden en que se reprodujeron) es $\binom{100}{10}$. Ahora bien, si elegimos 9 de las últimas 95 canciones que sean B, lo cual se puede hacer de $\binom{95}{9}$ maneras, quedarán

cuatro NB y una B para las primeras cinco canciones. Sólo hay una forma más de estas cinco de empezar con cuatro NB y luego seguir con una B (recordemos que estamos considerando subconjuntos *desordenados*). Por tanto,

$$P(\text{1ª B es la 5ª canción reproducida}) = \frac{\binom{95}{9}}{\binom{100}{10}}$$

Es fácil verificar que esta última expresión es, de hecho, idéntica a la primera expresión para la probabilidad deseada, por lo que el resultado numérico es de nuevo 0.0679.

La probabilidad de que una de las primeras cinco canciones que se reproducen sea una canción de los Beatles es

$$P(\text{la 1ª B es la 1ª o 2ª o 3ª o 4ª o 5ª canción reproducida})$$
$$= \frac{\binom{99}{9}}{\binom{100}{10}} + \frac{\binom{98}{9}}{\binom{100}{10}} + \frac{\binom{97}{9}}{\binom{100}{10}} + \frac{\binom{96}{9}}{\binom{100}{10}} + \frac{\binom{95}{9}}{\binom{100}{10}} = .4162$$

Por tanto, es bastante probable que la canción de los Beatles sea una de las primeras cinco canciones reproducidas. Esta "coincidencia" no es tan sorprendente como podría parecer. ■

EJEMPLO 2.23 El almacén de una universidad recibió 25 impresoras, de las cuales 10 son láser y 15 son modelos de inyección de tinta. Si 6 de estas 25 se seleccionan al azar para que las revise un técnico particular, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de las seleccionadas sean impresoras láser (de modo que las otras 3 sean de inyección de tinta)?

Sea D_3 = {exactamente 3 de las 6 seleccionadas son impresoras de inyección de tinta}. Suponiendo que cualquier conjunto particular de 6 impresoras es tan probable de ser elegido como cualquier otro conjunto de 6, se tienen resultados igualmente probables, por tanto $P(D_3) = N(D_3)/N$, donde N es el número de formas de elegir 6 impresoras de entre las 25 y $N(D_3)$ es el número de formas de elegir 3 impresoras láser y 3 de inyección de tinta. Por tanto $N = \binom{25}{6}$. Para obtener $N(D_3)$ primero se piensa en elegir 3 de las 15 impresoras de inyección de tinta y luego 3 de las impresoras láser. Existen $\binom{15}{3}$ formas de elegir las 3 impresoras de inyección de tinta y $\binom{10}{3}$ formas de elegir las 3 impresoras láser; $N(D_3)$ es ahora el producto de estos dos números (visualice un diagrama de árbol; en realidad aquí se está utilizando el argumento de la regla de producto), por tanto

$$P(D_3) = \frac{N(D_3)}{N} = \frac{\binom{15}{3}\binom{10}{3}}{\binom{25}{6}} = \frac{\frac{15!}{3!12!} \cdot \frac{10!}{3!7!}}{\frac{25!}{6!19!}} = .3083$$

Sea D_4 = {exactamente 4 de las 6 impresoras seleccionadas son impresoras de inyección de tinta} y defínanse D_5 y D_6 del mismo modo. Entonces la probabilidad de seleccionar al menos 3 impresoras de inyección de tinta es

$$P(D_3 \cup D_4 \cup D_5 \cup D_6) = P(D_3) + P(D_4) + P(D_5) + P(D_6)$$
$$= \frac{\binom{15}{3}\binom{10}{3}}{\binom{25}{6}} + \frac{\binom{15}{4}\binom{10}{2}}{\binom{25}{6}} + \frac{\binom{15}{5}\binom{10}{1}}{\binom{25}{6}} + \frac{\binom{15}{6}\binom{10}{0}}{\binom{25}{6}} = .8530$$

■

EJERCICIOS Sección 2.3 (29–44)

29. A partir de abril de 2006 aproximadamente 50 millones de nombres de dominio web.com fueron registrados (p. ej., yahoo.com).

a. ¿Cuántos nombres de dominio compuestos de exactamente dos letras en secuencia pueden ser formados? ¿Cuántos nombres de dominio de dos letras existen si se permiten dígitos y letras como caracteres? [*Nota*: Ahora es obligatoria una longitud de tres o más de caracteres.]

b. ¿Cuántos nombres de dominio compuestos de tres letras en secuencia existen? ¿Cuántos de esta longitud existen si se permiten igual letras y dígitos? [*Nota*: En la actualidad todos se usan.]

c. Responda las preguntas formuladas en b) para secuencias de cuatro caracteres.

d. A partir de abril de 2006 aún no habían sido reclamadas 97,786 de las secuencias de cuatro caracteres con letras o números. Si se elige al azar un nombre de cuatro caracteres, ¿cuál es la probabilidad de que ya tenga propietario?

30. Un amigo va a ofrecer una fiesta. Sus existencias actuales de vino incluyen 8 botellas de zinfandel, 10 de merlot y 12 de cabernet (él sólo bebe vino tinto), todos de diferentes fábricas vinícolas.

a. Si desea servir 3 botellas de zinfandel y el orden de servicio es importante, ¿cuántas formas existen de hacerlo?

b. Si 6 botellas de vino tienen que ser seleccionadas al azar de entre las 30 para servir, ¿cuántas formas existen de hacerlo?

c. Si se seleccionan al azar 6 botellas, ¿cuántas formas existen de obtener dos botellas de cada variedad?

d. Si se seleccionan 6 botellas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el resultado sea dos botellas de cada variedad?

e. Si se eligen 6 botellas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que todas sean de la misma variedad?

31. Beethoven, el compositor, escribió 9 sinfonías, 5 conciertos para piano (música para piano y orquesta) y 32 sonatas para piano (música para piano solo).

a. ¿Cuántas maneras existen de tocar primero una sinfonía de Beethoven y después un concierto para piano de Beethoven?

b. El gerente de una estación de radio decide que en noches sucesivas (7 días a la semana), se tocará una sinfonía de Beethoven seguida por un concierto para piano de Beethoven seguido por una sonata para piano de Beethoven. ¿Durante cuántos años se podría continuar con esta política antes de que exactamente el mismo programa se repitiera?

32. Una tienda de equipos de sonido está ofreciendo un precio especial en un juego completo de componentes (receptor, reproductor de discos compactos, altavoces, tornamesa). Al comprador se le ofrece una selección de fabricante por cada componente.

Receptor: Kenwood, Onkyo, Pioneer, Sony, Sherwood
Reproductor de discos compactos: Onkyo, Pioneer, Sony, Technics
Altavoces: Boston, Infinity, Polk
Tornamesa: Onkyo, Sony, Teac, Technics

Un tablero de distribución en la tienda le permite al cliente conectar cualquier selección de componentes (que consiste en uno de cada tipo). Use las reglas de producto para responder las siguientes preguntas.

a. ¿De cuántas maneras puede ser seleccionado un componente de cada tipo?

b. ¿De cuántas maneras pueden ser seleccionados los componentes, si tanto el receptor como el reproductor de discos compactos tienen que ser Sony?

c. ¿De cuántas maneras pueden ser seleccionados los componentes, si ninguno tiene que ser Sony?

d. ¿De cuántas maneras se puede hacer una selección, si se tiene que incluir al menos un componente Sony?

e. Si alguien mueve los interruptores en el tablero de distribución completamente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el sistema seleccionado contenga al menos un componente Sony? ¿Y exactamente un componente Sony?

33. De nuevo considere el equipo de ligas pequeñas que tiene 15 jugadores en su plantel.

a. ¿Cuántas formas existen de seleccionar 9 jugadores para la alineación inicial?

b. ¿Cuántas formas existen de seleccionar 9 jugadores para la alineación inicial y un orden al bat de los nueve inicialistas?

c. Suponga que 5 de los 15 jugadores son zurdos. ¿Cuántas formas existen de seleccionar 3 jardineros zurdos y tener las otras 6 posiciones ocupadas por jugadores derechos?

34. Las fallas en los teclados de computadora pueden ser atribuidas a defectos eléctricos o mecánicos. Un taller de reparación actualmente cuenta con 25 teclados averiados, de los cuales 6 tienen defectos eléctricos y 19 tienen defectos mecánicos.

a. ¿Cuántas maneras hay de seleccionar al azar cinco de estos teclados para una inspección completa (sin tener en cuenta el orden)?

b. ¿De cuántas maneras puede seleccionarse una muestra de 5 teclados, de manera que sólo dos tengan un defecto eléctrico?

c. Si se selecciona al azar una muestra de 5 teclados, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 4 de éstos tengan un defecto mecánico?

35. Una empresa productora emplea 10 trabajadores en el turno de día, 8 en el turno de tarde y 6 en el turno de medianoche. Un consultor de control de calidad seleccionará 5 de estos trabajadores para entrevistarlos. Suponga que la selección se hace de tal modo que cualquier grupo particular de 5 trabajadores tiene

la misma oportunidad de ser seleccionado, al igual que cualquier otro grupo (escogiendo 5 de entre 24 sin reemplazarlos).

a. ¿Cuántas selecciones resultarán en las que los 5 trabajadores seleccionados provengan del turno de día? ¿Cuál es la probabilidad de que los 5 trabajadores seleccionados sean del turno de día?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que los 5 trabajadores seleccionados sean del mismo turno?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos turnos diferentes estén representados entre los trabajadores seleccionados?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los turnos no esté representado en la muestra de trabajadores?

36. Un departamento académico compuesto de cinco profesores limitó su selección para jefe de departamento al candidato *A* o el candidato *B*. Cada miembro votó por alguno de los candidatos. Suponga que en realidad existen tres votos para *A* y dos para *B*. Si los votos se cuentan al azar, ¿cuál es la probabilidad de que *A* se mantenga adelante de *B* durante todo el conteo de votos (p. ej. este evento ocurre si el orden seleccionado es *AABAB* pero no si es *ABBAA*)?

37. Un experimentador está estudiando los efectos de la temperatura, la presión y el tipo de catalizador en la producción de cierta reacción química. Se están considerando tres diferentes temperaturas, cuatro presiones distintas y cinco catalizadores diferentes.

a. Si cualquier experimento particular implica utilizar una temperatura, una presión y un catalizador, ¿cuántos experimentos son posibles?

b. ¿Cuántos experimentos hay que impliquen el uso de la temperatura más baja y dos presiones bajas?

c. Suponga que se tienen que realizar cinco experimentos diferentes el primer día de experimentación. Si los cinco se eligen al azar de entre todas las posibilidades, de modo que cualquier grupo de cinco tenga la misma probabilidad de selección, ¿cuál es la probabilidad de que se utilice un catalizador diferente en cada experimento?

38. Un soneto es un poema de 14 renglones en el que se siguen ciertos patrones de rimas. El escritor Raymond Queneau publicó un libro que sólo contiene 10 sonetos, cada uno en una página diferente. Sin embargo, estos están estructurados de modo que podrían crearse otros sonetos de la siguiente manera: el primer renglón de un soneto podría provenir del primer reglón de cualquiera de las 10 páginas, el segundo renglón podría provenir del segundo renglón de cualquiera de las 10 páginas y así sucesivamente (para este propósito se perforaban los renglones sucesivos).

a. ¿Cuántos sonetos pueden crearse a partir de los 10 del libro?

b. Si se selecciona al azar uno de los sonetos formados a partir del inciso a), ¿cuál es la probabilidad de que ninguno de sus renglones provenga del primer soneto o del último soneto del libro?

39. Una caja en un almacén contiene 15 focos compactos fluorescentes, de los cuales cinco son de 13 *watts*, seis de 18 y cuatro de 23. Suponga que se eligen al azar tres focos.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente dos de los focos seleccionados sean de 23 *watts*?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres focos seleccionados sean de los mismos *watts*?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que se seleccione un foco de cada tipo?

d. Suponga ahora que los focos tienen que ser seleccionados uno por uno hasta encontrar uno de 23 *watts*. ¿Cuál es la probabilidad de que sea necesario examinar al menos seis focos?

40. Tres moléculas de tipo *A*, tres de tipo *B*, tres de tipo *C* y tres de tipo *D* tienen que ser unidas para formar una cadena molecular. Una cadena molecular como esa es *ABCDABCDABCD* y otra es *BCDDAAABDBCC*.

a. ¿Cuántas moléculas de cadena hay? [*Sugerencia*: Si las tres *A* se distinguieran una de otra (A_1, A_2, A_3) y también las *B*, las *C* y las *D* ¿cuántas moléculas habría? ¿Cómo se reduce este número si se le quitan los subíndices a las *A*?]

b. Supongamos que se selecciona al azar una molécula de cadena del tipo descrito. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres moléculas de cada tipo terminen una al lado de la otra (como en *BBBAAADDDCCC*)?

41. Un número de identificación personal para cajero automático (NIP) consta de cuatro cifras, cada una de 0, 1, 2,..., 8, o 9, en secuencia.

a. ¿Cuántos posibles NIP diferentes hay si no existen restricciones en la elección de dígitos?

b. De acuerdo con un representante en la sucursal local del autor del Chase Bank, hay restricciones en la elección de dígitos. La opción es que se prohíba lo siguiente: *i*) los cuatro dígitos idénticos; *ii*) las secuencias consecutivas de dígitos sean ascendentes o descendentes, como 6543; *iii*) cualquier secuencia de arranque con 19 (años de nacimiento son demasiado fáciles de adivinar). Así que si uno de los NIP en a) es seleccionado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea uno legítimo (es decir, que no sea una de las secuencias prohibidas)?

c. Alguien ha robado una tarjeta de cajero automático y sabe que los dígitos primero y último del NIP son 8 y 1, respectivamente. Tiene tres intentos antes de que la tarjeta sea retenida por el cajero automático (pero no se da cuenta de eso). Así que selecciona al azar los dígitos 2° y 3° para el primer intento, a continuación selecciona al azar un par de dígitos diferentes para el segundo intento, y otro par de dígitos seleccionados al azar para el tercer intento (el individuo sabe acerca de las restricciones descritas en b) para seleccionar sólo de las posibilidades legítimas). ¿Cuál es la probabilidad de que el individuo tenga acceso a la cuenta?

d. Vuelva a calcular la probabilidad de c) si los dígitos primero y último son 1 y 1, respectivamente.

42. Una alineación titular en el baloncesto se compone de dos defensas, dos delanteros y un centro.

a. Un equipo de la universidad tiene en su lista tres centros, cuatro defensas, cuatro delanteros y un individuo (X) que

puede jugar de defensa o como delantero. ¿Cuántas alineaciones diferentes de inicio se pueden crear? [*Sugerencia*: Considere la posibilidad de alineaciones sin X, luego alineaciones con X como defensa, y a continuación alineaciones con X como delantero.]

b. Ahora supongamos que la lista tiene 5 defensas, 5 delanteros, 3 centros y 2 "jugadores comodín" (X y Y), que pueden jugar de defensas y de delanteros. Si 5 de los 15 jugadores son seleccionados al azar, ¿cuál es la probabilidad de que constituyan una alineación de inicio legítima?

43. En un juego de póker de cinco cartas, una corrida se compone de cinco cartas con denominaciones adyacentes (p. ej. 9 de tréboles, 10 de corazones, comodín de corazones, reina de espadas y rey de tréboles). Suponiendo que los ases pueden estar arriba o abajo, si le reparten una mano de cinco cartas ¿cuál es la probabilidad de que sea una corrida con un 10 como carta alta? ¿Cuál es la probabilidad de que sea una corrida del mismo palo?

44. Demuestre que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Dé una interpretación que implique subconjuntos.

2.4 Probabilidad condicional

Las probabilidades asignadas a varios eventos dependen de lo que se sabe sobre la situación experimental cuando se hace la asignación. Enseguida a la asignación inicial puede llegar a estar disponible información parcial pertinente al resultado del experimento. Tal información puede hacer que se revisen algunas de las asignaciones de probabilidad. Para un evento particular A se ha utilizado $P(A)$ para representar la probabilidad asignada a A; ahora se considera $P(A)$ como la probabilidad original o no condicional del evento A.

En esta sección se examina cómo la información de que "un evento B ha ocurrido" afecta la probabilidad asignada a A. Por ejemplo, A podría referirse a un individuo que sufre una enfermedad particular en presencia de ciertos síntomas. Si se realiza un examen de sangre en el individuo y el resultado es negativo (B = examen de sangre negativo), entonces la probabilidad de que tenga la enfermedad cambiará (deberá reducirse, pero no a cero, puesto que los exámenes de sangre no son infalibles). Se utilizará la notación para representar la **probabilidad condicional de A puesto que el evento B ha ocurrido**. B es el "evento condicionante".

Por ejemplo, considere el evento A en el que un estudiante seleccionado al azar en su universidad obtuvo todas las clases deseadas durante el ciclo de inscripciones del semestre anterior. Presumiblemente $P(A)$ no es muy grande. Sin embargo, suponga que el estudiante seleccionado es un atleta con prioridad de inscripción especial (el evento B). Entonces $P(A|B)$ deberá ser sustancialmente más grande que $P(A)$, aunque quizás aún no cerca de 1.

EJEMPLO 2.24 En una planta se ensamblan componentes complejos en dos líneas de ensamble diferentes, A y A'. La línea A utiliza equipo más viejo que A', por lo que es un poco más lenta y menos confiable. Suponga que en un día dado la línea A ensambla 8 componentes, de los cuales 2 han sido identificados como defectuosos (B) y 6 como no defectuosos (B'), mientras que A' ha producido 1 componente defectuoso y 9 no defectuosos. Esta información se resume en la tabla siguiente.

		Condición	
		B	B'
Línea	A	2	6
	A'	1	9

Ajeno a esta información, el gerente de ventas selecciona al azar 1 de estos 18 componentes para una demostración. Antes de la demostración

$$P(\text{componente de la línea } A \text{ seleccionado}) = P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{8}{18} = .44$$

No obstante, si el componente seleccionado resulta defectuoso, entonces el evento B ha ocurrido, por lo que el componente debe haber sido 1 de los 3 de la columna B de la tabla. Debido a que estos 3 componentes son igualmente probables entre sí una vez que B ha ocurrido,

$$P(A \mid B) = \frac{2}{3} = \frac{2/18}{3/18} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{2.2}$$

■

En la ecuación (2.2) la probabilidad condicional está expresada como una razón de probabilidades incondicionales. El numerador es la probabilidad de la intersección de los dos eventos, en tanto que el denominador es la probabilidad del evento condicionante B. Un diagrama de Venn ilustra esta relación (figura 2.8).

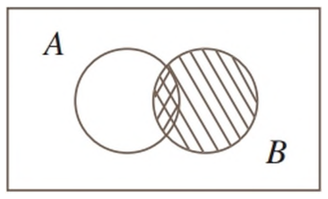


Figura 2.8 Motivación de la definición de probabilidad condicional

Dado que B ha ocurrido, el espacio muestral pertinente ya no es $\mathcal{S}$ pero consta de resultados en B; A ha ocurrido si y sólo si en la intersección ocurrió uno de los resultados, así que la probabilidad condicional de A dado B es proporcional a $P(A \cap B)$. Se utiliza la constante de proporcionalidad $1/P(B)$ para garantizar que la probabilidad $P(B/B)$ del nuevo espacio muestral B sea igual a 1.

Definición de probabilidad condicional

El ejemplo 2.24 demuestra que cuando los resultados son igualmente probables el cálculo de probabilidades condicionales puede basarse en la intuición. Cuando los experimentos son más complicados, la intuición puede fallar, así que se requiere una definición general de probabilidad condicional que dé respuestas intuitivas en problemas simples. El diagrama de Venn y la ecuación (2.2) sugieren cómo proceder.

DEFINICIÓN

Para dos eventos cualesquiera A y B con $P(B) > 0$, la **probabilidad condicional de A dado que B** ha ocurrido está definida por

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{2.3}$$

EJEMPLO 2.25 Suponga que de todos los individuos que compran cierta cámara digital, 60% incluye en su compra una tarjeta de memoria opcional, 40% incluye una batería extra y 30%, tanto una tarjeta como una batería. Considere seleccionar al azar un comprador y sean $A = \{\text{tarjeta de memoria adquirida}\}$ y $B = \{\text{batería adquirida}\}$. Entonces $P(A) = .60$, $P(B) = .40$ y $P(\text{ambas adquiridas}) = P(A \cap B) = .30$. Dado que el individuo seleccionado adquirió una batería extra, la probabilidad de que una tarjeta opcional también sea adquirida es

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{.30}{.40} = .75$$

Es decir, de todos quienes adquieren una batería extra, 75% adquirió una tarjeta de memoria opcional. Asimismo,

$$P(\text{batería} \mid \text{tarjeta de memoria}) = P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{.30}{.60} = .50$$

Observe que $P(A|B) \neq P(A)$ y $P(B|A) \neq P(B)$. ■

El evento cuya probabilidad se desea podría ser una unión o intersección de otros eventos y lo mismo podría decirse del evento condicionante.

EJEMPLO 2.26 Una revista de noticias publica tres columnas tituladas "Arte" (A), "Libros" (B) y "Cine" (C). Los hábitos de lectura de un lector, seleccionado al azar, respecto a estas columnas son

Lee regularmente	A	B	C	$A \cap B$	$A \cap C$	$B \cap C$	$A \cap B \cap C$
Probabilidad	.14	.23	.37	.08	.09	.13	.05

La figura 2.9 ilustra las probabilidades pertinentes.

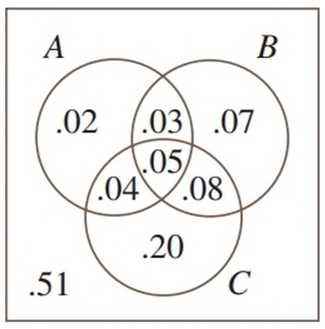


Figura 2.9 Diagrama de Venn para el ejemplo 2.26

Considere las siguientes cuatro probabilidades condicionales

(i) $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{.08}{.23} = .348$

(ii) La probabilidad de que el lector seleccionado lea regularmente la columna "Arte", dado que regularmente lee al menos una de las otras dos columnas, es

$$P(A|B \cup C) = \frac{P(A \cap (B \cup C))}{P(B \cup C)} = \frac{.04 + .05 + .03}{.47} = \frac{.12}{.47} = .255$$

(iii) $P(A \mid \text{lee al menos una}) = P(A|A \cup B \cup C) = \dfrac{P(A \cap (A \cup B \cup C))}{P(A \cup B \cup C)}$

$$= \frac{P(A)}{P(A \cup B \cup C)} = \frac{.14}{.49} = .286$$

(iv) La probabilidad de que el lector seleccionado lea al menos una de las dos primeras columnas, dado que lee la columna de cine es

$$P(A \cup B|C) = \frac{P((A \cup B) \cap C)}{P(C)} = \frac{.04 + .05 + .08}{.37} = .459$$ ■

Regla de multiplicación para $P(A \cap B)$

La definición de probabilidad condicional da el siguiente resultado, obtenido multiplicando ambos miembros de la ecuación (2.3) por $P(B)$.

La regla de multiplicación

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Esta regla es importante porque a menudo sucede que se desea $P(A \cap B)$, en tanto que $P(B)$ y $P(A|B)$ pueden ser especificadas a partir de la descripción del problema. La consideración de $P(B|A)$ da $P(A \cap B) = P(B|\text{A}) \cdot P(A)$.

EJEMPLO 2.27 Cuatro individuos han respondido a la solicitud de un banco de sangre para efectuar donaciones. Ninguno de ellos ha donado antes, por lo que sus tipos de sangre son desconocidos. Suponga que únicamente se desea el tipo O+ y sólo uno de los cuatro lo tiene. Si los donadores potenciales se seleccionan en orden aleatorio para determinar su tipo de sangre, ¿cuál es la probabilidad de que al menos tres individuos deban ser examinados para determinar su tipo de sangre y obtener el tipo deseado?

Al identificar $B = \{\text{primer tipo no O+}\}$ y $A = \{\text{segundo tipo no O+}\}$, $P(B) = 3/4$. Dado que el primer tipo no es O+, dos de los tres individuos que quedan tampoco son O+, por tanto $P(A|B) = 2/3$. La regla de multiplicación ahora da

$$\begin{aligned} P(\text{al menos tres individuos fueron examinados para determinar su tipo de sangre}) &= P(A \cap B) \\ &= P(A|B) \cdot P(B) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{12} \\ &= .5 \end{aligned}$$

■

La regla de multiplicación es más útil cuando los experimentos se componen de varias etapas en secuencia. El evento condicionante B describe entonces el resultado de la primera etapa y A el resultado de la segunda, de modo que $P(A|B)$, condicionada en lo que ocurra primero, a menudo será conocida. La regla es fácil de ser ampliada a experimentos que implican más de dos etapas. Por ejemplo, considere los tres eventos A_1, A_2 y A_3. La triple intersección de estos eventos se puede representar como la doble intersección $(A_1 \cap A_2) \cap A_3$. Al aplicar la regla de la multiplicación a esta intersección y después a $A_1 \cap A_2$ se obtiene.

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot P(A_1 \cap A_2) \\ &= P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_1) \end{aligned} \quad \textbf{(2.4)}$$

Así la probabilidad de la triple intersección es un producto de tres probabilidades, dos de las cuales son condicionales.

EJEMPLO 2.28 Para el experimento de determinación del tipo de sangre del ejemplo 2.27,

$$\begin{aligned} P(\text{el tercer tipo es O+}) &= P(\text{el tercero es|el primero no es} \cap \text{el segundo no es}) \\ &\quad \cdot P(\text{el segundo no es|el primero no es}) \cdot P(\text{el primero no es}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4} = .25 \end{aligned}$$

■

Cuando el experimento de interés se compone de una secuencia de varias etapas es conveniente representarlas con un diagrama de árbol. Una vez que se tiene un diagrama de árbol apropiado las probabilidades y las probabilidades condicionales pueden ingresarse en las diversas ramas; esto implica el uso repetido de la regla de multiplicación.

EJEMPLO 2.29 Una cadena de tiendas de video vende tres marcas diferentes de reproductores de DVD. De sus ventas de reproductores de DVD, 50% es de la marca 1 (la menos costosa), 30% de la marca 2 y 20% de la marca 3. Cada fabricante ofrece 1 año de garantía en las partes y en mano de obra. Se sabe que 25% de los reproductores de DVD de la marca 1 requiere trabajo de reparación dentro del periodo de garantía, mientras que los porcentajes correspondientes a las marcas 2 y 3 son 20 y 10%, respectivamente.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que un comprador seleccionado al azar haya adquirido un reproductor de DVD marca 1 que necesitará reparación mientras se encuentra dentro del plazo de garantía?

2. ¿Cuál es la probabilidad de que un comprador seleccionado al azar haya comprado un reproductor de DVD que necesitará reparación mientras se encuentra dentro del plazo de garantía?

3. Si un cliente regresa a la tienda con un reproductor de DVD que necesita reparación dentro del plazo de garantía, ¿cuál es la probabilidad de que sea un reproductor de DVD marca 1? ¿Y uno marca 2? ¿Y uno marca 3?

La primera etapa del problema implica a un cliente que selecciona una de las tres marcas de reproductor de DVD. Sea A_i = {marca i adquirida}, con $i = 1, 2$ y 3. Entonces $P(A_1) = .50$, $P(A_2) = .30$ y $P(A_3) = .20$. Una vez que se selecciona una marca de reproductor de DVD, la segunda etapa implica observar si el reproductor seleccionado necesita reparación dentro del plazo de garantía. Con B = {necesita reparación} y B' = {no necesita reparación}, la información dada implica que $P(B|A_1) = .25$, $P(B|A_2) = .20$ y $P(B|A_3) = .10$.

El diagrama de árbol que representa esta situación experimental se muestra en la figura 2.10. Las ramas iniciales corresponden a marcas diferentes de reproductores de DVD; hay dos ramas de segunda generación que emanan de la punta de cada rama inicial, una para "necesita reparación" y la otra para "no necesita reparación". La probabilidad $P(A_i)$ aparece en la rama i-ésima inicial, en tanto que las probabilidades condicionales $P(B|A_i)$ y $P(B'|A_i)$ aparecen en las ramas de la segunda generación. A la derecha de cada rama de segunda generación, correspondiente a la ocurrencia de B, se muestra el producto de probabilidades en las ramas que conducen hacia fuera de dicho punto. Esta es simplemente la regla de multiplicación en acción. La respuesta a la pregunta planteada en 1 es, por tanto, $P(A_1 \cap B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) = .125$. La respuesta a la pregunta 2 es

$$\begin{aligned} P(B) &= P[\text{(marca 1 y reparación) o (marca 2 y reparación) o (marca 3 y reparación)}] \\ &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) \\ &= .125 + .060 + .020 = .205 \end{aligned}$$

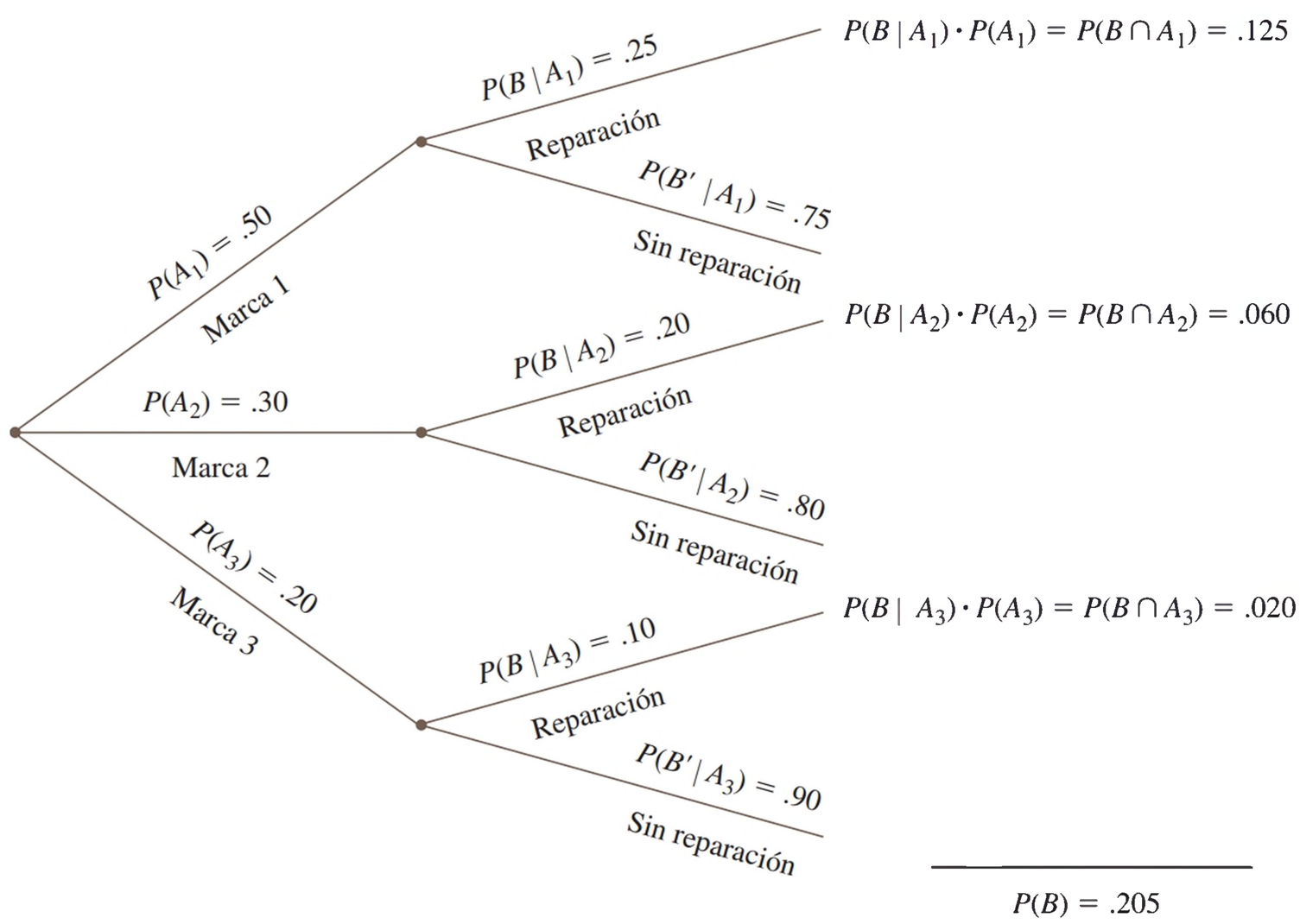


Figura 2.10 Diagrama de árbol para el ejemplo 2.29

Finalmente,

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{.125}{.205} = .61$$
$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{.060}{.205} = .29$$

y

$$P(A_3|B) = 1 - P(A_1|B) - P(A_2|B) = .10$$

La *probabilidad previa* o inicial de la marca 1 es .50. Una vez que se sabe que el reproductor de DVD seleccionado necesitó reparación, la *probabilidad posterior* de la marca 1 se incrementa a .61. Esto se debe a que es más probable que los reproductores marca 1 necesiten reparación de garantía que las demás marcas. La probabilidad posterior de la marca 3 es $P(A_3|B) = .10$, la cual es mucho menor que la probabilidad previa $P(A_3) = .20$. ■

Teorema de Bayes

El cálculo de una probabilidad posterior $P(A_j|B)$ a partir de probabilidades previas dadas $P(A_i)$ y probabilidades condicionales $P(B|A_i)$ ocupa una posición central en la probabilidad elemental. La regla general de dichos cálculos, los que en realidad son una aplicación simple de la regla de multiplicación, se remonta al reverendo Thomas Bayes quien vivió en el siglo XVIII. Para formularla primero se requiere otro resultado. Recuerde que los eventos $A_1,\ldots, A_k$ son mutuamente excluyentes si ninguno de los dos tiene resultados comunes. Los eventos son *exhaustivos* si un A_i debe ocurrir, de modo que $A_1 \cup \ldots \cup A_k = \mathcal{S}$.

Ley de probabilidad total

Sean $A_1,\ldots, A_k$ eventos mutuamente excluyentes y exhaustivos. Así, para cualquier otro evento B,

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + \cdots + P(B|A_k)P(A_k)$$
$$= \sum_{i=1}^{k} P(B|A_i)P(A_i) \qquad (2.5)$$

Demostración Puesto que los eventos A_i son mutuamente excluyentes y exhaustivos, si ocurre B debe ser en forma conjunta con uno de los eventos A_i exactamente. Es decir, $B = (A_1 \cap B) \cup \ldots \cup (A_k \cap B)$, donde los eventos $(A_i \cap B)$ son mutuamente excluyentes. Esta "partición de B" se ilustra en la figura 2.11. Por tanto,

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{k} P(B|A_i)P(A_i)$$

como se deseaba.

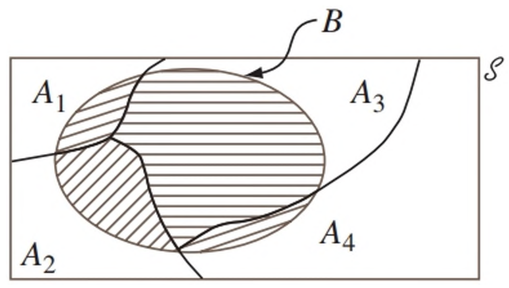


Figura 2.11 Partición de B entre las A_i′ mutuamente excluyentes y exhaustivas ■

EJEMPLO 2.30 Una persona tiene 3 cuentas de correo electrónico diferentes. La mayoría de sus mensajes, de hecho 70%, entra en la cuenta #1, mientras que 20% entra en la cuenta #2 y el restante 10%, en la cuenta #3. De los mensajes en la cuenta #1 sólo 1% es *spam* (correo no deseado), mientras que los porcentajes correspondientes a las cuentas #2 y #3 son 2 y 5%, respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que un mensaje *spam* sea seleccionado al azar?

Para responder esta pregunta, primero establecemos una notación:

$$A_i = \{\text{el mensaje es de la cuenta \#}i\} \text{ para } i = 1, 2, 3, \quad B = \{\text{el mensaje es } spam\}$$

Por tanto, los porcentajes dados implican que

$$P(A_1) = .70,\ P(A_2) = .20,\ P(A_3) = .10$$

$$P(B \mid A_1) = .01,\ P(B \mid A_2) = .02,\ P(B \mid A_3) = .05$$

Ahora simplemente es cuestión de sustituir en la ecuación de la ley de probabilidad total:

$$P(B) = (.01)(.70) + (.02)(.20) + (.05)(.10) = .016$$

A largo plazo, 1.6% de los mensajes de esta persona serán *spam*. ■

Teorema de Bayes

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_k$ un conjunto de eventos mutuamente excluyentes y exhaustivos con probabilidades *previas* $P(A_i)(i = 1, \ldots, k)$. Entonces para cualquier otro evento B para el cual $P(B) > 0$, la probabilidad *posterior* de A_j dado que ha ocurrido B es

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(B|A_i) \cdot P(A_i)} \quad j = 1, \ldots, k \qquad \textbf{(2.6)}$$

La transición de la segunda a la tercera expresión en (2.6) se apoya en el uso de la regla de multiplicación en el numerador, y la ley de probabilidad total en el denominador. La proliferación de eventos y subíndices en (2.6) puede ser un poco intimidante para los novatos en el tema de la probabilidad. Mientras existan relativamente pocos eventos en la repartición se puede utilizar un diagrama de árbol (como en el ejemplo 2.29) como base para calcular probabilidades posteriores sin jamás referirse de manera explícita al teorema de Bayes.

EJEMPLO 2.31 *Incidencia de una enfermedad rara*. Sólo 1 de 1000 adultos padece una enfermedad rara para la cual se ha creado una prueba de diagnóstico. La prueba es tal que cuando un individuo padece realmente la enfermedad, un resultado positivo se presentará en 99% de las veces mientras que en individuos sin la enfermedad el examen será positivo sólo 2% de las ocasiones (la *sensibilidad* de esta prueba es de 99% y la *especificidad* es de 98%; en contraste, el **tema en el reporte de septiembre 22 de 2012 de *The Lancet*** informa que la primera prueba del VIH para hacer en casa tiene una sensibilidad de sólo 92% y una especificidad de 99.98%). Si un individuo seleccionado al azar se somete a la prueba y el resultado es positivo, ¿cuál es la probabilidad de que el padezca la enfermedad?

Para utilizar el teorema de Bayes, sea A_1 = el individuo padece la enfermedad, A_2 = el individuo no tiene la enfermedad y B = resultado de prueba positivo. Entonces $P(A_1) = .001$, $P(A_2) = .999$, $P(B \mid A_1) = .99$ y $P(B \mid A_2) = .02$. El diagrama de árbol para este problema se muestra en la figura 2.12.

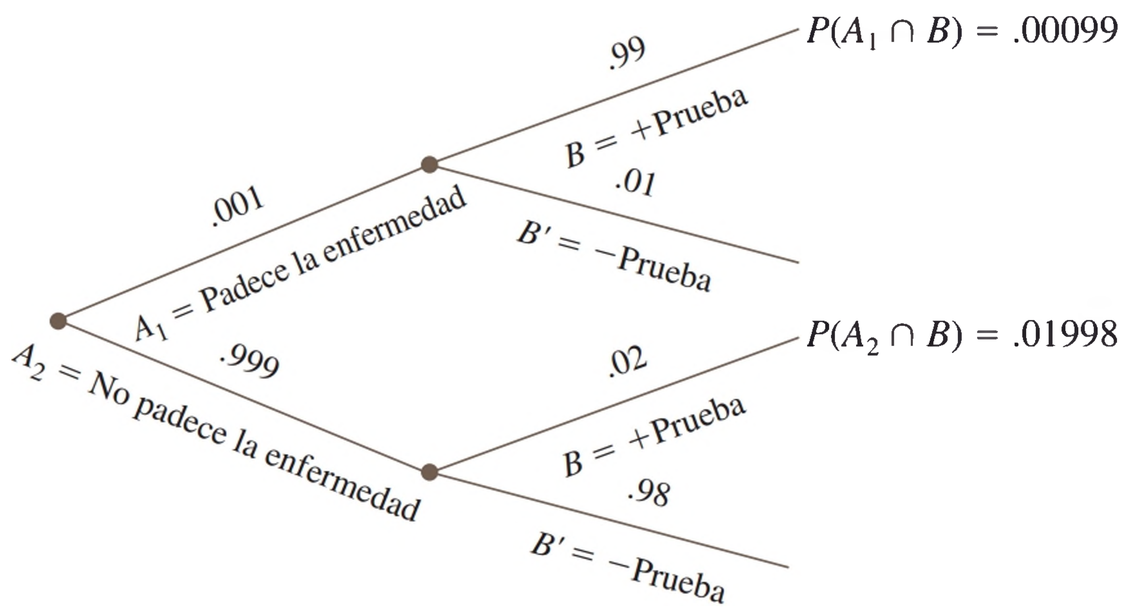


Figura 2.12 Diagrama de árbol para el problema de una enfermedad rara

Junto a cada rama correspondiente a un resultado positivo de prueba, la regla de multiplicación da las probabilidades anotadas. Por consiguiente, $P(B) = .00099 + .01998 = .02097$ a partir de la cual se tiene

$$P(A_1 | B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{.00099}{.02097} = .047$$

Este resultado parece contraintuitivo; la prueba de diagnóstico parece tan precisa que es altamente probable que alguien con un resultado positivo en la prueba padezca la enfermedad, mientras que la probabilidad condicional calculada es de sólo .047. Sin embargo, puesto que la enfermedad es rara y la prueba es sólo moderadamente confiable, surgen más resultados de prueba positivos debido a errores y no de individuos enfermos. La probabilidad de tener la enfermedad se ha incrementado por un factor de multiplicación de 47 (desde la probabilidad previa de .001 hasta la probabilidad posterior de .047), pero para incrementar aún más la probabilidad posterior se requiere una prueba de diagnóstico con tasas de error mucho más pequeñas. ■

EJERCICIOS Sección 2.4 (45–69)

45. La población de un país particular se compone de tres grupos étnicos. Cada individuo pertenece a uno de los cuatro grupos sanguíneos principales. La siguiente tabla de *probabilidad conjunta* da la proporción de individuos en las diversas combinaciones de grupo étnico–grupo sanguíneo.

		Grupo sanguíneo			
		O	**A**	**B**	**AB**
Grupo étnico	**1**	.082	.106	.008	.004
	2	.135	.141	.018	.006
	3	.215	.200	.065	.020

Suponga que se selecciona al azar a un individuo de la población y que los eventos se definen como $A = \{\text{tipo A seleccionado}\}$, $B = \{\text{tipo B seleccionado}\}$ y $C = \{\text{grupo étnico 3 seleccionado}\}$.

a. Calcule $P(A)$, $P(C)$ y $P(A \cap C)$.

b. Calcule $P(A \mid C)$ y $P(C \mid A)$ y explique en contexto lo que cada una de estas probabilidades representa.

c. Si el individuo seleccionado no tiene sangre de tipo B, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al grupo étnico 1?

46. Suponga que un individuo es seleccionado al azar de la población de todos los adultos varones que viven en los Estados Unidos. Sea A el evento en que el individuo seleccionado tiene una estatura de más de 6 pies, y sea B el evento en que el individuo seleccionado es un jugador profesional de basquetbol. ¿Cuál piensa que es más grande, $P(A \mid B)$ o $P(B \mid A)$? ¿Por qué?

47. Regrese al escenario de la tarjeta de crédito del ejercicio 12 (sección 2.2), y sea C el evento de que el estudiante seleccionado tiene una tarjeta American Express. Además de $P(A) = .6$, $P(B) = .4$ y $P(A \cap B) = .3$, suponga que $P(C) = .2$, $P(A \cap C) = .15$, $P(B \cap C) = .1$ y $P(A \cap B \cap C) = .08$.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el alumno seleccionado tenga al menos uno de los tres tipos de tarjetas?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el alumno seleccionado tenga tanto una tarjeta Visa como una MasterCard, pero no una tarjeta American Express?

c. Calcule e interprete $P(B \mid A)$ y también $P(A \mid B)$.

d. Si sabemos que el alumno seleccionado tiene una tarjeta American Express, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga una tarjeta Visa y una MasterCard?

e. Dado que el alumno seleccionado tiene una tarjeta American Express, ¿cuál es la probabilidad que tenga al menos una de los otros dos tipos de tarjetas?

48. Reconsidere la situación del sistema defectuoso descrito en el ejercicio 26 (sección 2.2).

a. Dado que el sistema tiene un defecto de tipo 1, ¿cuál es la probabilidad de que tenga un defecto de tipo 2?

b. Dado que el sistema tiene un defecto de tipo 1, ¿cuál es la probabilidad de que tenga los tres tipos de defecto?

c. Dado que el sistema tiene al menos un tipo de defecto, ¿cuál es la probabilidad de que tenga exactamente un particular tipo de defecto?

d. Dado que el sistema tiene los primeros dos tipos de defecto, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga el tercer tipo de defecto?

49. La siguiente tabla proporciona información sobre el tipo de café seleccionado por alguien que compra una taza de café en un kiosco del aeropuerto en particular

	Pequeño	**Mediano**	**Grande**
Regular	14%	20%	26%
Descafeinado	20%	10%	10%

Considere la posibilidad de seleccionar al azar a un comprador de café.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona adquiera una taza pequeña? ¿Y una taza de café descafeinado?

b. Si nos enteramos de que la persona seleccionada compra una taza de café pequeña, ¿cuál es ahora la probabilidad de que escoja el café descafeinado y cómo se interpreta esta probabilidad?

c. Si nos enteramos de que el individuo seleccionado compró un café descafeinado, ¿cuál es ahora la probabilidad de que haya escogido un tamaño pequeño, y cómo se compara esto con la probabilidad incondicional correspondiente de a)?

50. Una tienda de departamentos vende camisetas deportivas en tres tallas (pequeña, mediana y grande), tres diseños (a cuadros, estampadas y a rayas) y dos largos de manga (larga y corta). Las siguientes tablas dan las proporciones de camisetas vendidas en diferentes combinaciones de cada categoría.

Manga corta

	Diseño		
Talla	**A cuadros**	**Estampada**	**A rayas**
Ch	.04	.02	.05
M	.08	.07	.12
G	.03	.07	.08

Manga larga

	Diseño		
Talla	**A cuadros**	**Estampada**	**A rayas**
Ch	.03	.02	.03
M	.10	.05	.07
G	.04	.02	.08

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la siguiente camiseta vendida sea mediana, estampada y de manga larga?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la siguiente camiseta vendida sea estampada y mediana?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que la siguiente camiseta vendida sea de manga corta? ¿Y de manga larga?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que la talla de la siguiente camiseta vendida sea mediana? Y de que la siguiente camiseta vendida sea estampada?

e. Dado que la camiseta que se acaba de vender es de manga corta a cuadros, ¿cuál era la probabilidad de que fuera mediana?

f. Dado que la camiseta que se acaba de vender era mediana a cuadros, ¿cuál era la probabilidad de que fuera de manga corta? ¿Y de manga larga?

51. De acuerdo con lo publicado el 31 de julio de 2013 en **cnn.com,** después de la muerte de un niño que probó un cacahuate, un estudio de 2010 en la revista ***Pediatrics*** encontró que 8% de los menores de 18 años en los Estados Unidos tienen al menos una alergia alimentaria. Entre las personas con alergia a algún alimento, aproximadamente 39% tenía antecedentes de reacciones graves.

a. Si un menor de 18 años es seleccionado al azar, ¿cuál es la probabilidad de sea alérgico al menos a un alimento y con antecedentes de reacción grave?

b. También se informa que 30% de las personas con alergia en realidad es alérgico a múltiples alimentos. Si un menor de 18 años es seleccionado al azar, ¿cuál es la probabilidad que sea alérgico a múltiples alimentos?

52. Un sistema se compone de bombas idénticas, #1 y #2. Si una falla, el sistema seguirá operando. Sin embargo, debido al esfuerzo adicional, ahora es más probable que antes que la bomba restante falle. Es decir, $r = P(\#2 \text{ falla} \mid \#1 \text{ falla}) > P(\#2 \text{ falla}) = q$. Si al menos una bomba falla alrededor del final de su vida útil en 7% de todos los sistemas, y ambas bombas fallan durante dicho periodo en sólo 1%, ¿cuál es la probabilidad de que la bomba #1 falle durante su vida útil?

53. Un taller repara componentes de audio y de video. Sea A el evento en que el siguiente componente que se recibe para su reparación es un componente de audio, y sea B el evento en que el siguiente componente que se recibe sea un reproductor de discos compactos (así que el evento B está contenido en A). Suponga que $P(A) = .6$ y $P(B) = .05$. ¿Cuál es $P(B|A)$?

54. En el ejercicio 13, $A_i = \{\text{proyecto otorgado } i\}$, con $i = 1, 2, 3$. Use las probabilidades dadas en dicho ejercicio para calcular

las siguientes probabilidades y explique el significado de cada una.

a. $P(A_2 \mid A_1)$ **b.** $P(A_2 \cap A_3 \mid A_1)$

c. $P(A_2 \cup A_3 \mid A_1)$ **d.** $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \mid A_1 \cup A_2 \cup A_3)$

55. Las garrapatas del venado pueden ser portadoras de la enfermedad de Lyme o de la erliquiosis granulocítica humana (HGE, por sus siglas en inglés). Con base en un estudio reciente, suponga que 16% de todas las garrapatas en cierto lugar portan la enfermedad de Lyme, 10% portan HGE y 10% de las garrapatas que portan al menos una de estas enfermedades en realidad porta las dos. Si se determina que una garrapata seleccionada al azar ha sido portadora de HGE, ¿cuál es la probabilidad de que la garrapata seleccionada también porte la enfermedad de Lyme?

56. Para los eventos A y B con $P(B) > 0$, demuestre que $P(A|B) + P(A'|B) = 1$.

57. Si $P(B|A) > P(B)$, demuestre que $P(B'|A) < P(B')$. [*Sugerencia*: Sume $P(B'|A)$ a ambos lados de la desigualdad dada y luego utilice el resultado del ejercicio 56.]

58. Demuestre que para tres eventos cualesquiera A, B y C con $P(C) > 0$, $P(A \cup B \mid C) = P(A \mid C) + P(B \mid C) - P(A \cap B \mid C)$.

59. En una gasolinera, 40% de los clientes utiliza gasolina regular (A_1), 35% usa gasolina plus (A_2) y 25% utiliza premium (A_3). De los clientes que utilizan gasolina regular, sólo 30% llena su tanque (evento B). De los clientes que utilizan plus, 60% llena su tanque, mientras que los que utilizan premium, 50% llena su tanque.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el siguiente cliente pida gasolina plus y llene el tanque ($A_2 \cap B$)?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el siguiente cliente llene el tanque?

c. Si el siguiente cliente llena el tanque, ¿cuál es la probabilidad de que pida gasolina regular? ¿Y de que pida plus? ¿Y de que pida premium?

60. De las aeronaves ligeras que desaparecen en vuelo en cierto país 70% es localizada posteriormente. De las aeronaves que son localizadas, 60% cuenta con un localizador de emergencia, mientras que 90% de las aeronaves no localizadas no cuenta con dicho localizador. Suponga que una aeronave ligera ha desaparecido.

a. Si tiene un localizador de emergencia, ¿cuál es la probabilidad de que no sea localizada?

b. Si no tiene un localizador de emergencia, ¿cuál es la probabilidad de que sí sea localizada?

61. Componentes de cierto tipo son enviados a un distribuidor en lotes de diez. Suponga que 50% de dichos lotes no contiene componentes defectuosos, 30% contiene un componente defectuoso y 20% contiene dos componentes defectuosos. Se seleccionan al azar dos componentes de un lote y se prueban. ¿Cuáles son las probabilidades asociadas con 0, 1 y 2 componentes defectuosos, que están en el lote, en cada una de las siguientes condiciones?

a. Ningún componente probado está defectuoso.

b. Uno de los dos componentes probados está defectuoso. [*Sugerencia*: Trace un diagrama de árbol con tres ramas de primera generación correspondientes a los tres tipos diferentes de lotes.]

62. La compañía Taxi Azul opera 15% de los taxis en cierta ciudad, y Taxi Verde opera el otro 85%. Luego de un accidente en la noche con un taxi, un testigo dijo que el vehículo era azul. Supongamos, sin embargo, que bajo condiciones de visión nocturna, sólo 80% de los individuos puede distinguir correctamente entre un vehículo de color azul y uno verde. ¿Cuál es la probabilidad (posterior) de que la culpa haya sido de un taxi azul? En su respuesta, asegúrese de indicar qué reglas de probabilidad está utilizando. [*Sugerencia*: Un diagrama de árbol podría ayudar. *Nota*: Este ejercicio se basa en un incidente real.]

63. Para los clientes que compran un refrigerador en una tienda de aparatos domésticos, sea A el evento en que el refrigerador fue fabricado en los Estados Unidos, B el evento en que el refrigerador contaba con una máquina de hacer hielos y C el evento en que el cliente adquirió una garantía ampliada. Las probabilidades pertinentes son

$P(A) = .75$ $P(B \mid A) = .9$ $P(B \mid A') = .8$

$P(C \mid A \cap B) = .8$ $P(C \mid A \cap B') = .6$

$P(C \mid A' \cap B) = .7$ $P(C \mid A' \cap B') = .3$

a. Construya un diagrama de árbol compuesto de ramas de primera, segunda y tercera generaciones y anote el evento y la probabilidad apropiados junto a cada rama.

b. Calcule $P(A \cap B \cap C)$.

c. Calcule $P(B \cap C)$.

d. Calcule $P(C)$.

e. Calcule $P(A \mid B \cap C)$, la probabilidad de la compra de un refrigerador fabricado en los Estados Unidos, dado que también se adquirieron una máquina de hacer hielos y una garantía ampliada.

64. El editor de comentarios de una cierta revista científica decide si la revisión de cualquier libro en particular debe ser corta (1–2 páginas), mediana (3–4 páginas) o larga (5–6 páginas). Los datos sobre estudios recientes indican que 60% de ellas son cortas, 30% son medianas y el restante 10% son largas. Los comentarios están presentados en Word o LaTeX. Para las revisiones cortas, 80% está en Word, mientras que 50% de las revisiones medianas y 30% de las revisiones largas están también en Word. Supongamos que se selecciona aleatoriamente una revisión reciente.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la revisión seleccionada se presente en formato Word?

b. Si la revisión seleccionada se presenta en formato Word, ¿cuáles son las probabilidades posteriores de que sea corta, mediana o larga?

65. Un gran operador de complejos de tiempo compartido requiere que cualquier persona interesada en hacer una compra primero visite el sitio de interés. Los datos históricos indican que 20% de todos los compradores potenciales seleccionaron un día de visita, 50% eligió una visita de una noche y 30% optó por una visita de dos noches. Además, 10% de los visitantes de un día en última instancia, hizo una compra, 30% de los visitantes de una noche compró una unidad y 20% de los visitantes de dos noches decidió comprar. Supongamos que un visitante es seleccionado al azar y se demuestra que ha realizado una compra. ¿Qué tan probable es que esta persona haya realizado una visita de un día? ¿Y una visita de una noche? ¿Y una visita de dos noches?

66. Considere la siguiente información sobre vacacionistas (basada en parte en una encuesta reciente de Travelocity): 40% revisa su correo electrónico de trabajo, 30% utiliza un teléfono celular para permanecer en contacto con su trabajo, 25% lleva una computadora portátil consigo, 23% revisa su correo electrónico de trabajo y utiliza un teléfono celular para permanecer en contacto, y 51% no revisa su correo electrónico de trabajo ni utiliza un teléfono celular para permanecer en contacto y tampoco lleva consigo una computadora portátil. Además, 88 de cada 100 que llevan una computadora portátil también revisan su correo electrónico de trabajo y 70 de cada 100 que utilizan un teléfono celular para permanecer en contacto también llevan una computadora portátil.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que un vacacionista seleccionado al azar que revisa su correo electrónico de trabajo también utilice un teléfono celular para permanecer en contacto?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que alguien que lleva una computadora portátil también utilice un teléfono celular para permanecer en contacto?

c. Si el vacacionista seleccionado al azar revisa su correo electrónico de trabajo y lleva una computadora portátil, ¿cuál es la probabilidad de que utilice un teléfono celular para permanecer en contacto?

67. Ha habido gran controversia durante los últimos años respecto a qué tipos de vigilancia son apropiados para prevenir el terrorismo. Suponga que un sistema de vigilancia particular tiene 99% de probabilidades de identificar correctamente a un futuro terrorista y 99.9% de probabilidades de identificar correctamente a alguien que no es un futuro terrorista. Si existen 1000 futuros terroristas en una población de 300 millones y se selecciona al azar un individuo de estos 300 millones, que es examinado por el sistema e identificado como futuro terrorista, ¿cuál es la probabilidad de que en realidad sea un futuro terrorista? ¿Le inquieta el valor de esta probabilidad sobre el uso del sistema de vigilancia? Explique.

68. Una amiga que vive en Los Ángeles hace frecuentes viajes de consultoría a Washington, D.C.; 50% del tiempo viaja con la línea aérea #1, 30% del tiempo con la aerolínea #2 y el restante 20% con la aerolínea #3. Los vuelos de la aerolínea #1 llegan demorados a D.C. 30% del tiempo y 10% del tiempo llegan demorados a L.A. Para la aerolínea #2 estos porcentajes son 25 y 20%, respectivamente; en tanto que para la aerolínea #3 los porcentajes son 40 y 25% respectivamente. Si se sabe que en un viaje particular nuestra amiga llegó demorada a exactamente uno de los dos destinos, ¿cuáles son las probabilidades posteriores de que haya volado con las aerolíneas #1, #2 y #3? Suponga que la probabilidad de arribar con demora a L.A. no se ve afectada por lo que suceda en el vuelo a D.C. [*Sugerencia*: Desde la punta de cada rama de primera generación en un diagrama de árbol, trace tres ramas de segunda generación identificadas, respectivamente, como 0 demorado, 1 demorado y 2 demorado.]

69. En el ejercicio 59 considere la siguiente información adicional sobre el uso de tarjetas de crédito:

70% de todos los clientes que utilizan gasolina regular y que llenan el tanque usa una tarjeta de crédito.

50% de todos los clientes que utilizan gasolina regular y que no llenan el tanque usa una tarjeta de crédito.

60% de todos los clientes que llenan el tanque con gasolina plus usa una tarjeta de crédito.

50% de todos los clientes que utilizan gasolina plus y que no llenan el tanque usa una tarjeta de crédito.

50% de todos los clientes que utilizan gasolina premium y que llenan el tanque usan una tarjeta de crédito.

40% de todos los clientes que utilizan gasolina premium y que no llenan el tanque usa una tarjeta de crédito.

Calcule la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos para el siguiente cliente que llegue (un diagrama de árbol podría ayudar).

a. {plus, tanque lleno y tarjeta de crédito}

b. {premium, tanque no lleno y tarjeta de crédito}

c. {premium y tarjeta de crédito}

d. {tanque lleno y tarjeta de crédito}

e. {tarjeta de crédito}

f. Si el siguiente cliente utiliza una tarjeta de crédito, ¿cuál es la probabilidad de que pida premium?

2.5 Independencia

La definición de probabilidad condicional permite revisar la probabilidad $P(A)$ originalmente asignada a A cuando después se nos informa que otro evento B ha ocurrido; la nueva probabilidad de A es $P(A \mid B)$. En nuestros ejemplos, con frecuencia se dio el caso de que $P(A \mid B)$ difería de la probabilidad no condicional $P(A)$. Luego la información "B ha ocurrido" cambia la probabilidad de que ocurra A. A menudo la probabilidad de que ocurra o haya ocurrido A no se ve afectada por el conocimiento de que B ha ocurrido, así que $P(A \mid B) = P(A)$. Es entonces natural considerar a A y B como eventos independientes, es decir que la ocurrencia o no ocurrencia de un evento no afecta la probabilidad de que el otro evento ocurra.

DEFINICIÓN

Los eventos A y B son **independientes** si $P(A \mid B) = P(A)$; y **dependientes** en caso contrario.

La definición de independencia podría parecer "no simétrica" porque no pedimos que $P(B|A) = P(B)$. Sin embargo, utilizando la definición de probabilidad condicional y la regla de multiplicación,

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} \tag{2.7}$$

El lado derecho de la ecuación (2.7) es $P(B)$ si y sólo si $P(A|B) = P(A)$ (independencia), así que la igualdad en la definición implica la otra igualdad (y viceversa). También es fácil demostrar que si A y B son independientes, entonces también lo son los pares de eventos: 1) A' y B, 2) A y B' y 3) A' y B'.

EJEMPLO 2.32 Considere una gasolinera con seis bombas numeradas 1, 2,…, 6, y sea E_i el evento simple en que un cliente seleccionado al azar utiliza la bomba i ($i = 1,\ldots, 6$). Suponga que

$$P(E_1) = P(E_6) = .10, \quad P(E_2) = P(E_5) = .15, \quad P(E_3) = P(E_4) = .25$$

Defina los eventos A, B, C como

$$A = \{2, 4, 6\}, B = \{1, 2, 3\}, C = \{2, 3, 4, 5\}.$$

Luego se tiene $P(A) = .50$, $P(A \mid B) = .30$ y $P(A \mid C) = .50$. Es decir, los eventos A y B son dependientes, en tanto que los eventos A y C son independientes. Intuitivamente, A y C son independientes porque la división de probabilidad relativa entre las bombas pares e impares es la misma entre las bombas 2, 3, 4, 5, como lo es entre todas las seis bombas. ■

EJEMPLO 2.33 Sean A y B dos eventos mutuamente excluyentes cualesquiera con $P(A) > 0$. Por ejemplo, para un automóvil seleccionado al azar, sea $A = \{$el carro es de cuatro cilindros$\}$ y $B = \{$el carro es de seis cilindros$\}$. Como los eventos son mutuamente excluyentes, si ocurre B, entonces A quizá puede no haber ocurrido, así que $P(A \mid B) = 0 \neq P(A)$. El mensaje aquí es que *si dos eventos son mutuamente excluyentes, no pueden ser independientes*. Cuando A y B son mutuamente excluyentes la información de que ocurrió A dice algo sobre B (no puede haber ocurrido), así que se impide la independencia. ■

Regla de multiplicación para $P(A \cap B)$

Con frecuencia la naturaleza de un experimento sugiere que dos eventos A y B deben ser supuestos independientes. Este es el caso, por ejemplo, si un fabricante recibe una tarjeta de circuito de cada uno de dos proveedores diferentes, cada tarjeta se somete a prueba al llegar y $A = \{$la primera está defectuosa$\}$ y $B = \{$la segunda está defectuosa$\}$. Si $P(A) = .1$, también deberá ser el caso de que $P(A \mid B) = .1$; sabiendo la condición de la segunda tarjeta no informa sobre la condición de la primera. La probabilidad de que ambos eventos ocurran se calcula fácilmente a partir de la probabilidad individual de los eventos cuando estos son independientes.

PROPOSICIÓN

A y B son independientes si y sólo si

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \tag{2.8}$$

La verificación de esta regla de multiplicación es como sigue:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B) \tag{2.9}$$

donde la segunda igualdad en la ecuación (2.9) es válida si y sólo si A y B son independientes. Debido a la equivalencia de independencia y a la ecuación (2.8), la segunda puede ser utilizada como definición de independencia.

EJEMPLO 2.34 Se sabe que 30% de las lavadoras de cierta compañía requieren servicio mientras se encuentran dentro del plazo de garantía, en tanto que sólo 10% de sus secadoras necesita dicho servicio. Si alguien adquiere una lavadora y una secadora fabricadas por esta compañía, ¿cuál es la probabilidad de que ambas máquinas requieran servicio de garantía?

Sea A el evento en que la lavadora necesita servicio mientras se encuentra dentro del plazo de garantía, y defina B de igual forma para la secadora. Entonces $P(A) = .30$ y $P(B) = .10$. Suponiendo que las dos máquinas funcionan independientemente una de otra, la probabilidad deseada es

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = (.30)(.10) = .03$$ ■

Es fácil demostrar que A y B son independientes si y sólo si A' y B son independientes, A y B' son independientes y A' y B' son independientes. Por tanto, en el ejemplo 2.34 la probabilidad de que ninguna máquina necesite servicio es

$$P(A' \cap B') = P(A') \cdot P(B') = (.70)(.90) = .63$$

EJEMPLO 2.35 Cada día, de lunes a viernes, un lote de componentes enviado por un primer proveedor llega a una instalación de inspección. Dos días a la semana, también llega un lote de un segundo proveedor. Ochenta por ciento de todos los lotes del proveedor 1 son inspeccionados y 90% de los del proveedor 2 también. ¿Cuál es la probabilidad de que, en un día seleccionado al azar, dos lotes sean inspeccionados? Esta pregunta se responderá suponiendo que en los días en que se inspeccionan dos lotes, si el primer lote pasa es independiente de si también pasa el segundo. La figura 2.13 muestra la información relevante.

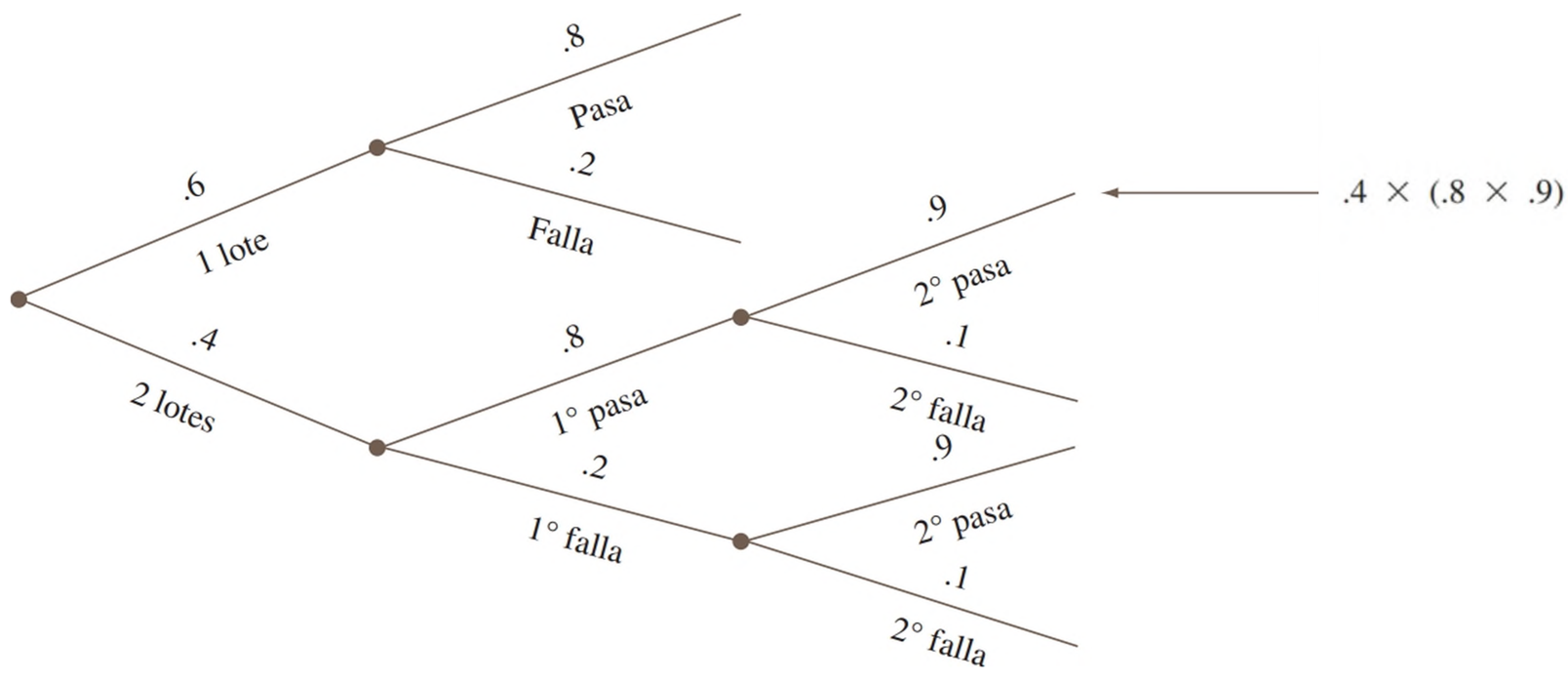


Figura 2.13 Diagrama de árbol para el ejemplo 2.35

$$\begin{aligned} P(\text{dos pasan}) &= P(\text{dos recibidos} \cap \text{ambos pasan}) \\ &= P(\text{ambos pasan} \mid \text{dos recibidos}) \cdot P(\text{dos recibidos}) \\ &= [(.8)(.9)](.4) = .288 \end{aligned}$$ ■

Independencia de más de dos eventos

El concepto de independencia de dos eventos puede ser ampliada a conjuntos de más de dos eventos. Aunque es posible ampliar la definición para dos eventos independientes trabajando

en función de probabilidades condicionales y no condicionales, es más directo y menos tedioso seguir las líneas de la última proposición.

DEFINICIÓN

Los eventos $A_1,\ldots,A_n$ son **mutuamente independientes** si por cada k ($k = 2, 3,\ldots, n$) y cada subconjunto de índices $i_1, i_2,\ldots,i_k$,

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_1}) \cdot \cdots \cdot P(A_{i_k})$$

Parafraseando la definición, los eventos son mutuamente independientes si la probabilidad de la intersección de cualquier subconjunto de los n eventos es igual al producto de las probabilidades individuales. Al utilizar la propiedad de multiplicación para más de dos eventos independientes es legítimo reemplazar una o más de las A_i por sus complementos (p. ej., si A_1, A_2 y A_3 son eventos independientes, también lo son A_1', A_2' y A_3'). Tal como sucedió con dos eventos, con frecuencia al principio de un problema se especifica la independencia de ciertos eventos. La probabilidad de una intersección puede entonces ser calculada mediante multiplicación.

EJEMPLO 2.36 El artículo **"Reliability Evaluation of Solar Photovoltaic Arrays" (*Solar Energy*, 2002: 129–141)** presenta varias configuraciones de redes fotovoltaicas solares compuestas de celdas solares de silicio cristalino. Considere primero el sistema que se ilustra en la figura 2.14(a).

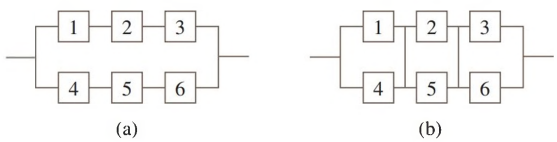


Figura 2.14 Configuraciones de sistema para el ejemplo 2.36: (a) serie-paralelo; (b) matriz interconectada

Existen dos subsistemas conectados en paralelo, y cada uno contiene tres celdas. Para que el sistema funcione, al menos uno de los dos subsistemas en paralelo debe funcionar. Dentro de cada subsistema las tres celdas están conectadas en serie, así que un subsistema funcionará sólo si todas sus celdas funcionan. Considere un valor de duración particular t_0 y suponga que desea determinar la probabilidad de que la duración del sistema exceda de t_0. Sea A_i el evento en que la duración de la celda i excede t_0 ($i = 1, 2,\ldots, 6$). Se supone que las A_i son eventos independientes (si alguna celda particular dura más de t_0 nada tiene que ver con si cualquier otra celda hace o no) y que $P(A_i) = .9$ para cada i, ya que las celdas son idénticas. Entonces

$$\begin{aligned} P(\text{la duración del sistema excede } t_0) &= P[(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_4 \cap A_5 \cap A_6)] \\ &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_4 \cap A_5 \cap A_6) \\ &\quad - P[(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cap (A_4 \cap A_5 \cap A_6)] \\ &= (.9)(.9)(.9) + (.9)(.9)(.9) \cdot (.9)(.9)(.9)(.9)(.9)(.9) = .927 \end{aligned}$$

Alternativamente,

$$\begin{aligned} P(\text{la duración del sistema excede } t_0) &= 1 - P(\text{ambas duraciones del subsistema son} \le t_0) \\ &= 1 - [P(\text{la duración del subsistema es} \le t_0)]^2 \\ &= 1 - [1 - P(\text{la duración del subsistema es} > t_0)]^2 \\ &= 1 - [1 - (.9)^3]^2 = .927 \end{aligned}$$

Considere a continuación el sistema matriz interconectado que se muestra en la figura 2.14(b), que se obtuvo a partir de la red conectada en serie-paralela mediante la conexión

de enlaces a través de cada columna de uniones. Ahora, el sistema falla cuando toda una columna falla, y la duración del sistema excede t_0 sólo si la duración de cada columna lo hace. Para esta configuración,

$$\begin{aligned} P(\text{la duración del sistema es de al menos } t_0) &= [P(\text{la duración de la columna excede } t_0)]^3 \\ &= [1 - P(\text{la duración de la columna es} \le t_0)]^3 \\ &= [1 - P(\text{la duración de ambas celdas en una columna es} \le t_0)]^3 \\ &= [1 - (1 - .9)^2]^3 = .970 \end{aligned}$$

■

EJERCICIOS Sección 2.5 (70–89)

70. Reconsidere el escenario de la tarjeta de crédito del ejercicio 47 (sección 2.4) y demuestre que A y B son dependientes utilizando primero la definición de independencia y luego verificando que no prevalezca la propiedad de multiplicación.

71. En la actualidad una compañía de exploración petrolera tiene dos proyectos activos: uno en Asia y el otro en Europa. Sea A el evento en que el proyecto asiático tiene éxito y B el evento en que el proyecto europeo tiene éxito. Suponga que A y B son eventos independientes con $P(A) = .4$ y $P(B) = .7$.

- **a.** Si el proyecto asiático no tiene éxito, ¿cuál es la probabilidad de que el europeo tampoco lo tenga? Explique su razonamiento.
- **b.** ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los dos proyectos tenga éxito?
- **c.** Dado que al menos uno de los dos proyectos tiene éxito, ¿cuál es la probabilidad de que sólo el proyecto asiático lo tenga?

72. En el ejercicio 13, ¿es cualquier A_i independiente de cualquier otro A_j? Responda utilizando la propiedad de multiplicación para eventos independientes.

73. Si A y B son eventos independientes, demuestre que A' y B también son independientes. [*Sugerencia*: Primero establezca una relación entre $P(A' \cap B)$, $P(B)$ y $P(A \cap B)$.]

74. Suponga que las proporciones de fenotipos sanguíneos en una población son las siguientes:

A	B	AB	O
.40	.11	.04	.45

Suponiendo que los fenotipos de dos individuos seleccionados al azar son independientes uno de otro, ¿cuál es la probabilidad de que ambos fenotipos sean O? ¿Cuál es la probabilidad de que los fenotipos de dos individuos seleccionados al azar coincidan?

75. Una de las suposiciones que sustentan la teoría de las gráficas de control (véase el capítulo 16) es que los puntos graficados sucesivos son independientes entre sí. Cada punto puede señalar que un proceso de producción está funcionando correctamente o que existe algún funcionamiento defectuoso. Aun cuando un proceso esté funcionando de manera correcta, existe una pequeña probabilidad de que un punto particular señale algún problema con el proceso. Suponga que esta probabilidad es de .05. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de 10 puntos sucesivos indique un problema cuando de hecho el proceso está operando correctamente? Responda esta pregunta para 25 puntos sucesivos.

76. En octubre de 1994 se descubrió un defecto en un determinado chip Pentium instalado en las computadoras el cual podía dar lugar a una respuesta equivocada al realizar una división. El fabricante sostuvo inicialmente que la posibilidad de que cualquier división particular fuera incorrecta era sólo 1 de cada 9000 millones, así que tomaría miles de años antes de que un usuario típico detectara un error. Sin embargo, los estadísticos no son usuarios típicos, algunas técnicas estadísticas modernas son tan computacionalmente intensivas que mil millones de divisiones en un corto periodo de tiempo no están fuera del reino de la posibilidad. Suponiendo que la cifra de 1 en 9000 millones es correcta y que los resultados de las distintas divisiones son independientes uno del otro, ¿cuál es la probabilidad de que al menos haya un error en mil millones de divisiones con este chip?

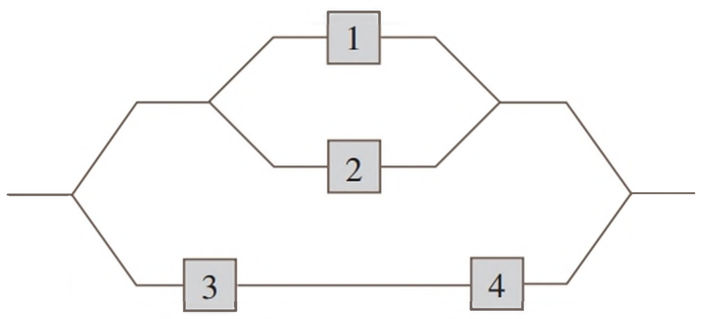
77. La unión de piel de un avión requiere 25 remaches. La unión de piel tendrá que volver a trabajarse si alguno de los remaches está defectuoso. Suponga que los remaches están defectuosos independientemente uno de otro, cada uno con la misma probabilidad.

- **a.** Si 15% de todas las costuras tiene que volver a trabajarse, ¿cuál es la probabilidad de que un remache esté defectuoso?
- **b.** ¿Qué tan pequeña deberá ser la probabilidad de un remache defectuoso para garantizar que sólo 10% de las costuras tengan que volver a trabajarse?

78. Una caldera tiene cinco válvulas de alivio idénticas. La probabilidad de que cualquier válvula particular se abra en un momento de demanda es de .96. Suponiendo que operan independientemente, calcule P(al menos una válvula se abre) y P(al menos una válvula no se abre).

79. Dos bombas conectadas en paralelo fallan independientemente una de la otra cualquier día dado. La probabilidad de que falle sólo la bomba más vieja es de .10 y la probabilidad de que sólo la bomba más nueva falle es de .05. ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema de bombeo falle en cualquier día dado (lo cual sucede si ambas bombas fallan)?

80. Considere el sistema de componentes conectados tal como en la siguiente figura. Los componentes 1 y 2 están conectados en paralelo, de modo que el subsistema trabaja si y sólo si 1 o 2 trabajan; puesto que 3 y 4 están conectados en serie ¿el subsistema trabaja si y sólo si 3 y 4 trabajan? Si los componentes funcionan independientemente uno de otro y P(el componente i trabaja) = .9 para i = 1,2 y = .8 para i = 3,4, calcule P(el sistema trabaja).



81. Remítase otra vez al sistema en serie-paralelo introducido en el ejemplo 2.36 y suponga que existen sólo dos celdas en lugar de tres en cada subsistema en paralelo [en la figura 2.14(a), elimine las celdas 3 y 6 y vuelva a numerar las celdas 4 y 5 como 3 y 4]. Utilizando $P(A_i) = .9$ es fácil ver que la probabilidad de que la duración del sistema exceda t_0 es de .9639. ¿A qué valor tendría que cambiar .9 para incrementar la confiabilidad y la duración del sistema de .9639 a .99? [*Sugerencia*: Sea $P(A_i) = p$, exprese la confiabilidad del sistema en función de p y luego haga $x = p^2$.]

82. Considere lanzar en forma independiente dos dados imparciales, uno rojo y otro verde. Sea A el evento en que el dado rojo muestra 3 puntos, B el evento en que el dado verde muestra 4 puntos y C el evento en que el número total de puntos que muestran los dos dados es 7. ¿Son estos eventos independientes por pares (es decir, ¿son A y B eventos independientes, son A y C independientes, y son B y C independientes? ¿Son los tres eventos mutuamente independientes?

83. Los componentes enviados a un distribuidor son revisados en cuanto a defectos por dos inspectores diferentes (cada componente es revisado por ambos inspectores). El primer inspector detecta 90% de todos los defectuosos que están presentes y el segundo hace lo mismo. Al menos un inspector no detecta un defecto en 20% de todos los componentes defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra lo siguiente?

- **a.** ¿Que un componente defectuoso sea detectado sólo por el primer inspector? ¿Y por exactamente uno de los dos inspectores?
- **b.** ¿Que los tres componentes defectuosos en un lote no sean detectados por ninguno de los dos inspectores (suponiendo que las inspecciones de los diferentes componentes son independientes unas de otras)?

84. Considere la compra de un sistema de componentes de audio que consta de un receptor, un par de altavoces y un reproductor de CD. Que A_1 sea el evento en que las funciones del receptor trabajen correctamente a lo largo del periodo de garantía, que A_2 sea el evento en que los altavoces funcionen correctamente durante el periodo de garantía, y A_3 el evento en que las funciones del reproductor de CD trabajan correctamente durante el periodo de garantía. Supongamos que estos eventos son (mutuamente) independientes con $P(A_1) = 0.95$, $P(A_2) = 0.98$, y $P(A_3) = 0.80$.

- **a.** ¿Cuál es la probabilidad de que los tres componentes funcionen adecuadamente durante todo el periodo de garantía?
- **b.** ¿Cuál es la probabilidad de que al menos un componente necesite servicio durante el periodo de garantía?
- **c.** ¿Cuál es la probabilidad de que los tres componentes necesiten servicio durante el periodo de garantía?
- **d.** ¿Cuál es la probabilidad de que sólo el receptor necesite servicio durante el periodo de garantía?
- **e.** ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente uno de los tres componentes necesite servicio durante el periodo de garantía?
- **f.** ¿Cuál es la probabilidad de que los tres componentes funcionen adecuadamente durante todo el periodo de garantía, pero que, al menos, uno falle un mes después de que expire la garantía?

85. Un inspector de control de calidad verifica artículos recién producidos en busca de fallas. El inspector examina un artículo en busca de fallas en una serie de observaciones independientes, cada una de duración fija. Dado que en realidad hay una imperfección, sea p la probabilidad de que la imperfección sea detectada durante cualquier observación (este modelo se analiza en **"Human Performance in Sampling Inspection", *Human Factors*, 1979: 99–105**).

- **a.** Suponiendo que un artículo tiene una imperfección, ¿cuál es la probabilidad de que sea detectada al final de la segunda observación (una vez que una imperfección ha sido detectada, la secuencia de observaciones termina)?
- **b.** Ofrezca una expresión para la probabilidad de que una imperfección sea detectada al final de la n-ésima observación.
- **c.** Si luego de tres observaciones no ha sido detectada una imperfección el artículo es aprobado, ¿cuál es la probabilidad de que un artículo imperfecto pase la inspección?
- **d.** Suponga que 10% de todos los artículos contiene una imperfección [P(artículo seleccionado al azar muestra una imperfección) = .1]. Con la suposición del inciso c), ¿cuál es la probabilidad de que un artículo seleccionado al azar pase la inspección (pasará automáticamente si no muestra una imperfección, pero también podría pasar si muestra una imperfección)?
- **e.** Dado que un artículo ha pasado la inspección (ninguna imperfección en tres observaciones), ¿cuál es la probabilidad de que sí tenga una imperfección? Calcule para p = .5.

86. **a.** Una compañía maderera acaba de recibir un lote de 10 000 tablas de 2 × 4. Suponga que 20% de estas tablas (2000) en realidad están demasiado tiernas o verdes para ser utilizadas en construcción de primera calidad. Se eligen dos tablas al azar, una después de la otra. Sea A = {la primera tabla está verde} y B = {la segunda tabla está verde}. Calcule $P(A)$, $P(B)$ y $P(A \cap B)$ (un diagrama de árbol podría ayudar). ¿Son A y B independientes?

- **b.** Con A y B independientes y $P(A) = P(B) = .2$, ¿cuál es $P(A \cap B)$? ¿Cuánta diferencia existe entre esta respuesta y $P(A \cap B)$ en el inciso a)? Para propósitos de cálculo $P(A \cap B)$, ¿se puede suponer que A y B del inciso a) son independientes para obtener en esencia la probabilidad correcta?

c. Suponga que un lote consta de 10 tablas, de las cuales dos están verdes. ¿Produce ahora la suposición de independencia aproximadamente la respuesta correcta para $P(A \cap B)$? ¿Cuál es la diferencia crítica entre la situación en este caso y la del inciso a)? ¿Cuándo cree que una suposición de independencia sería válida al obtener una respuesta aproximadamente correcta para $P(A \cap B)$?

87. Considere la posibilidad de seleccionar al azar a una sola persona y que esta pruebe tres vehículos diferentes. Defina los eventos A_1, A_2 y A_3 por

A_1 = como el vehículo #1 A_2 = como el vehículo #2

A_3 = como el vehículo #3

Suponga que $P(A_1) = .55$, $P(A_2) = .65$, $P(A_3) = .70$, $P(A_1 \cup A_2) = .80$, $P(A_2 \cap A_3) = .40$, y $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = .88$.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que a la persona le gusten tanto el vehículo #1 como el vehículo #2?

b. Determine e interprete $P(A_2 \mid A_3)$.

c. ¿Son eventos independientes A_2 y A_3? Responda de dos maneras diferentes.

d. Si usted sabe que a la persona no le gusta el vehículo #1, ¿cuál es ahora la probabilidad de que le guste al menos uno de los otros dos vehículos?

88. La probabilidad de que una persona seleccionada aleatoriamente de una población particular tenga una determinada enfermedad es 0.5. Una prueba de diagnóstico detecta correctamente la presencia de la enfermedad 98% del tiempo y detecta correctamente la ausencia de la enfermedad 99% del tiempo. Si la prueba se aplica dos veces, los dos resultados son independientes y ambos son positivos ¿cuál es la probabilidad (posterior) de que la persona seleccionada padezca la enfermedad? [*Sugerencia*: El diagrama de árbol con ramas primera generación correspondiente a la enfermedad y a la no enfermedad; y las ramas de segunda y tercera generación corresponden a los resultados de los dos exámenes.]

89. Suponga que se colocan etiquetas idénticas en las orejas de un zorro. El zorro es liberado durante un lapso de tiempo. Considere los dos eventos C_1 = {se pierde la etiqueta de la oreja izquierda} y C_2 = {se pierde la etiqueta de la oreja derecha}. Sea $\pi = P(C_i) = P(C_2)$, y suponga que C_i y C_2 son eventos independientes. Deduzca una expresión (que implique π) para la probabilidad de que exactamente una etiqueta se pierda, dado que cuando mucho una se pierde (**"Ear Tag Loss in Red Foxes", *J. Wildlife Mgmt.*, 1976: 164–167**). [*Sugerencia*: Trace un diagrama de árbol en el cual las dos ramas iniciales se refieren a si la etiqueta de la oreja izquierda se pierde.]

EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS (90–114)

90. Un cierto comité legislativo consta de 10 senadores. Se seleccionará al azar un subcomité de 3 senadores.

a. ¿Cuántos diferentes subcomités de estos hay?

b. Si los senadores se clasifican 1, 2,…, 10 por orden de antigüedad, cuántos subcomités diferentes incluirían al senador más veterano?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que el subcomité seleccionado tenga al menos 1 de los 5 senadores más veteranos?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que el subcomité no incluya a ninguno de los dos senadores más veteranos?

91. Una fábrica utiliza tres líneas de producción para fabricar latas de cierto tipo. La siguiente tabla proporciona los porcentajes de latas que no cumplen con las especificaciones, clasificadas por tipo de incumplimiento de las especificaciones para cada una de las tres líneas durante un lapso de tiempo particular.

	Línea 1	Línea 2	Línea 3
Manchas	15	12	20
Grietas	50	44	40
Problemas con la argolla	21	28	24
Defecto superficial	10	8	15
Otro	4	8	2

Durante este periodo la línea 1 produjo 500 latas fuera de especificación, la 2 produjo 400 latas como esas y la 3 fue responsable de 600 latas fuera de especificación. Suponga que se selecciona al azar una de estas 1500 latas.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la lata provenga de la línea 1? ¿Y de que la razón del incumplimiento de la especificación sea una grieta?

b. Si la lata seleccionada provino de la línea 1, ¿cuál es la probabilidad de que tenga una mancha?

c. Dado que la lata seleccionada mostró un defecto superficial, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la línea 1?

92. Un empleado de la oficina de inscripciones en una universidad tiene en su escritorio en este momento diez formas en espera de ser procesadas. Seis de estas son peticiones de baja y las otras cuatro son solicitudes de sustitución de curso.

a. Si selecciona al azar seis de estas formas para dárselas a un subordinado, ¿cuál es la probabilidad de que sólo uno de los dos tipos de formas permanezca en su escritorio?

b. Suponga que tiene tiempo para procesar sólo cuatro de estas formas antes de salir del trabajo. Si estas cuatro se seleccionan al azar, una por una, ¿cuál es la probabilidad de que cada forma subsiguiente sea de un tipo diferente de la anterior?

93. Un satélite está programado para ser lanzado desde Cabo Cañaveral, en Florida, y otro lanzamiento está programado para la Base de la Fuerza Aérea Vandenberg en California. Sea A el evento en que el lanzamiento en Vandenberg se hace a la hora programada y B el evento en que el lanzamiento en Cabo Cañaveral se hace a la hora programada. Si A y B son eventos independientes con $P(A) > P(B)$, $P(A \cup B) = .626$ y $P(A \cap B) = .144$, determine los valores de $P(A)$ y $P(B)$.

94. Un transmisor envía un mensaje utilizando un código binario, esto es, una secuencia de ceros y unos. Cada bit transmitido (0 o 1) debe pasar a través de tres relevadores para llegar al receptor. En cada relevador la probabilidad de que el bit enviado sea diferente del bit recibido (una inversión) es .20. Suponga que los relevadores operan independientemente uno de otro.

Transmisor → Relevador 1 → Relevador 2 → Relevador 3 → Receptor

a. Si el transmisor envía un 1, ¿cuál es la probabilidad de que los tres relevadores envíen un 1?

b. Si el transmisor envía un 1, ¿cuál es la probabilidad de que el receptor reciba un 1? [*Sugerencia:* Los ocho resultados experimentales pueden ser mostrados en un diagrama de árbol con tres ramas de generación, una por cada relevador.]

c. Suponga que 70% de todos los bits enviados por el transmisor son unos. Si el receptor recibe un 1, ¿cuál es la probabilidad de que un 1 haya sido enviado?

95. El individuo A tiene un círculo de cinco amigos cercanos (B, C, D, E y F). A escuchó cierto rumor originado fuera del círculo e invitó a sus cinco amigos a una fiesta para contarles el rumor. Para empezar, A escoge al azar a uno de sus cinco y se lo cuenta. Dicho individuo escoge entonces al azar a uno de los cuatro individuos restantes y repite el rumor. Después, de aquellos que ya oyeron el rumor uno se lo cuenta a otro nuevo individuo y así hasta que todos han oído el rumor.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el rumor se repita en el orden B, C, D, E y F?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que F sea la tercera persona en la reunión a la que se le contará el rumor?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que F sea la última persona en oír el rumor?

d. Si en cada etapa la persona que en ese momento "tiene" el rumor no sabe quién ya lo ha escuchado y selecciona al siguiente destinatario aleatoriamente de entre cinco individuos posibles, ¿cuál es la probabilidad de que F no haya escuchado todavía el rumor después de haber sido dicho 10 veces en la fiesta?

96. De acuerdo con el artículo **"Optimization of Distribution Parameters for Estimating Probability of Crack Detection" (*J. of Aircraft*, 2009: 2090–2097)**, la siguiente ecuación de "Palmberg" se usa comúnmente para determinar la probabilidad $P_d(c)$ de la detección de una grieta de tamaño c en la estructura de la aeronave:

$$P_d(c) = \frac{(c/c^*)^\beta}{1 + (c/c^*)^\beta}$$

donde c^* es el tamaño de la grieta que corresponde a una probabilidad de detección de .5 (y, por tanto, es una evaluación de la calidad del proceso de inspección).

a. Compruebe que $P_d(c^*) = .5$

b. ¿Qué es $P_d(2c^*)$ cuando $\beta = 4$?

c. Supongamos que un inspector revisa dos paneles diferentes, uno con un tamaño de grieta c^* y otro con un tamaño de grieta $2c^*$. Una vez más, suponiendo que $\beta = 4$ y también que los resultados de las dos inspecciones son independientes uno del otro, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente se detecte una de las dos grietas?

d. ¿Qué le sucede a $P_d(c)$ mientras $\beta \to \infty$?

97. Un ingeniero químico está interesado en determinar si cierta impureza está presente en un producto. Un experimento tiene una probabilidad de .80 de detectarla, si está presente. La probabilidad de no detectarla, si está ausente, es de .90. Las probabilidades previas de que la impureza esté presente o ausente son de .40 y .60, respectivamente. Tres experimentos distintos producen sólo dos detecciones. ¿Cuál es la probabilidad posterior de que la impureza esté presente?

98. Cinco amigas, Alicia, Bety, Carola, Diana y Evelin tienen calculadoras idénticas y están estudiando para un examen de estadística. Apilaron sus calculadoras antes de tomar un descanso y luego las recogieron en orden aleatorio cuando regresaron. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de las cinco tome su propia calculadora? [*Sugerencia*: Sea A el evento en que Alice toma su propia calculadora y defina los eventos B, C, D y E de manera análoga para los otros cuatro estudiantes.] ¿Cómo puede expresar el evento de que {al menos uno toma su propia calculadora} en términos de los cinco eventos A, B, C, D y E. Ahora use una ley general de probabilidad. [*Nota*: Esto se llama *problema de emparejar*. Su solución se extiende fácilmente a n individuos. ¿Reconoce el resultado cuando n es grande (la aproximación a la serie resultante)?]

99. Los sujetadores utilizados en la fabricación de aviones son levemente doblados para que queden bien apretados y no se aflojen durante las vibraciones. Suponga que 95% de todos los sujetadores pasa una inspección inicial. De 5% que falla, 20% están tan seriamente defectuosos que deben ser desechados. Los sujetadores restantes son enviados a una operación de redoblado, donde 40% no puede ser recuperado y son desechados. El otro 60% de estos sujetadores es corregido en el proceso de y posteriormente pasan la inspección.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que un sujetador que acaba de llegar seleccionado al azar pase la inspección inicialmente o después del redoblado?

b. Dado que un sujetador pasó la inspección, ¿cuál es la probabilidad de que apruebe la inspección inicial y de que no necesite redoblado?

100. Jaime y Mauricio están jugando un partido de tenis. En un juego en particular llegan a un marcador de iguales, lo que significa que cada jugador ganó tres puntos. Para terminar el juego, uno de los dos jugadores debe conseguir dos puntos adelante del otro. Por ejemplo, Jaime ganará si obtiene los siguientes dos puntos (JJ), o si Mauricio gana el siguiente y Jaime los tres puntos después de eso (MJJJ), o si el resultado de los próximos seis puntos es JMMJJJ y así sucesivamente.

a. Supongamos que la probabilidad de que Jaime gane un punto es .6 y los resultados de puntos sucesivos son independientes uno del otro. ¿Cuál es la probabilidad de que Jaime gane el juego? [*Sugerencia*: En la ley de la probabilidad total sea A_1 = Jaime gana cada uno de los dos siguientes puntos, A_2 = Mauricio gana cada uno de los siguientes dos puntos y A_3 = cada jugador gana uno de los siguientes dos

puntos. También sea $p = P$ (Jaime gana la partida). ¿Cómo se compara p con P (Jaime gana el juego $|A_3$)?]

b. Si Jaime gana el juego, ¿cuál es la probabilidad de que necesitaba solamente dos puntos para hacerlo?

101. Un sistema consta de dos componentes. La probabilidad de que el segundo componente funcione de manera satisfactoria durante el tiempo para el que fue diseñado es de .9, la probabilidad de que al menos uno de los dos componentes lo haga es de .96 y la probabilidad de que ambos componentes lo hagan es de .75. Dado que el primer componente funciona de manera satisfactoria durante todo el tiempo para el que fue diseñado, ¿cuál es la probabilidad de que ocurra o mismo con el segundo?

102. La siguiente tabla que categoriza a cada estudiante en una muestra de acuerdo con su género y color de ojos color apareció en el artículo **"Does Eye Color Depend on Gender? It Might Depend on Who or How You Ask" (*J. of Statistics Educ.*, 2013, vol. 21, núm. 2)**.

	Color de ojos				
Género	**Azul**	**Marrón**	**Verde**	**Avellana**	**Total**
Masculino	370	352	198	187	1107
Femenino	359	290	110	160	919
Total	729	642	308	347	2026

Supongamos que uno de estos 2026 estudiantes es seleccionado al azar. Que F denote el evento en que el individuo seleccionado es una mujer, y A, B, C y D representan los eventos en los que los estudiantes tienen ojos azules, marrón, verdes y color de avellana, respectivamente.

a. Calcule $P(F)$ y $P(C)$.

b. Calcule $P(F \cap C)$. ¿Son los eventos F y C independientes? ¿Por qué sí o por qué no?

c. Si la persona seleccionada tiene ojos verdes, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

d. Si la persona seleccionada es mujer, ¿cuál es la probabilidad de que tenga ojos verdes?

e. ¿Cuál es la "distribución condicional" del color de los ojos para mujeres (es decir, $P(A \mid F)$, $P(B \mid F)$, $P(C \mid F)$ y $P(D \mid F)$), y cuál para los hombres? Compare las dos distribuciones.

103. a. Cierta compañía envía 40% de sus paquetes de correspondencia nocturna mediante un servicio de correo exprés E_1. De estos paquetes, 2% llega después del tiempo de entrega garantizado (sea L el evento "entrega demorada"). Si se selecciona al azar un registro de la correspondencia nocturna del archivo de la compañía, ¿cuál es la probabilidad de que el paquete se haya enviado mediante E_1 y y de que llegue demorado?

b. Suponga que 50% de los paquetes nocturnos se envía mediante el servicio de correo exprés E_2 y el restante 10% se envía mediante E_3. De los paquetes enviados a través de E_2, sólo 1% llegó demorado, en tanto que de los paquetes manejados por E_3 5% llegó demorado. ¿Cuál es la probabilidad de que un paquete seleccionado al azar llegue demorado?

c. Si un paquete seleccionado al azar llegó a tiempo, ¿cuál es la probabilidad de que no haya sido enviado a través de E_1?

104. Una compañía utiliza tres líneas de ensamble diferentes: A_1, A_2 y A_3 para fabricar un componente particular. De los fabricados por la línea A_1, 5% tiene que ser retrabajado para corregir un defecto, mientras que de los componentes de A_2 8% tiene que ser retrabajado y de los componentes de A_3 10% tiene que volver a trabajarse. Suponga que 50% de todos los componentes los produce la línea A_1, 30% la línea A_2 y 20% la línea A_3. Si un componente seleccionado al azar tiene que volver a trabajarse, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la línea A_1? ¿De la línea A_2? ¿De la línea A_3?

105. Desechando la posibilidad de cumplir años el 29 de febrero, suponga que es igualmente probable que un individuo seleccionado al azar haya nacido en cualquiera de los demás días del año.

a. Si se seleccionan diez personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tengan diferentes días de cumpleaños? ¿Y de que al menos dos cumplan años el mismo día?

b. Si k reemplaza a diez en el inciso a), ¿cuál es la k más pequeña para la cual existe al menos una probabilidad de 50-50 de que dos o más personas cumplan años el mismo día?

c. Si se seleccionan diez personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos cumplan años el mismo día o de que al menos dos tengan los mismos tres últimos dígitos de sus números del Seguro Social? [*Nota*: El artículo **"Methods for Studying Coincidences" (F. Mosteller y P. Diaconis, *J. Amer. Stat. Assoc.*, 1989: 853–861)** aborda problemas de este tipo.]

106. Un método para distinguir entre rocas graníticas (G) y rocas basálticas (B) es examinar una parte del espectro infrarrojo de la energía solar que se refleja en la superficie de la roca. Sean R_1, R_2 y R_3 intensidades espectrales medidas a tres longitudes de onda diferentes; en general, para granito $R_1 < R_2 < R_3$, en tanto que para basalto $R_3 < R_2 < R_1$. Cuando se hacen mediciones a distancia (mediante un avión), pueden presentarse varios ordenamientos de R_i, ya sea que la roca sea basalto o granito. Vuelos sobre regiones de composición conocida han arrojado la siguiente información:

	Graníticas	Basálticas
$R_1 < R_2 < R_3$	60%	10%
$R_1 < R_3 < R_2$	25%	20%
$R_3 < R_1 < R_2$	15%	70%

Suponga que para una roca seleccionada al azar en cierta región, $P(\text{granito}) = .25$ y $P(\text{basalto}) = .75$.

a. Demuestre que $P(\text{granito} \mid R_1 < R_2 < R_3) > P(\text{basalto} \mid R_1 < R_2 < R_3)$. Si las mediciones dieron $R_1 < R_2 < R_3$ ¿clasificaría la roca como granito o como basalto?

b. Si las mediciones dieron $R_1 < R_3 < R_2$, ¿cómo clasificaría la roca? Responda la misma pregunta para $R_3 < R_1 < R_2$.

c. Con las reglas de clasificación indicadas en los incisos a) y b), cuando se selecciona una roca de esta región ¿cuál es la probabilidad de que ocurra una clasificación errónea? [*Sugerencia*: G podría ser clasificada como B o B como G y $P(B)$ y $P(G)$ son conocidas.]

d. Si $P(\text{granito}) = p$ en lugar de .25, ¿existen valores de p (aparte de 1) para los cuales una roca siempre sería clasificada como granito?

107. A un sujeto se le permite una secuencia de vistazos para detectar un objetivo. Sea $G_i = \{$el objetivo es detectado en el vistazo i-ésimo$\}$, con $p_i = P(G_i)$. Suponga que los G_i son eventos independientes y escriba una expresión para la probabilidad de que el objetivo haya sido detectado al final del vistazo n-ésimo. [*Nota*: Este modelo se presenta en **"Predicting Aircraft Detectability", *Human Factors*, 1979: 277–291**.]

108. En un juego de béisbol de ligas menores, el lanzador del equipo *A* lanza un "strike" 50% del tiempo y una bola 50% del tiempo; los lanzamientos sucesivos son independientes unos de otros y el lanzador nunca golpea a un bateador. Sabiendo esto, el mánager del equipo *B* ha instruido al primer bateador para que no le batee a nada. Calcule la probabilidad de que:

a. … el bateador reciba base por bolas en el cuarto lanzamiento.

b. … el bateador reciba base por bolas en el sexto lanzamiento (por lo que dos de los primeros cinco deben ser "strikes"), mediante un argumento de conteo o un diagrama de árbol.

c. El bateador reciba base por bolas.

d. El primer bateador anote mientras no hay ningún "out" (suponiendo que cada bateador utiliza la estrategia de no batearle a nada).

109. Cuatro ingenieros, A, B, C y D han sido citados para entrevistas de trabajo a las 10 a.m. el viernes 13 de enero, en Random Sampling, Inc. El gerente de personal ha programado a los cuatro para las oficinas de entrevistas 1, 2, 3 y 4, respectivamente. Sin embargo, el secretario del gerente no está enterado de ello, por lo que los asigna a las oficinas de un modo completamente aleatorio (¡qué más!). Cuál es la probabilidad de que:

a. Los cuatro terminen en la oficina correcta.

b. Ninguno de los cuatro termine en la oficina correcta.

110. Una aerolínea particular opera vuelos a las 10 a.m. de Chicago a Nueva York, Atlanta y Los Ángeles. Sea *A* el evento en que el vuelo a Nueva York está lleno y defina los eventos *B* y *C* en forma análoga para los otros dos vuelos. Suponga que $P(A) = .9$, $P(B) = .7$, y $P(C) = .8$ y que los tres eventos son independientes. Cuál es la probabilidad de que:

a. Los tres vuelos estén llenos. Y de que al menos uno no esté lleno.

b. Sólo el vuelo a Nueva York esté lleno. Y de que exactamente uno de los tres vuelos esté lleno.

111. Un gerente de personal va a entrevistar a cuatro candidatos para un puesto. Estos están clasificados como 1, 2, 3 y 4 en orden de preferencia, y serán entrevistados en orden aleatorio. Sin embargo, al final de cada entrevista, el gerente sólo sabrá cómo se compara el candidato actual con los candidatos previamente entrevistados. Por ejemplo, el orden de entrevista 3, 4, 1, 2 no genera información después de la primera entrevista, muestra que el segundo candidato es peor que el primero y que el tercero es mejor que los primeros dos. Sin embargo, el orden 3, 4, 2, 1 generaría la misma información después de cada una de las primeras tres entrevistas. El gerente desea contratar al mejor candidato, pero debe tomar la decisión irrevocable de contratarlo o no contratarlo después de cada entrevista. Considere la siguiente estrategia: rechazar automáticamente a los s primeros candidatos y luego contratar al primer candidato subsiguiente que resulte mejor de entre los que ya fueron entrevistados (si tal candidato no aparece, el último entrevistado es el contratado).

Por ejemplo, con $s = 2$, el orden 3, 4, 1, 2 permitiría contratar al mejor, en tanto que el orden 3, 1, 2, 4, no. De los cuatro valores s posibles (0, 1, 2 y 3) ¿cuál incrementa al máximo a $P(\text{el mejor es contratado})$? [*Sugerencia:* Escriba los 24 ordenamientos de entrevista igualmente probables: $s = 0$ significa que el primer candidato es automáticamente contratado.]

112. Considere cuatro eventos independientes A_1, A_2, A_3 y A_4, y sea $p_i = P(A_i)$ con $i = 1, 2, 3, 4$. Exprese la probabilidad de que al menos uno de estos eventos ocurra en función de las p_i y haga lo mismo para la probabilidad de que al menos dos de los eventos ocurran.

113. Una caja contiene los siguientes cuatro papelitos y cada uno tiene exactamente las mismas dimensiones: (1) gana el premio 1, (2) gana el premio 2, (3) gana el premio 3, (4) gana los premios 1, 2 y 3. Se selecciona un papelito al azar. Sean $A_1 = \{$gana el premio 1$\}$, $A_2 = \{$gana el premio 2$\}$ y $A_3 = \{$gana el premio 3$\}$. Demuestre que A_1 y A_2 son independientes, que A_1 y A_3 son independientes, y que A_2 y A_3 también son independientes (esta es una independencia *por pares*). Sin embargo, demuestre que $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$, así que los tres eventos *no* son mutuamente independientes.

114. Demuestre que si A_1, A_2 y A_3 son eventos independientes, entonces $P(A_1 | A_2 \cap A_3) = P(A_1)$.

BIBLIOGRAFÍA

Carlton, Matthew y Jay Devore, *Probability with Applications in Engineering, Science, and Technology*, Springer, Nueva York, 2014. Una completa introducción a la probabilidad, escrita en un nivel matemático ligeramente superior a este texto, pero con muy buenos ejemplos.

Durrett, Richard, *Elementary Probability for Applications*, Cambridge Univ. Press, Londres, Inglaterra, 2009. Una presentación concisa a un nivel un poco más alto que el presente texto.

Mosteller, Frederick, Robert Rourke y George Thomas, *Probability with Statistical Applications* (2a. ed.), Addison-Wesley, Reading, MA, 1970. Una muy buena introducción a la probabilidad, con muchos ejemplos entretenidos, especialmente buenos respecto a las reglas de conteo y su aplicación.

Ross, Sheldon, *A First Course in Probability* (8a. ed.), Macmillan, Nueva York, 2009. Algo concisamente escrito y más matemáticamente complejo que este texto, pero contiene gran cantidad de ejemplos y ejercicios interesantes.

Winkler, Robert, *Introduction to Bayesian Inference and Decision*, Holt, Rinehart & Winston, Nueva York, 1972. Una muy buena introducción a la probabilidad subjetiva.

Variables aleatorias discretas y distribuciones de probabilidad

3

INTRODUCCIÓN

Ya sea que un experimento produzca resultados cualitativos o cuantitativos los métodos de análisis estadístico requieren enfocarse en ciertos aspectos numéricos de los datos (como la proporción de una muestra x/n, la media $\bar{x}$ o la desviación estándar s). El concepto de variable aleatoria permite pasar de los resultados experimentales a la función numérica de los resultados. Existen fundamentalmente dos tipos diferentes de variables aleatorias: las variables aleatorias discretas y las variables aleatorias continuas. En este capítulo se examinan las propiedades básicas y se discuten los ejemplos más importantes de variables discretas. El capítulo 4 se enfoca en las variables aleatorias continuas.

3.1 Variables aleatorias

En cualquier experimento existen numerosas características que pueden ser observadas o medidas, pero en la mayoría de los casos un experimentador se centra en algún aspecto específico o aspectos de una muestra. Por ejemplo, en un estudio sobre los patrones de viaje entre los suburbios y la ciudad en un área metropolitana, a cada individuo de una muestra se le podría preguntar sobre la distancia que recorre para ir de su casa al trabajo, y viceversa, así como el número de personas que viajan en el mismo vehículo, pero no sobre su coeficiente intelectual, ingreso, tamaño de su familia y otras características. Por otra parte, un investigador puede probar una muestra de componentes y anotar sólo el número de los que han fallado en un periodo de 1000 horas, en lugar de anotar los tiempos en que ha fallado cada uno individualmente.

En general, el resultado de cada experimento puede ser vinculado con un número especificando una regla de asociación (p. ej., entre una muestra de diez componentes el número de estos que no duran 1000 horas o el peso total del equipaje en una muestra de 25 pasajeros de una aerolínea). Esta regla de asociación se llama **variable aleatoria**, variable porque diferentes valores numéricos son posibles y aleatoria porque el valor observado depende de cuál de los posibles resultados experimentales se obtenga (figura 3.1).

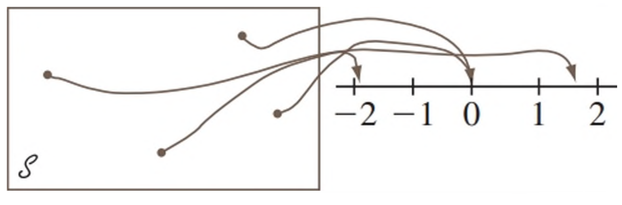


Figura 3.1 Una variable aleatoria

DEFINICIÓN

> Para un espacio muestral dado S de algún experimento, una **variable aleatoria (va)** es cualquier regla que asocia un número con cada resultado en S. En lenguaje matemático una variable aleatoria es una función cuyo dominio es el espacio muestral y cuyo rango es el conjunto de los números reales.

Se acostumbra denotar las variables aleatorias con letras mayúsculas, tales como X y Y, que son las más cercanas al final de nuestro alfabeto. En contraste al uso previo de una letra minúscula como es la x para denotar una variable, ahora utilizaremos letras minúsculas para representar algún valor particular de la variable aleatoria correspondiente. La notación $X(\omega) = x$ significa que x es el valor asociado con el resultado ω por medio de la variable aleatoria X.

EJEMPLO 3.1 Cuando un estudiante llama por teléfono a un servicio de asistencia universitaria para apoyo técnico, inmediatamente podrá hablar con alguien (S) o será puesto en espera (F). Con $S = \{S, F\}$, la variable aleatoria X se define como

$$X(S) = 1 \qquad X(F) = 0$$

La variable aleatoria X indica si el estudiante puede hablar inmediatamente con alguien (1) o si no puede hablar de inmediato con alguien (0). ■

En el ejemplo 3.1 se especificó la variable aleatoria X al poner en lista explícitamente cada elemento de S y el número asociado. Una lista como esa es tediosa si S contiene más de algunos cuantos resultados, pero con frecuencia puede ser evitada.

EJEMPLO 3.2 Considere el experimento en el cual se marca un número telefónico en cierto código de área con un marcador de números aleatorio (estos dispositivos se utilizan extensivamente en las organizaciones encuestadoras) y defina una variable aleatoria Y como

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si el número seleccionado no aparece en el directorio} \\ 0 & \text{si el número seleccionado sí aparece en el directorio} \end{cases}$$

Por ejemplo, si 5282966 aparece en el directorio telefónico, entonces $Y(5282966) = 0$ en tanto que $Y(7727350) = 1$ significa que el número 7727350 no aparece en el directorio telefónico. Es más eficaz una descripción verbal de este estilo que una lista completa, por lo que se utilizará tal descripción siempre que sea posible. ■

En los ejemplos 3.1 y 3.2 los únicos valores posibles de la variable aleatoria fueron 0 y 1. Tal variable aleatoria se presenta con tal frecuencia que le ha dado un nombre especial, en honor de la primera persona que la estudió.

DEFINICIÓN

Cualquier variable aleatoria cuyos únicos valores posibles son 0 y 1 se llama **variable aleatoria de Bernoulli.**

En ocasiones se deseará definir y estudiar diferentes variables del mismo espacio muestral.

EJEMPLO 3.3 El ejemplo 2.3 describe un experimento en el cual se determinó el número de bombas en uso en cada una de dos gasolineras. Defina las variables aleatorias X, Y y U como

X = el número total de bombas en uso en las dos gasolineras

Y = la diferencia entre el número de bombas en uso en la gasolinera 1 y el número de bombas en uso en la gasolinera 2

U = el máximo del número de bombas en uso en ambas gasolineras

Si se realiza este experimento y se obtiene $\omega = (2, 3)$, entonces $X((2, 3)) = 2 + 3 = 5$, por lo que se dice que el valor observado de X fue $x = 5$. Asimismo, el valor observado de Y sería $y = 2 - 3 = -1$ y el de U sería $u = \text{máx}\ (2, 3) = 3$. ■

Cada una de las variables aleatorias de los ejemplos 3.1–3.3 puede asumir sólo un número finito de posibles valores. Este no tiene que ser el caso.

EJEMPLO 3.4 Se considera un experimento en que se examinaron baterías de 9 volts hasta que se obtuvo una con un voltaje aceptable (S). El espacio muestral es $\mathcal{S} = \{S, FS, FFS, \ldots\}$. Defina una variable aleatoria X como

X = número de baterías examinadas antes de que se termine el experimento

Así, $X(S) = 1$, $X(FS) = 2$, $X(FFS) = 3$, . . . , $X(FFFFFFS) = 7$, y así sucesivamente. Cualquier entero positivo es un posible valor de X, así que el conjunto de valores posibles es infinito. ■

EJEMPLO 3.5 Suponga que del mismo modo aleatorio se selecciona un lugar (latitud y longitud) en el territorio continental de los Estados Unidos. Defina una variable aleatoria Y como

Y = la altura sobre el nivel del mar en el lugar seleccionado

Por ejemplo, si el lugar seleccionado fuera (39°50′N, 98°35′W), entonces se podría tener $Y((39°50'\text{N}, 98°35'\text{O})) = 1748.26$ pies. El valor más grande posible de Y es 14 494 (Monte Whitney) y el valor más pequeño posible es −282 (Valle de la Muerte). El conjunto de todos los valores posibles de Y es el conjunto de todos los números en el intervalo entre –282 y 14 494, es decir,

$$\{y : y \text{ es un número}, -282 \leq y \leq 14\,494\}$$

y existe un número infinito de números en este intervalo. ■

Dos tipos de variables aleatorias

En la sección 1.2 se distinguió entre los datos que resultan de las observaciones de una variable de conteo y los datos obtenidos observando valores de una variable de medición. Una distinción un poco más formal caracteriza dos tipos diferentes de variables aleatorias.

DEFINICIÓN

Una variable aleatoria **discreta** es una variable aleatoria cuyos valores posibles constituyen un conjunto finito, o bien pueden ser puestos en lista en una secuencia infinita en la cual existen un primer elemento, un segundo elemento y así sucesivamente ("contablemente" infinita).

Una variable aleatoria es **continua** si las siguientes condiciones dos se cumplen:

1. Su conjunto de valores posibles se compone de todos los números que hay en un solo intervalo sobre la línea de numeración (posiblemente de extensión infinita, es decir, desde $-\infty$ hasta ∞) o todos los números en una unión disjunta de dichos intervalos (por ejemplo, $[0,10] \cup [20,30]$).
2. Ningún valor posible de la variable tiene probabilidad positiva, esto es, $P(X = c) = 0$ con cualquier valor posible de c.

Aunque cualquier intervalo sobre la línea de numeración contiene un número infinito de números, se puede demostrar que no hay ninguna forma de crear una lista infinita de todos estos valores, pues son demasiados. La segunda condición que describe una variable aleatoria continua es tal vez contraintuitiva, puesto que parecería que implica una probabilidad total de cero para todos los valores posibles. Pero en el capítulo 4 se verá que los *intervalos* de valores tienen probabilidad positiva; la probabilidad de un intervalo se reducirá a cero a medida que su ancho tienda a cero.

EJEMPLO 3.6 Todas las variables aleatorias de los ejemplos 3.1–3.4 son discretas. En otro ejemplo, suponga que se eligen al azar parejas de casados y que a cada persona se le hace una prueba de sangre hasta encontrar a un esposo y su esposa con el mismo factor Rh. Con X = número de pruebas de sangre que serán realizadas, los posibles valores de X son $D = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$. Puesto que los posibles valores se dieron en secuencia, X es una variable aleatoria discreta. ■

Para estudiar las propiedades básicas de las variables aleatorias discretas sólo se requieren las herramientas de las matemáticas discretas: sumas y diferencias. El estudio de variables continuas requiere matemáticas continuas de cálculo: integrales y derivadas.

EJERCICIOS Sección 3.1 (1–10)

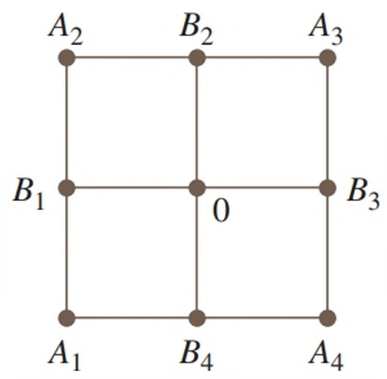
1. Una viga de concreto puede fallar por esfuerzo cortante (S) o por flexión (F). Suponga que se seleccionan al azar tres vigas que fallaron y se determina el tipo de falla de cada una. Sea X = el número de vigas de entre las tres seleccionadas que fallaron por esfuerzo cortante. Enumere cada resultado en el espacio muestral junto con el valor asociado de X.
2. Dé tres ejemplos de variables aleatorias de Bernoulli (aparte de los que aparecen en el texto).
3. Con el experimento del ejemplo 3.3 defina dos variables aleatorias más y mencione los valores posibles de cada una.
4. Sea X = el número de dígitos diferentes de cero en un código postal seleccionado al azar. ¿Cuáles son los posibles valores de X? Dé tres posibles resultados y sus valores X asociados.
5. Si el espacio muestral $\mathcal{S}$ es un conjunto infinito, ¿ello implica necesariamente que cualquier variable aleatoria X definida a partir de $\mathcal{S}$ tendrá un conjunto infinito de posibles valores? Si la respuesta es sí, ¿por qué? Si no, dé un ejemplo.
6. A partir de una hora fija, cada automóvil que entra a una intersección es observado para ver si vira a la izquierda (I) o a la derecha (D), o si sigue de frente (F). El experimento termina en cuanto se observa que un auto vira a la izquierda. Sea X = el número de autos observados. ¿Cuáles son los posibles valores de X? Dé cinco resultados y sus valores X asociados.

7. Para cada variable aleatoria definida aquí, describa el conjunto de posibles valores de la variable y diga si la variable es discreta.

- **a.** X = el número de huevos no quebrados en una caja estándar de huevos seleccionada al azar.
- **b.** Y = el número de estudiantes en una lista de clase de un curso particular que no asisten el primer día de clases.
- **c.** U = el número de veces que un aprendiz tiene que hacerle *swing* a una pelota de golf antes de golpearla.
- **d.** X = la longitud de una serpiente de cascabel seleccionada en forma aleatoria.
- **e.** Z = el porcentaje de impuestos derivado de las ventas de una compra en el portal de amazon.com seleccionada al azar.
- **f.** Y = el pH de una muestra de suelo elegida al azar.
- **g.** X = la tensión (lb/pulg^2) a la cual ha sido encordada una raqueta de tenis seleccionada al azar.
- **h.** X = el número total de veces que se requiere lanzar al aire una moneda para que tres individuos obtengan una coincidencia (*AAA* o *SSS*).

8. Cada vez que un componente se somete a prueba, el ensayo resulta en un éxito (S) o en un fracaso (F). Suponga que el componente se prueba repetidamente hasta que ocurre un éxito en tres pruebas *consecutivas*. Sea Y el número necesario de pruebas para lograrlo. Haga una lista de todos los resultados correspondientes a los cinco posibles valores más pequeños de Y y señale qué valor de Y está asociado con cada uno.

9. Un individuo de nombre Claudio se encuentra en el punto 0 del siguiente diagrama.



Con un dispositivo de aleatorización apropiado (tal como un dado tetraédrico, es decir, de cuatro lados), Claudio primero se mueve a uno de los cuatro lugares B_1, B_2, B_3, B_4. Una vez que está en uno de estos lugares, se utiliza otro dispositivo de aleatorización para decidir si Claudio regresa a 0 o si visita uno de los otros dos lugares adyacentes. Este proceso continúa: después de cada movimiento se determina otro movimiento a uno de los (nuevos) puntos adyacentes lanzando al aire un dado o una moneda apropiada.

- **a.** Sea X = el número de movimientos que Claudio realiza antes de regresar a 0. ¿Cuáles son los posibles valores de X? ¿Es X discreta o continua?
- **b.** Si también se permiten movimientos a lo largo de los trayectos diagonales que conectan 0 con A_1, A_2, A_3 y A_4, respectivamente, responda las preguntas del inciso a).

10. Se determinará el número de bombas en uso tanto en la gasolinera de seis bombas como en la de cuatro bombas. Dé los posibles valores de cada una de las siguientes variables aleatorias:

- **a.** T = el número total de bombas en uso.
- **b.** X = la diferencia entre el número de bombas en uso en las gasolineras 1 y 2.
- **c.** U = el número máximo de bombas en uso en una u otra gasolinera.
- **d.** Z = el número de gasolineras que tienen exactamente dos bombas en uso.

3.2 Distribuciones de probabilidad para variables aleatorias discretas

Las probabilidades asignadas a varios resultados en $\mathcal{S}$ determinan a su vez las probabilidades asociadas con los valores de cualquier variable aleatoria X particular. La *distribución de probabilidad* de X dice cómo está distribuida (asignada) la probabilidad total de 1 entre los varios posibles valores de X. Suponga, por ejemplo, que una empresa acaba de adquirir cuatro impresoras láser y sea X el número de estas que requieren servicio durante el periodo de garantía. Los posibles valores de X son entonces 0, 1, 2, 3 y 4. La distribución de probabilidad dirá cómo está subdividida la probabilidad de 1 entre estos cinco posibles valores: cuánta probabilidad está asociada con el valor 0 de X, cuánta está adjudicada al valor 1 de X, y así sucesivamente. Se utilizará la siguiente notación para las probabilidades en la distribución:

$$p(0) = \text{la probabilidad del valor 0 de } X = P(X = 0)$$
$$p(1) = \text{la probabilidad del valor 1 de } X = P(X = 1)$$

y así sucesivamente. En general, $p(x)$ denotará la probabilidad asignada al valor de x.

EJEMPLO 3.7 El Departamento de Estadística de Cal Poly tiene un laboratorio con seis computadoras reservadas para los estudiantes de estadística. Sea X el número de computadoras que están en servicio a una hora particular del día. Suponga que la distribución de probabilidad de X es como se da en la tabla siguiente; la primera fila de la tabla contiene los posibles valores de X y la segunda da la probabilidad de dicho valor.

x	0	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	.05	.10	.15	.25	.20	.15	.10

Ahora se pueden usar propiedades de probabilidad elemental para calcular otras probabilidades de interés. Por ejemplo, la probabilidad de que cuando mucho 2 computadoras estén en servicio es

$$P(X \leq 2) = P(X = 0 \text{ o } 1 \text{ o } 2) = p(0) + p(1) + p(2) = .05 + .10 + .15 = .30$$

Puesto que el evento *de que al menos 3 computadoras estén en servicio* es complementario a *cuando mucho dos computadoras están en servicio*,

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - .30 = .70$$

la cual, desde luego, también se obtiene sumando las probabilidades de los valores 3, 4, 5 y 6. La probabilidad de que entre 2 y 5 computadoras inclusive estén en servicio es

$$P(2 \leq X \leq 5) = P(X = 2, 3, 4 \text{ o } 5) = .15 + .25 + .20 + .15 = .75$$

en tanto que la probabilidad de que el número de computadoras en servicio esté estrictamente entre 2 y 5 es

$$P(2 < X < 5) = P(X = 3 \text{ o } 4) = .25 + .20 = .45$$ ■

DEFINICIÓN

La **distribución de probabilidad** o **función de masa de probabilidad** (fmp) de una variable discreta se define para cada número x como $p(x) = P(X = x) = P(\text{todos } \omega \in \mathcal{S}: X(\omega) = x)$.

Es decir, para cada valor posible x de la variable aleatoria la función de masa de probabilidad especifica la probabilidad de observar dicho valor cuando se realiza el experimento. Se requieren las condiciones $p(x) \geq 0$ y $\Sigma_{\text{todas las } x \text{ posibles}}\, p(x) = 1$ de cualquier función de masa de probabilidad.

La función de masa de probabilidad de X en el ejemplo previo se dio simplemente en la descripción del problema. A continuación se consideran varios ejemplos en los cuales se explotan varias propiedades de probabilidad para obtener la distribución deseada.

EJEMPLO 3.8 Seis lotes de componentes están listos para ser enviados por un proveedor. El número de componentes defectuosos en cada lote es como sigue:

Caja	1	2	3	4	5	6
Número de componentes defectuosos	0	2	0	1	2	0

Uno de estos lotes tiene que ser seleccionado al azar para ser enviado a un cliente particular. Sea X el número de componentes defectuosos en el lote seleccionado. Los tres posibles valores de X son 0, 1 y 2. De los seis eventos simples igualmente probables, tres dan por resultado $X = 0$, uno $X = 1$ y los otros dos $X = 2$. Entonces

$$p(0) = P(X = 0) = P(\text{el lote 1 o 3 o 6 es enviado}) = \frac{3}{6} = .500$$

$$p(1) = P(X = 1) = P(\text{el lote 4 es enviado}) = \frac{1}{6} = .167$$

$$p(2) = P(X = 2) = P(\text{el lote 2 o 5 es enviado}) = \frac{2}{6} = .333$$

Es decir, se asigna una probabilidad de .500 al valor 0 de X, una probabilidad de .167 al valor 1 de X y la probabilidad restante, .333 se asocia con el valor 2 de X. Los valores de X junto con sus probabilidades especifican la función de masa de probabilidad. Si este experimento se repitiera una y otra vez a la larga $X = 0$ ocurriría la mitad del tiempo, $X = 1$ un sexto del tiempo y $X = 2$ un tercio del tiempo. ■

EJEMPLO 3.9 Considere si la siguiente persona que compre una computadora en cierta tienda de electrónicos elegirá un modelo portátil o uno de escritorio. Sea

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si el cliente compra una computadora de escritorio} \\ 0 & \text{si el cliente compra una computadora portátil} \end{cases}$$

Si 20% de todos los compradores durante esa semana seleccionan una computadora de escritorio, la función de masa de probabilidad de X es

$$p(0) = P(X = 0) = P(\text{el siguiente cliente compra un modelo portátil}) = .8$$
$$p(1) = P(X = 1) = P(\text{el siguiente cliente compra un modelo de escritorio}) = .2$$
$$p(x) = P(X = x) = 0 \text{ para } x \neq 0 \text{ o } 1$$

Una descripción equivalente es

$$p(x) = \begin{cases} .8 & \text{si } x = 0 \\ .2 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \text{ o } 1 \end{cases}$$

La figura 3.2 es una ilustración de esta función de masa de probabilidad, llamada *gráfica lineal*. X es, desde luego, una variable aleatoria de Bernoulli y $p(x)$ es una función de masa de probabilidad de Bernoulli.

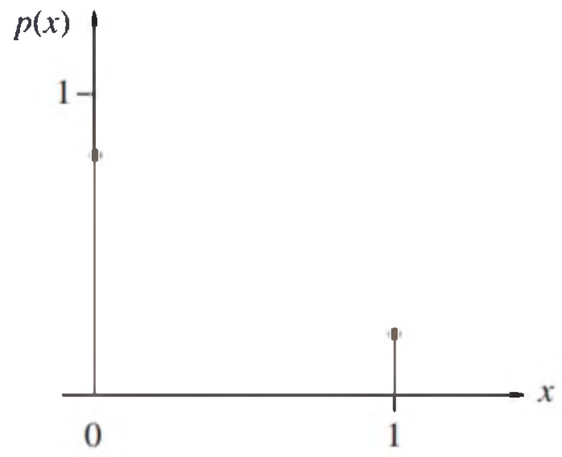


Figura 3.2 Gráfica lineal para la función de masa de probabilidad de Bernoulli en el ejemplo 3.9 ■

EJEMPLO 3.10 Considere un grupo de cinco donadores de sangre potenciales, *a, b, c, d* y *e*, de los cuales sólo *a* y *b* tienen sangre tipo O+. Se determinará en orden aleatorio el tipo de sangre con cinco muestras, una de cada individuo, hasta que se identifique un individuo O+. Sea la variable aleatoria Y = número de exámenes de sangre para identificar un individuo O+. Entonces la función de masa de probabilidad de Y es

$$p(1) = P(Y = 1) = P(a \text{ o } b \text{ examinados primero}) = \frac{2}{5} = .4$$
$$p(2) = P(Y = 2) = P(c, d \text{ o } e \text{ primero y luego } a \text{ o } b)$$
$$= P(c, d \text{ o } e \text{ primero}) \cdot P(a \text{ o } b \text{ en seguida} \mid c, d \text{ o } e \text{ primero}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = .3$$
$$p(3) = P(Y = 3) = P(c, d \text{ o } e \text{ primero y segundo, y luego } a \text{ o } b)$$
$$= \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = .2$$
$$p(4) = P(Y = 4) = P(c, d \text{ y } e \text{ todos primero}) = \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = .1$$
$$p(y) = 0 \text{ si } y \neq 1, 2, 3, 4$$

En forma tabular, la función de masa de probabilidad es

y	1	2	3	4
$p(y)$	.4	.3	.2	.1

donde cualquier valor de y que no aparece en la tabla recibe cero probabilidad. La figura 3.3 muestra una gráfica lineal de la función de masa de probabilidad.

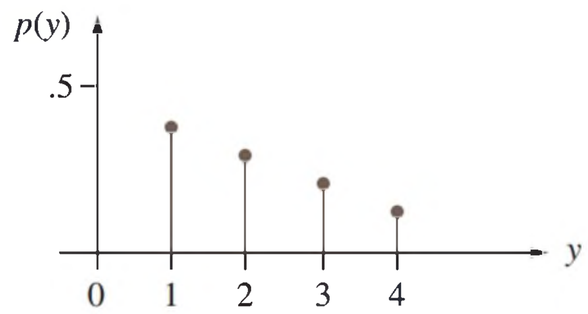


Figura 3.3 Gráfica lineal para la función de masa de probabilidad de Bernoulli del ejemplo 3.10 ■

Un modelo utilizado en física para un sistema de "masas puntuales" sugirió el nombre "función de masa de probabilidad". En este modelo las masas están distribuidas en varios lugares x a lo largo de un eje unidimensional. La función de masa de probabilidad describe cómo está distribuida la masa de probabilidad total de 1 en varios puntos a lo largo del eje de posibles valores de la variable aleatoria (dónde y cuánta masa hay en cada x).

Otra útil representación pictórica de una función de masa de probabilidad, llamada **histograma de probabilidad**, es similar a los histogramas discutidos en el capítulo 1. Sobre cada y con $p(y) > 0$ se construye un rectángulo con su centro en y. La altura de cada rectángulo es proporcional a $p(y)$ y la base es la misma para todos los rectángulos. Cuando los valores posibles están equidistantes con frecuencia se selecciona la base como la distancia entre valores y sucesivos (aunque podría ser más pequeña). La figura 3.4 muestra dos histogramas de probabilidad.

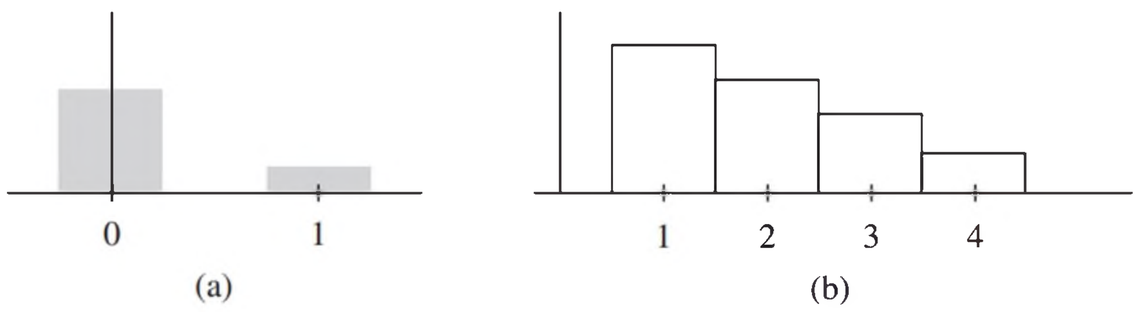


Figura 3.4 Histogramas de probabilidad: (a) Ejemplo 3.9; (b) Ejemplo 3.10

A menudo es útil pensar en una función de masa de probabilidad como un modelo matemático de una población discreta.

EJEMPLO 3.11 Considere seleccionar al azar una familia en una cierta región y suponga que X = el número de individuos en la familia seleccionada. Suponga que X tiene la siguiente función de masa de probabilidad:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(x)$	.140	.175	.220	.260	.155	.025	.015	.005	.004	.001

[este ejemplo es muy parecido a la distribución del tamaño de las familias en la región rural de Tailandia que se muestra en el artículo **"The Probability of Containment for Multitype Branching Process Models for Emerging Epidemics" (*J. of Applied Probability*, 2011: 173–188)**, en el cual se hizo un modelo de la transmisión de influenza].

Suponga que esta está basada en 1 millón de familias. Una forma de ver esta situación es pensar que la población está compuesta de un millón de familias, cada una con su propio valor X; la proporción con cada valor X está dada por $p(x)$. Un punto de vista alternativo es olvidarse de las familias y pensar en la población como compuesta de los

valores X: 14% de estos valores son 1, 17.5% son dos, y así sucesivamente. La función de masa de probabilidad describe entonces la distribución de los valores posibles de la población 1, 2,…, 10. ■

Una vez que se tiene el modelo de la población se utilizará para calcular valores de las características de la población (p. ej., la media μ) y para hacer inferencias sobre tales características.

Parámetro de una distribución de probabilidad

La función de masa de probabilidad de Bernoulli de la variable aleatoria X en el ejemplo 3.9 fue $p(0) = .8$ y $p(1) = .2$ porque 20% de todos los compradores seleccionó una computadora de escritorio. En otro almacén puede ser el caso que $p(0) = .9$ y $p(1) = .1$. Más generalmente, la función de masa de probabilidad de cualquier variable aleatoria de Bernoulli puede ser expresada en la forma $p(1) = \alpha$ y $p(0) = 1-\alpha$, donde $0 < \alpha < 1$. Puesto que la función de masa de probabilidad depende del valor particular de α, con frecuencia se escribe $p(x; \alpha)$ en lugar de sólo $p(x)$:

$$p(x;\alpha) = \begin{cases} 1-\alpha & \text{si } x = 0 \\ \alpha & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases} \tag{3.1}$$

Entonces cada opción de α en la expresión (3.1) da una función de masa de probabilidad diferente.

DEFINICIÓN

> Suponga que $p(x)$ depende de la cantidad que puede ser asignada a cualquiera de un número de valores posibles, y cada valor determina una distribución de probabilidad diferente. Tal cantidad se llama un **parámetro** de la distribución. El conjunto de todas las distribuciones de probabilidad para diferentes valores del parámetro se llama **familia** de distribuciones de probabilidad.

La cantidad α en la expresión (3.1) es un parámetro. Cada número diferente α entre 0 y 1 determina un miembro diferente de la familia de distribuciones de Bernoulli.

EJEMPLO 3.12 A partir de cierto tiempo se observan los nacimientos en un hospital hasta que nace un varón (B). Sea $p = P(B)$, suponga que los nacimientos sucesivos son independientes y defina la variable aleatoria X como x = número de nacimientos observados. Entonces

$$p(1) = P(X = 1) = P(B) = p$$

$$p(2) = P(X = 2) = P(GB) = P(G) \cdot P(B) = (1-p)p$$

y

$$p(3) = P(X = 3) = P(GGB) = P(G) \cdot P(G) \cdot P(B) = (1-p)^2 p$$

Continuando de esta manera, emerge una fórmula general:

$$p(x) = \begin{cases} (1-p)^{x-1}p & x = 1, 2, 3, \ldots \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases} \tag{3.2}$$

El parámetro p puede asumir cualquier valor entre 0 y 1. La expresión (3.2) describe la familia de distribuciones *geométricas*. En el ejemplo del genero, $p = .51$ podría ser apropiado, pero si estábamos buscando el primer hijo con sangre Rh positivo, entonces podríamos tener $p = .85$. ■

Función de distribución acumulada

Para algún valor fijo x a menudo se desea calcular la probabilidad de que el valor observado de X sea, cuando mucho, x. Por ejemplo, sea X el número de camas ocupadas en la sala de emergencia de un hospital en un momento dado del día; suponga que la función de masa de probabilidad de X está dada por

x	0	1	2	3	4
$p(x)$	.20	.25	.30	.15	.10

Entonces la probabilidad de que máximo dos camas estén ocupadas es

$$P(X \le 2) = p(0) + p(1) + p(2) = .75$$

Más aún, dado que $X \le 2.7$ si y sólo si $X \le 2$, también tenemos que $P(X \le 2.7) = .75$, y de manera similar $P(X \le 2.999) = .75$. Como 0 es el valor más pequeño posible $P(X \le -1.5) = 0$, $P(X \le -10) = 0$ y de hecho para cualquier valor negativo de x, $P(X \le x) = 0$. Y dado que 4 es el máximo valor posible de X, $P(X \le 4) = 1$, $P(X \le 9.8) = 1$, y así sucesivamente.

De manera importante

$$P(X < 2) = p(0) + p(1) = .45 < .75 = P(X \le 2)$$

porque la segunda parte de la desigualdad incluye la probabilidad del valor 2 de x, en tanto que la primera no. Más generalmente, $P(X < x) < P(X \le x)$ siempre que x sea un valor posible de X. Más aún, $P(X \le x)$ es una probabilidad calculable y bien definida para *cualquier* valor de x.

DEFINICIÓN

La **función de distribución acumulada** (fda) $F(x)$ de una variable aleatoria discreta X con función de masa de probabilidad $p(x)$ se define para cada número x como

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{y:y \le x} p(y) \qquad \textbf{(3.3)}$$

Para cualquier número x, $F(x)$ es la probabilidad de que el valor observado de X sea cuando mucho x.

EJEMPLO 3.13 Una tienda vende unidades de memoria flash, ya sea con 1 GB, 2 GB, 4 GB, 8 GB o 16 GB de memoria. La siguiente tabla muestra la distribución de Y = la cantidad de memoria en un disco comprado:

y	1	2	4	8	16
$p(y)$	.05	.10	.35	.40	.10

Primero se determina $F(y)$ para cada uno de los cinco valores posibles de Y:

$$\begin{aligned}
F(1) &= P(Y \le 1) = P(Y = 1) = p(1) = .05\\
F(2) &= P(Y \le 2) = P(Y = 1 \text{ o } 2) = p(1) + p(2) = .15\\
F(4) &= P(Y \le 4) = P(Y = 1 \text{ o } 2 \text{ o } 4) = p(1) + p(2) + p(4) = .50\\
F(8) &= P(Y \le 8) = p(1) + p(2) + p(4) + p(8) = .90\\
F(16) &= P(Y \le 16) = 1
\end{aligned}$$

Ahora con cualquier otro número y, $F(y)$ será igual al valor de F en el valor más próximo posible de Y a la izquierda de y. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
F(2.7) &= P(Y \le 2.7) = P(Y \le 2) = F(2) = .15\\
F(7.999) &= P(Y \le 7.999) = P(Y \le 4) = F(4) = .50
\end{aligned}$$

Si y es menor que 1, $F(y) = 0$ [por ejemplo, $F(.58) = 0$], y si y es al menos 16, $F(y) = 1$ [por ejemplo, $F(25) = 1$]. La fda es, pues,

$$F(y) = \begin{cases} 0 & y < 1 \\ .05 & 1 \le y < 2 \\ .15 & 2 \le y < 4 \\ .50 & 4 \le y < 8 \\ .90 & 8 \le y < 16 \\ 1 & 16 \le y \end{cases}$$

En la figura 3.5 se muestra una gráfica de esta fda.

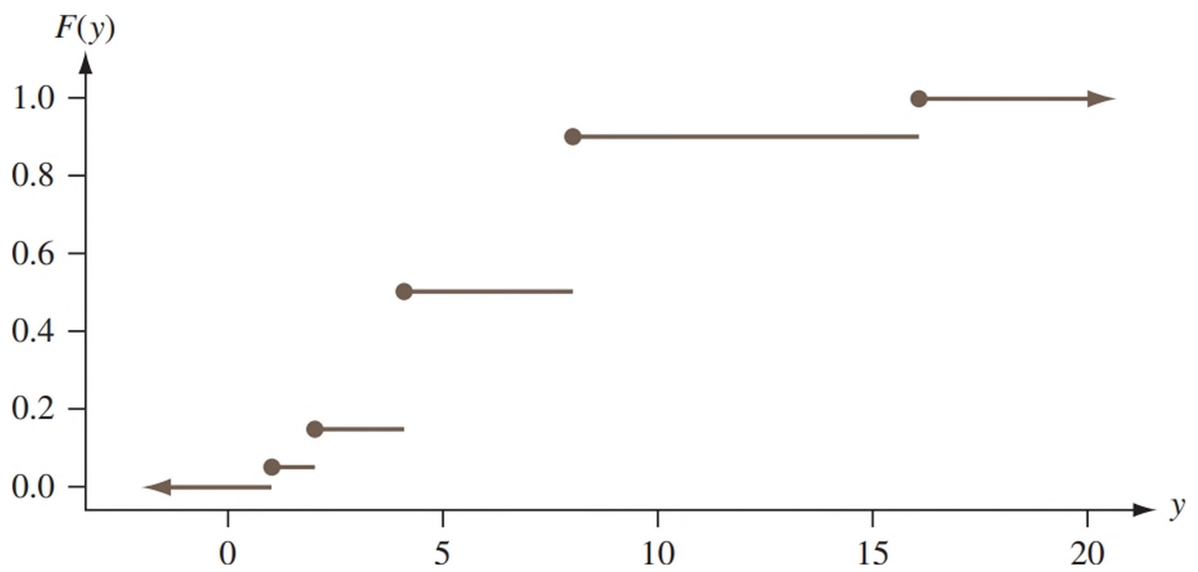


Figura 3.5 Gráfica de la función de distribución acumulada del ejemplo 3.13 ■

Para una variable aleatoria discreta X, la gráfica de $F(x)$ mostrará un salto con cada valor posible de X, y será plana entre los valores posibles. Tal gráfica se conoce como **función escalón**.

EJEMPLO 3.14 (Continuación del ejemplo 3.12)

La fmp de $X =$ *el número de nacimientos observados incluyendo el nacimiento del primer varón* tenía la forma

$$p(x) = \begin{cases} (1-p)^{x-1}p & x = 1, 2, 3, \ldots \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Para cualquier entero positivo x,

$$F(x) = \sum_{y \le x} p(y) = \sum_{y=1}^{x} (1-p)^{y-1}p = p\sum_{y=0}^{x-1} (1-p)^{y} \tag{3.4}$$

Para evaluar esta suma se utiliza el hecho de que la suma parcial de una serie geométrica es

$$\sum_{y=0}^{k} a^y = \frac{1 - a^{k+1}}{1 - a}$$

Utilizando esto en la ecuación (3.4), con $a = 1 - p$ y $k = x - 1$, se obtiene

$$F(x) = p \cdot \frac{1 - (1-p)^x}{1 - (1-p)} = 1 - (1-p)^x \quad x \text{ es un entero positivo}$$

Puesto que F es una constante entre enteros positivos,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 - (1-p)^{[x]} & x \ge 1 \end{cases} \tag{3.5}$$

donde $[x]$ es el entero más grande $\leq x$ (p. ej., $[2.7] = 2$). Así pues, si $p = .51$ como en el ejemplo de los nacimientos, entonces la probabilidad de tener que examinar cuando mucho cinco nacimientos para ver el primer varón es $F(5) = 1 - (.49)^5 = 1 - .0282 = .9718$, mientras que $F(10) \approx 1.0000$. Esta función de distribución acumulada se ilustra en la figura 3.6.

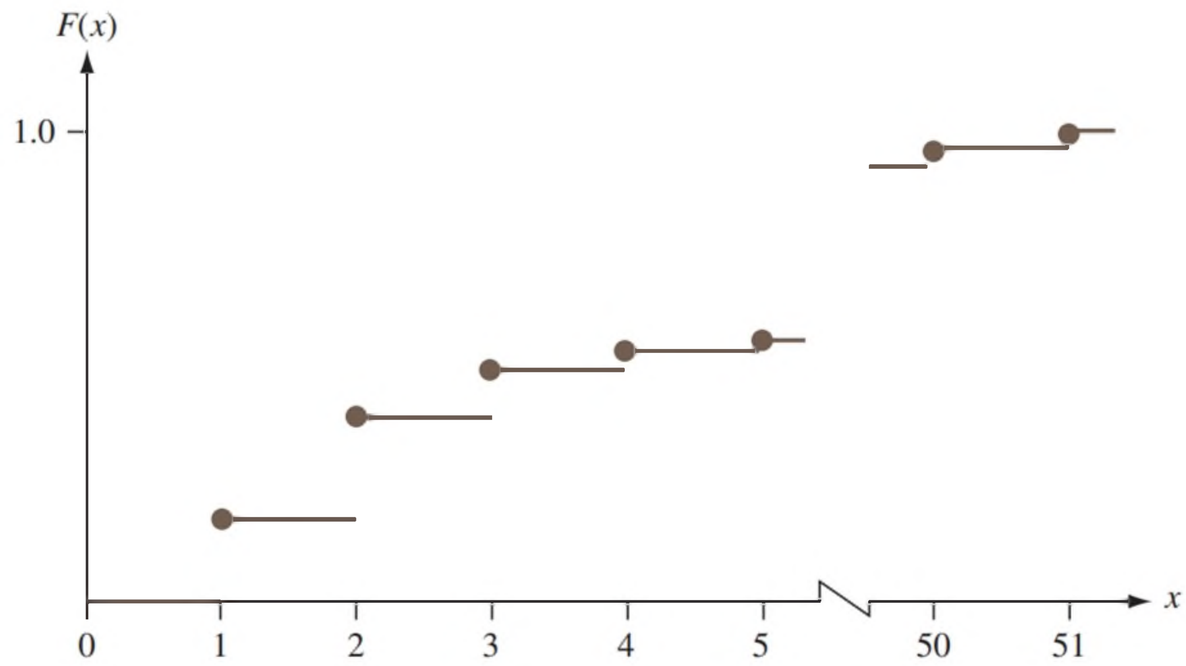


Figura 3.6 Gráfica de $F(x)$ para el ejemplo 3.14 ■

En los ejemplos presentados hasta ahora, la función de distribución acumulada se dedujo de la función de masa de probabilidad. Este proceso puede ser invertido para obtener la función de masa de probabilidad a partir de la función de distribución acumulada, siempre que esta esté disponible. Por ejemplo, considere otra vez la variable aleatoria del ejemplo 3.7 (el número de computadoras usadas en un laboratorio); los valores posibles de X son 0, 1,..., 6. Entonces

$$\begin{aligned} p(3) &= P(X = 3) \\ &= [p(0) + p(1) + p(2) + p(3)] - [p(0) + p(1) + p(2)] \\ &= P(X \leq 3) - P(X \leq 2) \\ &= F(3) - F(2) \end{aligned}$$

Más generalmente, la probabilidad de que X quede dentro de un intervalo específico es fácil de obtener a partir de la función de distribución acumulada. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} P(2 \leq X \leq 4) &= p(2) + p(3) + p(4) \\ &= [p(0) + \cdots + p(4)] - [p(0) + p(1)] \\ &= P(X \leq 4) - P(X \leq 1) \\ &= F(4) - F(1) \end{aligned}$$

Observe que $P(2 \leq X \leq 4) \neq F(4) - F(2)$. Esto es porque el valor 2 de X está incluido en $2 \leq X \leq 4$, así que no se desea restar su probabilidad. Sin embargo, $P(2 < X \leq 4) = F(4) - F(2)$ porque $X = 2$ no está incluido en el intervalo $2 < X \leq 4$.

DEFINICIÓN

Para dos números cualesquiera a y b con $a \leq b$,

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a-)$$

donde "$a-$" representa el valor posible de X más grande que es estrictamente menor que a. En particular, si los únicos valores posibles son enteros, y si a y a son enteros, entonces

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P(X = a \text{ o } a + 1 \text{ o} \ldots \text{ o } b) \\ &= F(b) - F(a - 1) \end{aligned}$$

Con $a = a$ se obtiene $P(X = a) = F(a) - F(a - 1)$ en este caso.

La razón de restar $F(a-)$ en lugar de $F(a)$ es que se desea incluir $P(X = a)$; $F(b) - F(a)$ da $P(a < X \leq b)$. Esta proposición se utilizará extensamente cuando se calculen las probabilidades binomial y de Poisson en las secciones 3.4 y 3.6.

EJEMPLO 3.15 Sea X = los días de ausencia por enfermedad de un empleado seleccionado al azar de una gran compañía durante un año particular. Si el número máximo de días de ausencia por enfermedad permisibles al año es de 14, los valores posibles de X son 0, 1,..., 14. Con $F(0) = .58$, $F(1) = .72$, $F(2) = .76$, $F(3) = .81$, $F(4) = .88$ y $F(5) = .94$,

$$P(2 \leq X \leq 5) = P(X = 2, 3, 4 \text{ o } 5) = F(5) - F(1) = .22$$

y

$$P(X = 3) = F(3) - F(2) = .05$$ ■

EJERCICIOS Sección 3.2 (11–28)

11. Sea X el número de estudiantes que se presentan en el horario de oficina de un profesor en un día en particular. Suponga que la función de masa de probabilidad de X es $p(0) = .20$, $p(1) = .25$, $p(2) = .30$, $p(3) = .15$ y $p(4) = .10$.

a. Dibuje el histograma de probabilidad correspondiente.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos estudiantes se presenten? ¿Y de que se presenten más de dos estudiantes?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que entre uno y tres estudiantes, inclusive, se presenten?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que se presente el profesor?

12. Las aerolíneas sobrevenden sus vuelos en algunas ocasiones. Suponga que para un avión de 50 asientos hay 55 pasajeros con boleto. Defina la variable aleatoria Y como el número de pasajeros con boleto comprado que llegan a tiempo para tomar el vuelo. La función de masa de probabilidad de Y aparece en la siguiente tabla.

y	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
$p(y)$	.05	.10	.12	.14	.25	.17	.06	.05	.03	.02	.01

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la aerolínea acomode en el vuelo a todos los pasajeros que se presentan con boleto?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que no sean acomodados todos los pasajeros con un boleto?

c. Si es la primera persona en la lista de espera (lo que significa que será la primera en subirse al vuelo si hay asientos disponibles después de que todos los pasajeros con boleto hayan sido acomodados), ¿cuál es la probabilidad de que tome el vuelo? ¿Cuál es la probabilidad si es la tercera persona en la lista de espera?

13. Una empresa de ventas por internet dispone de seis líneas telefónicas. Sea X el número de líneas en uso en un tiempo especificado. Suponga que la función de masa de probabilidad de X es la que se da en la siguiente tabla.

x	0	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	.10	.15	.20	.25	.20	.06	.04

Calcule la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos.

a. {cuando mucho tres líneas están en uso}

b. {menos de tres líneas están en uso}

c. {al menos tres líneas están en uso}

d. {entre dos y cinco líneas, inclusive, están en uso}

e. {entre dos y cuatro líneas, inclusive, no están en uso}

f. {al menos cuatro líneas no están en uso}

14. El departamento de planeación de un condado requiere que un contratista presente una, dos, tres, cuatro o cinco formas (según la naturaleza del proyecto) para solicitar un permiso de construcción. Sea Y = número de formas requeridas del siguiente solicitante. Se sabe que la probabilidad de que se requieran y formas es proporcional a y, es decir, $p(y) = ky$ con $y = 1,..., 5$.

a. ¿Cuál es el valor de k? [*Sugerencia:* $\sum_{y=1}^{5} p(y) = 1$]

b. ¿Cuál es la probabilidad de que cuando mucho se requieran tres formas?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que se requieran entre dos y cuatro formas (inclusive)?

d. ¿Podría ser $p(y) = y^2/50$ con $y = 1,..., 5$ como la función de masa de probabilidad de Y?

15. Muchos fabricantes cuentan con programas de control de calidad que incluyen la inspección de los materiales recibidos en busca de defectos. Suponga que un fabricante de computadoras recibe tarjetas madre en lotes de cinco. Se seleccionan dos tarjetas de cada lote para inspeccionarlas. Se pueden representar los posibles resultados del proceso de selección por pares. Por ejemplo, el par (1, 2) representa la selección de las tarjetas 1 y 2 para inspección.

a. Mencione los diez posibles resultados diferentes.

b. Suponga que las tarjetas 1 y 2 son las únicas defectuosas en un lote de cinco. Dos tarjetas tienen que ser selecciona-

das al azar. Defina X como el número de tarjetas defectuosas observadas entre las inspeccionadas. Encuentre la distribución de probabilidad de X.

c. Sea $F(x)$ la función de distribución acumulada de X. Primero determine $F(0) = P(X \leq 0)$, $F(1)$ y $F(2)$; luego obtenga $F(x)$ para todas las demás x.

16. Algunas partes de California son particularmente propensas a los temblores. Suponga que en un área metropolitana, 25% de todos los dueños de una casa están asegurados contra daños provocados por terremotos. Se seleccionan al azar cuatro de ellos; sea X el número, entre estos cuatro, que están asegurados contra terremotos.

a. Encuentre la distribución de probabilidad de X. [*Sugerencia*: Sea S un propietario de casa asegurado y F uno no asegurado. Entonces un posible resultado es $SFSS$, con probabilidad (.25)(.75)(.25)(.25) y el valor 3 de X asociado. [Existen otros 15 resultados.]

b. Trace el histograma de probabilidad correspondiente.

c. ¿Cuál es el valor más probable de X?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos de los cuatro seleccionados estén asegurados contra terremotos?

17. El voltaje de una batería nueva puede ser aceptable (A) o inaceptable (I). Una linterna requiere dos baterías, así que las baterías serán seleccionadas independientemente y probadas hasta encontrar dos aceptables. Suponga que 90% de todas las baterías tiene voltajes aceptables. Sea Y el número de baterías que deben ser probadas.

a. ¿Cuál es $p(2)$, es decir, $P(Y = 2)$?

b. ¿Cuál es $p(3)$? [*Sugerencia:* Existen dos resultados diferentes que producen $Y = 3$.]

c. Para tener $Y = 5$, ¿qué debe ser cierto de la quinta batería seleccionada? Mencione los cuatro resultados con los cuales $Y = 5$ y luego determine $p(5)$.

d. Use el patrón de sus respuestas en los incisos a)−c) para obtener una fórmula general para $p(y)$.

18. Dos dados de seis caras son lanzados al aire en forma independiente. Sea M = el máximo de los dos lanzamientos (por tanto $M(1,5) = 5$, $M(3,3) = 3$, etc.).

a. ¿Cuál es la función de masa de probabilidad de M? [*Sugerencia:* Primero determine $p(1)$, luego $p(2)$ y así sucesivamente.]

b. Determine la función de distribución acumulada de M y grafíquela.

19. Una biblioteca se suscribe a dos diferentes revistas de noticias semanales, cada una de las cuales se supone que llega en el correo de los miércoles. En realidad, cada una puede llegar en miércoles, jueves, viernes o sábado. Suponga que las dos llegan independientemente una de otra y para cada una $P(\text{mié}) = .3$, $P(\text{jue}) = .4$, $P(\text{vie}) = .2$ y $P(\text{sáb}) = .1$. Sea Y = el número de días que se suceden, posteriores al miércoles, para que ambas revistas lleguen (por tanto los posibles valores de Y son 0, 1, 2 o 3). Calcule la función de masa de probabilidad de Y. [*Sugerencia:* Hay 16 posibles resultados: $Y(M, M) = 0$, $Y(V, J) = 2$, y así sucesivamente.]

20. Tres parejas y dos individuos solteros han sido invitados a un seminario de inversión y han aceptado asistir. Suponga que la probabilidad de que cualquier pareja o individuo particular llegue tarde es de .4 (una pareja viajará en el mismo vehículo, así que ambos llegarán a tiempo, o bien ambos llegarán tarde). Suponga que diferentes parejas e individuos llegan puntuales o tarde, independientemente unos de otros. Sea X = el número de personas que llegan tarde al seminario.

a. Determine la función de masa de probabilidad de X. [Sugerencia: designe las tres parejas #1, #2 y #3 y los dos individuos #4 y #5.]

b. Obtenga la función de distribución acumulada de X y úsela para calcular $P(2 \leq X \leq 6)$.

21. Suponga que lee los números de este año del *New York Times* y que anota cada número en el que aparece un artículo sobre el ingreso de un oficial ejecutivo en jefe, el número de cajas de vino producidas por una compañía vinícola, la contribución caritativa total de un político durante el año fiscal previo, la edad de una celebridad y así sucesivamente. Ahora enfóquese en el primer dígito de cada número, el cual podría ser 1, 2,..., 8 o 9. Usted podría pensar que es igual de probable que el primer dígito X de un número seleccionado al azar sea cualquiera de las nueve posibilidades (una distribución uniforme discreta). Sin embargo, mucha evidencia empírica, así como también algunos argumentos teóricos sugieren una distribución de probabilidad alternativa llamada *ley de Benford*:

$$p(x) = P(\text{el primer dígito es } x) = \log_{10}\left(\frac{x+1}{x}\right) \quad x = 1, 2, \ldots, 9$$

a. Sin calcular probabilidades individuales de esta fórmula, demuestre que esta especifica una función legítima de masa de probabilidad.

b. Ahora calcule las probabilidades individuales y compare con la correspondiente distribución uniforme discreta.

c. Obtenga la función de distribución acumulada de X.

d. Utilizando la función de distribución acumulada, ¿cuál es la probabilidad de que el primer dígito sea cuando mucho 3? ¿Al menos 5?

[*Nota*: La ley de Benford es la base de algunos procedimientos de auditoría utilizados para detectar fraudes en reportes financieros, por ejemplo, por el Servicio de Ingresos Internos.]

22. Remítase al ejercicio 13 y calcule y trace la gráfica de la función de distribución acumulada $F(x)$. Luego utilícela para calcular las probabilidades de los eventos dados en los incisos a)−d) de dicho problema.

23. Una organización de protección al consumidor que habitualmente evalúa automóviles nuevos reporta el número de defectos importantes encontrados en cada automóvil examinado. Sea X el número de defectos importantes en un auto seleccionado al azar de cierto tipo. La función de distribución acumulada de X es la siguiente:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ .06 & 0 \leq x < 1 \\ .19 & 1 \leq x < 2 \\ .39 & 2 \leq x < 3 \\ .67 & 3 \leq x < 4 \\ .92 & 4 \leq x < 5 \\ .97 & 5 \leq x < 6 \\ 1 & 6 \leq x \end{cases}$$

Calcule las siguientes probabilidades directamente con la función de distribución acumulada:

a. $p(2)$, es decir, $P(X = 2)$ **b.** $P(X > 3)$
c. $P(2 \le X \le 5)$ **d.** $P(2 < X < 5)$

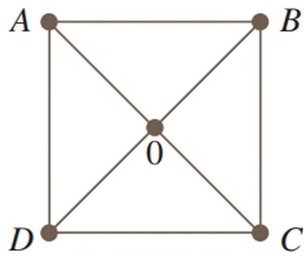
24. Una compañía de seguros ofrece a sus asegurados varias opciones diferentes de pago de primas. Para un asegurado seleccionado al azar, sea X = el número de meses entre pagos sucesivos. La función de distribución acumulada es la siguiente:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ .30 & 1 \le x < 3 \\ .40 & 3 \le x < 4 \\ .45 & 4 \le x < 6 \\ .60 & 6 \le x < 12 \\ 1 & 12 \le x \end{cases}$$

a. ¿Cuál es la función de masa de probabilidad de X?
b. Con sólo la función de distribución acumulada, calcule $P(3 \le X \le 6)$ y $P(4 \le X)$.

25. En el ejemplo 3.12, sea Y = el número de niñas nacidas antes de que termine el experimento. Con $p = P(B)$ y $1 - p = P(G)$, ¿cuál es la función de masa de probabilidad de Y? [*Sugerencia*: Primero haga una lista con los posibles valores de Y, inicie con el más pequeño y continúe hasta que encuentre una fórmula general.]

26. Álvaro Singer vive en 0 en el diagrama adjunto y sus cuatro amigos viven en *A, B, C* y *D*. Un día Álvaro decide visitarlos, así que lanza una moneda al aire dos veces para decidir a cuál de los cuatro visitar. Luego de estar en la casa de uno de sus amigos, regresará a su propia casa o bien irá a una de las dos casas adyacentes (tales como 0, A o C, cuando está en B); la probabilidad de las tres posibilidades es 1/3. De este modo, Álvaro continúa con las visitas a sus amigos hasta que regresa a casa.



a. Sea X = el número de veces que Álvaro visita a un amigo. Obtenga la función de masa de probabilidad de X.
b. Sea Y = el número de segmentos de línea recta que Álvaro recorre (incluidos los que conducen a 0, o que parten de ahí). ¿Cuál es la función de masa de probabilidad de Y?
c. Suponga que sus amigas viven en A y C y sus amigos en B y D. Si Z = el número de visitas a sus amigas, ¿cuál es la función de masa de probabilidad de Z?

27. Después de que todos los estudiantes salieron del salón de clases, el profesor de estadística nota que cuatro ejemplares del texto fueron olvidados bajo los escritorios. Al inicio de la siguiente clase el profesor distribuye los cuatro libros al azar a cada uno de los cuatro estudiantes (1, 2, 3 y 4) que dicen haber olvidado sus libros. Un posible resultado es que 1 reciba el libro de 2, que 2 reciba el libro de 4, que 3 reciba su propio libro y que 4 reciba el libro de 1. Este resultado puede ser abreviado como (2, 4, 3, 1).
a. Mencione los otros 23 resultados posibles.
b. Si X es el número de estudiantes que reciben su propio libro, determine la función de masa de probabilidad de X.

28. Demuestre que la función de distribución acumulada de $F(x)$ es no decreciente; es decir, $x_1 < x_2$ implica que $F(x_1) \le F(x_2)$. ¿En qué condición será $F(x_1) = F(x_2)$?

3.3 Valores esperados

Considere una universidad que tiene 15 000 estudiantes y sea X = el número de cursos en los cuales está inscrito un estudiante seleccionado al azar. La función de masa de probabilidad de X se determina como sigue. Como $p(1) = .01$, se sabe que $(.01) \cdot (15\,000) = 150$ de los estudiantes están inscritos en un curso y lo mismo para los otros valores de x.

x	1	2	3	4	5	6	7
$p(x)$	.01	.03	.13	.25	.39	.17	.02
Número registrado	150	450	1950	3750	5850	2550	300

(3.6)

El número promedio de cursos por estudiante o el valor promedio de X en la población se obtiene al calcular el número total de cursos tomados por todos los estudiantes y al dividir entre el número total de estudiantes. Como cada uno de los 150 estudiantes está tomando un curso, estos 150 contribuyen con 150 cursos al total. Asimismo, 450 estudiantes contribuyen con 2(450) cursos y así sucesivamente. El valor promedio de la población X es entonces

$$\frac{1(150) + 2(450) + 3(1950) + \cdots + 7(300)}{15\,000} = 4.57 \qquad \textbf{(3.7)}$$

Puesto que 150/15 000 = .01 = $p(1)$, 450/15 000 = .03 = $p(2)$ y así sucesivamente, una expresión alternativa para (3.7) es

$$1 \cdot p(1) + 2 \cdot p(2) + \cdots + 7 \cdot p(7) \tag{3.8}$$

La expresión (3.8) muestra que para calcular el valor promedio de la población X sólo se necesitan los valores posibles de X junto con sus probabilidades (proporciones). En particular el tamaño de la población no viene al caso mientras la función de masa de probabilidad esté dada por (3.6). El valor promedio o medio de X es entonces el promedio *ponderado* de los posibles valores 1,…, 7, donde las ponderaciones son las probabilidades de esos valores.

Valor esperado de X

DEFINICIÓN

Sea X una variable aleatoria discreta con un conjunto de valores posibles D y una función de masa de probabilidad $p(x)$. El **valor esperado** o **valor medio** de X, denotado por $E(X)$ o μ_X o sólo μ, es

$$E(X) = \mu_X = \sum_{x \in D} x \cdot p(x)$$

EJEMPLO 3.16 Para la función de masa de probabilidad de X = *número de cursos* en (3.6),

$$\begin{aligned}\mu &= 1 \cdot p(1) + 2 \cdot p(2) + \cdots + 7 \cdot p(7)\\ &= (1)(.01) + 2(.03) + \cdots + (7)(.02)\\ &= .01 + .06 + .39 + 1.00 + 1.95 + 1.02 + .14 = 4.57\end{aligned}$$

Si se piensa en la población como compuesta de los valores 1, 2,…, 7 de X, entonces $\mu = 4.57$ es la *media de la población*. En consecuencia, a menudo se hará referencia a μ como la media de la población en lugar de la media de X en la población. Tenga en cuenta que aquí μ no es 4, el promedio normal de 1,…, 7, porque la distribución pone más peso en 4, 5 y 6 que en otros valores de X. ■

En el ejemplo 3.16 el valor esperado μ fue 4.57, el cual no es un valor posible de X. La palabra *esperado* deberá interpretarse con precaución porque no se esperaría ver un valor X de 4.57 cuando se selecciona un solo estudiante.

EJEMPLO 3.17 Exactamente después de nacer cada recién nacido es evaluado en una escala llamada escala de Apgar. Las evaluaciones posibles son 0, 1,…, 10; la evaluación del niño es determinada por color, tono muscular, esfuerzo para respirar, ritmo cardiaco e irritabilidad refleja (la mejor evaluación posible es 10). Sea X la evaluación Apgar de un niño seleccionado al azar que nacerá en cierto hospital durante el siguiente año y suponga que la función de masa de probabilidad de X es

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(x)$	.002	.001	.002	.005	.02	.04	.18	.37	.25	.12	.01

Entonces el valor medio de X es

$$\begin{aligned}E(X) = \mu &= 0(.002) + 1(.001) + 2(.002)\\ &\quad + \cdots + 8(.25) + 9(.12) + 10(.01)\\ &= 7.15\end{aligned}$$

De nuevo, μ no es un valor posible de la variable X. Además, debido a que la variable se refiere a un niño que aún no ha nacido, no existe ninguna población concreta a la cual podría referirse μ. En cambio, la función de masa de probabilidad se considera un modelo de una población conceptual compuesta por los valores 0, 1, 2,..., 10. El valor medio de esta población conceptual es entonces $\mu = 7.15$. ■

EJEMPLO 3.18 Sea $X = 1$ si un vehículo seleccionado al azar aprueba un diagnóstico de emisiones y $X = 0$ si no. Entonces X es una variable aleatoria de Bernoulli con función de masa de probabilidad $p(1) = p$ y $p(0) = 1 - p$, a partir de la cual $E(X) = 0 \cdot p(0) + 1 \cdot p(1) = 0(1 - p) + 1(p) = p$. Es decir, el valor esperado de X es exactamente la probabilidad de que X tome el valor de 1. Si se conceptualiza una población compuesta de ceros en la proporción $1 - p$ y números 1 en la proporción p, entonces el promedio de la población es $\mu = p$. ■

EJEMPLO 3.19 La forma general de la función de masa de probabilidad de $X =$ *número de bebés nacidos hasta el primer varón incluido* es

$$p(x) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1} & x = 1, 2, 3, \ldots \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

De acuerdo con la definición,

$$E(X) = \sum_D x \cdot p(x) = \sum_{x=1}^{\infty} xp(1-p)^{x-1} = p\sum_{x=1}^{\infty}\left[-\frac{d}{dp}(1-p)^x\right] \tag{3.9}$$

Si se intercambia el orden en que se evalúan la derivada y la suma, la suma es la de una serie geométrica. Una vez que se calcula la suma, se saca la derivada y el resultado final es $E(X) = 1/p$. Si p se aproxima a 1, se espera ver que nazca un varón muy pronto, mientras que si p se aproxima a 0, se esperan muchos nacimientos antes del primer varón. Con $p = .5$, $E(X) = 2$. ■

Hay otra interpretación frecuentemente utilizada de μ. Considere la posibilidad de observar un primer valor x_1 de X, un segundo valor x_2, un tercer valor x_3, y así sucesivamente. Después de hacer esto un gran número de veces se calcula el promedio de la muestra de las x_i observadas. Este promedio usualmente será muy cercano a μ. Es decir, μ puede interpretarse como el promedio a largo plazo del valor observado de X cuando el experimento se realiza en varias ocasiones. En el ejemplo 3.17 el promedio a largo plazo de Apgar es $\mu = 7.15$.

EJEMPLO 3.20 Sea X el número de entrevistas a las que se presenta un estudiante antes de conseguir un trabajo, con la función de masa de probabilidad

$$p(x) = \begin{cases} k/x^2 & x = 1, 2, 3, \ldots \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

donde $k = \pi^2/6$ asegura que se elige de modo que $\Sigma p(x) = 1$ (el valor de k es el resultado de una serie de Fourier). El valor esperado de X es:

$$\mu = E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{k}{x^2} = k\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{x} \tag{3.10}$$

La suma del lado derecho de la ecuación (3.10) es la famosa serie armónica de matemáticas y se puede demostrar que es igual a ∞. En este caso $E(X)$ no es finita porque $p(x)$ no disminuye suficientemente rápido a medida que x se incrementa; los estadísticos dicen que la distribución de probabilidad de X tiene "una cola gruesa". Si se selecciona una secuencia de valores X utilizando esta distribución el promedio muestral no se establecerá en un número finito, sino que tenderá a crecer sin límite.

Los estadísticos utilizan la frase "colas gruesas" en conexión con cualquier distribución con una gran cantidad de probabilidad alejada de μ (por tanto, las colas gruesas no requieren $\mu = \infty$). Tales colas gruesas vuelven difícil hacer inferencias respecto a μ. ■

Valor esperado de una función

A menudo interesará poner atención en el valor esperado de alguna función $h(X)$ en lugar de sólo en $E(X)$.

EJEMPLO 3.21 Suponga que una librería adquiere diez ejemplares de un libro a \$6.00 cada uno para venderlos a \$12.00 en el entendimiento de que al final de un periodo de 3 meses cualquier ejemplar no vendido puede ser canjeado por \$2.00. Si X = el número de ejemplares vendidos, entonces el ingreso neto = $h(X) = 12X + 2(10 - X) - 60 = 10X - 40$. En esta situación podríamos estar interesados no sólo en el número esperado de copias vendidas [por ejemplo, $E(X)$], sino también en la ganancia neta esperada, esto es, el valor esperado de una función particular de X. ■

El siguiente ejemplo sugiere una forma fácil de calcular el valor esperado de $h(X)$.

EJEMPLO 3.22 El costo de cierta prueba de diagnóstico de un vehículo depende del número de cilindros X en el motor. Suponga que la función de costo está dada por $h(X) = 20 + 3X + .5X^2$. Puesto que X es una variable aleatoria, también lo es $Y = h(X)$. Las funciones de masa de probabilidad de X y Y son las siguientes

x	4	6	8	$\Rightarrow$	y	40	56	76
$p(x)$	.5	.3	.2		$p(y)$	.5	.3	.2

Con D^* denotando posibles valores de Y,

$$\begin{aligned} E(Y) = E[h(X)] &= \sum_{D^*} y \cdot p(y) \\ &= (40)(.5) + (56)(.3) + (76)(.2) \\ &= h(4) \cdot (.5) + h(6) \cdot (.3) + h(8) \cdot (.2) \\ &= \sum_{D} h(x) \cdot p(x) \end{aligned} \tag{3.11}$$

De acuerdo con la ecuación (3.11) no fue necesario determinar la función de masa de probabilidad de Y para obtener $E(Y)$; en su lugar, el valor esperado deseado es un promedio ponderado de los posibles valores de $h(x)$ (en lugar de x). ■

PROPOSICIÓN

Si la variable aleatoria X tiene un conjunto de posibles valores D y una función de masa de probabilidad $p(x)$, entonces el valor esperado de cualquier función $h(X)$, denotada por $E[h(X)]$ o $\mu_{h(X)}$, se calcula con

$$E[h(X)] = \sum_{D} h(x) \cdot p(x)$$

Esto es, $E[h(X)]$ se calcula del mismo modo que $E(X)$, excepto que $h(x)$ sustituye a x.

EJEMPLO 3.23 Una tienda de computadoras adquirió tres computadoras de un cierto tipo en \$500 cada una. Las venderá a \$1000 cada una. El fabricante se comprometió a comprar a su vez en \$200 cualquier computadora que no se haya vendido después de un periodo especificado. Sea X el número de computadoras vendidas y suponga que $p(0) = .1$, $p(1) = .2$, $p(2) = .3$ y $p(3) = .4$. Con $h(X)$ denotando la utilidad asociada con la venta de X unidades, la

información dada implica que $h(X)$ = ingreso costo = $1000X + 200(3 - X) - 1500 = 800X - 900$. La utilidad esperada es entonces

$$\begin{aligned} E[h(X)] &= h(0) \cdot p(0) + h(1) \cdot p(1) + h(2) \cdot p(2) + h(3) \cdot p(3) \\ &= (-900)(.1) + (-100)(.2) + (700)(.3) + (1500)(.4) \\ &= \$700 \end{aligned}$$

■

Reglas de valor esperado

La función de interés $h(X)$ es con bastante frecuencia una función lineal $aX + b$. En este caso, $E[h(X)]$ es fácil de calcular a partir de $E(X)$.

DEFINICIÓN

$$E(aX + b) = a \cdot E(X) + b$$

(O, utilizando una notación alternativa, $\mu_{aX+b} = a \cdot \mu_X + b$)

Parafraseando, el valor esperado de una función lineal es igual a la función lineal evaluada con el valor esperado $E(X)$. Puesto que $h(X)$ en el ejemplo 3.23 es lineal y $E(X) = 2$, $E[h(x)] = 800(2) - 900 = \$700$, como antes.

Comprobación

$$\begin{aligned} E(aX + b) &= \sum_D (ax + b) \cdot p(x) = a \sum_D x \cdot p(x) + b \sum_D p(x) \\ &= aE(X) + b \end{aligned}$$

■

Dos casos especiales de la proposición producen dos reglas importantes de valor esperado.

1. Con cualquier constante a, $E(aX) = a \cdot \mathrm{E}(X)$ (considere $b = 0$).

2. Con cualquier constante b, $E(X + b) = E(X) + b$ (considere $a = 1$). **(3.12)**

Multiplicar X por una constante a por lo general cambia la unidad de medición, por ejemplo, de pulgadas a centímetros, donde $a = 2.54$. La regla 1 dice que el valor esperado en las nuevas unidades es igual al valor esperado en las viejas unidades multiplicado por el factor de conversión a. Asimismo, si se agrega una constante b a cada valor posible de X, entonces el valor esperado se desplazará en esa misma cantidad constante.

Varianza de X

El valor esperado de X describe dónde está centrada la distribución de probabilidad. Mediante la analogía física de colocar una masa puntual $p(x)$ en el valor x sobre un eje unidimensional que estuviera soportado por un fulcro colocado en μ, el eje no tendería a ladearse. Esto se ilustra para dos distribuciones diferentes en la figura 3.7.

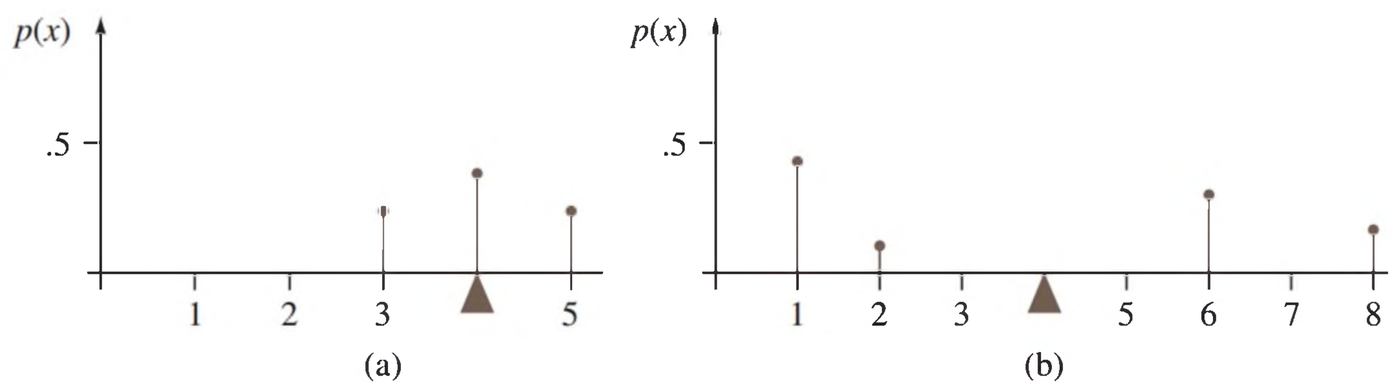


Figura 3.7 Dos diferentes distribuciones de probabilidad con $\mu = 4$

Aunque ambas distribuciones ilustradas en la figura 3.7 tienen el mismo centro μ, la distribución de la figura 3.7(b) tiene una mayor dispersión o variabilidad que la de la figura 3.7(a). Se utilizará la varianza de X para evaluar la cantidad de variabilidad en (la distribución de) X, del mismo modo que se utilizó s^2 en el capítulo 1 para medir la variabilidad en una muestra.

DEFINICIÓN

Sea $p(x)$ la función de masa de probabilidad de X y μ su valor esperado. En ese caso la varianza de X, denotada por $V(X)$ o σ_X^2, o simplemente σ^2, es

$$V(X) = \sum_D (x - \mu)^2 \cdot p(x) = E[(X - \mu)^2]$$

La **desviación estándar** (DE) de X es

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$$

La cantidad $h(X) = (X - \mu)^2$ es la desviación al cuadrado de X respecto a su media y σ^2 es la desviación al cuadrado esperada, es decir, el promedio ponderado de las desviaciones al cuadrado, donde las ponderaciones son probabilidades de la distribución. Si la mayor parte de la distribución de probabilidad está cerca de μ, entonces σ^2 será relativamente pequeña. Sin embargo, si existen valores x alejados de μ con una gran $p(x)$, en ese caso σ^2 será bastante grande. A grandes rasgos, σ se puede interpretar como el tamaño de una desviación representativa del valor medio μ. Así que si $\sigma = 10$, entonces en una larga secuencia de valores observados X, algunos se apartarán de μ por más de 10, mientras que otros estarán más cerca de la media que eso, una desviación típica de la media será del orden de 10.

EJEMPLO 3.24 En una biblioteca la cantidad de DVD que puede sacar una persona a la vez es de 6. Tenga en cuenta a quienes solamente echan un vistazo a los DVD y sea X el número de cintas que pide prestadas una persona seleccionada al azar. La función de masa de probabilidad de X es la siguiente:

x	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	.30	.25	.15	.05	.10	.15

Es fácil ver que el valor esperado de X es $\mu = 2.85$. La varianza de X es entonces

$$\begin{aligned} V(X) = \sigma^2 &= \sum_{x=1}^{6} (x - 2.85)^2 \cdot p(x) \\ &= (1 - 2.85)^2(.30) + (2 - 2.85)^2(.25) + \cdots + (6 - 2.85)^2(.15) = 3.2275 \end{aligned}$$

La desviación estándar de X es $\sigma = \sqrt{3.2275} = 1.800$. ■

Cuando la función de masa de probabilidad $p(x)$ especifica un modelo matemático para la distribución de los valores de la población, tanto σ^2 como σ miden la dispersión de los valores en la población; σ^2 es la varianza de la población y σ es su desviación estándar.

Fórmula abreviada para σ^2

El número de operaciones aritméticas necesarias para calcular σ^2 puede reducirse si se utiliza una fórmula alternativa.

PROPOSICIÓN

$$V(X) = \sigma^2 = \left[\sum_D x^2 \cdot p(x)\right] - \mu^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Al utilizar esta fórmula, $E(X^2)$ se calcula primero sin ninguna sustracción; luego se calcula $E(X)$, se eleva al cuadrado y se resta (una vez) de $E(X^2)$.

EJEMPLO 3.25 (Continuación del ejemplo 3.24)

La función de masa de probabilidad de la cantidad X de DVD prestados se dio como $p(1) = .30$, $p(2) = .25$, $p(3) = .15$, $p(4) = .05$, $p(5) = .10$ y $p(6) = .15$, a partir de las cuales $\mu = 2.85$ y

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{6} x^2 \cdot p(x) = (1^2)(.30) + (2^2)(.25) + \cdots + (6^2)(.15) = 11.35$$

Por tanto, $\sigma^2 = 11.35 - (2.85)^2 = 3.2275$, como se obtuvo previamente de la definición. ■

Demostración de la fórmula abreviada Desarrolle $(x - \mu)^2$ en la definición de σ^2 para obtener $x^2 - 2\mu x + \mu^2$, y luego lleve Σ a cada uno de los tres términos:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \sum_D x^2 \cdot p(x) - 2\mu \cdot \sum_D x \cdot p(x) + \mu^2 \sum_D p(x) \\ &= E(X^2) - 2\mu \cdot \mu + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2\end{aligned}$$

■

Varianza de una función lineal

La varianza de $h(X)$ es el valor esperado de la diferencia al cuadrado entre $h(X)$ y su valor esperado:

$$V[h(X)] = \sigma^2_{h(X)} = \sum_D \{h(x) - E[h(X)]\}^2 \cdot p(x) \tag{3.13}$$

Cuando $h(X) = aX + b$, una función lineal,

$$h(x) - E[h(X)] = ax + b - (a\mu + b) = a(x - \mu)$$

Al sustituir esto en la ecuación (3.13) se obtiene una relación simple entre $V[h(X)]$ y $V(X)$:

PROPOSICIÓN

$$V(aX + b) = \sigma^2_{aX+b} = a^2 \cdot \sigma^2_X \text{ y } \quad \sigma_{aX+b} = |a| \cdot \sigma_X$$

En particular,

$$\sigma_{aX} = |a| \cdot \sigma_X, \quad \sigma_{X+b} = \sigma_X \tag{3.14}$$

El valor absoluto es necesario porque a podría ser negativa, no obstante una desviación estándar no puede serlo. Casi siempre multiplicar por a corresponde a un cambio en la unidad de medición (p. ej., kg a lb o dólares a euros). De acuerdo con la primera relación en (3.14) la desviación estándar en la nueva unidad es la desviación estándar original multiplicada por el factor de conversión. La segunda relación dice que la adición o sustracción de una constante no impacta la variabilidad, simplemente desplaza la distribución a la derecha o a la izquierda.

EJEMPLO 3.26 En el problema de ventas de computadoras del ejemplo 3.23, $E(X) = 2$ y

$$E(X^2) = (0)^2(.1) + (1)2(.2) + (2)^2(.3) + (3)^2(.4) = 5$$

así que $V(X) = 5 - (2)^2 = 1$. La función de utilidad $h(X) = 800X - 900$ tiene entonces varianza $(800)^2 \cdot V(X) = (640\,000)(1) = 640\,000$ y desviación estándar 800. ■

EJERCICIOS Sección 3.3 (29–45)

29. La función de masa de probabilidad de la cantidad de memoria X (GB) en una unidad flash comprada se dio en el ejemplo 3.13 como

x	1	2	4	8	16
$p(x)$	.05	.10	.35	.40	.10

Calcule lo siguiente:

a. $E(X)$

b. $V(X)$ directamente a partir de la definición

c. La desviación estándar de X

d. $V(X)$ mediante la fórmula abreviada

30. Se selecciona al azar a un individuo que tiene asegurado su automóvil con una compañía. Sea Y el número de infracciones de tránsito por las que el individuo fue citado durante los últimos tres años. La función de masa de probabilidad de Y es

y	0	1	2	3
$p(y)$	.60	.25	.10	.05

a. Calcule $E(Y)$.

b. Suponga que un individuo con Y infracciones incurre en un recargo de $\$100Y^2$. Calcule el monto esperado del recargo.

31. Remítase al ejercicio 12 y calcule $V(Y)$ y σ_Y. Determine entonces la probabilidad de que Y esté dentro de una desviación estándar 1 de su valor medio.

32. Un distribuidor de enseres para el hogar vende tres modelos de congeladores verticales con una capacidad de 16, 18 y 20 pies cúbicos, respectivamente. Sea X = la cantidad de espacio de almacenamiento adquirido por el siguiente cliente que compre un congelador. Suponga que X tiene la función de masa de probabilidad

x	16	18	20
$p(x)$	.2	.5	.3

a. Calcule $E(X)$, $E(X^2)$ y $V(X)$.

b. Si el precio de un congelador de X pies cúbicos de capacidad es $70X - 650$, ¿cuál es el precio que se espera que pague el siguiente cliente que compre un congelador?

c. ¿Cuál es la varianza del precio pagado por el siguiente cliente?

d. Suponga que aunque la capacidad nominal de un congelador es X, la real es $h(X) = X - .008X^2$. ¿Cuál es la capacidad real esperada del congelador adquirido por el siguiente cliente?

33. Sea X una variable aleatoria de Bernoulli con función de masa de probabilidad como la del ejemplo 3.18.

a. Calcule $E(X^2)$

b. Demuestre que $V(X) = p(1 - p)$.

c. Calcule $E(X^{79})$.

34. Suponga que el número de plantas de un tipo particular encontradas en una región rectangular de muestreo (llamada cuadrado por los ecologistas) en cierta área geográfica es una variable aleatoria X con función de masa de probabilidad

$$p(x) = \begin{cases} c/x^3 & x = 1, 2, 3, \ldots \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

¿Es $E(X)$ finita? Justifique su respuesta (esta es otra distribución que los estadísticos llamarían de cola gruesa).

35. Un pequeño mercado ordena ejemplares de cierta revista para su exhibidor de revistas cada semana. Sea X = demanda de la revista, con función de masa de probabilidad

x	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$

Suponga que el propietario de la tienda paga \$2.00 por cada ejemplar de la revista y el precio para los consumidores es de \$4.00. Si las revistas que se quedan al final de la semana no tienen valor de recuperación, ¿es mejor solicitar tres o cuatro ejemplares de la revista? [*Sugerencia*: Para una orden de tres o cuatro ejemplares, exprese el ingreso neto como una función de la demanda X y luego calcule el ingreso esperado.]

36. Sea X el daño incurrido (en dólares) en un tipo de accidente durante un año dado. Valores posibles de X son 0, 1000, 5000 y 10 000 con probabilidades de .8, .1, .08 y .02, respectivamente. Una compañía particular ofrece una póliza con deducible de \$500. Si la compañía desea que su utilidad esperada sea de \$100, ¿qué cantidad de prima deberá cobrar?

37. Los n candidatos para un trabajo fueron clasificados como 1, 2, 3,..., n. Sea X = la clasificación de un candidato seleccionado al azar, de modo que X tenga la función de masa de probabilidad

$$p(x) = \begin{cases} 1/n & x = 1, 2, 3, \ldots, n \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

(esta se llama *distribución uniforme discreta*). Calcule $E(X)$ y $V(X)$ mediante la fórmula abreviada. [*Sugerencia*: La suma de los primeros n enteros positivos es $n(n + 1)/2$, mientras que la suma de sus cuadrados es $n(n + 1)(2n + 1)/6$.]

38. Los posibles valores de X, el número de componentes en un sistema sometido a reparación que deben ser reemplazados son 1, 2, 3 y 4 con las probabilidades correspondientes de .15, .35, .35 y .15, respectivamente.

a. Calcule $E(X)$ y después $E(5 - X)$.

b. ¿Sería más redituable para el taller de reparación cobrar una cuota fija de \$75 o la cantidad de $\$[150/(5 - X)]$? [*Nota:* No siempre $E(c/Y) = c/E(Y)$.]

39. Una compañía de productos químicos tiene en existencia 100 lb de un producto químico, el cual se vende a sus clientes en lotes de 5 lb. Sea X = el número de lotes solicitados por un cliente seleccionado al azar y suponga que X tiene la función de masa de probabilidad

x	1	2	3	4
$p(x)$	.2	.4	.3	.1

Calcule $E(X)$ y $V(X)$. Luego calcule el número esperado de libras que quedan una vez que se envía el pedido del siguiente cliente y la varianza del número de libras que quedan. [*Sugerencia*: La cantidad de libras que quedan es una función lineal de X.]

40. **a.** Trace una gráfica lineal de la función de masa de probabilidad de X en el ejercicio 35. Enseguida determine la función de masa de probabilidad de $-X$ y trace su gráfica lineal. Con base en estas dos figuras, ¿qué se puede decir sobre $V(X)$ y $V(-X)$?

b. Use la proposición que implica $V(aX + b)$ para establecer una relación general entre $V(X)$ y $V(-X)$.

41. Use la definición en la expresión (3.13) para comprobar que $V(aX + b) = a^2 \cdot \sigma_X^2$. [*Sugerencia*: Con $h(X) = aX + b$, $E[h(X)] = a\mu + b$, donde $\mu = E(X)$.]

42. Suponga $E(X) = 5$ y $E[X(X - 1)] = 27.5$.

a. ¿Cuál es $E(X^2)$? [*Sugerencia:* Primero verifique que $E[X(X - 1)] = E(X^2) - E(X)$.]

b. ¿Cuál es $V(X)$?

c. ¿Cuál es la relación general entre las cantidades $E(X)$, $E[X(X - 1)]$ y $V(X)$?

43. Escriba una regla general para $E(X - c)$, donde c es una constante. ¿Qué sucede cuando $c = \mu$, el valor esperado de X?

44. Un resultado llamado **desigualdad de Chebyshev** establece que para cualquier distribución de probabilidad de una variable aleatoria X y cualquier número k que al menos sea 1, $P(X - \mu| \geq k\sigma) \leq 1/k^2$. Es decir, la posibilidad de que el valor de X quede al menos a k desviaciones estándar de su media es cuando mucho $1/k^2$.

a. ¿Cuál es el valor del límite superior con $k = 2$? ¿$k = 3$? ¿$k = 4$? ¿$k = 5$? ¿$k = 10$?

b. Calcule μ y σ para la distribución del ejercicio 13. Evalúe enseguida $P(|X - \mu| \geq k\sigma)$ con los valores de k dados en el inciso a). ¿Qué sugiere esto sobre el límite superior respecto a la probabilidad correspondiente?

c. Sea que X tenga los valores posibles -1, 0 y 1, con las probabilidades $\frac{1}{18}$, $\frac{8}{9}$ y $\frac{1}{18}$, respectivamente. ¿Cuál es $P(|X - \mu| \geq 3\sigma)$ y cómo se compara con el límite correspondiente?

d. Dé una distribución para la cual $P(|X - \mu| \geq 5\sigma) = .04$.

45. Si $a \leq X \leq b$ demuestre que $a \leq E(X) \leq b$.

3.4 Distribución de probabilidad binomial

Existen muchos experimentos que se ajustan exacta o aproximadamente a la siguiente lista de requerimientos.

1. El experimento consta de una secuencia de n experimentos más pequeños llamados *ensayos*, donde n se fija antes del experimento.
2. Cada ensayo puede dar por resultado uno de los mismos dos resultados posibles (ensayos dicotómicos) los cuales se denotan como éxito (S) y como falla (F).
3. Los ensayos son independientes, de modo que el resultado en un ensayo particular no influye en el resultado de cualquier otro ensayo.
4. La probabilidad de éxito $P(S)$ es constante de un ensayo a otro; esta probabilidad se denota por p.

DEFINICIÓN

> Un experimento para el que se satisfacen las condiciones 1–4 (un número fijo de ensayos homogéneos, independientes y dicotómicos) se llama **experimento binomial**.

EJEMPLO 3.27 Considere que cada uno de los siguientes n vehículos está pasando por una prueba de emisiones, S denota un vehículo que pasa la prueba y F denota uno que no la pasa. Entonces este experimento satisface las condiciones 1–4. El lanzamiento de una tachuela n veces, con S = la punta hacia arriba y F = la punta hacia abajo, también es un experimento binomial, como lo sería el experimento en el que el género (S para femenino y F para masculino) se determina para cada uno de los siguiente n niños nacidos en un hospital en particular. ■

Muchos experimentos implican una secuencia de ensayos independientes para los cuales existen más de dos resultados posibles en cualquier ensayo. Entonces, un experimento binomial puede crearse dividiendo los posibles resultados en dos grupos.

EJEMPLO 3.28 El color de las semillas de chícharo lo determina un solo locus genético. Si los dos alelos en este locus genético son AA o Aa (el genotipo), entonces el chícharo será amarillo (el fenotipo) y si el alelo es aa, el chícharo será verde. Suponga que se aparean 20 semillas Aa y se cruzan las dos semillas en cada uno de los diez pares para obtener diez nuevos genotipos. Designe cada nuevo genotipo como éxito (S) si es aa y falla (F) si es lo contrario. Entonces con esta identificación de S y F, el experimento es binomial con $n = 10$ y $p = P$ (genotipo aa). Si es igualmente probable que cada miembro del par contribuya con a o A, entonces $p = P(a) \cdot P(a) = (.5)(.5) = .25$. ■

EJEMPLO 3.29 El conjunto de posibles jurados para un cierto caso consiste en 50 individuos de los cuales 35 son contratados. Suponga que 6 de estos individuos son seleccionados uno por uno al azar para sentarse en la tribuna del jurado durante el interrogatorio inicial por parte de los abogados de la defensa y de la fiscalía. Nombre a la i-ésima persona seleccionada (el i-ésimo intento) como un éxito si fue contratada y como un fracaso si no. Por tanto:

$$P(S \text{ en el primer ensayo}) = \frac{35}{50} = .70$$

y

$$\begin{aligned} P(S \text{ en el segundo ensayo}) &= P(SS) + P(FS) \\ &= P(\text{segundo } S \mid \text{primer } S)P(\text{primer } S) \\ &\quad + P(\text{segundo } S \mid \text{primer } F)P(\text{primer } F) \\ &= \frac{34}{49} \cdot \frac{35}{50} + \frac{35}{49} \cdot \frac{15}{50} = \frac{35}{50}\left(\frac{34}{49} + \frac{15}{49}\right) = \frac{35}{50} = .70 \end{aligned}$$

De manera similar se puede demostrar que $P(S \text{ en el ensayo } i\text{-ésimo}) = .70$ con $i = 3, 4, 5$. Sin embargo, si los primeros cinco individuos seleccionados son todos S, entonces sólo restan 30 Ss para la sexta selección. Por tanto

$$P(S \text{ sexto intento} \mid \text{SSSS}) = 30/45 = .667$$

mientras que

$$P(S \text{ en el sexto intento} \mid FFFF) = 35/45 = .778$$

El experimento no es binomial porque los ensayos no son independientes. En general, si se muestrea sin reemplazo, el experimento no producirá ensayos independientes.

Ahora considere que un estado tiene 500 000 conductores con licencia, de los cuales 400 000 están asegurados. Se selecciona una muestra de 10 conductores sin reemplazo. El ensayo i-ésimo se denota con S si el conductor i-ésimo seleccionado está asegurado. La diferencia importante es que el tamaño de la población muestreada es muy grande respecto al tamaño de la muestra. En este caso

$$P(S \text{ en } 2 \mid S \text{ en } 1) = \frac{399\,999}{499\,999} = .8000$$

y

$$P(S \text{ en } 10 \mid S \text{ en los primeros } 9) = \frac{399\,991}{499\,991} = .799996 \approx .8000$$

$$P(S \text{ en } 10 \mid F \text{ en los primeros } 9) = \frac{400\,000}{499\,991} = .800014 \approx .8000$$

Estos cálculos sugieren que aunque los ensayos no son exactamente independientes, las probabilidades condicionales difieren tan poco una de otra que, para propósitos prácticos, los ensayos se consideran independientes con la constante $P(S) = .8$. Por tanto, para una muy buena aproximación, el experimento es binomial con $n = 10$ y $p = .8$. ■

Se utilizará la siguiente regla empírica para decidir si un experimento "sin reemplazo" puede ser tratado como un experimento binomial.

REGLA

Considere el muestreo sin reemplazo de una población dicotómica de tamaño N. Si el tamaño de la muestra (número de ensayos) n es cuando mucho 5% del tamaño de la población, el experimento puede ser analizado como si fuera exactamente un experimento binomial.

Por "analizado" se entiende que las probabilidades basadas en suposiciones de experimento binomial serán bastante cercanas a las probabilidades reales "sin reemplazo", las cuales generalmente son más difíciles de calcular. En el ejemplo 3.29, $n/N = 6/50 = .12 > .05$, de modo que el experimento binomial no es una buena aproximación, pero en el segundo escenario, $n/N = 10/500\,000 \ll .05$.

Variable y distribución aleatoria binomial

En la mayoría de los experimentos binomiales lo que interesa es el número total de éxitos (S), en lugar de qué ensayos dieron los éxitos.

DEFINICIÓN

La **variable aleatoria binomial** X asociada con un experimento binomial que consiste en n ensayos se define como

$$X = \text{el número de } S \text{ entre los } n \text{ ensayos}$$

Suponga, por ejemplo, que $n = 3$. Entonces existen ocho posibles resultados para el experimento:

$$SSS \quad SSF \quad SFS \quad SFF \quad FSS \quad FSF \quad FFS \quad FFF$$

Por la definición de X, $X(SSF) = 2$, $X(SFF) = 1$ y así sucesivamente. Valores posibles de X en un experimento de n ensayos son $x = 0, 1, 2, \ldots, n$. A menudo se escribirá $X \sim \text{Bin}(n, p)$ para indicar que X es una variable aleatoria binomial basada en n ensayos con probabilidad de éxito p.

NOTACIÓN

Puesto que la función de masa de probabilidad de una variable aleatoria binomial X depende de los dos parámetros n y p, la función de masa de probabilidad se denota por $b(x; n, p)$.

Considere primero el caso $n = 4$ para el cual cada resultado, su probabilidad y su valor x correspondiente se dan en la tabla 3.1. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} P(SSFS) &= P(S) \cdot P(S) \cdot P(F) \cdot P(S) \text{ (ensayos independientes)} \\ &= p \cdot p \cdot (1 - p) \cdot p \text{ (constante } P(S)) \\ &= p^3 \cdot (1 - p) \end{aligned}$$

Tabla 3.1 Resultados y probabilidades para un experimento binomial con cuatro intentos

Resultado	x	Probabilidad	Resultado	x	Probabilidad
SSSS	4	p^4	*FSSS*	3	$p^3(1-p)$
SSSF	3	$p^3(1-p)$	*FSSF*	2	$p^2(1-p)^2$
SSFS	3	$p^3(1-p)$	*FSFS*	2	$p^2(1-p)^2$
SSFF	2	$p^2(1-p)^2$	*FSFF*	1	$p(1-p)^3$
SFSS	3	$p^3(1-p)$	*FFSS*	2	$p^2(1-p)^2$
SFSF	2	$p^2(1-p)^2$	*FFSF*	1	$p(1-p)^3$
SFFS	2	$p^2(1-p)^2$	*FFFS*	1	$p(1-p)^3$
SFFF	1	$p(1-p)^3$	*FFFF*	0	$(1-p)^4$

En este caso especial, se desea $b(x; 4, p)$ con $x = 0, 1, 2, 3$ y 4. Para $b(3; 4, p)$, identifique cuáles de los 16 resultados dan un valor x de 3 y sume las probabilidades asociadas con cada resultado:

$$b(3; 4, p) = P(FSSS) + P(SFSS) + P(SSFS) + P(SSSF) = 4p^3(1 - p)$$

Existen cuatro resultados con $X = 3$ y la probabilidad de cada uno es $p^3(1 - p)$(el orden de los S y las F no es importante, sino sólo el número de S), por tanto

$$b(3; 4, p) = \left\{\begin{array}{l}\text{número de resultados} \\ \text{con } X = 3\end{array}\right\} \cdot \left\{\begin{array}{l}\text{probabilidad de cualquier} \\ \text{resultado con } X = 3\end{array}\right\}$$

Asimismo, $b(2; 4, p) = 6p^2(1 - p)^2$, la cual también es el producto del número de resultados con $X = 2$ y la probabilidad de cualquier resultado como ese.

En general,

$$b(x; n, p) = \left\{\begin{array}{l}\text{número de secuencias de longitud} \\ n \text{ compuestas de } x \text{ éxitos}\end{array}\right\} \cdot \left\{\begin{array}{l}\text{probabilidad de cualquier} \\ \text{secuencia como esa}\end{array}\right\}$$

Puesto que el orden de los S y las F no es importante, el segundo factor en la ecuación previa es $p^x(1 - p)^{n-x}$ (p. ej., los primeros x ensayos producen S y los últimos $n - x$ producen F). El primer factor es el número de formas de escoger x de los n ensayos para que sean los S, es decir, el número de combinaciones de tamaño x que pueden ser construidas con n objetos distintos (ensayos en este caso).

TEOREMA

$$b(x; n, p) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x(1 - p)^{n-x} & x = 0, 1, 2, \ldots, n \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

EJEMPLO 3.30 A cada uno de seis bebedores de refrescos de cola seleccionados al azar se le sirve un vaso de refresco de cola *S* y uno de refresco de cola *F*. Los vasos son idénticos en apariencia excepto por un código que se muestra en el fondo para identificar cada refresco. Suponga que en realidad no existe una tendencia entre los bebedores de refresco de cola de preferir un refresco de cola en lugar del otro. Entonces $p = P(\text{un individuo seleccionado prefiere } S) = .5$, así que con $X =$ el número entre los seis que prefieren *S*, $X \sim \text{Bin}(6,.5)$.

Por tanto,

$$P(X = 3) = b(3; 6, .5) = \binom{6}{3}(.5)^3(.5)^3 = 20(.5)^6 = .313$$

La probabilidad de que al menos tres prefieran *S* es

$$P(3 \le X) = \sum_{x=3}^{6} b(x; 6, .5) = \sum_{x=3}^{6} \binom{6}{x}(.5)^x(.5)^{6-x} = .656$$

y la probabilidad de que cuando mucho uno prefiera *S* es

$$P(X \le 1) = \sum_{x=0}^{1} b(x; 6, .5) = .109$$

■

Utilización de tablas binomiales

Incluso con un valor relativamente pequeño de *n* el cálculo de probabilidades binomiales es tedioso. La tabla A.1 del apéndice tabula la función de distribución acumulada $F(x) = P(X \le x)$ con $n = 5, 10, 15, 20, 25$ en combinación con valores seleccionados de *p*. Varias otras probabilidades pueden entonces ser calculadas mediante la proposición sobre funciones de distribución acumulada de la sección 3.2. Una anotación de 0 en la tabla significa únicamente que la probabilidad es 0 a tres dígitos significativos puesto que todos los valores ingresados en la tabla en realidad son positivos.

NOTACIÓN

Para $X \sim \text{Bin}(n, p)$, la función de distribución acumulada será denotada por

$$B(x; n, p) = P(X \le x) = \sum_{y=0}^{x} b(y; n, p) \quad x = 0, 1, \ldots, n$$

EJEMPLO 3.31 Suponga que 20% de todos los ejemplares de un libro de texto particular no pasan una prueba de resistencia de encuadernación. Sea *X* el número entre 15 ejemplares seleccionados al azar que no pasan la prueba. Entonces *X* tiene una distribución binomial con $n = 15$ y $p = .2$.

1. La probabilidad de que cuando mucho 8 no pasen la prueba es

$$P(X \le 8) = \sum_{y=0}^{8} b(y; 15, .2) = B(8; 15, .2)$$

la cual es el dato en el renglón $x = 8$ y la columna $p = .2$ de la tabla binomial $n = 15$. Según la tabla A.1 del apéndice, la probabilidad es $B(8; 15, .2) = .999$.

2. La probabilidad de que exactamente 8 fallen es

$$P(X = 8) = P(X \le 8) - P(X \le 7) = B(8; 15, .2) - B(7; 15, .2)$$

que es la diferencia entre dos datos consecutivos en la columna $p = .2$. El resultado es $.999 - .996 = .003$.

* Los paquetes de programas estadísticos tales como Minitab y R proporcionan la función de masa de probabilidad o la función de distribución acumulada en forma casi instantánea al solicitarla para cualquier valor de *p* y *n* desde 2 hasta millones. También existe un comando R para calcular la probabilidad de que *X* quede en algún intervalo.

3. La probabilidad de que al menos 8 fallen es

$$P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - B(7; 15, .2)$$
$$= 1 - \begin{pmatrix}\text{dato en } x = 7 \\ \text{renglón de la columna } p = .2\end{pmatrix}$$
$$= 1 - .996 = .004$$

4. Finalmente, la probabilidad de que entre 4 y 7, inclusive, fallen es

$$P(4 \leq X \leq 7) = P(X = 4, 5, 6 \text{ o } 7) = P(X \leq 7) - P(X \leq 3)$$
$$= B(7; 15, .2) - B(3; 15, .2) = .996 - .648 = .348$$

Observe que esta última probabilidad es la diferencia entre los datos en los renglones $x = 7$ y $x = 3$, *no* en los renglones $x = 7$ y $x = 4$. ■

EJEMPLO 3.32 Un fabricante de aparatos electrónicos afirma que cuando mucho 10% de sus unidades de suministro de potencia necesitan servicio durante el periodo de garantía. Para investigar esta afirmación, los técnicos de un laboratorio de prueba adquieren 20 unidades y someten cada una a una prueba acelerada para simular el uso durante el periodo de garantía. Sea p la probabilidad de que una unidad de suministro de potencia necesite reparación durante dicho periodo (proporción de unidades que requieren reparación). Los técnicos de laboratorio deben decidir si los datos obtenidos con el experimento respaldan la afirmación de que $p \leq .10$. Sea X el número entre las 20 muestreadas que necesitan reparación, por lo que $X \sim \text{Bin}(20, p)$. Considere la regla de decisión:

> Rechazar la afirmación de que $p \leq .10$ en favor de la conclusión de que $p > .10$ si $x \geq 5$ (donde x es el valor observado de X) y considerar recomendable la afirmación si $x \leq 4$.

La probabilidad de que la afirmación sea rechazada cuando $p = .10$ (una conclusión incorrecta) es

$$P(X \geq 5 \text{ donde } p = .10) = 1 - B(4; 20, .1) = 1 - .957 = .043$$

La probabilidad de que la afirmación no sea rechazada cuando $p = .20$ (un tipo diferente de conclusión incorrecta) es

$$P(X \leq 4 \text{ cuando } p = .2) = B(4; 20, .2) = .630$$

La primera probabilidad es algo pequeña, pero la segunda es intolerablemente grande. Cuando $p = .20$, significa que el fabricante subestimó de manera excesiva el porcentaje de unidades que necesitan servicio, y si se utiliza la regla de decisión establecida, ¡63% de todas las muestras resultaron recomendables!

Se podría pensar que la probabilidad de este segundo tipo de conclusión errónea podría hacerse más pequeña al cambiar el valor de corte 5 en la regla de decisión a algo más. Sin embargo, aunque el reemplazo de 5 por un número más pequeño daría una probabilidad más pequeña que .630, la otra probabilidad se incrementaría. La única forma de hacer pequeñas ambas "probabilidades de error" es basar la regla de decisión en un experimento que implique muchas más unidades. ■

La media y la varianza de X

Con $n = 1$, la distribución binomial llega a ser la distribución de Bernoulli. De acuerdo con el ejemplo 3.18 la media de una variable de Bernoulli es $\mu = p$, así que el número esperado de las S en cualquier ensayo único es p. Puesto que un experimento binomial se compone de n ensayos, la intuición sugiere que para $X \sim \text{Bin}(n, p)$, $E(X) = np$, el producto del número de ensayos y la probabilidad de éxito en un solo ensayo. La expresión para $V(X)$ no es tan intuitiva.

PROPOSICIÓN

Si $X \sim \text{Bin}(n, p)$, entonces $E(X) = np$, $V(X) = np(1 - p) = npq$, y $\sigma_X = \sqrt{npq}$ (donde $q = 1 - p$).

Por tanto, para calcular la media y la varianza de una variable aleatoria binomial no se requiere evaluar las sumas. La comprobación del resultado para $E(X)$ se ilustra en el ejercicio 64.

EJEMPLO 3.33 Si 75% de todas las compras en una tienda se hacen con tarjeta de crédito y X es el número entre diez compras seleccionadas al azar realizadas con tarjeta de crédito, entonces $X \sim \text{Bin}(10, .75)$. Por tanto, $E(X) = np = (10)(.75) = 7.5$, $V(X) = npq = 10(.75)(.25) = 1.875$, y $\sigma = \sqrt{1.875} = 1.37$. Otra vez, aun cuando X puede tomar sólo valores enteros, $E(X)$ no tiene que ser un entero. Si se realiza un gran número de experimentos binomiales independientes, cada uno con $n = 10$ ensayos y $p = .75$, entonces el número promedio de las S por experimento se acercará a 7.5.

La probabilidad de que X se encuentre dentro de una desviación estándar de su valor medio es $P(7.5 - 1.37 \le X \le 7.5 + 1.37) = P(6.13 \le X \le 8.87) = P(X = 7 \text{ u } 8) = .532$. ■

EJERCICIOS Sección 3.4 (46-67)

46. Calcule las siguientes probabilidades binomiales directamente con la fórmula para $b(x; n, p)$:

- **a.** $b(3; 8, .35)$
- **b.** $b(5; 8, .6)$
- **c.** $P(3 \le X \le 5)$ cuando $n = 7$ y $p = .6$
- **d.** $P(1 \le X)$ cuando $n = 9$ y $p = .1$

47. El artículo **"Should You Report That Fender-Bender?"** (***Consumer Reports*, Sept. 2013: 15**) reportó que 7 de cada 10 accidentes de automóvil involucran un solo vehículo (el artículo recomienda siempre reportar a la compañía de seguros cualquier accidente que involucre varios vehículos). Suponga que se seleccionan 15 accidentes al azar. Utilice la tabla A.1 del apéndice para contestar las siguientes preguntas:

- **a.** ¿Cuál es la probabilidad de que máximo en 4 accidentes esté involucrado un solo vehículo?
- **b.** ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente en 4 accidentes esté involucrado un solo vehículo?
- **c.** ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente en 6 accidentes estén involucrados varios vehículos?
- **d.** ¿Cuál es la probabilidad de que en 2 a 4 accidentes inclusive esté involucrado un solo vehículo?
- **e.** ¿Cuál es la probabilidad de que al menos en 2 accidentes esté involucrado un solo vehículo?
- **f.** ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente en 4 accidentes esté involucrado un solo vehículo y que en los otros 11 estén involucrados varios vehículos?

48. Noticias NBC reportó el 2 de mayo de 2013 que 1 de cada 20 niños en los Estados Unidos presenta una alergia alimentaria de algún tipo. Considere que se selecciona una muestra aleatoria de 25 niños y sea X la cantidad de niños en la muestra que tienen una alergia alimentaria. Así, $X \sim \text{Bin}(25, .05)$.

- **a.** Determine $P(X \le 3)$ y $P(X < 3)$.
- **b.** Determine $P(X \ge 4)$.
- **c.** Determine $P(1 \le X \le 3)$.
- **d.** ¿Cuáles son los valores de $E(X)$ y σ_X?
- **e.** En una muestra de 50 niños, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno tenga una alergia alimentaria?

49. Una compañía que produce cristal fino sabe por experiencia que 10% de sus copas de mesa tienen imperfecciones cosméticas y deben ser clasificadas como "de segunda".

- **a.** Entre seis copas seleccionadas al azar, ¿qué tan probable es que sólo una sea de segunda?
- **b.** Entre seis copas seleccionadas al azar, ¿qué tan probable es que al menos dos sean de segunda?
- **c.** Si las copas se examinan una por una, ¿cuál es la probabilidad de que cuando mucho cinco deban ser seleccionadas para encontrar cuatro que no sean de segunda?

50. Se utiliza un número telefónico particular para recibir tanto llamadas de voz como faxes. Suponga que 25% de las llamadas entrantes son faxes y considere una muestra de 25 llamadas entrantes. Cuál es la probabilidad de que:

a. ¿Cuando mucho 6 de las llamadas sean faxes?
b. ¿Exactamente 6 de las llamadas sean faxes?
c. ¿Al menos 6 de las llamadas sean faxes?
d. ¿Más de 6 de las llamadas sean faxes?

51. Remítase al ejercicio previo.
a. ¿Cuál es el número de llamadas entre las 25 que se espera que sean faxes?
b. ¿Cuál es la desviación estándar del número entre las 25 llamadas que se espera que sean faxes?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de llamadas entre las 25, que se espera que sean una transmisión de fax sobrepase el número esperado por más de 2 desviaciones estándar?

52. Suponga que 30% de todos los estudiantes que deben comprar un texto para un curso particular desean un ejemplar nuevo (¡los exitosos!), mientras que el restante 70% desea comprar un ejemplar usado. Considere seleccionar 25 compradores al azar.
a. ¿Cuáles son la media y la desviación estándar del número de estudiantes que desean un ejemplar nuevo?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de estudiantes que desea ejemplares nuevos esté a más de dos desviaciones estándar del valor medio?
c. La librería tiene 15 ejemplares nuevos y 15 usados en existencia. Si 25 personas llegan una por una a comprar el texto, ¿cuál es la probabilidad de que las 25 obtengan el tipo de libro que desean entre las existencias actuales? [*Sugerencia*: Sea X = el número de estudiantes que desean un ejemplar nuevo. ¿Con qué valores de X obtendrán las 25 personas el libro que desean?]
d. Suponga que los ejemplares nuevos cuestan \$100 y los usados, \$70. Suponga en la actualidad que la librería tiene 50 ejemplares nuevos y 50 usados. ¿Cuál es el valor esperado del ingreso total por la venta de los siguientes 25 ejemplares comprados? Asegúrese de indicar qué regla de valor esperado está utilizando. [*Sugerencia*: Sea $h(X)$ = el ingreso cuando X de los 25 compradores desean ejemplares nuevos. Exprese esto como una función lineal.]

53. El ejercicio 30 (sección 3.3) dio la función de masa de probabilidad de Y, el número de infracciones de tránsito de un individuo asegurado por una compañía particular seleccionado al azar. Cuál es la probabilidad de que entre 15 individuos seleccionados al azar:
a. ¿Al menos 10 no tengan infracciones?
b. ¿Menos de la mitad tengan mínimo una infracción?
c. ¿Entre 5 y 10 inclusive tengan al menos una infracción?[*]

54. Un tipo particular de raqueta de tenis viene en tamaño mediano y en tamaño extra grande. Sesenta por ciento de todos los clientes en una tienda desea la versión extra grande.
a. Entre diez clientes seleccionados al azar que desean este tipo de raqueta, ¿cuál es la probabilidad de que al menos seis deseen la versión extra grande?
b. Entre diez clientes seleccionados al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el número que desea la versión extra grande esté dentro de 1 desviación estándar de la media?
c. La tienda dispone actualmente de siete raquetas de cada versión. ¿Cuál es la probabilidad de que los siguientes diez clientes que desean esta raqueta puedan obtener la versión que desean de las existencias actuales?

55. Veinte por ciento de todos los teléfonos de cierto tipo son llevados a servicio mientras se encuentran dentro del periodo de garantía. De estos, 60% puede ser reparado, mientras el restante 40% debe ser reemplazado con unidades nuevas. Si una compañía adquiere diez de estos teléfonos, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente dos sean reemplazados dentro de la vigencia de su garantía?

56. La Junta de Educación reporta que 2% de los dos millones de estudiantes de preparatoria que presentan el examen de aptitud escolar cada año reciben un trato especial debido a discapacidades documentadas (*Los Ángeles Times*, 16 de julio de 2002). Considere una muestra aleatoria de 25 estudiantes que recientemente presentaron el examen.
a. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 1 reciba un trato especial?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 1 reciba un trato especial?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 2 reciban un trato especial?
d. ¿Cuál es la probabilidad de que el número entre los 25 que recibieron un trato especial esté dentro de 2 desviaciones estándar del número que esperaría reciba un trato especial?
e. Suponga que a un estudiante que no recibe un trato especial se le permiten 3 horas para el examen, mientras que a un estudiante que recibió un trato especial se le permiten 4.5 horas. ¿Qué tiempo promedio piensa que le sería permitido a los 25 estudiantes seleccionados?

57. Un tipo de linterna requiere que sus dos baterías sean tipo D y funcionará sólo si ambas baterías tienen voltajes aceptables. Suponga que 90% de todas las baterías de cierto proveedor tiene voltaje aceptable. Entre diez linternas seleccionadas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos nueve funcionen? ¿Qué suposiciones hizo para responder la pregunta planteada?

58. Un distribuidor recibe un lote muy grande de componentes. El lote sólo puede ser caracterizado como aceptable si la proporción de componentes defectuosos es cuando mucho de .10. El distribuidor decide seleccionar 10 componentes al azar y aceptar el lote sólo si el número de componentes defectuosos presentes en la muestra es cuando mucho de 2.
a. ¿Cuál es la probabilidad de que el lote sea aceptado cuando la proporción real de componentes defectuosos es de .01, .05, .10, .20, .25?
b. Sea p la proporción real de componentes defectuosos presentes en el lote. Una gráfica de P(se acepta el lote) en función de p, con p sobre el eje horizontal y P(se acepta

[*] "Entre a y b, inclusive" equivale a $(a \le X \le b)$.

el lote) sobre el eje vertical, se llama *curva característica de operación* del plan de muestreo de aceptación. Use los resultados del inciso a) para trazar esta curva con $0 \leq p \leq 1$.

c. Repita los incisos a) y b) con "1" reemplazando a "2" en el plan de muestreo de aceptación.

d. Repita los incisos a) y b) con "15" reemplazando a "10" en el plan de muestreo de aceptación.

e. ¿Cuál de los planes de muestreo, los de los incisos a), c) o d), parece más satisfactorio y por qué?

59. Un reglamento que requiere que se instale un detector de humo en todas las casas ya construidas ha estado en vigor en una ciudad particular durante 1 año. Al departamento de bomberos le preocupa que muchas casas permanezcan sin detectores. Sea p = la proporción verdadera de las casas que tienen detectores y suponga que se inspecciona una muestra aleatoria de 25 casas. Si esta indica marcadamente que menos de 80% de todas las casas tiene un detector, el departamento de bomberos lanzará una campaña para poner en ejecución un programa de inspección obligatorio. Debido a lo caro del programa, el departamento prefiere no requerir tales inspecciones a menos que una evidencia muestral indique que sí se requieren. Sea X el número de casas con detectores entre las 25 muestreadas. Considere rechazar el requerimiento de que $p \geq .8$ si $x \leq 15$.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el requerimiento sea rechazado cuando el valor real de p es .8?

b. ¿Cuál es la probabilidad de no rechazar el requerimiento cuando $p = .7$? ¿Y cuando $p = .6$?

c. ¿Cómo cambian las "probabilidades de error" de los incisos a) y b) si el valor 15 en la regla de decisión es reemplazado por 14?

60. Un puente de peaje cobra \$1.00 para los vehículos de pasajeros y \$2.50 para los demás tipos de vehículos. Supongamos que durante las horas del día, 60% de todos los vehículos son de pasajeros. Si 25 vehículos cruzan el puente durante un periodo determinado durante el día, ¿cuál es el resultado de los ingresos por peaje previstos? [*Sugerencia*: Sea X = el número de vehículos de pasajeros, entonces, los ingresos por peaje $h(X)$ son una función lineal de X.]

61. Un estudiante que está tratando de escribir un ensayo para un curso debe optar entre dos temas, A y B. Si selecciona el tema A, el estudiante pedirá dos libros mediante préstamo interbibliotecas, mientras que si selecciona el tema B, pedirá cuatro libros. Él cree que para escribir un buen ensayo sobre cualquiera de los temas necesita recibir y utilizar al menos la mitad de los libros solicitados. Si la probabilidad de que un libro pedido mediante préstamo interbibliotecas llegue a tiempo es de .9 y los libros llegan independientemente uno de otro, ¿qué tema deberá seleccionar el estudiante para incrementar al máximo la probabilidad de escribir un buen ensayo? ¿Qué pasa si la probabilidad de que lleguen los libros es de sólo .5 en lugar de .9?

62. **a.** Con n fijo, ¿hay valores de p ($0 \leq p \leq 1$) para los cuales $V(X) = 0$? Explique por qué esto es así.

b. ¿Con qué valor de p se incrementa al máximo $V(X)$? [*Sugerencia*: Grafique $V(X)$ en función de p o bien saque una derivada.]

63. **a.** Demuestre que $b(x; n, 1 - p) = b(n - x; n, p)$.

b. Demuestre que $B(x; n, 1 - p) = 1 - B(n - x - 1; n, p)$. [*Sugerencia*: Cuando mucho el número x de los S equivale al menos a $(n - x)$ de las F.]

c. ¿Qué implican los incisos a) y b) sobre la necesidad de incluir valores de p más grandes que .5 en la tabla A.1 del apéndice?

64. Demuestre que $E(X) = np$ cuando X es una variable aleatoria binomial. [*Sugerencia*: Primero exprese $E(X)$ como una suma con límite inferior $x = 1$. Luego saque a np como factor, sea $y = x - 1$ de modo que la suma sea de $y = 0$ a $y = n - 1$ y demuestre que la suma es igual a 1.]

65. Los clientes en una gasolinera pagan con tarjeta de crédito (A), con tarjeta de débito (B) o en efectivo (C). Suponga que clientes sucesivos toman decisiones independientes con $P(A) = .5$, $P(B) = .2$ y $P(C) = .3$.

a. Entre los siguientes 100 clientes, ¿cuáles son la media y la varianza del número de clientes que pagan con tarjeta de débito? Explique su razonamiento.

b. Conteste el inciso a) para el número entre los 100 que no pagan en efectivo.

66. Una limusina del aeropuerto puede transportar hasta cuatro pasajeros en cualquier viaje. La compañía aceptará un máximo de seis reservaciones por viaje y cada pasajero debe tener reservación. Según registros previos, 20% de quienes reservan no se presentan para el viaje. Responda las siguientes preguntas, suponiendo independencia en los casos en que sea apropiado.

a. Si se hacen seis reservaciones, ¿cuál es la probabilidad de que al menos un individuo con reservación no pueda ser acomodado en el viaje?

b. Si se hacen seis reservaciones, ¿cuál es el número esperado de lugares sin ocupar cuando la limusina parte?

c. Suponga que en la siguiente tabla se da la distribución de probabilidad del número de reservaciones.

Número de reservaciones	3	4	5	6
Probabilidad	.1	.2	.3	.4

Sea X el número de pasajeros en un viaje seleccionado al azar. Obtenga la función de masa de probabilidad de X.

67. Remítase a la desigualdad de Chebyshev dada en el ejercicio 44. Calcule $P(|X - \mu| \geq k\sigma)$ para $k = 2$ y $k = 3$ cuando $X \sim \text{Bin}(20, .5)$, y compare con el límite superior correspondiente. Repita para $X \sim \text{Bin}(20, .75)$.

3.5 Distribuciones hipergeométrica y binomial negativa

Las distribuciones hipergeométrica y binomial negativa están relacionadas con la distribución binomial. La distribución binomial es el modelo de probabilidad aproximada de muestreo sin reemplazo de una población dicotómica finita ($S-F$). Si el tamaño n de la muestra es pequeño respecto al tamaño N de la población, la distribución hipergeométrica es el modelo de probabilidad exacta del número de éxitos (S) en la muestra. La variable aleatoria binomial X es el número de S cuando el número n de ensayos es fijo, mientras que la distribución binomial surge de fijar el número deseado de éxitos y de permitir que el número de ensayos sea aleatorio.

Distribución hipergeométrica

Las suposiciones que conducen a la distribución hipergeométrica son las siguientes:

1. La población o el conjunto que se va a muestrear se compone de N individuos, objetos o elementos (una población *finita*).
2. Cada individuo puede ser caracterizado como éxito (S) o falla (F) y hay M éxitos en la población.
3. Se selecciona una muestra de n individuos sin reemplazo, de tal modo que cada subconjunto de tamaño n tenga la misma probabilidad de ser seleccionado.

La variable aleatoria de interés es X = el número de S en la muestra. La distribución de probabilidad de X depende de los parámetros n, M y N, así que se desea obtener $P(X = x) = h(x; n, M, N)$.

EJEMPLO 3.34 Durante un periodo particular una oficina de tecnología de la información de una universidad recibió 20 solicitudes de servicio por problemas con las impresoras, de las cuales 8 eran impresoras láser y 12 eran modelos de inyección de tinta. Se tiene que seleccionar una muestra de 5 de estas solicitudes de servicio para incluirla en una encuesta sobre satisfacción del cliente. Suponga que las 5 son seleccionadas completamente al azar, de modo que cualquier subconjunto de tamaño 5 tenga la misma probabilidad de ser seleccionado como cualquier otro subconjunto. ¿Cuál es entonces la probabilidad de que exactamente $x (x = 0, 1, 2, 3, 4 \text{ o } 5)$ de las solicitudes de servicio seleccionadas sean para impresoras de inyección de tinta?

En este caso el tamaño de la población es $N = 20$, el tamaño de la muestra es $n = 5$ y el número de éxitos (inyección de tinta = S) y las fallas (F) en la población son $M = 12$ y $N - M = 8$, respectivamente. Considere el valor $x = 2$. Ya que todos los resultados (cada uno de los cuales consta de 5 solicitudes particulares) son igualmente probables,

$$P(X = 2) = h(2; 5, 12, 20) = \frac{\text{número de resultados con } X = 2}{\text{número de resultados posibles}}$$

El número de resultados posibles en el experimento es la cantidad de formas de seleccionar 5 de entre los 20 objetos sin importar el orden, es decir, $\binom{20}{5}$. Para contar el número de resultados con $X = 2$, observe que existen $\binom{12}{2}$ formas de seleccionar 2 de las solicitudes para impresoras de inyección de tinta, y por cada forma existen $\binom{8}{3}$ formas de seleccionar las 3 solicitudes para impresoras láser a fin de completar la muestra. La regla de producto del capítulo 2 da entonces $\binom{12}{2}\binom{8}{3}$ como el número de resultados con $X = 2$, por tanto,

$$h(2; 5, 12, 20) = \frac{\binom{12}{2}\binom{8}{3}}{\binom{20}{5}} = \frac{77}{323} = .238$$

■

En general, si el tamaño de la muestra n es más pequeño que el número de éxitos en la población (M), entonces el valor de X más grande posible es n. Sin embargo, si $M < n$ (p. ej., un tamaño de muestra de 25 y sólo hay 15 éxitos en la población), entonces X puede ser, cuando mucho, M. Asimismo, siempre que el número de fallas en la población ($N - M$) sobrepase el tamaño de la muestra, el valor más pequeño posible de X es 0 (puesto que todos los individuos muestreados podrían entonces ser fallas). Sin embargo, si $N - M < n$, el valor más pequeño posible de X es $n - (N - M)$. Por tanto, los posibles valores de X satisfacen la restricción $\max(0, n - (N - M)) \le x \le \min(n, M)$. Un argumento paralelo al del ejemplo previo da la función de masa de probabilidad de X.

PROPOSICIÓN

Si X es el número de éxitos (S) en una muestra completamente aleatoria de tamaño n extraída de la población compuesta de M éxitos y $(N - M)$ fallas, entonces la distribución de probabilidad de X, llamada **distribución hipergeométrica**, está dada por

$$P(X = x) = h(x; n, M, N) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \tag{3.15}$$

con x, un entero, que satisface $\max(0, n - N + M) \le x \le \min(n, M)$.

En el ejemplo 3.34, $n = 5$, $M = 12$ y $N = 20$, por tanto, $h(x; 5, 12, 20)$ con $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ se obtiene sustituyendo estos números en la ecuación (3.15).

EJEMPLO 3.35 Se capturaron, etiquetaron y liberaron cinco individuos de una población de animales que se piensa están al borde la extinción en cierta región para que se mezclen con la población. Luego de que han tenido la oportunidad de mezclarse se selecciona una muestra aleatoria de 10 de estos animales. Sea X = el número de animales etiquetados en la segunda muestra. Suponga que hay 25 animales de este tipo en la región.

Los valores de los parámetros son $n = 10$, $M = 5$ (5 animales etiquetados en la población) y $N = 25$, por tanto la función de masa de probabilidad de X es

$$h(x; 10, 5, 25) = \frac{\binom{5}{x}\binom{20}{10-x}}{\binom{25}{10}} \quad x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

La probabilidad de que exactamente dos de los animales en la segunda muestra estén etiquetados es

$$P(X = 2) = h(2; 10, 5, 25) = \frac{\binom{5}{2}\binom{20}{8}}{\binom{25}{10}} = .385$$

La probabilidad de que a lo más dos de los animales en la muestra de recaptura estén etiquetados es

$$\begin{aligned} P(X \le 2) = P(X = 0, 1, \text{o } 2) &= \sum_{x=0}^{2} h(x; 10, 5, 25) \\ &= .057 + .257 + .385 = .699 \end{aligned}$$

■

Varios paquetes de software estadístico generan fácilmente probabilidades hipergeométricas (tabular es enfadoso debido a los tres parámetros).

Como en el caso binomial, existen expresiones simples para $E(X)$ y $V(X)$ para variables aleatorias hipergeométricas.

PROPOSICIÓN

La media y la varianza de la variable aleatoria hipergeométrica X cuya función de masa de probabilidad es $h(x;n,M,N)$ son

$$E(X) = n \cdot \frac{M}{N} \qquad V(X) = \left(\frac{N-n}{N-1}\right) \cdot n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right)$$

El cociente M/N es la proporción de éxitos en la población. Si se reemplaza M/N por p en $E(X)$ y $V(X)$, se obtiene

$$E(X) = np$$

$$V(X) = \left(\frac{N-n}{N-1}\right) \cdot np(1-p) \tag{3.16}$$

La expresión (3.16) muestra que las medias de las variables aleatorias binomiales e hipergeométricas son iguales, en tanto que las varianzas de las dos variables aleatorias difieren por el factor $(N - n)/(N - 1)$, a menudo llamado **factor de corrección de población finita**. Este factor es menor que 1, así que la variable hipergeométrica tiene una varianza más pequeña que la variable aleatoria binomial. El factor de corrección puede escribirse como $(1 - n/N)/(1 - 1/N)$, el cual es aproximadamente 1 cuando n es pequeño respecto a N.

EJEMPLO 3.36 (Continuación del ejemplo 3.35)

En el ejemplo de etiquetado de animales, $n = 10$, $M = 5$ y $N = 25$, por tanto, $p = 5/25 = .2$ y

$$E(X) = 10(.2) = 2$$

$$V(X) = \frac{15}{24}(10)(.2)(.8) = (.625)(1.6) = 1$$

Si el muestreo se realizó con reemplazo, $V(X) = 1.6$.

Suponga que en realidad no se conoce el tamaño de la población N, así que se observa el valor x y se desea estimar N. Es razonable igualar la proporción muestral observada de éxitos x/n, con la proporción de la población, M/N, que da la estimación

$$\hat{N} = \frac{M \cdot n}{x}$$

Si $M = 100$, $n = 40$ y $x = 16$, entonces $\hat{N} = 250$.

La regla general empírica dada en la sección 3.4 plantea que si el muestreo se realizó sin reemplazo pero n/N era cuando mucho de .05, entonces la distribución binomial podría ser utilizada para calcular probabilidades aproximadas que implican el número de éxitos en la muestra. Un enunciado más preciso es el siguiente: permita que el tamaño de la población N y el número de M éxitos presentes en la población se hagan más grandes a medida que la razón M/N tiende a p. Entonces $h(x; n, M, N)$ tiende a $b(x; n, p)$; por tanto, con n/N pequeña, las dos son aproximadamente iguales, siempre y cuando p no esté muy cerca de 0 o 1. Esta es la razón de ser de la regla empírica.

Distribución binomial negativa

La variable aleatoria binomial y la distribución binomial negativa se basan en un experimento que satisface las siguientes condiciones:

1. El experimento consiste en una secuencia de ensayos independientes.
2. Cada ensayo puede dar por resultado un éxito (S) o una falla (F).

3. La probabilidad de éxito es constante de un ensayo a otro, por tanto, $P(S \text{ en el ensayo } i) = p$ con $i = 1, 2, 3, \ldots$
4. El experimento continúa (se realizan ensayos) hasta que un total de éxitos r haya sido observado, donde r es un entero positivo especificado.

La variable aleatoria de interés es $X =$ el número de fallas que preceden al éxito r-ésimo; X se llama **variable aleatoria binomial negativa** porque, en contraste con la variable aleatoria binomial, el número de éxitos es fijo y el número de ensayos es aleatorio.

Posibles valores de X son 0, 1, 2,… Sea $nb(x; r, p)$ la función de masa de probabilidad de X. Considere $nb(7, 3, p) = P(X = 7)$, la probabilidad de que ocurran exactamente 7F antes de la 3ª S. Para que esto suceda el décimo ensayo debe ser S y debe haber exactamente 2 S entre los 9 primeros ensayos. Por tanto,

$$nb(7; 3, p) = \left\{\binom{9}{2} \cdot p^2(1-p)^7\right\} \cdot p = \binom{9}{2} \cdot p^3(1-p)^7$$

La generalización de esta línea de razonamiento da la siguiente fórmula para la función de masa de probabilidad binomial negativa.

PROPOSICIÓN

La función de masa de probabilidad de la variable aleatoria binomial negativa X con los parámetros $r =$ número de éxitos (S) y $p = P(S)$ es

$$nb(x; r, p) = \binom{x+r-1}{r-1} p^r(1-p)^x \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

EJEMPLO 3.37 Un pediatra desea reclutar 5 parejas, cada una de las cuales espera a su primer hijo, para participar en un nuevo programa de parto natural. Sea $p = P(\text{una pareja seleccionada al azar está de acuerdo en participar})$. Si $p = .2$, ¿cuál es la probabilidad de que 15 parejas deban ser entrevistadas antes de encontrar 5 que estén de acuerdo en participar? Es decir, con $S = \{\text{está de acuerdo en participar}\}$, ¿cuál es la probabilidad de que ocurran 10 fallas antes del quinto éxito? Al sustituir $r = 5$, $p = .2$ y $x = 10$ en $nb(x; r, p)$ se obtiene

$$nb(10; 5, .2) = \binom{14}{4}(.2)^5(.8)^{10} = .034$$

La probabilidad de que a lo más se observen 10 fallas (cuando mucho con 15 parejas entrevistadas) es

$$P(X \le 10) = \sum_{x=0}^{10} nb(x; 5, .2) = (.2)^5 \sum_{x=0}^{10} \binom{x+4}{4}(.8)^x = .164 \quad \blacksquare$$

En algunas fuentes la variable aleatoria binomial negativa es el número de ensayos $X + r$ en lugar del número de fallas.

En el caso especial $r = 1$, la función de masa de probabilidad es

$$nb(x; 1, p) = (1-p)^x p \quad x = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.17}$$

En el ejemplo 3.12 se dedujo la función de masa de probabilidad para el número de ensayos necesarios para obtener el primer *éxito* (S), y ahí la función de masa de probabilidad es similar a la expresión (3.17). En la literatura se hace referencia tanto a $X =$ número de *fallas* (F) como a $Y =$ número de ensayos ($= 1 + X$) como **variables aleatorias geométricas**, y la función de masa de probabilidad en la expresión (3.17) se llama **distribución geométrica**.

En el ejemplo 3.19 se demostró que el número esperado de ensayos hasta que aparece el primer éxito es $1/p$, así que el número esperado de fallas hasta que aparece el primer éxito es $(1/p) - 1 = (1 - p)/p$. Intuitivamente, se esperaría ver $r \cdot (1 - p)/pF$ antes del éxito r-ésimo y este en realidad es $E(X)$. También existe una fórmula simple para $V(X)$.

PROPOSICIÓN

Si X es una variable aleatoria binomial negativa con función de masa de probabilidad $nb(x; r, p)$, entonces

$$E(X) = \frac{r(1-p)}{p} \qquad V(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

Por último, al expandir el coeficiente binomial enfrente de $p^r(1 - p)^x$ y haciendo alguna cancelación se ve que $nb(x; r, p)$ está bien definido, incluso cuando r no es un entero. Se ha encontrado que la *distribución binomial negativa generalizada* para ajustar los datos observados se adapta verdaderamente bien en una amplia variedad de aplicaciones.

EJERCICIOS Sección 3.5 (68-78)

68. Dieciocho individuos tienen una cita para someterse a una prueba de manejo en una oficina de tránsito en particular un cierto día, ocho de los cuales realizarán la prueba por primera vez. Suponga que seis de estos individuos son asignados de manera aleatoria a un examinador en particular, y sea X el número de personas, entre estos seis, que están realizando la prueba por primera vez.

a. Cuál es el tipo de distribución que tiene X (nombre y valores de todos los parámetros)?

b. Calcule $P(X = 2)$, $P(X \leq 2)$, y $P(X \geq 2)$.

c. Calcule la media y la desviación estándar para X.

69. Cada uno de 12 refrigeradores de un tipo ha sido devuelto a un distribuidor debido a que se escucha un sonido agudo cuando el refrigerador está funcionando. Suponga que 7 de estos refrigeradores tienen un compresor defectuoso y que los otros 5 tienen problemas menos serios. Si los refrigeradores se examinan en orden aleatorio, sea X el número entre los primeros 6 examinados que tienen un compresor defectuoso.

a. Calcule $P(X = 4)$ y $P(X \leq 4)$

b. Determine la probabilidad de que X exceda su valor medio por más de 1 desviación estándar.

c. Considere un gran envío de 400 refrigeradores, 40 de los cuales tienen compresores defectuosos. Si X es el número de refrigeradores que tienen compresores defectuosos de entre 15 seleccionados al azar, describa una forma menos tediosa de calcular (al menos de forma aproximada) $P(X \leq 5)$ en lugar de utilizar la función de masa de probabilidad hipergeométrica.

70. Un instructor que impartió dos secciones de estadística para ingeniería el semestre pasado, la primera con 20 estudiantes y la segunda con 30, decidió asignar un proyecto semestral. Una vez que todos los proyectos le fueron entregados, el instructor los ordenó al azar antes de calificarlos. Considere los primeros 15 proyectos calificados.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 10 de estos sean de la segunda sección?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 10 de estos sean de la segunda sección?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 10 de estos sean de la misma sección?

d. ¿Cuáles son la media y la desviación estándar del número de proyectos entre estos 15 que son de la segunda sección?

e. ¿Cuáles son la media y la desviación estándar del número de proyectos que no están entre estos primeros 15 que son de la segunda sección?

71. Un geólogo recolectó 10 especímenes de roca basáltica y 10 de granito. Le pide a su ayudante de laboratorio que seleccione al azar 15 de estos especímenes para analizarlos.

a. ¿Cuál es la función de masa de probabilidad del número de especímenes de granito seleccionados para su análisis?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que todos los especímenes de uno de los dos tipos de roca sean seleccionados para su análisis?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de especímenes de granito seleccionados para analizarlos esté dentro de 1 desviación estándar de su valor medio?

72. Un director de personal que va a entrevistar a 11 ingenieros para cuatro vacantes de trabajo ha programado seis entrevistas para el primer día y cinco para el segundo. Suponga que los candidatos son entrevistados en orden aleatorio.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que x de los cuatro mejores candidatos sean entrevistados el primer día?

b. ¿Cuántos de los mejores cuatro candidatos se espera que puedan ser entrevistados el primer día?

73. Veinte parejas de individuos que participan en un torneo de bridge han sido sembrados del 1,..., 20. En esta primera parte del torneo, los 20 son divididos al azar en 10 parejas este-oeste y 10 parejas norte-sur.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que x de las 10 mejores parejas terminen jugando este-oeste?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que las cinco mejores parejas terminen jugando en la misma dirección?

c. Si existen $2n$ parejas, ¿cuál es la función de masa de probabilidad de X = el número entre las mejores n parejas que terminan jugando este-oeste? ¿Cuáles son $E(X)$ y $V(X)$?

74. Una alerta contra esmog de segunda etapa ha sido emitida en un área del condado de Los Ángeles en la cual hay 50 empresas industriales. Un inspector visitará 10 empresas seleccionadas al azar para verificar si no han violado los reglamentos.

a. Si 15 de las empresas están violando al menos un reglamento, ¿cuál es la función de masa de probabilidad del número de empresas visitadas por el inspector que violan al menos un reglamento?

b. Si existen 500 empresas en el área, 150 de las cuales violan algún reglamento, represente de forma aproximada la función de masa de probabilidad del inciso a) con una función de masa de probabilidad más simple.

c. Con X = el número de empresas que violan algún reglamento entre las 10 visitadas calcule $E(X)$ y $V(X)$, ambas para la función de masa de probabilidad exacta y la función de masa de probabilidad aproximada del inciso b).

75. La probabilidad de que una caja de un cierto tipo de cereal seleccionada al azar tenga un precio particular es de .2. Suponga que compra una caja tras otra hasta obtener dos con dicho precio.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que compre x cajas que no tienen el precio deseado?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que compre cuatro cajas?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que compre cuando más cuatro cajas?

d. ¿Cuántas cajas sin el precio deseado esperaría comprar? ¿Cuántas cajas espera comprar?

76. Una familia decide tener hijos hasta que tengan tres niños del mismo sexo. Suponiendo que $P(B) = P(G) = .5$, ¿cuál es la función de masa de probabilidad de X = al número de niños en la familia?

77. Tres hermanos y sus esposas deciden tener hijos hasta que cada familia tenga dos niñas. ¿Cuál es la función de masa de probabilidad de X = el número total de varones procreados por las tres parejas? ¿Cuál es $E(X)$ y cómo se compara con el número esperado de varones procreados por cada pareja?

78. De acuerdo con el artículo **"Characterizing the Severity and Risk of Drought in the Poudre River, Colorado" (*J. of Water Res. Planning and Mgmnt.*, 2005: 383–393)**, la longitud de la sequía Y es el número de intervalos de tiempo consecutivos en los que el suministro de agua se mantiene por debajo de un valor crítico y_0 (un déficit), precedido y seguido por periodos en los que el suministro supera este valor crítico (un excedente). El documento citado propone una distribución geométrica con $p = .409$ para esta variable aleatoria.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que una sequía perdure exactamente 3 intervalos? ¿Y a lo más 3 intervalos?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la duración de una sequía exceda su valor medio por al menos una desviación estándar?

3.6 Distribución de probabilidad de Poisson

Las distribuciones binomial, hipergeométrica y binomial negativa se dedujeron partiendo de un experimento compuesto de ensayos o sorteos y aplicando las leyes de probabilidad a varios resultados del experimento. No existe un experimento simple en el cual esté basada la distribución de Poisson, no obstante, más adelante se describirá cómo puede ser obtenida mediante ciertas operaciones restrictivas.

DEFINICIÓN

Se dice que una variable aleatoria discreta X tiene una **distribución de Poisson** con parámetro μ ($\mu > 0$) si la función de masa de probabilidad de X es

$$p(x; \mu) = \frac{e^{-\mu} \cdot \mu^x}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

No es casualidad que se esté usando el símbolo μ para el parámetro de Poisson, más adelante se verá que μ es en realidad el valor esperado de X. La letra e en la función de masa de probabilidad representa la base del sistema de logaritmos naturales; su valor numérico es aproximadamente 2.71828. A diferencia de las distribuciones binomial e hipergeométrica, la distribución de probabilidad de Poisson se extiende a *todos* los números enteros no negativos, un número infinito de posibilidades.

No es evidente por inspección que $p(x; \mu)$ especifica una función de masa de probabilidad legítima, por no hablar de que esta distribución es útil. En primer lugar, $p(x; \mu) > 0$ para cada valor x posible, debido a la exigencia de que $\mu > 0$. El hecho de que $\Sigma p(x; \mu) = 1$ es una consecuencia de la expansión en series de Maclaurin de e^{μ} (consulte su libro de cálculo para este resultado):

$$e^{\mu} = 1 + \mu + \frac{\mu^2}{2!} + \frac{\mu^3}{3!} + \cdots = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\mu^x}{x!} \tag{3.18}$$

Si los dos términos extremos de la expresión (3.18) se multiplican por $e^{-\mu}$ y luego esta cantidad se coloca dentro de la suma en el lado derecho, el resultado es

$$1 = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu} \cdot \mu^x}{x!}$$

La tabla A.2 del Apéndice contiene la función de distribución acumulada de Poisson $F(x; \mu)$ para $\mu = .1, .2, \ldots, 1, 2, \ldots, 10, 15$ y 20. Por otra parte, si se les pide muchos paquetes de software proporcionarán $F(x; \mu)$ y $p(x; \mu)$.

EJEMPLO 3.38 Sea X el número de trampas (cierto tipo de defectos) en un tipo particular de transistor metal-óxido semiconductor, y suponga que tiene una distribución de Poisson con $\mu = 2$ (El modelo de Poisson se muestra en el artículo **"Analysis of Random Telegraph Noise in 45-nm CMOS Using On-Chip Characterization System "(*IEEE Trans. on Electron Devices*, 2013: 171621722)**; se cambió el valor del parámetro para facilitar el cálculo computacional.

La probabilidad de que haya exactamente tres trampas es

$$P(X = 3) = p(3; 2) = \frac{e^{-2}2^3}{3!} = .180,$$

Y la probabilidad de que haya cuando más tres trampas es

$$P(X \le 3) = F(3; 2) = \sum_{x=0}^{3} \frac{e^{-2}2^x}{x!} = .135 + .271 + .271 + .180 = .857$$

Esta última probabilidad acumulada se encuentra en la intersección de la columna de $\mu = 2$ y en la fila de $x = 3$ de la tabla A.2. del apéndice, mientras que $p(3; 2) = F(3; 2) - F(2; 2) = .857 - .677 = .180$, la diferencia entre dos entradas consecutivas se encuentra en la columna $\mu = 2$ de la tabla acumulada de Poisson. ■

La distribución de Poisson como límite

La siguiente proposición revela la razón de ser del uso de la distribución de Poisson en muchas situaciones.

PROPOSICIÓN

> Suponga que en la función de masa de probabilidad binomial $b(x; n, p)$, $n \to \infty$ y $p \to 0$ de tal modo que np tienda a un valor $\mu > 0$. Entonces $b(x; n, p) \to p(x; \mu)$.

De acuerdo con esta proposición, *en cualquier experimento binomial en el cual n es grande y p pequeña*, $b(x; n, p) \approx p(x; \mu)$, donde $\mu = np$. Como regla empírica esta aproximación puede ser aplicada con seguridad si $n > 50$ y $np < 5$.

EJEMPLO 3.39 Si un editor de libros no técnicos hace todo lo posible porque sus libros estén libres de errores tipográficos, de modo que la probabilidad de que cualquier página dada contenga al menos un error de ese tipo es de .005 y los errores son independientes de una página a otra, ¿cuál es la probabilidad de que una de sus novelas de 400 páginas contenga exactamente una página con errores? ¿Y cuando mucho tres páginas con errores?

Con S denotando una página que contiene al menos un error y F una página libre de errores, el número X de páginas que contienen al menos un error es una variable aleatoria binomial con $n = 600$ y $p = .005$, así que $np = 3$. Se desea

$$P(X = 1) = b(1; 600, .005) \approx p(1; 3) = \frac{e^{-3}(3)^1}{1!} = .14936$$

El valor binomial es $b(1; 600, .005) = .14899$, así que la aproximación es muy buena.

Del mismo modo,

$$P(X \le 3) \approx \sum_{x=0}^{3} p(x; 3) = F(3; 3) = .647$$

que con una precisión de tres decimales es idéntico a $B(3; 600, .005)$. ■

La tabla 3.2 muestra la distribución de Poisson con $\mu = 3$ junto con tres distribuciones binomiales con $np = 3$ y la figura 3.8 (generada por S-Plus) ilustra una gráfica de la distribución de Poisson junto con las dos primeras distribuciones binomiales. La aproximación es de uso limitado con $n = 30$, pero desde luego la precisión es mejor con $n = 100$ y mucho mejor con $n = 300$.

Tabla 3.2 Comparación de la distribución de Poisson y tres distribuciones binomiales

x	$n = 30, p = .1$	$n = 100, p = .3$	$n = 300, p = .1$	Poisson, $\mu = 3$
0	0.042391	0.047553	0.049041	0.049787
1	0.141304	0.147070	0.148609	0.149361
2	0.227656	0.225153	0.224414	0.224042
3	0.236088	0.227474	0.225170	0.224042
4	0.177066	0.170606	0.168877	0.168031
5	0.102305	0.101308	0.100985	0.100819
6	0.047363	0.049610	0.050153	0.050409
7	0.018043	0.020604	0.021277	0.021604
8	0.005764	0.007408	0.007871	0.008102
9	0.001565	0.002342	0.002580	0.002701
10	0.000365	0.000659	0.000758	0.000810

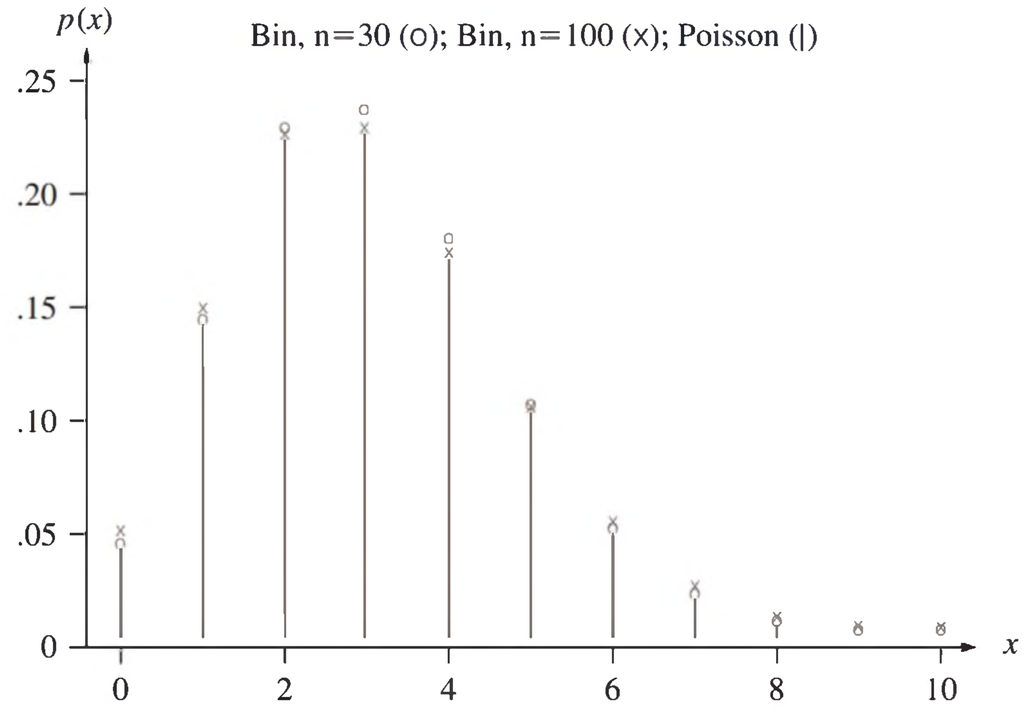


Figura 3.8 Comparación entre una distribución de Poisson y dos distribuciones binomiales

Media y varianza de X

Puesto que $b(x; n, p) \longrightarrow p(x; \mu)$ a medida que $n \longrightarrow \infty$, $p \longrightarrow 0$, $np \longrightarrow \mu$, la media y la varianza de una variable binomial deberán aproximarse a las de una variable de Poisson. Estos límites son $np \longrightarrow \mu$ y $np(1 - p) \longrightarrow \mu$.

PROPOSICIÓN

Si X tiene una distribución de Poisson con parámetro μ, entonces $E(X) = V(X) = \mu$.

Estos resultados también pueden obtenerse directamente de las definiciones de media y de varianza.

EJEMPLO 3.40 (Continuación del ejemplo 3.38)

Tanto el número esperado de criaturas atrapadas como la varianza de este son iguales a 2, y $\sigma_X = \sqrt{\mu} = \sqrt{2} = 1.414$. ■

Proceso de Poisson

Una aplicación muy importante de la distribución de Poisson surge en conexión con la ocurrencia de eventos de algún tipo en el transcurso del tiempo. Algunos eventos de interés podrían ser las visitas a un sitio web particular, asistencias a una cierta clase registradas mediante un contador, los mensajes de correo electrónico enviados a una dirección particular, los accidentes en una instalación industrial o las lluvias de rayos cósmicos observados por los astrónomos en un observatorio particular. Se hace la siguiente suposición sobre la forma en que los eventos de interés ocurren:

1. Existe un parámetro $\alpha > 0$ tal que durante cualquier intervalo de tiempo corto Δt, la probabilidad de que ocurra exactamente un evento es $\alpha \cdot \Delta t + o(\Delta t)$.
2. La probabilidad de que ocurra más de un evento durante Δt es $o(\Delta t)$ [la que junto con la suposición 1 implica que la probabilidad de ningún evento durante Δt es $[1 - \alpha \cdot \Delta t - o(\Delta t)]$.
3. El número de eventos ocurridos durante este intervalo de tiempo Δt es independiente del número ocurrido antes de dicho intervalo.

De manera informal la suposición 1 dice que durante un corto intervalo de tiempo la probabilidad de que ocurra un solo evento es aproximadamente proporcional a la duración del intervalo, donde α es la constante de proporcionalidad. Ahora sea $Pk(t)$ la probabilidad de que k eventos serán observados durante cualquier intervalo de tiempo particular de duración t.

PROPOSICIÓN

$P_k(t) = e^{-\alpha t} \cdot (\alpha t)^k / k!$, de modo que el número de eventos durante un intervalo de tiempo de duración t es una variable aleatoria de Poisson con parámetro $\mu = \alpha t$. El número esperado de eventos durante cualquier intervalo de tiempo es entonces αt, así que el número esperado durante un intervalo de tiempo unitario es α.

La ocurrencia de eventos en el transcurso del tiempo, como se describió, se llama *proceso de Poisson*; el parámetro α especifica *la rapidez* del proceso.

EJEMPLO 3.39

Suponga que llegan a un contador pulsaciones a un ritmo promedio de seis por minuto, por lo que $\alpha = 6$. Para determinar la probabilidad de que en un intervalo de .5 minutos se reciba al menos una pulsación, observe que el número de pulsaciones en ese intervalo tiene una distribución de Poisson con parámetro $\alpha t = 6(.5) = 3$ (se utiliza .5 minutos porque

Una cantidad es $o(\Delta t)$ (léase "o pequeña de delta t") si, a medida que Δt tiende a 0, también lo hace $o(\Delta t)/\Delta t$. Es decir, $o(\Delta t)$ es incluso más insignificante (tiende a 0 más rápido) que Δt mismo. La cantidad $(\Delta t)^2$ tiene esta propiedad, pero no así sen(Δt).

α está expresada como rapidez por minuto). Entonces con X = el número de pulsaciones recibidos en el intervalo de 30 segundos,

$$P(1 \le X) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{e^{-3}(3)^0}{0!} = .950$$

■

En lugar de observar eventos en el transcurso del tiempo, considere observar eventos de algún tipo que ocurren en una región de dos o tres dimensiones. Por ejemplo, podría seleccionar un mapa de la región R de un bosque, ir a dicha región y contar el número de árboles. Cada árbol representaría un evento que ocurre en un punto particular del espacio. Conforme a suposiciones similares a 1−3, se puede demostrar que el número de eventos que ocurren en una región R tiene una distribución de Poisson con parámetro $\alpha \cdot a(R)$, donde $a(R)$ es el área de R. La cantidad α es el número esperado de eventos por unidad de área o volumen.

EJERCICIOS Sección 3.6 (79-93)

79. El artículo **"Expectation Analysis of the Probability of Failure for Water Supply Pipes" (*J. of Pipeline Systems Engr. and Practice*, mayo de 2012: 36-46)** propone utilizar la distribución de Poisson para modelar el número de fallas en las tuberías de varios tipos. Suponga que para una tubería de hierro forjado de una longitud particular, el número de fallas esperado es de 1 (muy cercano a uno de los casos considerados en el artículo). Entonces *X, el número de fallas, tiene una distribución de Poisson con* $\mu = 1$.

- **a.** Obtenga $P(X \le 5)$ utilizando la tabla A.2. en el apéndice.
- **b.** Determine $P(X = 2)$ primero a partir de la fórmula de la función de masa de probabilidad y luego a partir de la tabla A.2.
- **c.** Determine $P(2 \le X \le 4)$.
- **d.** ¿Cuál es la probabilidad de X que exceda su media por más de una desviación estándar?

80. Sea X el número de anomalías que ocurren en el material de una región particular de un disco de turbina de gas en los aviones. El artículo **"Methodology for Probabilistic Life Prediction of Multiple-Anomaly Materials" (*Amer. Inst. of Aeronautics and Astronautics J.*, 2006: 787-793)** propone una distribución de Poisson para X. Supongamos que $\mu = 4$.

- **a.** Calcule $P(X \le 4)$ y $P(X < 4)$.
- **b.** Calcule $P(4 \le X \le 8)$.
- **c.** Calcule $P(8 \le X)$.
- **d.** ¿Cuál es la probabilidad de que el número observado de anomalías sobrepase su media por no más de una desviación estándar?

81. Suponga que el número de conductores que viajan entre un origen y un destino particulares, durante un lapso de tiempo designado, tiene una distribución de Poisson con parámetro $\mu = 20$ (sugerido en el artículo **"Dynamic Ride Sharing: Theory and Practice", *J. of Transp. Engr.*, 1997:308-312).** Cuál es la probabilidad de que el número de conductores:

- **a.** Sea cuando mucho de 10.
- **b.** Sea de más de 20.
- **c.** ¿Será de entre 10 y 20, inclusive? Será estrictamente de entre 10 y 20?
- **d.** ¿Estará dentro de 2 desviaciones estándar de su media?

82. Considere escribir en un disco de computadora y luego enviarlo a través de un certificador que cuenta el número de impulsos magnéticos faltantes. Suponga que este número X tiene una distribución de Poisson con parámetro $\mu = .2$. (Sugerido en **"Average Sample Number for Semi-Curtailed Sampling Using the Poisson Distribution", *J. Quality Technology*, 1983: 126-129.)**

- **a.** ¿Cuál es la probabilidad de que un disco tenga exactamente un impulso faltante?
- **b.** ¿Cuál es la probabilidad de que un disco tenga al menos dos impulsos faltantes?
- **c.** Si se seleccionan dos discos independientemente, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno contenga un impulso faltante?

83. Un artículo en ***Los Angeles Times* (3 de diciembre de 1993)** reporta que 1 de cada 200 personas porta el gen defectuoso que provoca cáncer de colon hereditario. En una muestra de 1000 individuos, ¿cuál es la distribución aproximada del número que porta este gen? Use esta distribución para calcular la probabilidad aproximada de que:

- **a.** Entre 5 y 8 (inclusive) porten el gen.
- **b.** Al menos 8 porten el gen.

84. El **Centro para la Prevención y Control de Enfermedades** reportó en 2012 que 1 de cada 88 niños estadounidenses había sido diagnosticado con un trastorno del espectro autista (ASD).

- **a.** Si se selecciona una muestra de 200 niños estadounidenses, ¿cuál es el valor esperado y la desviación estándar de la cantidad de niños que han sido diagnosticados con ASD?
- b. En referencia a a) calcule la probabilidad aproximada de que al menos 2 niños en la muestra sean diagnosticados con ASD.

c. Si el tamaño de la muestra es de 352, ¿cuál es la probabilidad aproximada de que menos de 5 de los niños seleccionados hayan sido diagnosticados con ASD?

85. Suponga que una pequeña aeronave aterriza en un aeropuerto de acuerdo con un proceso de Poisson con razón $\alpha = 8$ por hora, de modo que el número de aterrizajes durante un lapso de tiempo de t horas es una variable aleatoria de Poisson con parámetro $\mu = 8t$.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 6 aeronaves pequeñas aterricen durante un intervalo de 1 hora? ¿Al menos 6? ¿Al menos 10?

b. ¿Cuáles son el valor esperado y la desviación estándar del número de aeronaves pequeñas que aterrizan durante un lapso de 90 minutos?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 20 aeronaves pequeñas aterricen durante un lapso de 2.5 horas? ¿Y de que cuando mucho aterricen 10 durante este periodo?

86. En el agua de lastre que es descargada de un barco hay organismos una concentración de 10 organismos/m^3 de acuerdo con proceso de Poisson [el artículo **Counting at Low Concentrations: The Statistical Challenges of Verifying Ballast Water Discharge Standards" (*Ecological Applications*, 2013: 339-351)** considera utilizar el proceso de Poisson para este propósito].

a. ¿Cuál es la probabilidad de que un metro cúbico de descarga tenga al menos 8 organismos?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de organismos en 1.5 m^3 de agua de descarga exceda su valor medio por más de una desviación estándar?

c. Para qué cantidad de descarga la probabilidad de que haya menos de un organismo sería igual a .999?

87. El número de solicitudes de ayuda recibidas por un servicio de grúas es un proceso de Poisson con razón $\alpha = 4$ por hora.

a. Calcule la probabilidad de que exactamente diez solicitudes sean recibidas durante un periodo particular de 2 horas.

b. Si los operadores del servicio de grúas hacen una pausa de 30 minutos para el almuerzo, ¿cuál es la probabilidad de que no dejen de atender las llamadas de auxilio?

c. ¿Cuántas llamadas esperaría durante esta pausa?

88. Al someter a prueba tarjetas de circuito, la probabilidad de que cualquier diodo particular falle es de .01. Suponga que una tarjeta de circuito contiene 200 diodos.

a. ¿Cuántos diodos esperaría que fallen y cuál es la desviación estándar de la cantidad que se espera que falle?

b. ¿Cuál es la probabilidad (aproximada) de que al menos cuatro diodos fallen en una tarjeta seleccionada al azar?

c. Si se envían cinco tarjetas a un cliente particular, ¿qué tan probable es que al menos cuatro de ellas funcionen apropiadamente? (Una tarjeta funciona apropiadamente sólo si todos sus diodos funcionan.)

89. El artículo **"Reliability-Based Service-Life Assessment of Aging Concrete Structures" (*J. Structural Engr.*, 1993: 1600-1621)** sugiere que un proceso de Poisson puede ser utilizado para representar la ocurrencia de cargas estructurales en el transcurso del tiempo. Suponga que el tiempo medio entre ocurrencias de cargas es de .5 al año.

a. ¿Cuántas cargas se espera que ocurran durante un periodo de 2 años?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran más de cinco cargas durante un periodo de 2 años?

c. ¿Qué tan largo debe ser un periodo de modo que la probabilidad de que no ocurran cargas durante dicho periodo sea cuando mucho de .1?

90. Sea X que tiene una distribución de Poisson con parámetro μ. Demuestre que $E(X) = \mu$ derivada directamente de la definición de valor esperado. [*Sugerencia*: El primer término en la suma es igual a 0 y luego x puede ser eliminada. Ahora saque como factor a μ y demuestre que lo que queda suma 1.]

91. Suponga que hay árboles distribuidos en un bosque de acuerdo con un proceso de Poisson bidimensional con parámetro α, el número esperado de árboles por acre es de 80.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que en un terreno de un cuarto de acre, haya cuando mucho 16 árboles?

b. Si el bosque abarca 85 000 acres, ¿cuál es el número esperado de árboles en el mismo?

c. Suponga que selecciona un punto en el bosque y traza un círculo de .1 millas de radio. Sea X = el número de árboles dentro de esa región circular. ¿Cuál es la función de masa de probabilidad de X? [*Sugerencia*: 1 milla cuadrada = 640 acres.]

92. A una estación de inspección de equipo vehicular llegan automóviles de acuerdo con un proceso de Poisson con razón $\alpha = 10$ por hora. Suponga que un vehículo que llega con probabilidad de .5 no tendrá alteraciones en el equipo.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente diez lleguen durante la hora y que ninguno tenga alteraciones?

b. Con cualquier $y \geq 10$ fija, ¿cuál es la probabilidad de que y llegue durante la hora y que diez no tengan alteraciones?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen diez autos "sin alteraciones" durante la siguiente hora? [*Sugerencia*: Sume las probabilidades en el inciso b) desde $y = 10$ hasta ∞.]

93. **a.** En un proceso de Poisson, ¿qué tiene que suceder tanto en el intervalo de tiempo $(0, t)$ como en el intervalo $(t, t + \Delta t)$ de modo que no ocurran eventos en todo el intervalo $(0, t + \Delta t)$? Use esto y las suposiciones 1−3 para escribir una relación entre $P_0(t + \Delta t)$ y $P_0(t)$.

b. Use el resultado del inciso a) para escribir una expresión para la diferencia $P_0(t + \Delta t) - P_0(t)$. Divida entonces entre Δt y permita que $\Delta t \to 0$ para obtener una ecuación que implique $(d/dt)P_0(t)$, la derivada de $P_0(t)$ respecto a t.

c. Verifique que $P_0(t) = e^{-\alpha t}$ satisface la ecuación del inciso b).

d. Se puede demostrar de manera similar a los incisos a) y b) que los $P_k(t)$ deben satisfacer el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d}{dt} P_k(t) = \alpha P_{k-1}(t) - \alpha P_k(t)$$
$$k = 1, 2, 3, \ldots$$

Verifique que $P_k(t) = e^{-\alpha t}(\alpha t)^k/k!$ satisface el sistema. (En realidad esta es la única solución.)

EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS (94-122)

94. Considere un mazo compuesto de siete cartas, marcadas 1, 2,..., 7. Se seleccionan al azar tres de ellas. Defina una variable aleatoria W como W = la suma de los números resultantes y calcule la función de masa de probabilidad de W. Calcule entonces μ y σ^2. [*Sugerencia*: Considere los resultados sin orden, de modo que (1, 3, 7) y (3, 1, 7) no sean resultados diferentes. Entonces existen 35 resultados y pueden ser puestos en lista. (Este tipo de variable aleatoria en realidad se presenta en conexión con una prueba de hipótesis llamada prueba de suma de renglones de Wilcoxon, en la cual hay una muestra x y una muestra y y W es la suma de los renglones de x en la muestra combinada; véase la sección 15.2.)

95. Después de barajar un mazo de 52 cartas, un tallador reparte 5. Sea X = el número de palos representados en la mano de 5 cartas.

a. Demuestre que la función de masa de probabilidad de X es

x	1	2	3	4
$p(x)$	.002	.146	.588	.264

[*Sugerencia*: $p(1) = 4P$(todas son espadas), $p(2) = 6P$(sólo espadas y corazones con al menos una de cada palo) y $p(4) = 4P$(2 espadas $\cap$ una de cada uno de los otros palos).]

b. Calcule μ, σ^2 y σ.

96. La variable aleatoria binomial negativa X se definió como el número de fallas (F) que preceden al éxito (S) r-ésimo. Sea Y = el número de ensayos necesarios para obtener el *éxito* (S) r-ésimo. Del mismo modo en que fue obtenida la función de masa de probabilidad de X deduzca la función de masa de probabilidad de Y.

97. De todos los clientes que adquieren puertas de cochera automáticas, 75% adquiere el modelo de transmisión por cadena. Sea X = el número entre los siguientes 15 compradores que seleccionan el modelo de transmisión por cadena.

a. ¿Cuál es la función de masa de probabilidad de X?

b. Calcule $P(X > 10)$.

c. Calcule $P(6 \le X \le 10)$.

d. Calcule μ y σ^2.

e. Si actualmente la tienda tiene en existencia 10 modelos de transmisión por cadena y 8 modelos de transmisión por flecha, ¿cuál es la probabilidad de que las solicitudes de estos 15 clientes sean satisfechas con las existencias actuales?

98. En algunas aplicaciones la distribución de una variable aleatoria discreta X se asemeja a la distribución de Poisson con excepción de que cero no es un valor posible para X. Por ejemplo, sea X = el número de tatuajes que un individuo quiere remover cuando llega a una clínica especializada. Suponga que la función de masa de probabilidad de X es

$$p(x) = k\frac{e^{-\theta}\theta^x}{x} \quad x = 1, 2, 3, \ldots$$

a. Determine el valor de k. [*Sugerencia:* la suma de todas las probabilidades en la función de masa de probabilidad de Poisson es 1, y esta función de masa de probabilidad también debe sumar 1.]

b. Si el valor de la media de X es 2.313035, ¿cuál es la probabilidad de que un individuo quiera remover a lo más 5 tatuajes?

c. Determine la desviación estándar de X cuando el valor de la media es igual al que se menciona en b).

[*Nota*: El artículo **"An Exploratory Investigation of Identity Negotiation and Tattoo Removal"** (***Academy of Marketing Science Review*, vol. 12, núm. 6, 2008**) da una muestra de 22 observaciones en el número de tatuajes que la gente quiere remover; los *estimados* de μ y σ calculados a partir de los datos fueron 2.318182 y 1.249242, respectivamente.]

99. Un *sistema k de n* es uno que funcionará si y sólo si al menos k de los n componentes individuales en el sistema funcionan. Si los componentes individuales funcionan independientemente uno de otro, cada uno con probabilidad de .9, ¿cuál es la probabilidad de que un sistema 3 de 5 funcione?

100. Un fabricante de chips de circuitos integrados desea controlar la calidad de sus productos rechazando cualquier lote en el que la proporción de chips sea demasiado alta. Con esta finalidad de cada lote de 10 000 chips se seleccionarán y probarán 25. Si al menos 5 de estos están defectuosos, todo el lote será rechazado.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que un lote sea rechazado si 5% de los chips en el lote están, de hecho, defectuosos?

b. Responda la pregunta del inciso a) si el porcentaje de chips defectuosos es 10%.

c. Responda la pregunta del inciso a) si el porcentaje de chips defectuosos es 20%.

d. ¿Qué les sucedería a las probabilidades en los incisos a)−c) si el número de rechazo crítico se incrementara de 5 a 6?

101. De las personas que pasan a través de un detector de metales en un aeropuerto, .5% lo activan; sea X = el número de personas, entre un grupo de 500 seleccionado al azar, que activan el detector.

a. ¿Cuál es la función de masa de probabilidad (aproximada) de X?

b. Calcule $P(X = 5)$.

c. Calcule $P(5 \le X)$.

102. Una consultora educativa está tratando de decidir si los estudiantes de preparatoria que nunca antes han utilizado una calculadora de mano pueden resolver cierto tipo de problema más fácilmente con una calculadora que utiliza lógica polaca inversa o con una que no utiliza esta lógica. Se selecciona una muestra de 25 estudiantes y se les permite practicar con ambas calculadoras. Luego a cada estudiante se le pide que resuelva un problema con la calculadora polaca inversa y un problema similar con la otra. Sea $p = P(S)$, donde S indica que un estudiante resolvió el problema más rápido con la lógica polaca inversa que sin ella y sea X = número de éxitos.

a. Si $p = .5$, ¿cuáles $P(7 \le X \le 18)$?

b. Si $p = .8$, ¿cuáles $P(7 \le X \le 18)$?

c. Si la pretensión de que $p = .5$ tiene que ser rechazada cuando $x \leq 7$ o cuando $x \geq 18$, ¿cuál es la probabilidad de rechazar la pretensión cuando en realidad es correcta?

d. Si la decisión de rechazar la pretensión $p = .5$ se hace como en el inciso c), ¿cuál es la probabilidad de que la pretensión no sea rechazada cuando $p = .6$? ¿Y cuándo $p = .8$?

e. ¿Qué regla de decisión escogería para rechazar la pretensión de que $p = .5$, si desea que la probabilidad en el inciso c) sea cuando mucho de .01?

103. Considere una enfermedad cuya presencia puede ser identificada mediante un análisis de sangre. Sea p la probabilidad de que un individuo seleccionado al azar tenga la enfermedad. Suponga que se seleccionan independientemente n individuos para analizarlos. Una forma de proceder es analizar cada una de las n muestras de sangre. Un procedimiento potencialmente más económico, de análisis en grupo, se introdujo durante la segunda Guerra Mundial para identificar a sifilíticos entre los reclutas. En primer lugar, se toma una parte de cada muestra de sangre, se combinan estos especímenes y se realiza un solo análisis. Si ninguno tiene la enfermedad, el resultado será negativo y sólo se requiere un análisis. Si al menos un individuo está enfermo, el análisis de la muestra combinada dará un resultado positivo, en cuyo caso se realizan los análisis de los n individuos. Si $p = .1$ y $n = 3$, ¿cuál es el número esperado de análisis si se utiliza este procedimiento? ¿Cuál es el número esperado cuando $n = 5$? [El artículo **"Random Multiple-Access Communication and Group Testing" (*IEEE Trans. on Commun.*, 1984: 769-774)** aplicó estas ideas a un sistema de comunicación en el cual la dicotomía fue usuario ocioso/activo en lugar de enfermo/no enfermo.]

104. Sea p_1 la probabilidad de que cualquier símbolo de código particular sea erróneamente transmitido a través de un sistema de comunicación. Suponga que en diferentes símbolos ocurren errores de manera independiente uno de otro. Suponga también que con probabilidad p_2 un símbolo erróneo es corregido al ser recibido. Sea X el número de símbolos correctos en un bloque de mensajes compuesto de n símbolos (una vez que el proceso de corrección ha terminado). ¿Cuál es la distribución de probabilidad de X?

105. El comprador de una unidad generadora de potencia requiere c arranques consecutivos exitosos antes de aceptar la unidad. Suponga que los resultados de arranques individuales son independientes entre sí. Sea p la probabilidad de que cualquier arranque particular sea exitoso. La variable aleatoria de interés es X = el número de arranques que deben hacerse antes de la aceptación. Dé la función de masa de probabilidad de X en el caso $c = 2$. Si $p = .9$, ¿cuál es $P(X \leq 8)$? [*Sugerencia*: Con $x \geq 5$, exprese $p(x)$ "recursivamente" en términos de la función de masa de probabilidad evaluada con los valores más pequeños $x - 3$, $x - 4$,..., 2.] (Este problema fue sugerido por el artículo **"Evaluation of a Start-Up Demonstration Test", *J. Quality Technology*, 1983: 103-106.)**

106. Una aerolínea ha desarrollado un plan para un club de viajeros ejecutivos sobre la premisa de que 10% de sus clientes actuales calificaría para la membresía.

a. Suponiendo la validez de esta premisa, de 25 clientes actuales seleccionados al azar, ¿cuál es la probabilidad de que entre 2 y 6 (inclusive) califiquen para la membresía?

b. De nuevo, suponiendo la validez de la premisa ¿cuál es el número esperado de clientes que califican y la desviación estándar del número que califica en una muestra aleatoria de 100 clientes actuales?

c. Sea X el número en una muestra al azar de 25 clientes actuales que califican para la membresía. Considere rechazar la premisa de la compañía en favor de la pretensión de que $p > .10$ si $x \geq 7$. ¿Cuál es la probabilidad de que la premisa de la compañía sea rechazada cuando en realidad es válida?

d. Remítase a la regla de decisión introducida en el inciso c). ¿Cuál es la probabilidad de que la premisa de la compañía no sea rechazada aun cuando $p = .20$ (es decir, 20% califica)?

107. Cuarenta por ciento de las semillas de las mazorcas de maíz (maíz moderno) portan sólo una espiga y el restante 60% porta dos espigas. Una semilla con una espiga producirá una mazorca con espigas únicas 29% del tiempo, en tanto que una semilla con dos espigas producirá una mazorca con espigas únicas 26% del tiempo. Considere seleccionar al azar diez semillas.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente cinco de estas semillas porten una sola espiga y produzcan una mazorca con una sola espiga?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente cinco de estas mazorcas producidas por estas semillas tengan espigas únicas? ¿Cuál es la probabilidad de que a lo más cinco mazorcas tengan espigas únicas?

108. Un juicio concluyó con el jurado en desacuerdo porque ocho de sus miembros estuvieron a favor de un veredicto de culpabilidad y los otros cuatro estuvieron a favor de la absolución. Si los jurados salen de la sala en orden aleatorio y cada uno de los primeros cuatro que salen de la sala es acosado por un reportero para entrevistarlo, ¿cuál es la función de masa de probabilidad de X = el número de jurados a favor de la absolución entre los entrevistados? ¿Cuántos de los que están a favor de la absolución se espera que sean entrevistados?

109. Un servicio de reservaciones emplea cinco operadores que reciben solicitudes de información independientemente uno de otro, cada uno de acuerdo con un proceso de Poisson con rapidez $\alpha = 2$ por minuto.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que durante un periodo de 1 minuto dado, el primer operador no reciba solicitudes?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que durante un periodo de 1 minuto dado, exactamente cuatro de los cinco operadores no reciban solicitudes?

c. Escriba una expresión para la probabilidad de que durante un periodo de 1 minuto dado, todos los operadores reciban exactamente el mismo número de solicitudes.

110. En un gran campo se distribuyen al azar las langostas de acuerdo con un proceso de Poisson con parámetro $\alpha = 2$ por yarda cuadrada. ¿Qué tan grande deberá ser el radio R de una región de muestreo circular para que la probabilidad de hallar al menos una langosta en la región sea igual a .99?

111. Un puesto de periódicos ha pedido cinco ejemplares de cierto número de una revista de fotografía. Sea X = el número de individuos que vienen a comprar esta revista. Si X tiene una distribución de Poisson con parámetro $\mu = 4$, ¿cuál es el número esperado de ejemplares que serán vendidos?

112. Los individuos A y B comienzan a jugar una secuencia de partidas de ajedrez. Sea $S = \{\text{A gana un juego}\}$ y suponga que los resultados de los juegos sucesivos son independientes con $P(S) = p$ y $P(F) = 1 - p$ (nunca empatan). Jugarán hasta que uno de ellos gane diez juegos. Sea X = el número de partidas jugadas (con posibles valores 10, 11,..., 19).

- **a.** Con $x = 10, 11,\ldots, 19$, obtenga una expresión para $p(x) = P(X = x)$.
- **b.** Si un empate es posible, con $p = P(S)$, $q = P(F)$, $1 - p - q = P(\text{empate})$, ¿cuáles son los posibles valores de X? ¿Cuál es $P(20 \le X)$? [*Sugerencia*: $P(20 \le X) = 1 - P(X < 20)$.]

113. Un análisis para detectar la presencia de una enfermedad tiene una probabilidad de .20 de dar un resultado falso positivo (lo cual indica que cuando este no es el caso un individuo tiene la enfermedad) y una probabilidad de .10 de dar un resultado falso negativo. Suponga que diez individuos son analizados, cinco de los cuales tienen la enfermedad y cinco no. Sea X = el número de lecturas positivas que resultan.

- **a.** ¿Tiene X una distribución binomial? Explique su razonamiento.
- **b.** ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente tres de diez resultados sean positivos?

114. La función de masa de probabilidad binomial negativa generalizada está dada por

$$nb(x; r, p) = k(r, x) \cdot p^r(1 - p)^x \qquad x = 0, 1, 2,\ldots$$

Sea X el número de plantas de cierta especie encontradas en una región particular y tenga esta distribución con $p = .3$ y $r = 2.5$. ¿Cuál es $P(X = 4)$? ¿Cuál es la probabilidad de que al menos se encuentre una planta?

115. En una oficina particular hay dos contadores públicos certificados que preparan declaraciones de impuestos para los clientes. Supongamos que para un tipo particular de forma compleja el número de errores cometidos por el preparador de la primera tiene una distribución de Poisson con media μ_1, el número de errores cometidos por el preparador de la segunda tiene una distribución de Poisson con media μ_2, y cada contador prepara el mismo número de formas de este tipo. Entonces, si una forma de este tipo es seleccionada al azar, la función

$$p(x; \mu_1, \mu_2) = .5\frac{e^{-\mu_1}\mu_1^x}{x!} + .5\frac{e^{-\mu_2}\mu_2^x}{x!} \qquad x = 0, 1, 2,\ldots$$

da la función de masa de probabilidad de X = el número de errores en el formulario seleccionado.

- **a.** Compruebe que $p(x; \mu_1, \mu_2)$ es, de hecho, una función de masa de probabilidad legítima (≥ 0 y se suma a 1).
- **b.** ¿Cuál es el número esperado de errores en la forma seleccionada?
- **c.** ¿Cuál es la varianza del número de errores en la forma seleccionada?
- **d.** ¿Cómo cambia la función de masa de probabilidad si el primer contador prepara 60% de todas esas formas y el segundo prepara 40%?

116. La *moda* de una variable aleatoria discreta X con función de masa de probabilidad $p(x)$ es ese valor x^* con el cual $p(x)$ alcanza su valor más grande (el valor x más probable).

- **a.** Sea $X \sim \text{Bin}(n, p)$. Considerando la razón $b(x + 1; n, p)/b(x; n, p)$, demuestre que $b(x; n, p)$ se incrementa con x mientras $x < np - (1 - p)$. Concluya que la moda x^* es el entero que satisface $(n + 1)p - 1 \le x^* \le (n + 1)p$.
- **b.** Demuestre que si X tiene una distribución de Poisson con parámetro μ, la moda es el entero más grande menor que μ. Si μ es un entero, demuestre que tanto $\mu - 1$ como μ son modas.

117. Un disco duro de computadora tiene diez pistas concéntricas, numeradas 1, 2,..., 10 desde la más externa hasta la más interna y un solo brazo de acceso. Sea p_i = la probabilidad de que cualquier solicitud particular de datos hará que el brazo se vaya a la pista $i (i = 1,\ldots, 10)$. Suponga que las pistas recorridas en búsquedas sucesivas son independientes. Sea X = el número de pistas sobre las cuales pasa el brazo de acceso durante dos solicitudes sucesivas (excluida la pista que el brazo acaba de dejar, así que los valores posibles son $x = 0, 1,\ldots, 9$). Calcule la función de masa de probabilidad de X. [*Sugerencia:* $P(\text{el brazo está ahora sobre la pista } i \text{ y } X = j) = P(X = j | \text{el brazo está ahora sobre } i) \cdot p_i$. Una vez que se escribe la probabilidad condicional en función de $p_1,\ldots, p_{10}$, mediante la ley de probabilidad total, se obtiene la probabilidad deseada sumando a lo largo de i.]

118. Si X es una variable aleatoria hipergeométrica demuestre directamente mediante la definición que $E(X) = nM/N$ (considere sólo el caso $n < M$). [*Sugerencia*: Saque como factor a nM/N de la suma para $E(X)$ y demuestre que los términos dentro de la suma son de la forma $h(y; n - 1, M - 1, N - 1)$ donde $y = x - 1$.]

119. Use el hecho de que

$$\sum_{\text{todas las } x}(x - \mu)^2 p(x) \ge \sum_{x:\, |x-\mu| \ge k\sigma}(x - \mu)^2 p(x)$$

para comprobar la desigualdad de Chebyshev dada en el ejercicio 44.

120. El proceso de Poisson simple de la sección 3.6 está caracterizado por una rapidez constante α a la cual los eventos ocurren por unidad de tiempo. Una generalización de esto es suponer que la probabilidad de que ocurra exactamente un evento en el intervalo $[t, t + \Delta t]$ es $\alpha(t) \cdot \Delta t + o(\Delta t)$. Se puede demostrar entonces que el número de eventos que ocurren durante un intervalo $[t_1, t_2]$ tiene una distribución de Poisson con parámetro

$$\mu = \int_{t_2}^{t_1} \alpha(t)\, dt$$

La ocurrencia de eventos en el transcurso del tiempo en esta situación se llama *proceso de Poisson no homogéneo*. El artículo **"Inference Based on Retrospective Ascertainment", *J. Amer. Stat. Assoc.*, 1989: 360-372)**, considera la función de intensidad

$$\alpha(t) = e^{a+bt}$$

apropiada para eventos que implican la transmisión de VIH (el virus del sida) mediante transfusiones sanguíneas. Suponga que $a = 2$ y $b = .6$ (cercanos a los valores sugeridos en el artículo), con el tiempo en años.

a. ¿Cuál es el número esperado de eventos en el intervalo [0, 4]? ¿Y en [2, 6]?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que cuando mucho ocurran 15 eventos en el intervalo [0, .9907]?

121. Considere un conjunto de $A_1, \ldots, A_k$ de eventos mutuamente excluyentes y exhaustivos y una variable aleatoria X cuya distribución depende de cuál de los eventos A_i ocurra (p. ej., un viajero podría seleccionar una de tres rutas posibles de su casa al trabajo, con X como el tiempo de recorrido). Sea $E(X|A_i)$ el valor esperado de X dado que el evento A_i ocurre. Entonces se puede demostrar que $E(X) = \Sigma E(X|A_i) \cdot P(A_i)$ es el promedio ponderado de las "expectativas condicionales" individuales donde las ponderaciones son las probabilidades de la división de eventos.

a. La duración esperada de una llamada de voz a un número telefónico particular es de 3 minutos, mientras que la duración esperada de una llamada de datos a ese mismo número es de 1 minuto. Si 75% de las llamadas son de voz, ¿cuál es la duración esperada de la siguiente llamada?

b. Una pastelería vende tres diferentes tipos de galletas con chispas de chocolate. El número de chispas de chocolate en un tipo i de galleta tiene una distribución de Poisson con parámetro $\mu_i = i + 1$ ($i = 1, 2, 3$). Si 20% de todos los clientes que compran una galleta con chispas de chocolate selecciona el primer tipo, 50% elige el segundo tipo y 30% opta por el tercer tipo, ¿cuál es el número esperado de chispas en una galleta que compre el siguiente cliente?

122. Considere una fuente de comunicaciones que transmite paquetes que contienen lenguaje digitalizado. Después de cada transmisión el receptor envía un mensaje que indica si la transmisión fue exitosa o no. Si una transmisión no es exitosa el paquete es reenviado. Suponga que el paquete de voz puede ser transmitido un máximo de 10 veces. Suponiendo que los resultados de transmisiones sucesivas son independientes uno de otro y que la probabilidad de que cualquier transmisión particular sea exitosa es p, determine la función de masa de probabilidad de la variable aleatoria X = el número de veces que un paquete es transmitido. Luego obtenga una expresión para el número de veces que se espera que un paquete sea transmitido.

BIBLIOGRAFÍA

Johnson, Norman, Samuel Kotz y Adrienne Kemp, *Discrete Univariate Distributions*, Wiley, Nueva York, 1992. Una enciclopedia de información sobre distribuciones discretas.

Olkin, Ingram, Cyrus Derman y Leon Gleser, *Probability Models and Applications* (2a. ed.), Macmillan, Nueva York, 1994. Contiene una discusión a fondo tanto de las propiedades generales de las distribuciones discretas y continuas como los resultados para las distribuciones específicas.

Ross, Sheldon, *Introduction to Probability Models* (9a. ed.), Academic Press, Nueva York, 2007. Una buena fuente de material sobre el proceso de Poisson y generalizaciones, y una amena introducción a otros temas de probabilidad aplicada.

Variables aleatorias continuas y distribuciones de probabilidad

4

INTRODUCCIÓN

El capítulo 3 se concentró en el desarrollo de distribuciones de probabilidad de variables aleatorias discretas. En este capítulo se estudia el segundo tipo general de variable aleatoria, que se presenta en muchos problemas aplicados. Las secciones 4.1 y 4.2 presentan las definiciones y propiedades básicas de las variables aleatorias continuas y sus distribuciones de probabilidad. En la sección 4.3 se estudia con detalle la variable aleatoria normal y su distribución, sin duda la más importante y útil en la probabilidad y la estadística. Las secciones 4.4 y 4.5 se ocupan de otras distribuciones continuas utilizadas con frecuencia en trabajo aplicado. En la sección 4.6 se introduce un método para evaluar si un dato muestral es compatible con una distribución especificada.

4.1 Funciones de densidad de probabilidad

Una variable aleatoria discreta es aquella cuyos valores posibles constituyen un conjunto finito, o bien pueden ser puestos en lista en una secuencia infinita (una lista en la cual existe un primer elemento, un segundo elemento, etc.). Una variable aleatoria cuyo conjunto de valores posibles es un intervalo completo de números no es discreta.

De acuerdo con el capítulo 3 recuerde que una variable aleatoria X es continua si 1) sus valores posibles comprenden un solo intervalo sobre la recta numérica (para alguna $A < B$, cualquier número x entre A y B es un valor posible) o una unión de intervalos disjuntos y 2) $P(X = c) = 0$ para cualquier número c que sea un valor posible de X.

EJEMPLO 4.1 En el estudio de la ecología de un lago se mide la profundidad en lugares seleccionados, entonces X = la profundidad en ese lugar es una variable aleatoria continua. En este caso A es la profundidad mínima en la región muestreada y B es la profundidad máxima. ■

EJEMPLO 4.2 Si se selecciona al azar un compuesto químico y se determina su pH X, entonces X es una variable aleatoria continua porque cualquier valor pH entre 0 y 14 es posible. Si se conoce más sobre el compuesto seleccionado para su análisis, entonces el conjunto de posibles valores podría ser un subintervalo de [0, 14], tal como $5.5 \leq x \leq 6.5$, pero X seguiría siendo continua. ■

EJEMPLO 4.3 Sea X el tiempo que espera un cliente seleccionado al azar antes de que comience su corte de cabello. El primer pensamiento podría ser que X es una variable aleatoria continua, puesto que es necesario medirla para determinar su valor. Sin embargo, existen clientes suficientemente afortunados que no tienen que esperar antes de sentarse en el sillón de la peluquería. Así que el caso debe ser $P(X = 0) > 0$. Aunque, en caso de que no haya sillones vacíos, el tiempo de espera será continuo puesto que X podría asumir entonces cualquier valor entre un tiempo mínimo posible A y un tiempo máximo posible B. Esta variable aleatoria no es ni puramente discreta ni puramente continua, sino que es una mezcla de los dos tipos. ■

Se podría argumentar que aunque en principio las variables como altura, peso y temperatura son continuas, en la práctica las limitaciones de los instrumentos de medición nos restringen a un mundo discreto (aunque en ocasiones muy sutilmente subdividido). Sin embargo, los modelos continuos a menudo representan muy bien de forma aproximada situaciones del mundo real y con frecuencia es más fácil trabajar con matemáticas continuas (cálculo) que con matemáticas de variables discretas y distribuciones.

Distribuciones de probabilidad de variables continuas

Suponga que la variable X que nos interesa es la profundidad de un lago en un punto sobre la superficie seleccionado al azar. Sea M = la profundidad máxima (en metros), así que cualquier número en el intervalo $[0, M]$ es un valor posible de X. Si se "discretiza" X midiendo la profundidad al metro más cercano, entonces los valores posibles son enteros no negativos menores o iguales a M. La distribución discreta de la profundidad resultante se ilustra con un histograma de probabilidad. Si se traza el histograma de modo que el área del rectángulo sobre cualquier entero posible k sea la proporción del lago cuya profundidad es (al metro más cercano) k, entonces el área total de todos los rectángulos es 1. En la figura 4.1(a) aparece un posible histograma.

Si se mide la profundidad con mucho más precisión y se utiliza el mismo eje de medición de la figura 4.1(a), cada rectángulo en el histograma de probabilidad resultante es

mucho más angosto, aun cuando el área total de todos los rectángulos sigue siendo 1. En la figura 4.1(b) se ilustra un posible histograma; tiene una apariencia mucho más regular que el histograma de la figura 4.1(a). Si se continúa de esta manera, midiendo la profundidad más y más finamente, la secuencia resultante de histogramas se aproxima a una curva más regular, tal como la que se ilustra en la figura 4.1(c). Puesto que en cada histograma el área total de todos los rectángulos es igual a 1, el área total bajo la curva regular también es 1. La probabilidad de que la profundidad en un punto seleccionado al azar se encuentre entre a y b es simplemente el área bajo la curva regular entre a y b. Es de manera exacta una curva suave del tipo ilustrado en la figura 4.1(c) la que especifica una distribución de probabilidad continua.

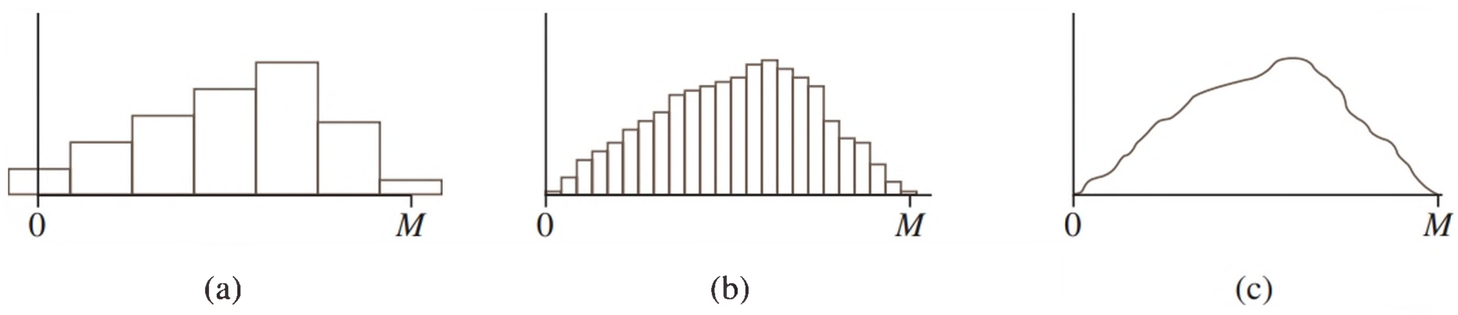


Figura 4.1 (a) Histograma de probabilidad de profundidad medida al metro más cercano; (b) histograma de probabilidad de profundidad medida al centímetro más cercano; (c) un límite de una secuencia de histogramas discretos

DEFINICIÓN

Sea X una variable aleatoria continua. Entonces, una **distribución de probabilidad** o **función de densidad de probabilidad** (pdf) de X es una función $f(x)$ de modo tal que para dos números cualesquiera a y b con $a \le b$,

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$$

Es decir, la probabilidad de que X asuma un valor en el intervalo $[a, b]$ es el área sobre este intervalo y bajo la gráfica de la función de densidad, como se ilustra en la figura 4.2. La gráfica de $f(x)$ a menudo se conoce como *curva de densidad*.

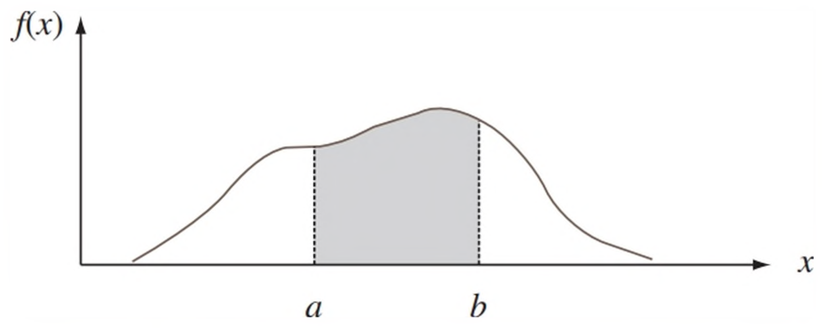


Figura 4.2 $p(a \le X \le b)$ = área bajo la curva de densidad entre a y b

Para que $f(x)$ sea una función de densidad de probabilidad legítima debe satisfacer las dos siguientes condiciones:

1. $f(x) \ge 0$ con todas las x
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ = área bajo toda la gráfica de $f(x)$
   $= 1$

EJEMPLO 4.4 La dirección de una imperfección respecto a una línea de referencia sobre un objeto circular como un neumático, un rotor de freno o un volante está, en general, sujeta a incertidumbre. Considere la línea de referencia que conecta el vástago de la válvula de un neumático con el punto central, y sea X el ángulo medido en el sentido de las manecillas

del reloj respecto a la ubicación de una imperfección. Una posible función de densidad de probabilidad de X es

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{360} & 0 \le x < 360 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

La función de densidad de probabilidad aparece graficada en la figura 4.3. Claramente $f(x) \ge 0$. El área bajo la curva de densidad es simplemente el área de un rectángulo: (altura)(base) = (1/360)(360) = 1. La probabilidad de que el ángulo sea de entre 90 y 180° es

$$P(90 \le X \le 180) = \int_{90}^{180} \frac{1}{360}\,dx = \frac{x}{360}\Big|_{x=90}^{x=180} = \frac{1}{4} = .25$$

La probabilidad de que el ángulo de ocurrencia esté dentro de 90° de la línea de referencia es

$$P(0 \le X \le 90) + P(270 \le X < 360) = .25 + .25 = .50$$

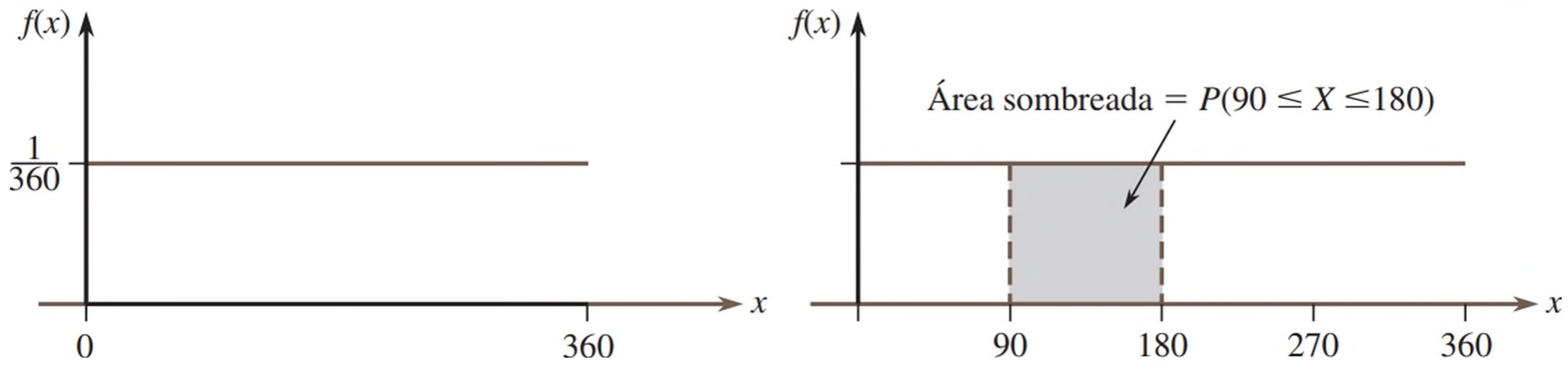


Figura 4.3 Función de densidad de probabilidad del ejemplo 4.4 ■

Debido a que siempre que $0 \le a \le b \le 360$ en el ejemplo 4.4, $P(a \le X \le b)$ depende sólo del ancho $b - a$ del intervalo, se dice que X tiene una distribución uniforme.

DEFINICIÓN

Se dice que una variable aleatoria continua X tiene una **distribución uniforme** en el intervalo $[A, B]$ si la función de densidad de probabilidad de X es

$$f(x; A, B) = \begin{cases} \dfrac{1}{B - A} & A \le x \le B \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

La gráfica de cualquier función de densidad de probabilidad uniforme es como la de la figura 4.3, excepto que el intervalo de densidad positiva es $[A, B]$ en lugar de [0, 360].

En el caso discreto, una función de masa de probabilidad (pmf) dice cuántas pequeñas "burbujas" de masa de probabilidad de varias magnitudes están distribuidas a lo largo del eje de medición. En el caso continuo la densidad de probabilidad está "repartida" en forma continua a lo largo del intervalo de posibles valores. Cuando la densidad está distribuida uniformemente a lo largo del intervalo se obtiene una función de densidad de probabilidad uniforme tal como en la figura 4.3.

Cuando X es una variable aleatoria discreta a cada valor posible se le asigna una probabilidad positiva. Esto no es así en el caso de una variable aleatoria continua (es decir, se

satisface la segunda condición de la definición) porque el área bajo una curva de densidad situada sobre cualquier valor único es cero:

$$P(X = c) = \int_c^c f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(x)\,dx = 0$$

El hecho de que $P(X = c) = 0$ cuando X es continua tiene una importante consecuencia práctica: la probabilidad de que X quede en algún intervalo entre a y b no depende de si el límite inferior a o el límite superior b están incluido en el cálculo de probabilidad:

$$P(a \le X \le b) = P(a < X < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X < b) \qquad \textbf{(4.1)}$$

Si X es discreta y tanto a como b son valores posibles (p. ej., X es binomial con $n = 20$ y $a = 5$, $b = 10$), entonces todas las cuatro probabilidades en (4.1) son diferentes.

La condición de probabilidad cero tiene un análogo físico. Considere una barra circular sólida con área de sección transversal = 1 pulg^2. Coloque la barra a lo largo de un eje de medición y suponga que la densidad de la barra en cualquier punto x está dada por el valor $f(x)$ de una función de densidad. Entonces si se corta un segmento en los puntos a y b de la barra y este segmento se retira, la cantidad de masa eliminada es $\int_a^b f(x)\,dx$; si la barra se corta exactamente en el punto c no se elimina masa. Se asigna masa a segmentos de intervalo de la barra pero no a puntos individuales.

EJEMPLO 4.5 "Intervalo de tiempo" en el flujo de tránsito es el lapso transcurrido entre el tiempo en que un automóvil termina de pasar por un punto fijo y el instante en que el siguiente vehículo comienza a pasar por ese punto. Sea X = el intervalo de tiempo para dos automóviles consecutivos seleccionados al azar en una autopista durante un periodo de tráfico intenso. La siguiente función de densidad de probabilidad de X es en esencia la sugerida en **"The Statistical Properties of Freeway Traffic" (*Transp. Res.* vol. 11: 221-228)**:

$$f(x) = \begin{cases} .15e^{-.15(x-.5)} & x \ge .5 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

La gráfica de $f(x)$ se da en la figura 4.4; no hay ninguna densidad asociada con intervalos de tiempo de menos de .5 y la densidad del intervalo de tiempo decrece con rapidez (exponencialmente rápido) a medida que x se incrementa a partir de .5. Claramente $f(x) \ge 0$; para demostrar que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$, se utiliza el resultado obtenido con cálculo integral $\int_a^{\infty} e^{-kx}\,dx = (1/k)e^{-k\cdot a}$. Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{.5}^{\infty} .15e^{-.15(x-.5)}\,dx = .15e^{.075}\int_{.5}^{\infty} e^{-.15x}\,dx$$

$$= .15e^{.075} \cdot \frac{1}{.15}\,e^{-(.15)(.5)} = 1$$

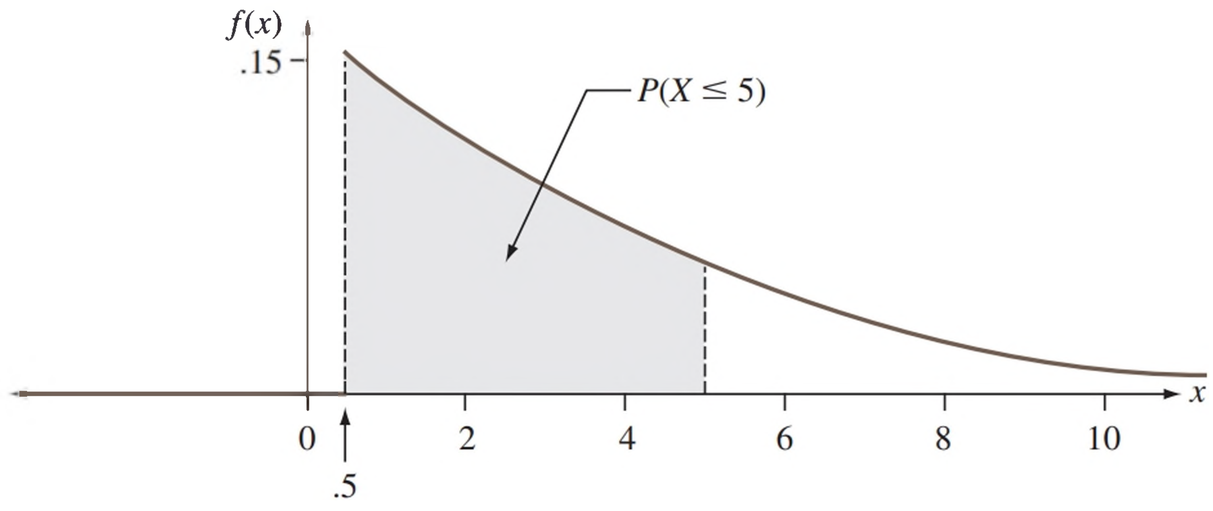


Figura 4.4 Curva de densidad del intervalo de tiempo entre vehículos en el ejemplo 4.5

La probabilidad de que el intervalo de tiempo sea cuando mucho de 5 segundos es

$$\begin{aligned} P(X \le 5) &= \int_{-\infty}^{5} f(x)\,dx = \int_{.5}^{5} .15e^{-.15(x-.5)}\,dx \\ &= .15e^{.075}\int_{.5}^{5} e^{-.15x}\,dx = .15e^{.075} \cdot \left(-\frac{1}{.15} e^{-.15x} \Big|_{x=.5}^{x=5} \right) \\ &= e^{.075}(-e^{-.75} + e^{-.075}) = 1.078(-.472 + .928) = .491 \\ &= P(\text{menos de 5 s}) = P(X < 5) \end{aligned}$$

■

A diferencia de las distribuciones discretas como la binomial, la hipergeométrica y la binomial negativa, la distribución de cualquier variable aleatoria continua dada no puede, en general, ser obtenida mediante argumentos probabilísticos. En cambio, se debe hacer una selección juiciosa de la función de densidad de probabilidad basada en conocimientos previos y en los datos disponibles. Afortunadamente, existen algunas familias generales de funciones de densidad de probabilidad que se ajustan bien a una amplia variedad de situaciones experimentales; varias de éstas se discuten más adelante en el capítulo.

Exactamente como en el caso discreto, a menudo es útil pensar en la población de interés como compuesta de valores X en lugar de individuos u objetos. La función de densidad de probabilidad es entonces un modelo de la distribución de valores en esta población numérica y, con base en este modelo, se pueden calcular varias características de la población (tal como la media).

EJERCICIOS Sección 4.1 (1-10)

1. La corriente en un circuito determinado medido por un amperímetro es una variable aleatoria continua X con la función de densidad siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} .075x + .2 & 3 \le x \le 5 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

a. Grafique la función de densidad de probabilidad para verificar que el área total bajo la curva de densidad es, de hecho, 1.

b. Calcule $P(X \le 4)$. ¿Cómo se compara esta probabilidad con $P(X < 4)$?

c. Calcule $P(3.5 \le X \le 4.5)$ y $P(4.5 < X)$.

2. Suponga que la temperatura de reacción X (en °C) en cierto proceso químico tiene una distribución uniforme con $A = -5$ y $B = 5$.

a. Calcule $P(X < 0)$.

b. Calcule $P(-2.5 < X < 2.5)$.

c. Calcule $P(-2 \le X \le 3)$.

d. Para que k satisfaga $-5 < k < k + 4 < 5$, calcule $P(k < X < k + 4)$.

3. El error implicado al hacer una medición es una variable aleatoria continua X con función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} .09375(4 - x^2) & -2 \le x \le 2 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

a. Trace la gráfica de $f(x)$.

b. Calcule $P(X > 0)$.

c. Calcule $P(-1 < X < 1)$.

d. Calcule $P(X < -.5 \text{ o } X > .5)$.

4. Sea X el esfuerzo vibratorio (lb/pulg^2) en el aspa de una turbina de viento a una velocidad del viento particular en un túnel aerodinámico. El artículo **"Blade Fatigue Life Assessment with Application to VAWTS" (*J. of Solar Energy Engr.*, 1982: 107–111)** propone la distribución de Rayleigh, con función de densidad de probabilidad

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{x}{\theta^2} \cdot e^{-x^2/(2\theta^2)} & x > 0 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

como modelo de la distribución X.

a. Verifique que $f(x;\ \theta)$ es una función de densidad de probabilidad legítima.

b. Suponga que $\theta = 100$ (un valor sugerido por una gráfica en el artículo). ¿Cuál es la probabilidad de que X sea cuando mucho 200? ¿Y menos de 200? ¿Por lo menos 200?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que X esté entre 100 y 200 (de nuevo suponiendo $\theta = 100$)?

d. Dé una expresión para $P(X \le x)$.

5. Un profesor universitario nunca termina su disertación antes de que concluya la hora y siempre termina cerca de dos minutos después de la hora. Sea X = el tiempo que transcurre entre el final de la hora y el final de la disertación, y suponga que la función de densidad de probabilidad de X es

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

a. Determine el valor de k y trace la curva de densidad correspondiente. [*Sugerencia:* El área total bajo la gráfica de $f(x)$ es 1.]

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la disertación termine dentro del minuto final de la hora?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que la disertación continúe después de la hora entre 60 y 90 segundos?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que la disertación continúe durante al menos los primeros 90 segundos después de la hora?

6. El peso real de lectura de la pastilla de un estéreo ajustado a 3 gramos en un tocadiscos particular puede ser considerado como una variable aleatoria continua X con función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} k[1 - (x-3)^2] & 2 \le x \le 4 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

a. Trace la gráfica de $f(x)$.

b. Determine el valor de k.

c. ¿Cuál es la probabilidad de que el peso real de lectura sea mayor que el peso prescrito?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que el peso real de lectura esté dentro de .25 gramos del peso prescrito?

e. ¿Cuál es la probabilidad de que el peso real difiera del peso prescrito por más de .5 gramos?

7. El artículo **"Second Moment Reliability Evaluation vs. Monte Carlo Simulations for Weld Fatigue Strength"** (***Quality and Reliability Engr. Intl.*, 2012: 887–896**) considera el uso de una distribución uniforme con $A = .20$ y $B = 4.25$ para el diámetro X de un determinado tipo de soldadura (mm).

a. Determine la función de densidad de probabilidad de X y trace la gráfica.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el diámetro supere los 3 mm?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que el diámetro esté dentro de 1 mm del diámetro promedio?

d. Para cualquier valor a satisfactorio $.20 < a < a + 1 < 4.25$, ¿qué es $P(a < X < a + 1)$?

8. Para llegar a su trabajo un profesor primero debe abordar un autobús cerca de su casa y luego un segundo autobús. Si el tiempo de espera (en minutos) en cada parada tiene una distribución uniforme con $A = 0$ y $B = 5$, entonces se puede demostrar que el tiempo de espera total Y tiene la función de densidad de probabilidad

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{25}y & 0 \le y < 5 \\ \frac{2}{5} - \frac{1}{25}y & 5 \le y \le 10 \\ 0 & y < 0 \text{ o } y > 10 \end{cases}$$

a. Trace la gráfica de la función de densidad de probabilidad de Y.

b. Verifique que $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,dy = 1$.

c. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de espera total sea cuando mucho de 3 min?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de espera total sea cuando mucho de 8 min?

e. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de espera total esté entre 3 y 8 min?

f. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de espera total sea de menos de 2 min o de más de 6 min?

9. Con base en un análisis de datos muestrales, el artículo **"Pedestrians' Crossing Behaviors and Safety at unmarked Roadways in China"** (***Accident Analysis and Prevention*, 2011: 1927–1936**) propone la función de densidad de probabilidad $f(x) = .15e^{-.15(x-1)}$ cuando $x \ge 1$ como un modelo para la distribución de X = tiempo (s) en la línea media.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que ese tiempo de espera sea a lo sumo de 5 s? De más de 5 s?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que ese tiempo de espera esté entre 2 y 5 s?

10. Una familia de funciones de densidad de probabilidad que ha sido utilizada para aproximar la distribución del ingreso, el tamaño de la población de una ciudad y el tamaño de las empresas es la familia Pareto. La familia tiene dos parámetros, k y θ, ambos > 0, y la función de densidad de probabilidad es

$$f(x; k, \theta) = \begin{cases} \dfrac{k \cdot \theta^k}{x^{k+1}} & x \ge \theta \\ 0 & x < \theta \end{cases}$$

a. Trace la gráfica de $f(x; k, \theta)$.

b. Verifique que el área total bajo la gráfica es igual a 1.

c. Si la variable aleatoria X tiene una función de densidad de probabilidad $f(x; k, \theta)$, con cualquier $b > \theta$ fija, obtenga una expresión para $P(X \le b)$.

d. Para $\theta < a < b$, obtenga una expresión para la probabilidad $P(a \le X \le b)$.

4.2 Funciones de distribución acumulada y valores esperados

Varios de los más importantes conceptos introducidos en el estudio de las distribuciones discretas también desempeñan un importante papel en las distribuciones continuas. Las definiciones análogas a las del capítulo 3 implican reemplazar suma por integración.

Función de distribución acumulada

La función de distribución acumulada $F(x)$ de una variable aleatoria discreta X, con cualquier número especificado, da x; la probabilidad $P(X \leq x)$. Esta se obtiene al sumar la función de masa de probabilidad $p(y)$ a lo largo de todos los valores posibles y que satisfagan $y \leq x$. La función de distribución acumulada de una variable aleatoria continua da las mismas probabilidades $P(X \leq x)$ y se obtiene integrando la función de densidad de probabilidad $f(y)$ entre los límites $-\infty$ y x.

DEFINICIÓN

La **función de distribución acumulada** $F(x)$ de una variable aleatoria continua X se define para todo número x como

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy$$

Para cada x, $F(x)$ es el área bajo la curva de densidad a la izquierda de x. Esto se ilustra en la figura 4.5 donde $F(x)$ se incrementa con suavidad a medida que x se incrementa.

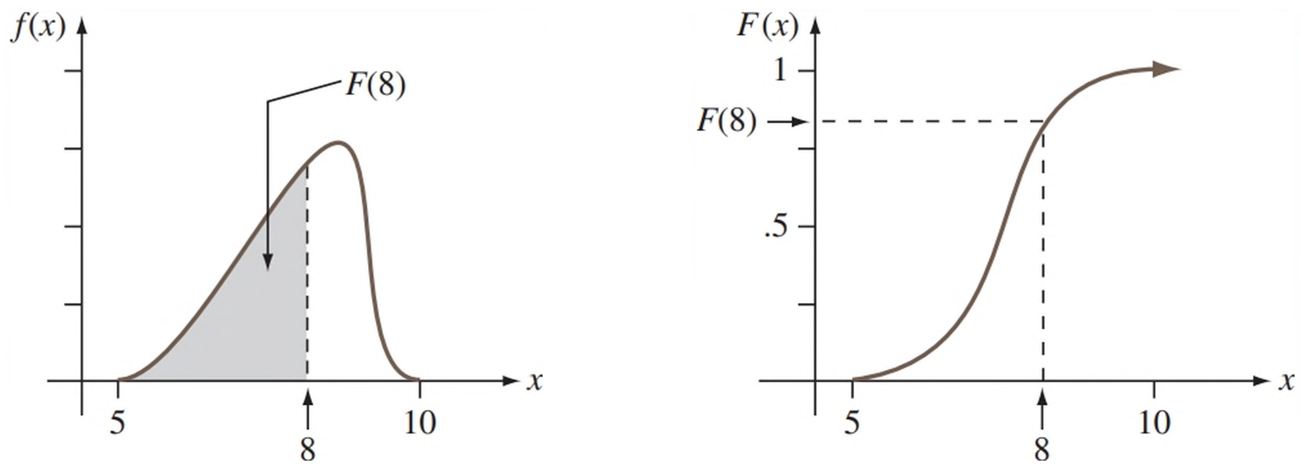


Figura 4.5 Una función de densidad de probabilidad y una función de distribución acumulada asociada

EJEMPLO 4.6 Sea X el espesor de una cierta lámina de metal con distribución uniforme en $[A, B]$. La función de densidad se muestra en la figura 4.6. Para $x < A$, $F(x) = 0$, dado que no hay área bajo la gráfica de la función de densidad a la izquierda de la x. Con $x \geq B$, $F(x) = 1$, puesto que toda el área está acumulada a la izquierda de la x. Finalmente para $A \leq x \leq B$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \int_{A}^{x} \frac{1}{B-A}\,dy = \frac{1}{B-A} \cdot y \Big|_{y=A}^{y=x} = \frac{x-A}{B-A}$$

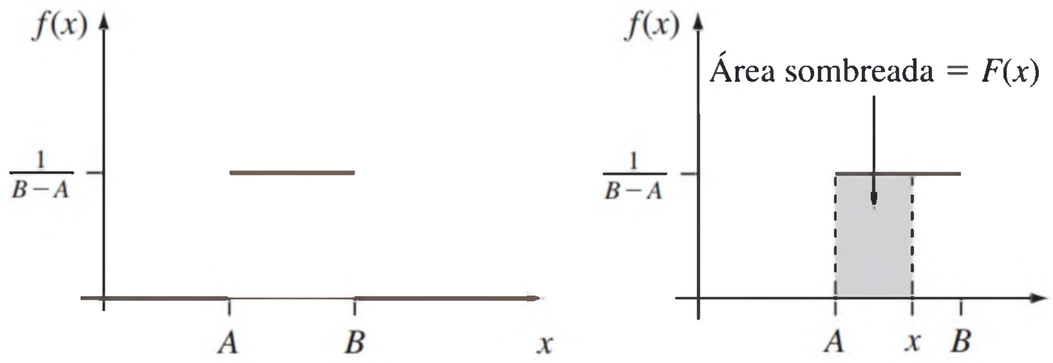


Figura 4.6 Función de densidad de probabilidad de una distribución uniforme

La función de distribución acumulada es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < A \\ \dfrac{x-A}{B-A} & A \leq x < B \\ 1 & x \geq B \end{cases}$$

La gráfica de esta función de distribución acumulada aparece en la figura 4.7.

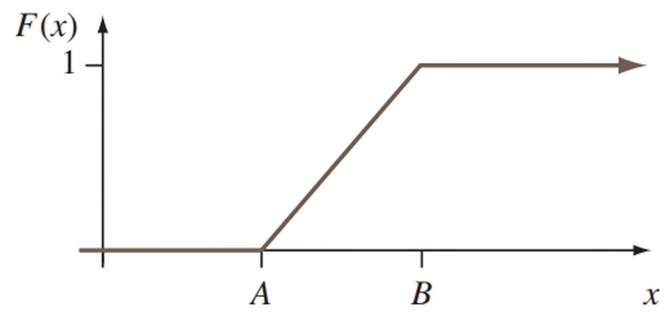


Figura 4.7 Función de distribución acumulada de una distribución uniforme ■

Utilizar $F(x)$ para calcular probabilidades

La importancia de la función de distribución acumulada en este caso, lo mismo que para variables aleatorias discretas, es que las probabilidades de varios intervalos pueden ser calculadas con una fórmula o tabla de $F(x)$.

PROPOSICIÓN

Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad $f(x)$ y función de distribución acumulada $F(x)$. Entonces para cualquier número a,

$$P(X > a) = 1 - F(a)$$

y para dos números cualesquiera a y b con $a < b$,

$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$$

La figura 4.8 ilustra la segunda parte de esta proposición; la probabilidad deseada es el área sombreada bajo la curva de densidad entre a y b, y es igual a la diferencia entre las dos áreas acumuladas sombreadas. Esto difiere de lo que es apropiado para una variable aleatoria discreta de valor entero (p. ej., binomial o Poisson): $P(a \le X \le b) = F(b) - F(a - 1)$ cuando a y b son enteros.

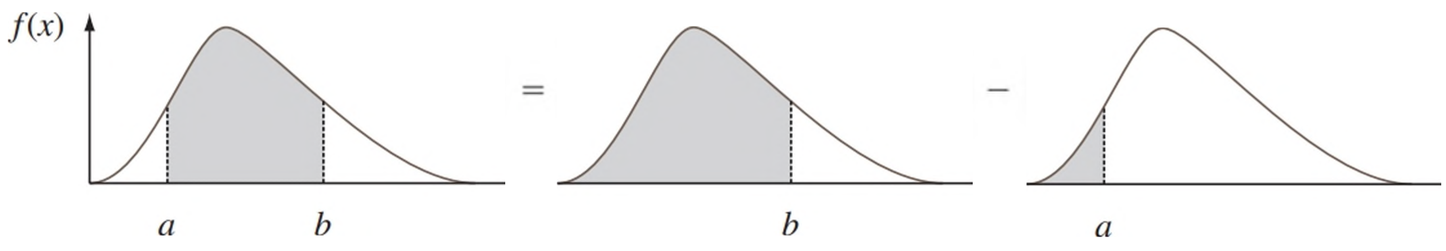


Figura 4.8 Cálculo de $P(a \le X \le b)$ a partir de probabilidades acumuladas

EJEMPLO 4.7 Suponga que la función de densidad de probabilidad de la magnitud X de una carga dinámica sobre un puente (en newtons) está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} + \frac{3}{8}x & 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Para cualquier número x entre 0 y 2,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy = \int_{0}^{x} \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{8}y\right) dy = \frac{x}{8} + \frac{3}{16}x^2$$

Por tanto,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{8} + \frac{3}{16}x^2 & 0 \le x \le 2 \\ 1 & 2 < x \end{cases}$$

Las gráficas de $f(x)$ y $F(x)$ se muestran en la figura 4.9. La probabilidad de que la carga esté entre 1 y 1.5 es

$$\begin{aligned} P(1 \le X \le 1.5) &= F(1.5) - F(1) \\ &= \left[\frac{1}{8}(1.5) + \frac{3}{16}(1.5)^2\right] - \left[\frac{1}{8}(1) + \frac{3}{16}(1)^2\right] \\ &= \frac{19}{64} = .297 \end{aligned}$$

La probabilidad de que la carga sea de más de 1 es

$$P(X > 1) = 1 - P(X \le 1) = 1 - F(1) = 1 - \left[\frac{1}{8}(1) + \frac{3}{16}(1)^2\right]$$

$$= \frac{11}{16} = .688$$

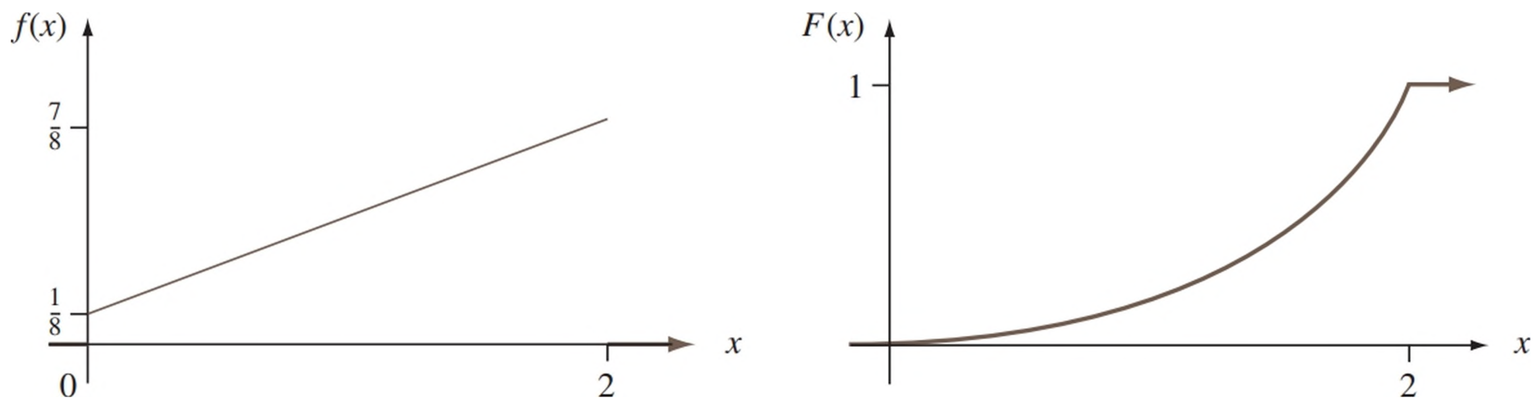


Figura 4.9 Función de densidad de probabilidad y función de distribución acumulada del ejemplo 4.7 ■

Una vez que se obtiene la función de distribución acumulada, cualquier probabilidad que implique X es fácil de calcular sin ninguna integración adicional.

Obtención de $f(x)$ a partir de $F(x)$

Para X discreta la función de masa de probabilidad se obtiene a partir de la función de distribución acumulada considerando la diferencia entre dos valores $F(x)$. El análogo continuo de una diferencia es una derivada. El siguiente resultado es una consecuencia del teorema fundamental del cálculo.

PROPOSICIÓN

Si X es una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad $f(x)$ y función de distribución acumulada $F(x)$, entonces en cada x que hace posible que la derivada $F'(x)$ exista, $F'(x) = f(x)$.

EJEMPLO 4.8 (Continuación del ejemplo 4.6)

Cuando X tiene una distribución uniforme, $F(x)$ es derivable excepto en $x = A$ y $x = B$, donde la gráfica de $F(x)$ tiene esquinas afiladas. Como $F(x) = 0$ para $x < A$ y $F(x) = 1$ para $x > B$, $F'(x) = 0 = f(x)$ con dicha x. Para $A < x < B$,

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x - A}{B - A}\right) = \frac{1}{B - A} = f(x)$$ ■

Percentiles de una distribución continua

Cuando se dice que la calificación de un individuo en una prueba estaba en el 85º percentil de la población, significa que 85% de todas las calificaciones de la población estuvieron por debajo de dicha calificación y que 15% estuvo por encima. Asimismo, el 40º percentil

es la calificación que sobrepasa a 40% de todas las calificaciones y es superado por 60% de estas (tener un valor correspondiente a un percentil elevado no es necesariamente bueno; por ejemplo, usted no querría estar en el percentil 99 por el contenido de alcohol en la sangre).

DEFINICIÓN

Sea p un número entre 0 y 1. El **$(100p)^\circ$ percentil** de la distribución de una variable aleatoria continua X, denotada por $\eta(p)$, se define como

$$p = F(\eta(p)) = \int_{-\infty}^{\eta(p)} f(y)\,dy \tag{4.2}$$

De acuerdo con la expresión (4.2), $\eta(p)$ es ese valor sobre el eje de medición, de tal suerte que $100p\%$ del área bajo la gráfica de $f(x)$ queda a la izquierda de $\eta(p)$ y $100(1 - p)\%$ queda a la derecha. Por tanto, $\eta(.75)$, el 75° percentil, es tal que el área bajo la gráfica de $f(x)$ a la izquierda de $\eta(.75)$ es .75. La figura 4.10 ilustra la definición.

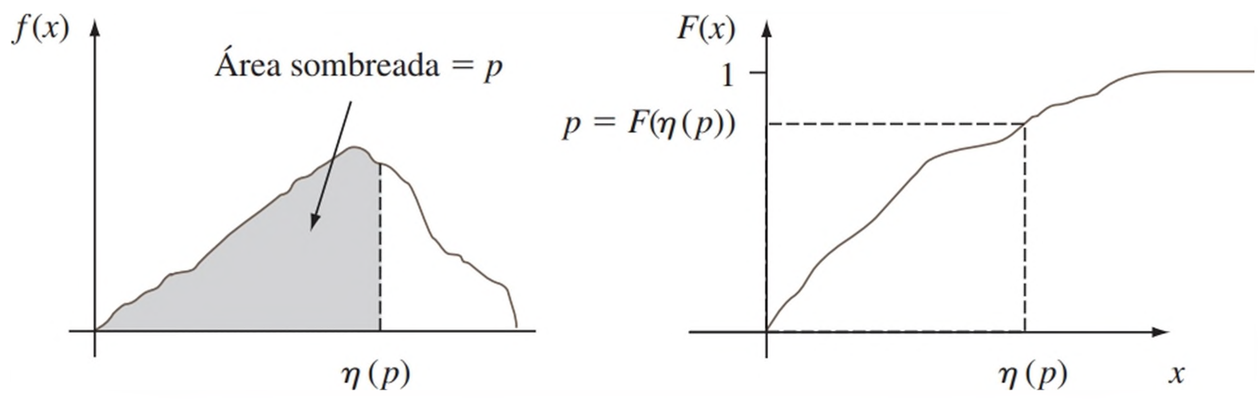


Figura 4.10 El $(100p)^\circ$ percentil de una distribución continua

EJEMPLO 4.9 La distribución de la cantidad de grava (en toneladas) vendida por una compañía de materiales para la construcción particular en una semana dada es una variable aleatoria continua X con función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1 - x^2) & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

La función de distribución acumulada de las ventas para cualquier x entre 0 y 1 es

$$F(x) = \int_0^x \frac{3}{2}(1 - y^2)\,dy = \frac{3}{2}\left(y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=x} = \frac{3}{2}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)$$

Las gráficas de $f(x)$ y de $F(x)$ aparecen en la figura 4.11. El $(100p)^\circ$ percentil de esta distribución satisface la ecuación

$$p = F(\eta(p)) = \frac{3}{2}\left[\eta(p) - \frac{(\eta(p))^3}{3}\right]$$

es decir,

$$(\eta(p))^3 - 3\eta(p) + 2p = 0$$

Para el 50° percentil, $p = .5$ y la ecuación que se tiene que resolver es $\eta^3 - 3\eta + 1 = 0$; la solución es $\eta = \eta(.5) = .347$. Si la distribución no cambia de una semana a otra, a la larga 50% de todas las semanas se realizarán ventas de menos de .347 ton y 50% de más de .347 ton.

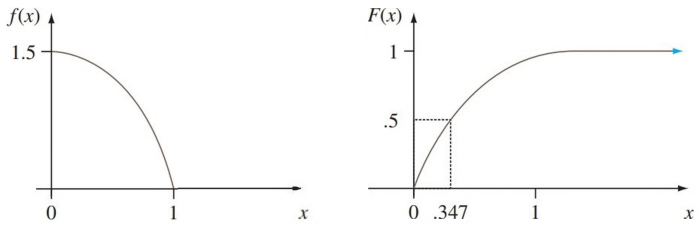


Figura 4.11 Función de densidad de probabilidad y función de distribución acumulativa del ejemplo 4.9 ■

DEFINICIÓN

La **mediana** de una distribución continua, denotada por $\tilde{\mu}$, es el 50° percentil, así que $\tilde{\mu}$ satisface $.5 = F(\tilde{\mu})$. Es decir, la mitad del área bajo la curva de densidad se encuentra a la izquierda de $\tilde{\mu}$ y la mitad a la derecha de $\tilde{\mu}$.

Una distribución continua cuya función de densidad de probabilidad es **simétrica** —es decir, la gráfica de la función de densidad de probabilidad a la izquierda de algún punto es una imagen en espejo de la gráfica a la derecha de dicho punto—, tiene una mediana $\tilde{\mu}$ igual al punto de simetría, puesto que la mitad del área bajo la curva queda a uno u otro lado de este punto. La figura 4.12 da varios ejemplos. A menudo se supone que el error en la medición de una cantidad física tiene una distribución simétrica.

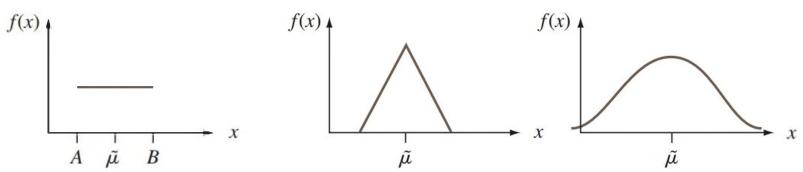


Figura 4.12 Medianas de distribuciones simétricas

Valores esperados

Para una variable aleatoria discreta X, $E(X)$ se obtuvo sumando $x \cdot p(x)$ a lo largo de posibles valores de X. Aquí se reemplaza la suma por la integración y la función de masa de probabilidad por la función de densidad de probabilidad para obtener un promedio ponderado continuo.

DEFINICIÓN

El **valor esperado** o **valor medio** de una variable aleatoria continua X con función de densidad de probabilidad $f(x)$ es

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$$

EJEMPLO 4.10 (Continuación del ejemplo 4.9)

La función de densidad de probabilidad de las ventas semanales de grava X fue

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1 - x^2) & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

por tanto,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_{0}^{1} x \cdot \frac{3}{2}(1 - x^2)\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\int_{0}^{1} (x - x^3)\,dx = \frac{3}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{3}{8}$$ ■

Cuando la función de densidad de probabilidad $f(x)$ especifica un modelo para la distribución de valores en una población numérica, μ es la media de la población que es la medida de ubicación o centralización de la población que se utiliza con más frecuencia.

Con frecuencia se desea calcular el valor esperado de alguna función $h(X)$ de la variable aleatoria X. Si se piensa en $h(X)$ como una nueva variable aleatoria Y, se utilizan técnicas de estadística matemática para obtener la función de densidad de probabilidad de Y, y $E(Y)$ se calcula a partir de la definición. Afortunadamente, como en el caso discreto, existe una forma más fácil de calcular $E[h(X)]$.

PROPOSICIÓN

Si X es una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad $f(x)$ y $h(X)$ es cualquier función de X, entonces

$$E[h(X)] = \mu_{h(X)} = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cdot f(x)\,dx$$

Es decir, así como $E(X)$ es un promedio ponderado de posibles X valores, donde la función de ponderación es la función de densidad de probabilidad $f(x)$, $E[h(X)]$ es un promedio ponderado de los valores $h(X)$.

EJEMPLO 4.11 Dos especies compiten en una región por el control de una cantidad limitada de cierto recurso. Sea X la proporción del recurso controlado por la especie 1 y suponga que la función de densidad de probabilidad de X es

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

la cual es una distribución uniforme en [0, 1]. (En su libro ***Ecological Diversity***, E. C. Pielou llama a esto el modelo del "palo roto" para la asignación de recursos, puesto que es análogo a la ruptura de un palo en un lugar seleccionado al azar.) Entonces la especie que controla la mayor parte de este recurso controla la cantidad

$$h(X) = \text{máx}\,(X, 1 - X) = \begin{cases} 1 - X & \text{si } 0 \le X < \dfrac{1}{2} \\ X & \text{si } \dfrac{1}{2} \le X \le 1 \end{cases}$$

La cantidad que se espera que controle la especie que tiene el control mayoritario es entonces

$$E[h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \text{máx}(x, 1 - x) \cdot f(x)\,dx = \int_{0}^{1} \text{máx}(x, 1 - x) \cdot 1\,dx$$

$$= \int_{0}^{1/2} (1 - x) \cdot 1\,dx + \int_{1/2}^{1} x \cdot 1\,dx = \frac{3}{4}$$ ■

En el caso discreto la varianza de X se definió como la desviación al cuadrado esperada respecto a μ, y se calculó sumando. De nuevo, en este caso, la integración reemplaza a la suma.

DEFINICIÓN

La **varianza** de una variable aleatoria continua X con función de densidad de probabilidad $f(x)$ y valor medio μ es

$$\sigma_X^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x)dx = E[(X - \mu)^2]$$

La **desviación estándar** (DE) de X es $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$.

La varianza y la desviación estándar dan medidas cuantitativas de qué tanta dispersión hay en la distribución o población de valores x. Una vez más σ es aproximadamente del tamaño de una desviación típica de μ. El cálculo de σ^2 se facilita mediante el uso de la fórmula abreviada similar a la que se utiliza en el caso discreto.

PROPOSICIÓN

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

EJEMPLO 4.12 (Continuación del ejemplo 4.10)

Para X = ventas semanales de grava se calculó $E(X) = \frac{3}{8}$. Puesto que

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx = \int_0^1 x^2 \cdot \frac{3}{2}(1 - x^2)\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{3}{2}(x^2 - x^4)dx = \frac{1}{5}$$

$$V(X) = \frac{1}{5} - \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{19}{320} = .059 \quad \text{y} \quad \sigma_X = .244$$ ■

Cuando $h(X) = aX + b$, el valor esperado y la varianza de $h(X)$ satisfacen las mismas propiedades que en el caso discreto: $E[h(X)] = a\mu + b$ y $V[h(X)] = a^2 \cdot \sigma^2$.

EJERCICIOS Sección 4.2 (11–27)

11. Sea X la cantidad de tiempo que un libro en reserva de dos horas permanece realmente prestado y supongamos que la función de distribución acumulada es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x^2}{4} & 0 \le x < 2 \\ 1 & 2 \le x \end{cases}$$

- **a.** Calcule $P(X \le 1)$.
- **b.** Calcule $P(.5 \le X \le 1)$.
- **c.** Calcule $P(X > 1.5)$.
- **d.** ¿Cuál es la mediana del tiempo de préstamo $\tilde{\mu}$? [resuelva $.5 = F(\tilde{\mu})$].
- **e.** Obtenga la función de densidad $f(x)$.
- **f.** Calcule $E(X)$
- **g.** Calcule $V(X)$ y σ_X.
- **h.** Si al prestatario se le cobra una cantidad $h(X) = X^2$ cuando el tiempo de préstamo es X, calcule el cobro esperado $E[h(X)]$.

12. La función de distribución acumulada de X (= error de medición) del ejercicio 3 es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{32}\left(4x - \dfrac{x^3}{3}\right) & -2 \le x < 2 \\ 1 & 2 \le x \end{cases}$$

- **a.** Calcule $P(X < 0)$.
- **b.** Calcule $P(-1 < X < 1)$.
- **c.** Calcule $P(.5 < X)$.

d. Verifique que $f(x)$ sea la dada en el ejercicio 3 al obtener $F'(x)$.

e. Verifique que $\tilde{\mu} = 0$.

13. El ejemplo 4.5 introdujo el concepto de intervalo de tiempo en el flujo de tránsito y propuso una distribución particular para $X =$ el intervalo de tiempo entre dos vehículos consecutivos seleccionados al azar (s). Suponga que en un entorno de tránsito diferente la distribución del intervalo de tiempo tiene la forma

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{x^4} & x > 1 \\ 0 & x \le 1 \end{cases}$$

a. Determine el valor de k con el cual $f(x)$ es una función de densidad de probabilidad legítima.

b. Obtenga la función de distribución acumulada.

c. Use la función de distribución acumulada de (b) para determinar la probabilidad de que el intervalo de tiempo exceda 2 segundos y también la probabilidad de que el intervalo sea de entre 2 y 3 segundos.

d. Obtenga un valor medio del intervalo de tiempo y su desviación estándar.

e. ¿Cuál es la probabilidad de que el intervalo de tiempo quede dentro de 1 desviación estándar de la media?

14. El artículo **"Modeling Sediment and Water Column Interactions for Hidrophobic Pollutants" (*Water Research*, 1984: 1169–1174)** sugiere la distribución uniforme en el intervalo (7.5, 20) como modelo de profundidad (cm) de la capa de bioturbación en el sedimento en una cierta región.

a. ¿Cuáles son la media y la varianza de la profundidad?

b. ¿Cuál es la función de distribución acumulada de la profundidad?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que la profundidad observada sea cuando mucho de 10? ¿Y entre 10 y 15?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que la profundidad observada esté dentro de 1 desviación estándar del valor medio? ¿Y dentro de 2 desviaciones estándar?

15. Sea X la cantidad de espacio ocupado por un artículo colocado en un contenedor de 1 pie^3. La función de densidad de probabilidad de X es

$$f(x) = \begin{cases} 90x^8(1-x) & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

a. Grafique la función de densidad de probabilidad. Luego obtenga la función de distribución acumulada de X y grafíquela.

b. ¿Cuál es $P(X \le .5)$ [es decir, $F(.5)$]?

c. Con la función de distribución acumulada de a), ¿cuál es $P(.25 < X \le .5)$? ¿Cuál es $P(.25 \le X \le .5)$?

d. ¿Cuál es el percentil 75 de la distribución?

e. Calcule $E(X)$ y σ_X.

f. ¿Cuál es la probabilidad de que X esté a más de 1 desviación estándar de su media?

16. El artículo **"A Model of Pedestrians' Waiting Times for Street Crossings at Signalized Intersections" (*Transportation Research*, 2013: 17–28)** sugirió que, bajo ciertas circunstancias, la distribución del tiempo de espera X podría ser modelada con la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f(x;\theta,\tau) = \begin{cases} \dfrac{\theta}{\tau}(1 - x/\tau)^{\theta-1} & 0 \le x < \tau \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

a. Trace la gráfica de $f(x; \theta, 80)$ para los tres casos $\theta = 4$ y 1.5 (estas gráficas aparecen en el artículo citado) y comente sus formas.

b. Obtenga la función de distribución acumulada de X.

c. Obtenga una expresión para la mediana de la distribución del tiempo de espera.

d. Para el caso $\theta = 4$, $\tau = 80$, calcule $P(50 \le X \le 70)$ sin hacer por el momento ninguna integración adicional.

17. Si la distribución de X en el intervalo $[A, B]$ es uniforme.

a. Obtenga una expresión para el $(100p)^{\text{o}}$ percentil.

b. Calcule $E(X)$, $V(X)$ y σ_X.

c. Con n, un entero positivo, calcule $E(X^n)$.

18. Sea X el voltaje de salida de un micrófono y suponga que X tiene una distribución uniforme en el intervalo de -1 a 1. El voltaje es procesado por un "limitador duro" con valores de corte de $-.5$ y .5, de modo que la salida del limitador es una variable aleatoria Y relacionada con X mediante $Y = X$ si $|X| \le .5$, $Y = .5$ si $X > .5$ y $Y = -.5$ si $X < -.5$.

a. ¿Cuál es $P(Y = .5)$?

b. Obtenga la función de distribución acumulada de Y y grafíquela.

19. Sea X una variable aleatoria continua con función de distribución acumulada

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \dfrac{x}{4}\left[1 + \ln\left(\dfrac{4}{x}\right)\right] & 0 < x \le 4 \\ 1 & x > 4 \end{cases}$$

[Este tipo de función de distribución acumulada es sugerido en el artículo **"Variability in Measured Bedload-Transport Rates" (*Water Resources Bull.*, 1985: 39–48)** como modelo de cierta variable hidrológica.]

a. ¿Cuál es $P(X \le 1)$?

b. ¿Cuál es $P(1 \le X \le 3)$?

c. ¿Cuál es la función de densidad de probabilidad de X?

20. Considere la función de densidad de probabilidad del tiempo de espera total Y de dos autobuses

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{25}y & 0 \le y < 5 \\ \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{25}y & 5 \le y \le 10 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

introducida en el ejercicio 8.

a. Calcule y trace la función de distribución acumulada de Y. [*Sugerencia:* Considere por separado $0 \le y \le 5$ y $5 \le y \le 10$ al calcular $F(y)$. Sería útil una gráfica de la función de densidad.]

b. Obtenga una expresión para el $(100p)^{\text{o}}$ percentil. [*Sugerencia:* Considere por separado $0 < p < .5$ y $.5 < p < 1$.]

c. Calcule $E(Y)$ y $V(Y)$. ¿Cómo se comparan estos valores con el tiempo de espera probable y la varianza de un solo camión cuando el tiempo está uniformemente distribuido en [0, 5]?

21. Un ecólogo desea marcar una región de muestreo circular de 10 m de radio. Sin embargo, el radio de la región resultante en realidad es una variable aleatoria R con función de densidad de probabilidad

$$f(r) = \begin{cases} \frac{3}{4}[1 - (10 - r)^2] & 9 \le r \le 11 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

¿Cuál es el área esperada de la región circular resultante?

22. La demanda semanal de gas propano (en miles de galones) de una instalación particular es una variable aleatoria X con función de densidad con probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} 2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) & 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

a. Calcule la función de distribución acumulada de X.

b. Obtenga una expresión para el $(100p)^{\text{o}}$ percentil. ¿Cuál es el valor de $\tilde{\mu}$?

c. Calcule $E(X)$ y $V(X)$.

d. Si al principio de la semana hay 1500 galones en existencia y no se espera ningún nuevo suministro durante la semana, ¿cuántos de los 1500 galones se espera que queden al final de la semana? [*Sugerencia:* sea $h(x)$ = la cantidad que queda cuando la demanda = x.]

23. Si la temperatura a la cual cierto compuesto se funde es una variable aleatoria con valor medio de 120°C y desviación estándar de 2°C, ¿cuáles son la temperatura media y la desviación estándar medidas en °F? [*Sugerencia:* °F = 1.8°C + 32.]

24. La función de densidad de probabilidad de Pareto de X es

$$f(x; k, \theta) = \begin{cases} \frac{k \cdot \theta^k}{x^{k+1}} & x \ge \theta \\ 0 & x < \theta \end{cases}$$

introducida en el ejercicio 10.

a. Si $k > 1$, calcule $E(X)$.

b. ¿Qué se puede decir sobre $E(X)$ si $k = 1$?

c. Si $k > 2$, demuestre que $V(X) = k\theta^2(k - 1)^{-2}(k - 2)^{-1}$.

d. Si $k = 2$, ¿qué se puede decir sobre $V(X)$?

e. ¿Qué condiciones en cuanto a k son necesarias para garantizar que $E(X^n)$ sea finito?

25. Sea X la temperatura en °C a la cual ocurre una reacción química y sea Y la temperatura en °F (por lo que $Y = 1.8X + 32$).

a. Si la mediana de la distribución X es $\tilde{\mu}$, demuestre que $1.8\tilde{\mu} + 32$ es la mediana de la distribución Y.

b. ¿Cómo está relacionado el percentil 90 de la distribución Y con el percentil 90 de la distribución X? Verifique su conjetura.

c. Más generalmente, si $Y = aX + b$, ¿cómo está relacionado cualquier percentil de la distribución Y con el percentil correspondiente de la distribución X?

26. Sean X los gastos médicos totales (en miles de dólares) en que incurre un individuo particular durante un cierto año. Aunque X es una variable aleatoria discreta, suponga que su distribución se aproxima bastante bien mediante una distribución continua con función de densidad de probabilidad $f(x) = k(1 - x/2.5)^{-7}$ para $x \ge 0$.

a. ¿Cuál es el valor de k?

b. Grafique la función de densidad de probabilidad de X.

c. ¿Cuáles son el valor esperado y la desviación estándar de los gastos médicos totales?

d. Este individuo está cubierto por un plan de aseguramiento que le impone una provisión deducible de \$500 (así que los primeros \$500 de gastos son pagados por el individuo). El plan pagará 80% de cualquier gasto adicional que exceda de \$500 y el pago máximo por parte del individuo (incluida la cantidad deducible) es de \$2500. Sea Y la cantidad de gastos médicos de este individuo que paga la compañía de seguros. ¿Cuál es el valor esperado de Y?

[*Sugerencia:* primero indague qué valor de X corresponde al gasto máximo que sale del bolsillo de \$2500. Luego escriba una expresión para Y como una función de X (la cual implique varios precios diferentes) y calcule el valor esperado de la función.]

27. Cuando se lanza un dardo a un blanco circular considere la ubicación del punto de aterrizaje respecto al centro del blanco. Sea X el ángulo en grados medido respecto a la horizontal y suponga que X está uniformemente distribuida en [0, 360]. Defina Y como la variable transformada $Y = h(X) = (2\pi/360)X - \pi$; por tanto, Y es el ángulo medido en radianes y Y está entre $-\pi$ y π. Obtenga $E(Y)$ y σ_Y obteniendo primero $E(X)$ y σ_X y luego utilizando el hecho de que $h(X)$ es una función lineal de X.

4.3 Distribución normal

La **distribución normal** es la más importante tanto en la probabilidad y en la estadística. Muchas poblaciones numéricas tienen distribuciones que pueden ser representadas muy fielmente mediante una curva normal apropiada. Los ejemplos incluyen estaturas, pesos y otras características físicas (el famoso artículo **1903 *Biometrika* "On the Laws of Inheritance in Man"** discutió muchos ejemplos de esta clase), errores de medición en experimentos científicos, mediciones antropométricas en fósiles, tiempos de reacción

en experimentos psicológicos, mediciones de inteligencia y aptitud, calificaciones en varios exámenes y numerosas medidas e indicadores económicos. Además, aun cuando las variables individuales no estén normalmente distribuidas, las sumas y los promedios de las variables en condiciones adecuadas tendrán de manera aproximada una distribución normal; este es el contenido del teorema del límite central que se aborda en el siguiente capítulo.

DEFINICIÓN

Se dice que una variable aleatoria continua X tiene una **distribución normal** con parámetros μ y σ (o μ y σ^2), donde $-\infty < \mu < \infty$ y $0 < \sigma$, si la función de densidad de probabilidad de X es

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \quad -\infty < x < \infty \tag{4.3}$$

De nuevo e denota la base del sistema de logaritmos naturales y es aproximadamente igual a 2.71828 y π representa la conocida constante matemática con un valor aproximado de 3.14159. El enunciado de que X está normalmente distribuida con los parámetros μ y σ^2 a menudo se abrevia como $X \sim N(\mu,\sigma^2)$.

Claramente $f(x; \mu, \sigma) \geq 0$ aunque se tiene que utilizar un argumento de cálculo un tanto complicado para verificar que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x; \mu, \sigma)\,dx = 1$. Se puede demostrar que $E(X) = \mu$ y $V(X) = \sigma^2$, de modo que los parámetros son la media y la desviación estándar de X. La figura 4.13 representa gráficas de $f(x; \mu, \sigma)$ de varios pares diferentes (μ, σ). Cada curva de densidad es simétrica respecto a μ y acampanada, de modo que el centro de la campana (punto de simetría) es tanto la media de la distribución como la mediana. La media μ es un *parámetro de ubicación*, ya que al cambiar su valor de forma rígida desplaza la curva de densidad hacia uno u otro lado; σ se conoce como un *parámetro de escala* porque al cambiar su valor estira o comprime la curva horizontal sin cambiar la forma básica. Los puntos de inflexión de una curva normal (puntos donde la curva cambia de girar hacia abajo a girar hacia arriba) se producen en $\mu - \sigma$ y $\mu + \sigma$. Así el valor de σ se puede visualizar como la distancia de la media de estos puntos de inflexión. Un valor grande de σ corresponde a una curva de densidad que se extiende bastante sobre μ, mientras que un valor pequeño produce una curva altamente concentrada. Entre más grande sea el valor de σ, es más probable que se pueda observar un valor de X lejos de la media.

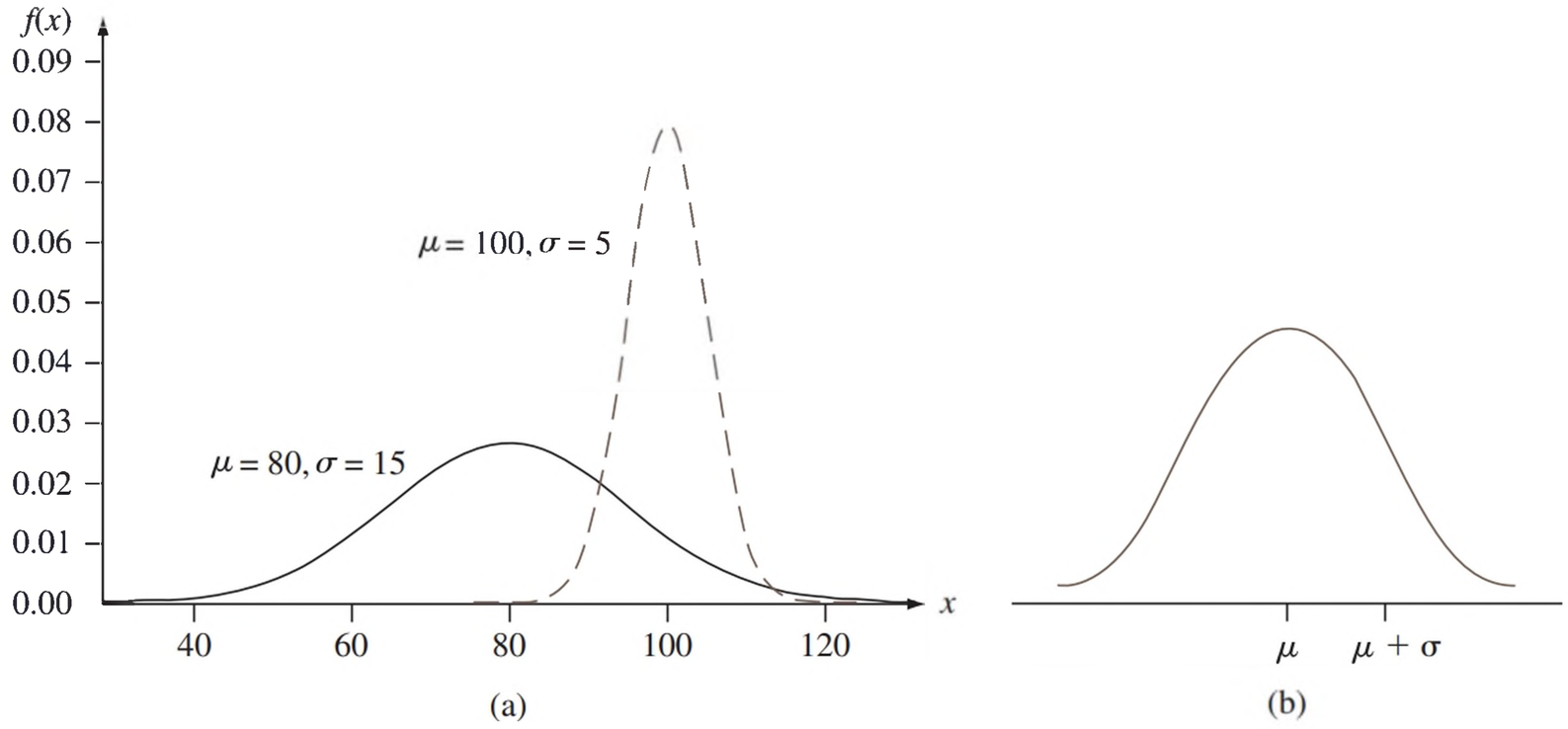


Figura 4.13 (a) Dos curvas diferentes de densidad normal (b) Visualización de μ y σ para una distribución normal

Distribución normal estándar

El cálculo de $P(a \leq X \leq b)$ cuando X es una variable aleatoria normal con parámetros μ y σ, requiere determinar

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} dx \tag{4.4}$$

Ninguna de las técnicas estándar de integración puede ser utilizada para lograr esto. En cambio, con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ se calculó la expresión (4.4) mediante técnicas numéricas y se tabuló para ciertos valores de a y b. Esta tabla también puede ser utilizada para calcular probabilidades con cualesquiera otros valores de μ y σ considerados.

DEFINICIÓN

La distribución normal con valores de parámetro $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ se llama **distribución normal estándar**. Una variable aleatoria que tiene una distribución normal estándar se llama **variable aleatoria normal estándar** y se denotará por Z. La función de densidad de probabilidad de Z es

$$f(z; 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \quad -\infty < z < \infty$$

La gráfica de $f(z; 0, 1)$ se llama curva *normal estándar* (o z). Sus puntos de inflexión están en 1 y -1. La función de distribución acumulada de Z es $P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} f(y; 0, 1)\, dy$ la cual será denotada por $\Phi(z)$.

La distribución normal estándar no siempre sirve como modelo de una población que surge naturalmente. En cambio, es una distribución de referencia de la que se obtiene información sobre otra distribución normal. La tabla A.3 del apéndice, da $\Phi(z) = P(Z \leq z)$, el área bajo la curva de densidad normal estándar a la izquierda de z con $z = -3.49$, $-3.48, \ldots, 3.48, 3.49$. La figura 4.14 ilustra el tipo de área acumulada (probabilidad) tabulada en la tabla A.3. Con esta tabla pueden ser calculadas varias otras probabilidades que implican Z.

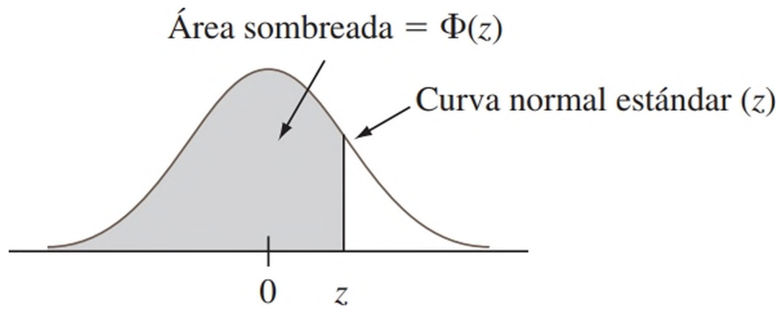


Figura 4.14 Áreas acumuladas normales estándar tabuladas en la tabla A.3 del apéndice

EJEMPLO 4.13 Determine las siguientes probabilidades normales estándar: a) $P(Z \leq 1.25)$, b) $P(Z > 1.25)$, c) $P(Z \leq -1.25)$, d) $P(-.38 \leq Z \leq 1.25)$ y e) $P(Z \leq 5)$.

a. $P(Z \leq 1.25) = \Phi(1.25)$, una probabilidad tabulada en la tabla A.3 del apéndice en la intersección de la fila 1.2 y la columna .05. El número allí es .8944, por lo que $P(Z \leq 1.25) = .8944$. La figura 4.15(a) ilustra esta probabilidad.

b. $P(Z > 1.25) = 1 - P(Z \leq 1.25) = 1 - \Phi(1.25)$ el área bajo la curva z a la derecha de 1.25 (un área de cola superior). En ese caso $\Phi(1.25) = .8944$ implica que $P(Z > 1.25) = .1056$. Puesto que Z es una variable aleatoria continua, $P(Z \geq 1.25) = .1056$. Véase la figura 4.15(b).

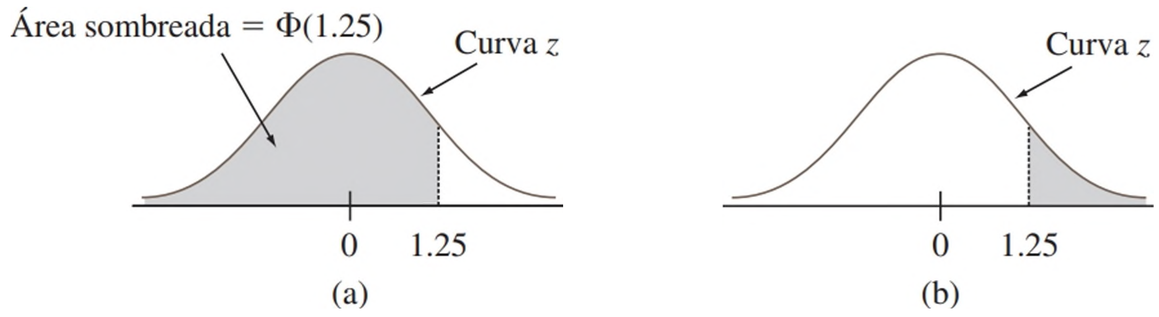


Figura 4.15 Áreas (probabilidades) de curvas normales del ejemplo 4.13

c. $P(Z \leq -1.25) = \Phi(-1.25)$, un área de cola inferior. Directamente de la tabla A.3 del apéndice, $\Phi(-1.25) = .1056$. Por simetría de la curva z, esta es la misma respuesta del inciso b).

d. $P(-.38 \leq Z \leq 1.25)$ es el área bajo la curva normal estándar sobre el intervalo cuyo punto extremo izquierdo es $-.38$ y cuyo punto extremo derecho es 1.25. Según la sección 4.2, si X es una variable aleatoria continua con función de distribución acumulada $F(x)$, entonces $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$. Por tanto, $P(-.38 \leq Z \leq 1.25) = \Phi(1.25) - \Phi(-.38) = .8944 - .3520 = .5424$. (Véase la figura 4.16.)

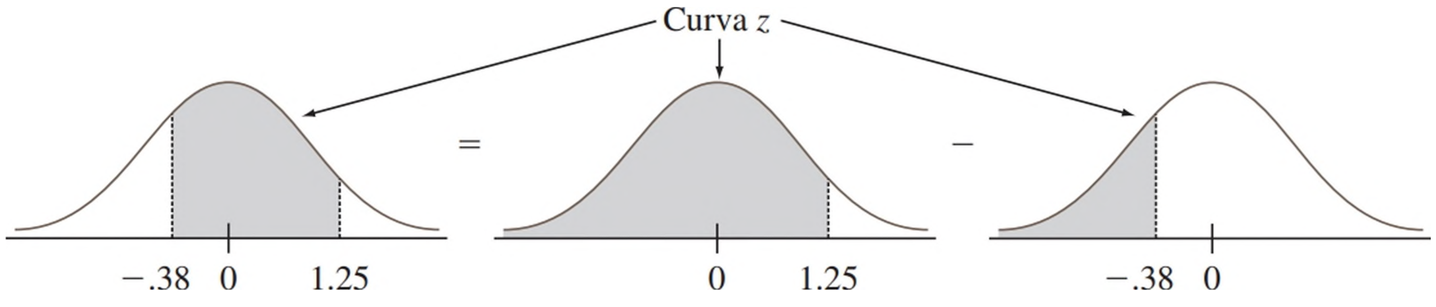


Figura 4.16 $P(-.38 \leq Z \leq 1.25)$ como la diferencia entre dos áreas acumuladas

e. $P(Z \leq 5) = \Phi(5)$, el área acumulada bajo la curva z a la izquierda del 5. Esta probabilidad no aparece en la tabla ya que la última fila está etiquetada como 3.4. Sin embargo, la última entrada en esta fila es $\Phi(3.49) = .9998$. Es decir, esencialmente toda el área bajo la curva se encuentra a la izquierda de 3.49 (a lo más 3.49 desviaciones estándar a la derecha de la media). Por tanto, concluimos que $P(Z \leq 5) \approx 1$. ■

Percentiles de la distribución normal estándar

Con cualquier p entre 0 y 1 se puede utilizar la tabla A.3 del apéndice para obtener el $(100p)^{\text{o}}$ percentil de la distribución normal estándar.

El percentil 99 de la distribución normal estándar es ese valor sobre el eje horizontal tal que el área bajo la curva z a la izquierda de dicho valor es .9900. La tabla A.3 del apéndice da para z fija el área bajo la curva normal estándar a la izquierda de z, mientras que aquí se tiene el área y se desea el valor de z. Este es el problema "inverso" a $P(Z \leq z) = ?$ por lo que la tabla se utiliza a la inversa: encuentre en la mitad de la tabla .9900; la fila y la columna en la que se encuentra identifica el 99° percentil z. En este caso .9901 queda en la intersección de la fila 2.3 y la columna .03, así que el percentil 99 es (aproximadamente) $z = 2.33$. (Véase la figura 4.17.) Por simetría, el primer percentil está tan debajo de 0, como el 99° está sobre 0, así que es igual a -2.33 (1% queda debajo del primero y también sobre el 99°). (Véase la figura 4.18.)

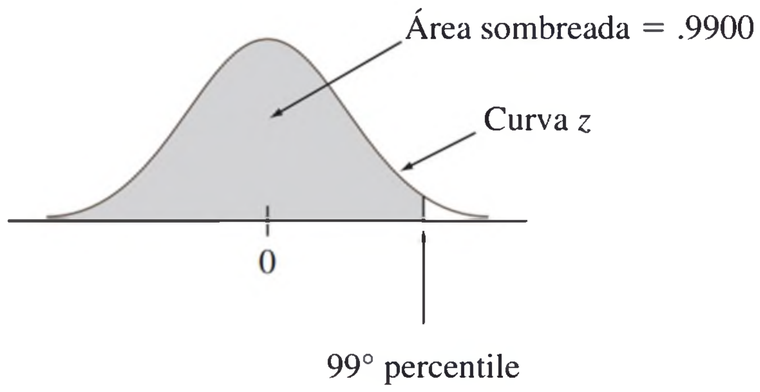


Figura 4.17 Ubicación del 99º percentil

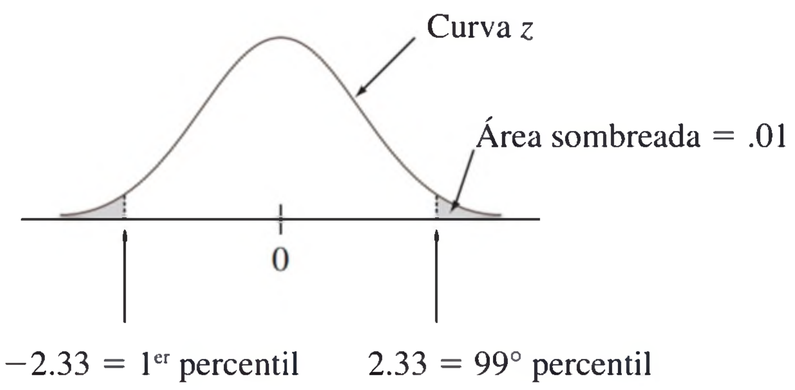


Figura 4.18 Relación entre los percentiles 1 y 99

En general, la fila y la columna de la tabla A.3 del apéndice, donde la entrada p está localizada, identifican el $(100p)^{\circ}$ percentil (p. ej., el percentil 67 se obtiene localizando .6700 en el cuerpo de la tabla, la cual da $z = .44$). Si p no aparece a menudo se utiliza el número más cercano a él, aunque la interpolación lineal da una respuesta más precisa. Por ejemplo, para encontrar el percentil 95 se busca .9500 adentro de la tabla. Aunque .9500 no aparece tanto .9495 como .9505 sí aparecen, correspondiendo a $z = 1.64$ y 1.65, respectivamente. Puesto que .9500 está a la mitad entre las dos probabilidades que sí aparecen, se utilizará 1.645 como el percentil 95 y -1.645 como el 5º percentil.

Notación z_α para valores z críticos

En inferencia estadística se necesitan valores sobre el eje horizontal z que capturen ciertas áreas de cola pequeña bajo la curva normal estándar.

> **Notación**
>
> z_α denotará el valor sobre el eje z para el cual α del área bajo la curva z queda a la derecha de z_α. (Véase la figura 4.19.)

Por ejemplo, $z_{.10}$ captura el área de cola superior .10, y $z_{.01}$ captura el área de cola superior

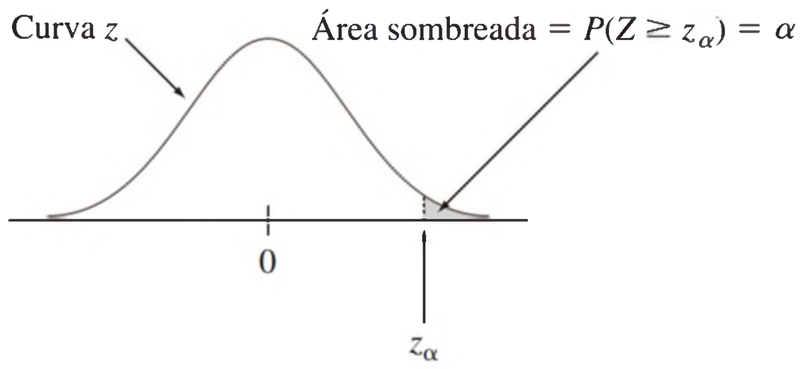


Figura 4.19 Notación z_α ilustrada

Puesto que α del área bajo la curva z queda a la derecha de z_α, $1 - \alpha$ del área queda a su izquierda. Por tanto, z_α *es el* $100(1 - \alpha)^{\circ}$ *percentil de la distribución normal estándar*. Por simetría el área bajo la curva normal estándar a la izquierda de $-z_\alpha$ también es α. Los valores z_α en general se conocen como **valores críticos** z. La tabla 4.1 incluye los percentiles z y los valores z_α más útiles.

Tabla 4.1 Percentiles de la distribución normal estándar y valores críticos

Percentil	90	95	97.5	99	99.5	99.9	99.95
α (área de la cola)	.1	.05	.025	.01	.005	.001	.0005
$z_\alpha = 100(1-\alpha)°$ percentil	1.28	1.645	1.96	2.33	2.58	3.08	3.27

EJEMPLO 4.15 $z_{.05}$ es el $100(1 - .05)° = 95°$ percentil de la distribución normal estándar, por tanto $z_{.05} = 1.645$. El área bajo la curva normal estándar a la izquierda de $-z_{.05}$ también es .05. (Véase la figura 4.20.)

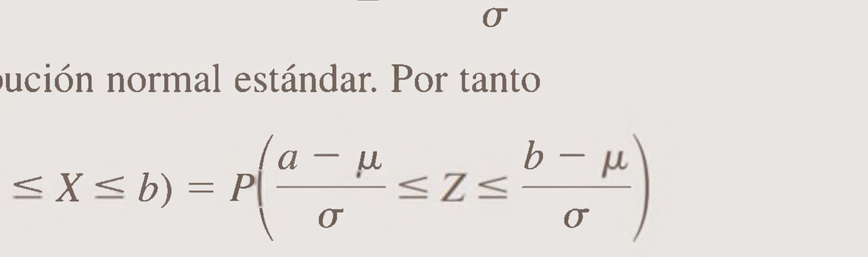


Figura 4.20 Determinación de $z_{.05}$ ■

Distribuciones normales no estándar

Cuando $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, las probabilidades que implican X se calculan "estandarizando". La **variable estandarizada** es $(X - \mu)/\sigma$. Al restar la media μ cambia de μ a cero y luego, al dividir entre σ cambian las escalas de la variable de modo que la desviación estándar es 1 en lugar de σ.

PROPOSICIÓN

Si X tiene una distribución normal con media μ y desviación estándar σ, entonces

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

tiene una distribución normal estándar. Por tanto

$$P(a \le X \le b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(X \le a) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \qquad P(X \ge b) = 1 - \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

De acuerdo con la primera parte de la proposición, el área debajo de la curva normal (μ, σ^2) que se encuentra en el intervalo $[a, b]$ es idéntica al área bajo la curva normal estándar que se encuentra en el intervalo desde el límite inferior estandarizado $(a - \mu)/\sigma$ para el límite superior estandarizado $(b - \mu)/\sigma$. En la figura 4.21 se ilustra la segunda parte. La idea clave de la proposición es que, estandarizando, cualquier probabilidad que implique X puede ser expresada como una probabilidad que implica una variable aleatoria normal estándar Z, de modo que se pueda utilizar la tabla A.3 del apéndice. La proposición se comprueba escribiendo la función de distribución acumulativa $Z = (X - \mu)/\sigma$ como

$$P(Z \le z) = P(X \le \sigma z + \mu) = \int_{-\infty}^{\sigma z + \mu} f(x; \mu, \sigma)\, dx$$

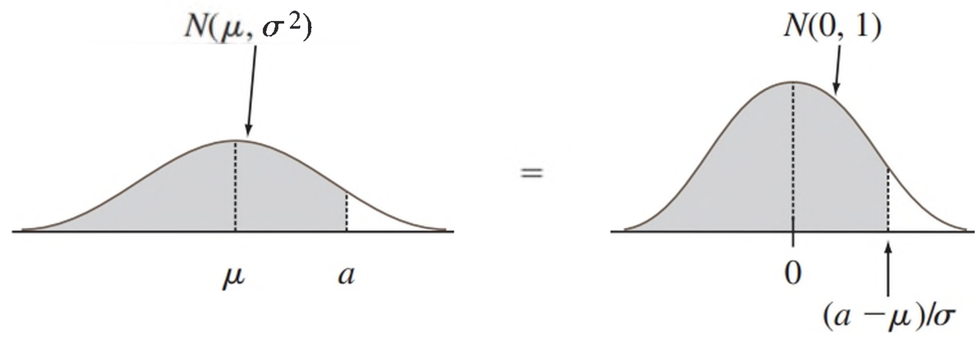


Figura 4.21 Igualdad de áreas de curvas normales estándar y no estándar

Al utilizar un resultado del cálculo, esta integral puede ser diferenciada respecto a z para que dé la función de densidad de probabilidad deseada $f(z; 0, 1)$.

EJEMPLO 4.16 El tiempo que requiere un conductor para reaccionar a las luces de freno de un vehículo que está desacelerando es crítico para evitar colisiones por alcance. El artículo **"Fast-Rise Brake Lamp as a Collision-Prevention Device" (*Ergonomics*, 1993: 391–395)** sugiere que el tiempo de reacción de respuesta en tráfico a una señal de luces de freno estándar puede ser modelado con una distribución normal que tiene un valor medio de 1.25 s y desviación estándar de .46 s. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de reacción sea de entre 1.00 y 1.75 segundos? Si X denota el tiempo de reacción, estandarizando se obtiene

$$1.00 \le X \le 1.75$$

si y sólo si

$$\frac{1.00 - 1.25}{.46} \le \frac{X - 1.25}{.46} \le \frac{1.75 - 1.25}{.46}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} P(1.00 \le X \le 1.75) &= P\left(\frac{1.00 - 1.25}{.46} \le Z \le \frac{1.75 - 1.25}{.46}\right) \\ &= P(-.54 \le Z \le 1.09) = \Phi(1.09) - \Phi(-.54) \\ &= .8621 - .2946 = .5675 \end{aligned}$$

Esto se ilustra en la figura 4.22. Asimismo, si se ven los 2 segundos como un tiempo de reacción críticamente largo, la probabilidad de que el tiempo de reacción real exceda este valor es

$$P(X > 2) = P\left(Z > \frac{2 - 1.25}{.46}\right) = P(Z > 1.63) = 1 - \Phi(1.63) = .0516$$

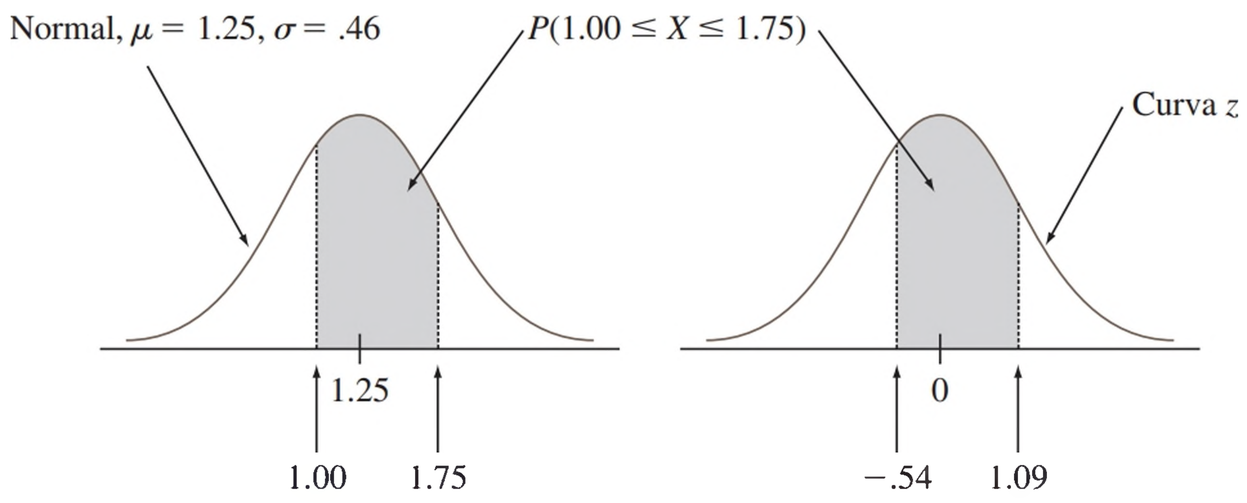


Figura 4.22 Curvas normales del ejemplo 4.16 ■

Estandarizar cantidades no lleva más que a calcular una distancia media y luego reexpresarla como algún número de desviaciones estándar. Por tanto, si $\mu = 100$ y $\sigma = 15$, entonces $x = 130$ corresponde a $z = (130 - 100)/15 = 30/15 = 2.00$. Es decir, 130 está a 2 desviaciones estándar sobre (a la derecha de) la media. Asimismo, estandarizando 85 se obtiene $(85 - 100)/15 = -1.00$, por tanto, 85 está a 1 desviación estándar por debajo de la media. La tabla z se aplica a *cualquier* distribución normal siempre que se piense en función del número de desviaciones estándar respecto al valor medio.

EJEMPLO 4.17 Se sabe que el voltaje de ruptura de un diodo de un tipo particular seleccionado al azar está normalmente distribuido. ¿Cuál es la probabilidad de que el voltaje de ruptura de un diodo esté dentro de 1 desviación estándar de su valor medio? Esta pregunta puede contestarse sin conocer μ o σ, en tanto se sepa que la distribución es normal; la respuesta es la misma para *cualquier* distribución normal:

$$\begin{aligned} P(X \text{ está dentro de 1 desviación estándar de su media}) &= P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma) \\ &= P\left(\frac{\mu - \sigma - \mu}{\sigma} \le Z \le \frac{\mu + \sigma - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P(-1.00 \le Z \le 1.00) \\ &= \Phi(1.00) - \Phi(-1.00) = .6826 \end{aligned}$$

La probabilidad de que X esté dentro de 2 desviaciones estándar de su media es $P(-2.00 \le Z \le 2.00) = .9544$ y dentro de 3 desviaciones estándar de su media es $P(-3.00 \le Z \le 3.00) = .9974$. ■

Los resultados del ejemplo 4.17 a menudo se reportan en forma de porcentaje y se les conoce como la *regla empírica* (porque la evidencia empírica ha demostrado que los histogramas de datos reales con frecuencia pueden ser aproximados por curvas normales).

Si la distribución de la población de una variable es (aproximadamente) normal, entonces

1. Alrededor de 68% de los valores está dentro de 1 DE de la media.
2. Alrededor de 95% de los valores está dentro de 2 DE de la media.
3. Alrededor de 99.7% de los valores está dentro de 3 DE de la media

En realidad es inusual observar un valor de una población normal que esté mucho más lejos de 2 desviaciones estándar de μ. Estos resultados serán importantes en el desarrollo de procedimientos de prueba de hipótesis en capítulos posteriores.

Percentiles de una distribución normal arbitraria

El $(100p)^{\circ}$ percentil de una distribución normal con media μ y desviación estándar σ es fácil de relacionar con el $(100p)^{\circ}$ percentil de la distribución normal estándar.

PROPOSICIÓN

$$\begin{pmatrix}(100p)^{\circ}\text{ percentil}\\ \text{para }(\mu, \sigma)\text{ normal}\end{pmatrix} = \mu + \begin{bmatrix}(100p)^{\circ}\text{ para}\\ \text{normal estándar}\end{bmatrix} \cdot \sigma$$

Otra forma de explicar esto es que si z es el percentil deseado de la distribución normal estándar, entonces el percentil deseado de la distribución normal (μ, σ) está a z desviaciones estándar de μ.

EJEMPLO 4.18 Los autores de **"Assessment of Lifetime of Railway Axle" (*Intl. J. of Fatigue*, 2013: 40–46)** utilizan los datos recolectados de un experimento con una longitud de grieta inicial específica y un número de ciclos para proponer una distribución normal con valor promedio de carga 5.496 mm y desviación estándar .067 mm para la variable aleatoria X = profundidad final de la grieta. Para este modelo, ¿qué valor de profundidad final de la grieta podría ser superado por sólo .5% de todas las grietas bajo estas circunstancias? Que c denote el valor requerido. Entonces la condición deseada es que $P(X > c) = .005$ o, lo que es lo mismo, que $P(X \leq c) = .995$. Por tanto c es el percentil 99.5 de la distribución normal con $\mu = 5.496$ y $\sigma = .067$. El percentil 99.5 de la distribución normal estándar es 2.58, por lo que

$$c = \eta(.995) = 5.496 + (2.58)(.067) + 5.496 + .173 = 5.669 \text{ mm}$$

Esto se ilustra en la figura 4.23.

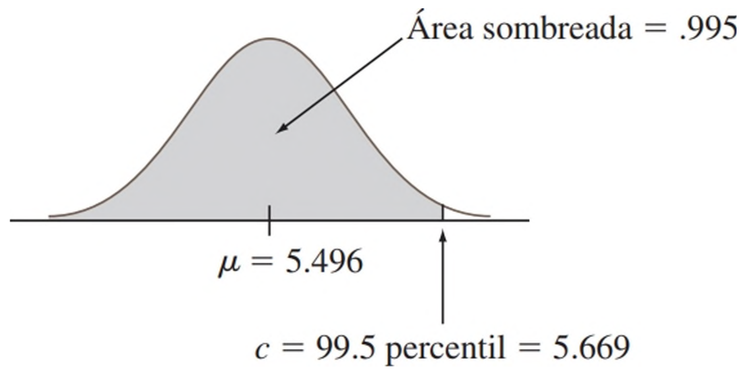


Figura 4.23 Distribución de la profundidad final de la grieta en el ejemplo 4.18 ■

Distribución normal y poblaciones discretas

La distribución normal a menudo se utiliza como una aproximación a la distribución de valores en una población discreta. En semejantes situaciones se debe tener cuidado especial para asegurarse de que las probabilidades se calculen con precisión.

EJEMPLO 4.19 Se sabe que el coeficiente intelectual en una población particular (medido con una prueba estándar) está más o menos normalmente distribuido con $\mu = 100$ y $\sigma = 15$. ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo seleccionado al azar tenga un CI de al menos 125? Con X = el CI de una persona seleccionada al azar, se desea $P(X \geq 125)$. La tentación en este caso es estandarizar tal como en ejemplos previos. Sin embargo, la distribución de la población de coeficientes intelectuales en realidad es discreta, puesto que estos son valores enteros. Por tanto, la curva normal es una aproximación a un histograma de probabilidad discreto tal como se ilustra en la figura 4.24.

Los rectángulos del histograma están *centrados* en enteros, por lo que los coeficientes intelectuales de al menos 125 corresponden a rectángulos que comienzan en 124.5, la zona sombreada en la figura 4.24. Por tanto, en realidad se desea a la derecha de 124.5 el área bajo la curva aproximadamente normal. Si se estandariza este valor se obtiene $P(Z \geq 1.63) = .0516$, en tanto que si se estandariza 125 se obtiene $P(Z \geq 1.67) = .0475$. La diferencia no es grande, pero la respuesta .0516 es más precisa. Asimismo, $P(X = 125)$ sería aproximada por el área entre 124.5 y 125.5, puesto que el área bajo la curva normal sobre el valor único de 125 es cero.

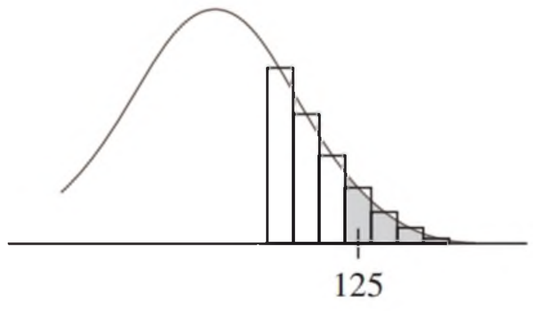


Figura 4.24 Aproximación normal a una distribución discreta

La corrección en cuanto a discrecionalidad de la distribución subyacente en el ejemplo 4.19 con frecuencia se llama **corrección de continuidad**. Esta es útil en la siguiente aplicación de la distribución normal al cálculo de probabilidades binomiales.

Aproximación de la distribución binomial

Recuerde que la media y la desviación estándar de una variable aleatoria binomial X son $\mu_X = np$ y $\sigma_X = \sqrt{npq}$, respectivamente. La figura 4.25 muestra un histograma de probabilidad binomial de la distribución binomial con $n = 25$, $p = .6$ con el cual $\mu = 25(.6) = 15$ y $\sigma = \sqrt{25(.6)(.4)} = 2.449$. Sobre el histograma de probabilidad se superpuso una curva normal con estas μ y σ. Aunque el histograma de probabilidad es un poco asimétrico (debido a que $p \neq .5$) la curva normal da una muy buena aproximación, sobre todo en la parte media de la figura. El área de cualquier rectángulo (probabilidad de cualquier valor X particular), excepto las de los se ubican en las colas extremas, puede aproximada con precisión mediante el área de la curva normal correspondiente. Por ejemplo, $P(X = 10) = B(10; 25, .6) - B(9; 25, .6) = .021$, mientras que el área bajo la curva normal entre 9.5 y 10.5 es $P(-2.25 \leq Z \leq -1.84) = .0207$.

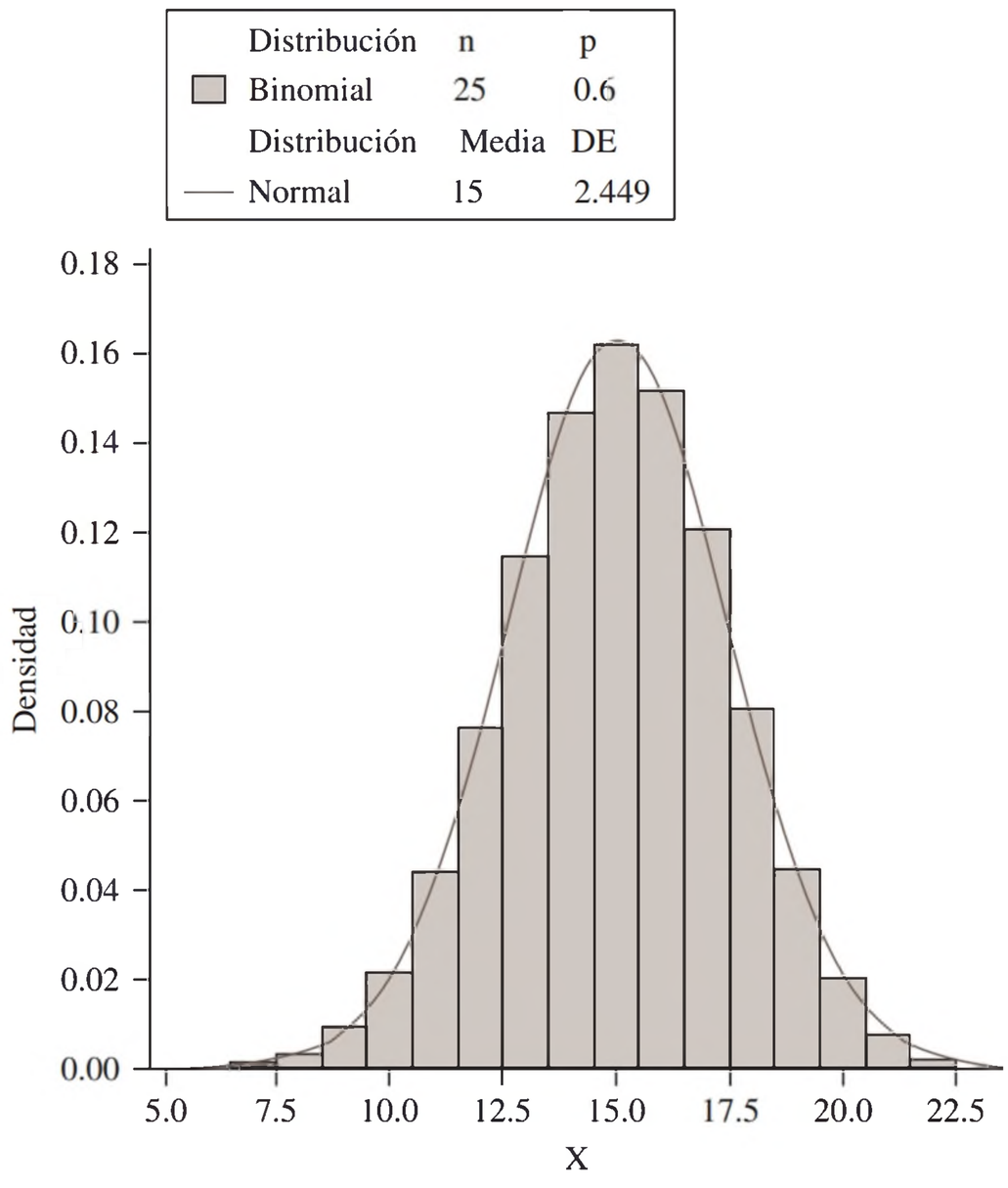


Figura 4.25 Histograma de probabilidad binomial para $n = 25$, $p = .6$ con curva de aproximación normal sobrepuesta

De modo más general, en tanto que el histograma de probabilidad binomial no sea demasiado asimétrico las probabilidades binomiales pueden ser aproximadas muy bien por áreas de curva normal. Suele decirse entonces que X tiene aproximadamente una distribución normal

PROPOSICIÓN

Sea X una variable aleatoria binomial basada en n ensayos con probabilidad de éxito p. Entonces, si el histograma de probabilidad binomial no es demasiado asimétrico, X tiene aproximadamente una distribución normal con $\mu = np$ y $\sigma = \sqrt{npq}$. En particular, con $x =$ un valor posible de X,

$$P(X \le x) = B(x, n, p) \approx \left(\begin{array}{c} \text{(área bajo la curva normal} \\ \text{a la izquierda de } x + .5) \end{array} \right)$$

$$= \Phi\left(\frac{x + .5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

En la práctica la aproximación es adecuada siempre que $np \ge 10$ y $nq \ge 10$ (es decir, el número esperado de éxitos y el número esperado de fallas son ambos al menos 10), ya que que en ese caso existe bastante simetría en la distribución binomial subyacente.

Una comprobación directa de este resultado es bastante difícil. En el siguiente capítulo se verá que esta es consecuencia de un resultado más general llamado teorema del límite central. Con toda honestidad, esta aproximación no es tan importante en el cálculo de probabilidad como alguna vez lo fue. Esto se debe a que los programas de computadora ahora son capaces de calcular con exactitud probabilidades binomiales para valores bastante grandes de n.

EJEMPLO 4.20 Suponga que 25% de todos los estudiantes en una gran universidad pública recibe ayuda financiera. Sea X el número de estudiantes que reciben esta ayuda en una muestra aleatoria de tamaño 50, de modo que $p = .25$. Entonces $\mu = 12.5$ y $\sigma = 3.06$. Puesto que $np = 50(.25) = 12.5 \ge 10$ y $nq = 37.5 \ge 10$, la aproximación puede ser aplicada con seguridad. La probabilidad de que a lo más 10 estudiantes reciban ayuda es

$$P(X \le 10) = B(10; 50, .25) \approx \Phi\left(\frac{10 + .5 - 12.5}{3.06}\right)$$

$$= \Phi(-.65) = .2578$$

Asimismo, la probabilidad de que entre 5 y 15 (inclusive) de los estudiantes seleccionados reciban ayuda es

$$P(5 \le X \le 15) = B(15; 50, .25) - B(4; 50, .25)$$

$$\approx \Phi\left(\frac{15.5 - 12.5}{3.06}\right) - \Phi\left(\frac{4.5 - 12.5}{3.06}\right) = .8320$$

Las probabilidades exactas son .2622 y .8348, respectivamente, así que las aproximaciones son bastante buenas. En el último cálculo la probabilidad está siendo aproximada por el área bajo la curva normal entre 4.5 y 15.5; se utiliza la corrección de continuidad tanto para el límite superior como para el inferior. ■

Cuando el objetivo de la investigación es hacer una inferencia sobre una proporción de población p, el interés se centrará en la proporción muestral de X/n éxitos y no en X. Debido a que esta proporción es exactamente X multiplicada por la constante $1/n$, también tendrá aproximadamente una distribución normal (con media $\mu = p$ y desviación estándar $\sigma = \sqrt{pq/n}$, siempre que $np \ge 10$ y $nq \ge 10$. Esta aproximación normal es la base de varios procedimientos inferenciales que se abordarán en capítulos posteriores.

EJERCICIOS Sección 4.3 (28–58)

28. Sea Z una variable aleatoria normal estándar y calcule las siguientes probabilidades. Trace las figuras siempre que sea apropiado.

a. $P(0 \le Z \le 2.17)$ **b.** $P(0 \le Z \le 1)$
c. $P(-2.50 \le Z \le 0)$ **d.** $P(-2.50 \le Z \le 2.50)$
e. $P(Z \le 1.37)$ **f.** $P(-1.75 \le Z)$
g. $P(-1.50 \le Z \le 2.00)$ **h.** $P(1.37 \le Z \le 2.50)$
i. $P(1.50 \le Z)$ **j.** $P(|Z| \le 2.50)$

29. En cada caso determine el valor de la constante c que hace que el enunciado de probabilidad sea correcto.

a. $\Phi(c) = .9838$ **b.** $P(0 \le Z \le c) = .291$
c. $P(c \le Z) = .121$ **d.** $P(-c \le Z \le c) = .668$
e. $P(c \le |Z|) = .016$

30. Encuentre los siguientes percentiles de la distribución normal estándar. Interpole en los casos en que sea apropiado.

a. 91° **b.** 9° **c.** 75°
d. 25° **e.** 6°

31. Determine z_α para los siguientes valores de α:

a. $\alpha = .0055$ **b.** $\alpha = .09$
c. $\alpha = .663$

32. Suponga que la fuerza que actúa en una columna que ayuda a soportar un edificio es una variable aleatoria X normalmente distribuida con media de 15.0 kips y desviación estándar de 1.25 kips. Calcule las siguientes probabilidades por estandarización y luego use la tabla A.3

a. $P(X \le 15)$ **b.** $P(X \le 17.5)$
c. $P(X \ge 10)$ **d.** $P(14 \le X \le 18)$
e. $P(|X - 15| \le 3)$

33. Las mopeds (motos pequeñas con una cilindrada inferior a 50 cm^3) son muy populares en Europa debido a su movilidad, facilidad de uso y bajo costo. El artículo **"Procedure to Verify the Maximum Speed of Automatic Transmission Mopeds in Periodic Motor Vehicle Inspections" (*J. of Automobile Engr.*, 2008: 1615–1623)** describe un banco de pruebas rodante para determinar la velocidad máxima del vehículo. Se propone una distribución normal con valor medio de 46.8 km/h y desviación estándar de 1.75 km/h. Considere la posibilidad de seleccionar al azar una sola de esas mopeds.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la velocidad máxima sea a lo más 50 km/h?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que la velocidad máxima sea al menos de 48 km/h?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que la velocidad máxima difiera de la media por más de 1.5 desviaciones estándar?

34. El artículo **"Reliability of Domestic-Waste Biofilm Reactors" (*J. of Envir. Engr.*, 1995: 785–790)** sugiere que la concentración de sustrato (mg/cm^3) del afluente que llega a un reactor está normalmente distribuida con $\mu = .30$ y $\sigma = .06$.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la concentración exceda de .50?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que la concentración sea cuando mucho de .20?
c. ¿Cómo caracterizaría el más grande 5% de todos los valores de concentración?

35. En un proceso de pavimentación de una carretera la mezcla bituminosa se entrega en la tolva de la pavimentadora mediante camiones que transportan el material desde la planta de concreto. El artículo **"Modeling of Simultaneously Continuous and Stochastic Construction Activities for Simulation" (*J. of Construction Engr. and Mgmnt.*, 2013: 1037–1045)** propone una distribución normal con media de 8.46 min y desviación estándar de .913 min para la variable aleatoria X = tiempo del camión transportador.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de entrega del camión transportador sea al menos de 10 minutos? ¿Superará los 10 min?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de entrega del camión transportador supere los 15 min?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo del camión transportador esté entre 8 y 10 min?
d. ¿Qué valor c es tal que 98% de todos los tiempos del camión transportador están en el intervalo de $8.46 - c$ a $8.46 + c$?
e. Si se seleccionan en forma independiente cuatro tiempos de entrega del camión transportador, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno de ellos exceda los 10 min?

36. La dispersión de las atomizaciones de los pesticidas es una preocupación constante de los fumigadores y los productores agrícolas. La relación inversa entre el tamaño de la gota y el potencial de deriva es bien conocida. El artículo **"Effects of 2,4-D Formulation and Quinclorac on Spray Droplet Size and Deposition" (*Weed Technology*, 2005: 1030–1036)** es una investigación sobre los efectos de las formulaciones de herbicidas en atomizaciones. Una figura en el artículo sugiere que la distribución normal con media de 1050 μm y desviación estándar de 150 μm es un modelo razonable del tamaño de las gotas de agua (el "tratamiento de control") rociadas a través de una boquilla de 760 ml/min.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el tamaño de una sola gota sea de menos de 1500 μm? ¿Y al menos de 1000 μm?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que el tamaño de una sola gota este entre 1000 y 1500 μm?
c. ¿Cómo caracterizaría el más pequeño 2% de todas las gotas?
d. Si se mide el tamaño de cinco gotas, seleccionadas de manera independiente, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una exceda de 1500 μm?

37. Suponga que la concentración de cloruro en sangre (mmol/L) tiene una distribución normal con media de 104 y desviación estándar de 5 (la información en el artículo **"Mathematical Model of Chloride Concentration in Human Blood", *J. of Med. Engr. and Tech.*, 2006; 25–30**, que incluye una gráfica

de probabilidad normal, como se describe en la sección 4.6, apoya esta suposición).

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la concentración de cloruro sea igual a 105? ¿Y de sea menor de 105? ¿Y de que sea cuando mucho de 105?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la concentración de cloruro difiera de la media por más de 1 desviación estándar? ¿Depende esta probabilidad de los valores de μ y σ?

c. ¿Cómo caracterizaría el más extremo .1% de los valores de concentración de cloruro?

38. Hay dos máquinas disponibles que cortan los corchos para tapar las botellas de vino. La primera produce corchos con diámetros que están normalmente distribuidos con media de 3 cm y desviación estándar de .1 cm. La segunda máquina produce corchos con diámetros que tienen una distribución normal con media de 3.04 cm y desviación estándar de .02 cm. Los corchos aceptables tienen diámetros de entre 2.9 y 3.1 cm. ¿Cuál máquina es más probable que produzca un corcho aceptable?

39. La longitud del defecto de un defecto de corrosión en un tubo de acero presurizado se distribuye normalmente con una media de 30 mm y desviación estándar de 7.8 mm [sugeridos en el artículo **"Reliability Evaluation of Corroding Pipelines Considering Multiple Failure Modes and Time-Dependent Internal Pressure" (*J. of Infrastructure Systems*, 2011: 216–224)**].

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el defecto de longitud sea a lo más de 20 mm? ¿Y de menos de 20 mm?

b. ¿Cuál es el percentil 75 de la distribución de longitud de defecto, es decir, el valor que separa el más mínimo 75% de todas las longitudes del 25% más grande?

c. ¿Cuál es el percentil 15 de la distribución de longitud de defecto?

d. ¿Qué valores separan 80% del medio de la distribución de longitud de defecto del menor 10% y del 10% más grande?

40. El artículo **"Monte Carlo Simulation–Tool for Better Understanding of LRFD" (*J. of Structural Engr.*, 1993: 1586–1599)** sugiere que la resistencia a ceder (kg/pulg^2) de un acero grado A36 normalmente está distribuida con $\mu = 43$ y $\sigma = 4.5$.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la resistencia a ceder sea cuando mucho de 40? ¿Y de más de 60?

b. ¿Qué valor de resistencia a ceder separa al más resistente 75% del resto?

41. El dispositivo de apertura automática de un paracaídas de carga militar está diseñado para abrirse 200 m del suelo. Suponga que la altitud de abertura en realidad tiene una distribución normal con valor medio de 200 m y desviación estándar de 30 m. La carga útil se dañará si el paracaídas se abre a una altitud de menos de 100 m. ¿Cuál es la probabilidad de que se dañe la carga útil de al menos uno de cinco paracaídas lanzados en forma independiente?

42. La lectura de temperatura tomada con un termopar colocado en un medio a temperatura constante normalmente se distribuye con media μ, la temperatura real del medio, y desviación estándar σ. ¿Qué valor debe tener σ para asegurarse de que 95% de todas las lecturas están dentro de .1° de μ?

43. La velocidad del vehículo sobre un puente en particular de China se puede modelar como una distribución normal **("Fatigue Reliability Assessment for Long-Span Bridges under Combined Dynamic Loads from Winds and Vehicles", *J. of Bridge Engr.*, 2013: 735–747).**

a. Si 5% de todos los vehículos viaja a menos de 39.12 m/h y 10% viaja a más de 73.24 m/h, ¿cuáles son la media μ y la desviación estándar σ de la velocidad de los vehículos? [*Nota*: Los valores resultantes deben concordar con los datos que se indican en el artículo citado.]

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la velocidad de un vehículo seleccionado al azar se halle entre 50 y 65 m/h?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que la velocidad de un vehículo seleccionado al azar exceda el límite de velocidad de 70 m/h?

44. Si la longitud de rosca de un perno está normalmente distribuida, cuál es la probabilidad de que la longitud de rosca de un perno seleccionado al azar esté:

a. ¿Dentro de 1.5 desviaciones estándar de su media?

b. ¿A más de 2.5 desviaciones estándar de su media?

c. ¿Entre 1 y 2 desviaciones estándar de su media?

45. Una máquina que produce cojinetes de bolas inicialmente se ajustó de manera que el diámetro promedio real de los cojinetes que produce sea de .500 pulg. Un cojinete es aceptable si su diámetro está dentro de .004 pulg de su valor objetivo. Suponga, sin embargo, que el ajuste cambia durante el curso de la producción, de modo que los cojinetes tengan diámetros normalmente distribuidos con media de .499 pulg y desviación estándar de .002 pulg. ¿Qué porcentaje de los cojinetes producidos no será aceptable?

46. La dureza Rockwell de un metal se determina al hincar una punta endurecida en la superficie del metal y luego medir la profundidad de penetración. Suponga que la dureza Rockwell de una aleación particular está normalmente distribuida con media de 70 y desviación estándar de 3.

a. Si una muestra es aceptable sólo si su dureza oscila entre 67 y 75, ¿cuál es la probabilidad de que una muestra seleccionada al azar tenga una dureza aceptable?

b. Si el rango de dureza aceptable es $(70 - c, 70 + c)$, ¿con qué valor de c 95% de todas las muestras se tendría una dureza aceptable?

c. Si el rango de dureza aceptable es como el del inciso a) y la dureza de cada una de diez muestras seleccionadas al azar se determina de forma independiente, ¿cuál es el valor esperado de las muestras aceptables entre las diez?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que cuando mucho ocho de diez muestras seleccionadas de manera independiente tengan una dureza de menos de 73.84? [*Sugerencia:* Y = el número de entre las diez muestras con dureza de menos de 73.84 es una variable binomial; ¿cuál es p?]

47. La distribución del peso de paquetes enviados de cierta manera es normal con valor medio de 12 lb y desviación estándar de 3.5 lb. El servicio de paquetería desea establecer un valor de peso c más allá del cual se hará un cargo extra. ¿Qué valor de c es tal que 99% de todos los paquetes están al menos 1 lb por debajo del peso de cargo extra?

48. Suponga que la tabla A.3 del apéndice contiene $\Phi(z)$ sólo para $z \geq 0$. Explique cómo aun así podría calcular:

a. $P(-1.72 \leq Z \leq -.55)$

b. $P(-1.72 \leq Z \leq .55)$

¿Es necesario tabular $\Phi(z)$ para z negativo? ¿Qué propiedad de la curva normal estándar justifica su respuesta?

49. Considere a los bebés nacidos en el rango "normal" de 37–43 semanas de gestación. Datos extensos sustentan la suposición de que al nacer estos bebés, nacidos en Estados Unidos, su peso está normalmente distribuido con media de 3432 g y desviación estándar de 482 g. [El artículo **"Are Babies Normal?" (*The American Statistician* (1999): 298–302)** analiza datos de un año particular; para una selección sensible de intervalos de clase, un histograma no parecía del todo normal pero después de una investigación se determinó que esto se debía a que en algunos hospitales medían el peso en gramos y en otros lo medían a la onza más cercana y luego lo convertían a gramos. Una selección modificada de intervalos de clase que permitía esto produjo un histograma que se describía muy bien mediante una distribución normal.]

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el peso al nacer de un bebé de este tipo, seleccionado al azar, exceda los 4000 gramos? ¿Y de que esté entre 3000 y 4000 gramos?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el peso al nacer de un bebé de este tipo, seleccionado al azar, sea de menos de 2000 o de más de 5000 gramos?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que el peso al nacer de un bebé de este tipo, seleccionado al azar, exceda las 7 libras?

d. ¿Cómo caracterizaría el más extremo .1% de todos los pesos al nacer?

e. Si X es una variable aleatoria con una distribución normal y a es una constante numérica ($a \neq 0$), entonces $Y = aX$ también tiene una distribución normal. Use esto para determinar la distribución de pesos al nacer expresados en libras (forma, media y desviación estándar) y luego calcule otra vez la probabilidad del inciso c). ¿Cómo se compara ésta con su respuesta previa?

50. En respuesta a las preocupaciones sobre el contenido nutricional de las comidas rápidas McDonald's ha anunciado que utilizará un nuevo aceite de cocinar para sus papas a la francesa que reducirá sustancialmente los niveles de ácidos grasos e incrementará la cantidad de grasa poliinsaturada más benéfica. La compañía afirma que 97 de cada 100 personas son incapaces de detectar una diferencia de sabor entre los nuevos aceites y los anteriores. Suponiendo que esta cifra es correcta (como proporción de largo plazo), cuál es la probabilidad aproximada de que en una muestra aleatoria de 1000 individuos que han comprado papas a la francesa en McDonald's:

a. ¿Al menos 40 puedan notar la diferencia de sabor entre los dos aceites?

b. ¿Cuando mucho 5% pueda notar la diferencia de sabor entre los dos aceites?

51. La desigualdad de Chebyshev (véase el ejercicio 44 del capítulo 3), es válida para distribuciones continuas y discretas. Estipula que para cualquier número k que satisfaga $k \geq 1$, $P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq 1/k^2$ (para una interpretación véase el ejercicio 44 del capítulo 3). Obtenga esta probabilidad en el caso de una distribución normal con $k = 1, 2, 3$ y compare con el límite superior.

52. Sea X el número de defectos en un carrete de cinta magnética de 100 m (una variable de valor entero). Suponga que X tiene aproximadamente una distribución normal con $\mu = 25$ y $\sigma = 5$. Use la corrección de continuidad para calcular la probabilidad de que el número de defectos sea:

a. Entre 20 y 30, inclusive

b. Cuando mucho 30. Menos de 30.

53. Si X tiene una distribución binomial con parámetros $n = 25$ y p, calcule cada una de las siguientes probabilidades mediante la aproximación normal (con la corrección de continuidad) en los casos $p = .5, .6$ y $.8$ y compare con las probabilidades exactas calculadas con la tabla A.1 del apéndice.

a. $P(15 \leq X \leq 20)$

b. $P(X \leq 15)$

c. $P(20 \leq X)$

54. Suponga que 10% de todas las flechas de acero producidas mediante un proceso no cumplen con las especificaciones pero pueden volver a trabajarse (en lugar de ser desechadas). Considere una muestra aleatoria de 200 flechas y sea X el número de flechas entre estas que no cumplen con las especificaciones y pueden volver a trabajarse. Cuál es la probabilidad aproximada de que X sea:

a. ¿Cuando mucho 30?

b. ¿Menos que 30?

c. ¿Entre 15 y 25 (inclusive)?

55. Suponga que en un estado sólo 75% de todos los conductores usan con regularidad el cinturón de seguridad. Se selecciona una muestra aleatoria de 500 conductores. Cuál es la probabilidad de que:

a. ¿Entre 360 y 400 (inclusive) de los conductores en la muestra usen con regularidad el cinturón de seguridad?

b. ¿Menos de 400 de aquellos en la muestra usen con regularidad el cinturón de seguridad?

56. Demuestre que la relación entre un percentil normal general y el percentil z correspondiente es como se estipuló en esta sección.

57. **a.** Demuestre que si X tiene una distribución normal con parámetros μ y σ, entonces $Y = aX + b$ (una función lineal de X) también tiene una distribución normal. ¿Cuáles son los parámetros de la distribución de Y [es decir, $E(Y)$ y $V(Y)$]? [*Sugerencia:* Escriba la función de distribución acumulada de Y, $P(Y \leq y)$ como una integral que implique la función de densidad de probabilidad de X y luego derive respecto a y para obtener la función de densidad de probabilidad de Y.]

b. Si cuando se mide en °C la temperatura está normalmente distribuida con media de 115 y desviación estándar de 2, ¿qué se puede decir sobre la distribución de temperatura medida en °F?

58. No existe una fórmula exacta para la función de distribución acumulada normal estándar $\Phi(z)$, aunque se han publicado varias buenas aproximaciones en artículos. La siguiente se tomó de **"Approximations for Hand Calculators Using Small Integer Coefficients" (*Mathematics of Computation*, 1977: 214–222)**. Con $0 < z \leq 5.5$,

$$P(Z \geq z) = 1 - \Phi(z)$$
$$\approx .5 \exp\left\{-\left[\frac{(83z + 351)z + 562}{703/z + 165}\right]\right\}$$

El error relativo de esta aproximación es de menos de .042%. Úselo para calcular aproximaciones a las siguientes probabilidades y compare siempre que sea posible con las probabilidades obtenidas de la tabla A.3 del apéndice.

a. $P(Z \geq 1)$ **b.** $P(Z < -3)$

c. $P(-4 < Z < 4)$ **d.** $P(Z > 5)$

4.4 Distribuciones exponencial y gamma

La curva de densidad correspondiente a cualquier distribución normal tiene forma de campana y, por consiguiente, es simétrica. Existen muchas situaciones prácticas en las cuales la variable de interés para un investigador podría tener una distribución asimétrica. Una familia de distribuciones que tiene esta propiedad es la familia gamma. Primero consideraremos un caso especial, la distribución exponencial, y luego generalizaremos más adelante en esta sección.

Distribución exponencial

La familia de distribuciones exponenciales proporciona modelos de probabilidad que se utilzan mucho en disciplinas de ingeniería y ciencias.

DEFINICIÓN

Se dice que X tiene una **distribución exponencial** con parámetro λ ($\lambda > 0$) si la función de densidad de probabilidad de X es

$$f(x; \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases} \qquad \textbf{(4.5)}$$

Algunas fuentes escriben la función de densidad de probabilidad exponencial en la forma $(1/\beta)e^{-x/\beta}$, de modo que $\beta = 1/\lambda$. El valor espervado de una variable aleatoria X exponencialmente distribuida es

$$\mu = E(X) = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

Para obtener este valor esperado se requiere integrar por partes. La varianza de X se calcula utilizando el hecho de que $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$. La determinación de $E(X^2)$ requiere integrar por partes dos veces en sucesión. Los resultados de estas integraciones son los siguientes:

$$\mu = \frac{1}{\lambda} \qquad \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Tanto la media como la desviación estándar de la distribución exponencial son iguales a $1/\lambda$. En la figura 4.26 aparecen varias gráficas de distintas funciones de densidad de probabilidad exponenciales.

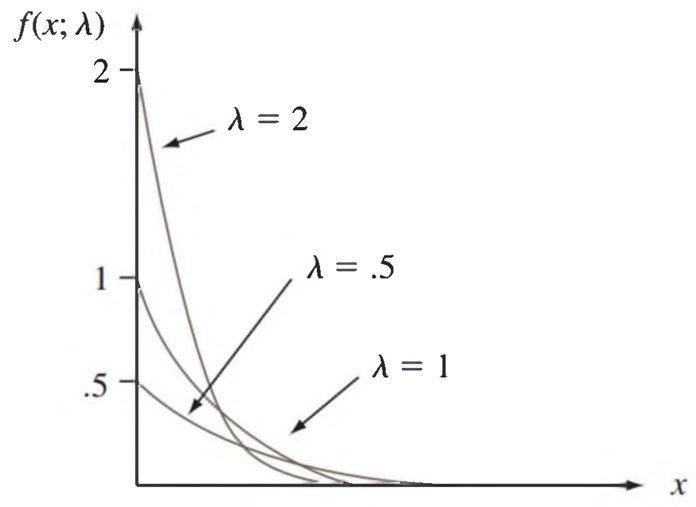


Figura 4.26 Curvas de densidad exponencial

La función de densidad de probabilidad exponencial es fácil de integrar para obtener la función de densidad acumulativa.

$$F(x; \lambda) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

EJEMPLO 4.21 El artículo **"Probabilistic Fatigue Evaluation of Riveted Railway Bridges" (*J. of Bridge Engr.*, 2008: 237–244)** sugiere la distribución exponencial con valor medio de 6 MPa como modelo para la distribución del rango de esfuerzos en las conexiones de determinados puentes. Supongamos que este es en realidad el verdadero modelo. Entonces $E(X) = 1/\lambda = 6$ implica que $\lambda = .1667$. La probabilidad de que el rango de esfuerzos a lo más sea de 10 MPa es

$$P(X \leq 10) = F(10; .1667) = 1 - e^{-(.1667)(10)} = 1 - .189 = .811$$

La probabilidad de que el rango de esfuerzo esté entre 5 y 10 MPa es

$$P(5 \leq X \leq 10) = F(10; .1667) - F(5; .1667) = (1 - e^{-1.667}) - (1 - e^{-.8335}) = .246 \quad \blacksquare$$

La distribución exponencial se utiliza con frecuencia como modelo de la distribución de tiempos entre la ocurrencia de eventos sucesivos, tales como los clientes que llegan a una instalación de servicio o las llamadas que entran a través de un conmutador. La razón de esto es que la distribución exponencial está estrechamente relacionada con el proceso de Poisson que se abordó en el capítulo 3.

PROPOSICIÓN

Suponga que el número de eventos que ocurren en cualquier intervalo de tiempo de duración t tiene una distribución de Poisson con parámetro αt (donde α, la tasa del proceso de eventos, es el número esperado de eventos que ocurren en 1 unidad de tiempo) y que la cantidad de ocurrencias en intervalos no traslapantes es independiente entre uno y otro. Entonces la distribución del tiempo transcurrido entre la ocurrencia de dos eventos sucesivos es exponencial con parámetro $\lambda = \alpha$.

Aunque una comprobación completa queda fuera del alcance de este libro, el resultado es fácil de verificar para el tiempo X_1 hasta que ocurre el primer evento:

$$P(X_1 \leq t) = 1 - P(X_1 > t) = 1 - P[\text{no hay eventos en } (0, t)]$$
$$= 1 - \frac{e^{-\alpha t} \cdot (\alpha t)^0}{0!} = 1 - e^{-\alpha t}$$

la cual es exactamente la función de distribución acumulada de la distribución exponencial.

EJEMPLO 4.22 Suponga que de acuerdo con un proceso de Poisson se reciben llamadas durante 24 horas en un "Centro de prevención de ayuda a víctimas de violación" a razón de $\alpha = 5$ llamadas por día. Entonces el número de días X entre llamadas sucesivas tiene una distribución exponencial con valor de parámetro .5, así que la probabilidad de que transcurran más de dos días entre llamadas es

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2; .5) = e^{-(.5)(2)} = .368$$

El tiempo esperado entre llamadas sucesivas es $1/.5 = 2$ días. ■

Otra aplicación importante de la distribución exponencial es modelar la distribución de la duración de un componente. Una razón parcial de la popularidad de tales aplicaciones es la **propiedad "de no memoria"** de la distribución exponencial. Suponga que la duración de un componente está exponencialmente distribuida con parámetro λ. Después de poner el componente en servicio se deja que pase un periodo de t_0 horas y luego se ve si el componente sigue trabajando; ¿cuál es ahora la probabilidad de que dure al menos t horas más? En símbolos, se desea $P(X \geq t + t_0 | X \geq t_0)$. Mediante la definición de probabilidad condicional,

$$P(X \geq t + t_0 | X \geq t_0) = \frac{P[(X \geq t + t_0) \cap (X \geq t_0)]}{P(X \geq t_0)}$$

Pero el evento $X \geq t_0$ en el numerador es redundante, puesto que ambos eventos pueden ocurrir si y sólo si $X \geq t + t_0$. Por consiguiente,

$$P(X \geq t + t_0 | X \geq t_0) = \frac{P(X \geq t + t_0)}{P(X \geq t_0)} = \frac{1 - F(t + t_0; \lambda)}{1 - F(t_0; \lambda)} = e^{-\lambda t}$$

Esta probabilidad condicional es idéntica a la probabilidad original $P(X \geq t)$ de que el componente dure t horas. Por tanto, *la distribución de duración adicional es exactamente la misma que la distribución de duración original*, así que en cada punto en el tiempo el componente no muestra ningún efecto de desgaste. En otras palabras, la distribución de la duración restante es independiente de la antigüedad actual.

Aunque la propiedad de no memoria se justifica al menos en forma aproximada en muchos problemas de aplicación, en otras situaciones los componentes se deterioran con el tiempo, o de vez en cuando mejoran con él (al menos hasta cierto punto). Las distribuciones gamma, de Weibull y lognormal proporcionan modelos de duración más generales (las dos últimas se abordan en la siguiente sección).

La función gamma

Para definir a la familia de distribuciones gamma, primero se tiene que introducir una función que desempeña un importante papel en muchas ramas de las matemáticas.

DEFINICIÓN

Con $\alpha > 0$, la **función gamma** $\Gamma(\alpha)$ se define como

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha - 1} e^{-x}\, dx \qquad (4.6)$$

Las propiedades más importantes de la función gamma son las siguientes:

1. Con cualquier $\alpha > 1$, $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1) \cdot \Gamma(\alpha - 1)$ [a través de la integración por partes]
2. Con cualquier entero positivo, n, $\Gamma(n) = (n - 1)!$
3. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

Ahora, sea

$$f(x;\alpha)=\begin{cases}\dfrac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{\Gamma(\alpha)} & x\geq 0\\ 0 & \text{de lo contrario}\end{cases} \tag{4.7}$$

Entonces $f(x;\alpha)\geq 0$. La expresión (4.6), implica que $\int_0^\infty f(x;\alpha)\,dx=\Gamma(\alpha)/\Gamma(\alpha)=1$. Por tanto $f(x;\alpha)$ satisface las dos propiedades básicas de una función de densidad de probabilidad.

La distribución gamma

DEFINICIÓN

Se dice que una variable aleatoria continua X tiene una **distribución gamma** si la función de densidad de probabilidad de X es

$$f(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta} & x\geq 0\\ 0 & \text{de lo contrario}\end{cases} \tag{4.8}$$

donde los parámetros α y β satisfacen $\alpha>0,\beta>0$. La **distribución gamma estándar** tiene $\beta=1$, así que (4.7) da la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria gamma estándar.

La distribución exponencial es resultado de considerar $\alpha=1$ y $\beta=1/\lambda$.

La figura 4.27(a) ilustra las gráficas de la función de densidad de probabilidad gamma $f(x;\alpha,\beta)$(4.8) para varios pares (α,β), en tanto que la figura 4.27(b) presenta gráficas de la función de densidad de probabilidad gamma estándar. Para la función de densidad de probabilidad estándar cuando $\alpha\leq 1, f(x;\alpha)$ es estrictamente decreciente a medida que x se incrementa desde 0; cuando $\alpha>1, f(x;\alpha)$ se eleva desde 0 en $x=0$ hasta un máximo y luego decrece. El parámetro β en (4.8) se llama parámetro de escala, y a α se le conoce como un *parámetro de forma* porque al cambiar su valor altera la forma básica de la curva de densidad.

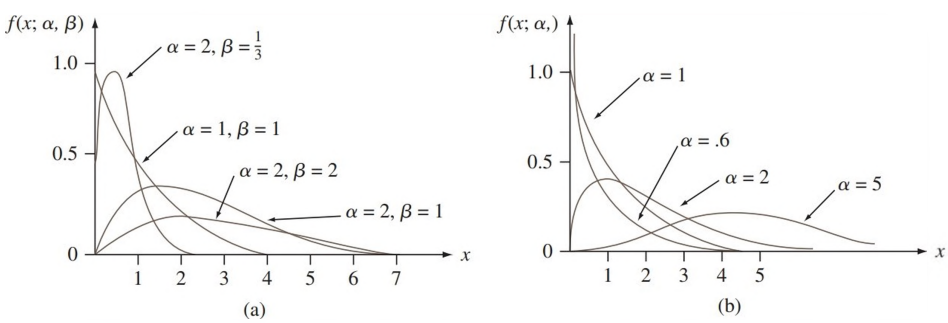


Figura 4.27 (a) Curvas de densidad gamma; (b) curvas de densidad gamma estándar

La media y la varianza de una variable aleatoria X que tiene la distribución gamma $f(x;\alpha,\beta)$ son

$$E(X)=\mu=\alpha\beta \qquad V(X)=\sigma^2=\alpha\beta^2$$

Cuando X es una variable aleatoria gamma estándar, la función de distribución acumulada de X,

$$F(x;\alpha)=\int_0^x \frac{y^{\alpha-1}e^{-y}}{\Gamma(\alpha)}\,dy \qquad x>0 \tag{4.9}$$

se llama **función gamma incompleta** [en ocasiones la función gamma incompleta se refiere a la expresión (4.9) sin el denominador $\Gamma(\alpha)$ en el integrando]. Existen tablas extensas de

$F(x; \alpha)$ disponibles; en la tabla A.4 del apéndice se presenta una pequeña tabulación para $\alpha = 1, 2, \ldots, 10$ y $x = 1, 2, \ldots, 15$.

EJEMPLO 4.23 El artículo **"The Probability Distribution of Maintenance Cost of a System Affected by the Gamma Process of Degradation" (*Reliability Engr. and System Safety*, 2012: 65–76)** observa que la distribución gamma es ampliamente utilizada para modelar el grado de degradación como la corrosión, la fluencia o el desgaste. X representa la cantidad de degradación de un tipo determinado y supongamos que tiene una distribución gamma estándar con $\alpha = 2$. Ya que

$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$$

cuando X es continua,

$$P(3 \le X \le 5) = F(5; 2) - F(3; 2) = .960 - .801 = .159$$

La probabilidad de que el tiempo de degradación sea de más de 4 s es

$$P(X > 4) = 1 - P(X \le 4) = 1 - F(4; 2) = 1 - .908 = .092$$ ■

La función gamma incompleta también se utiliza para calcular probabilidades que implican distribuciones gamma no estándar. Estas probabilidades también se obtienen casi instantáneamente con varios paquetes de software.

PROPOSICIÓN

Si X tiene una distribución gamma con parámetros α y β, entonces con cualquier $x > 0$, la función de distribución acumulada de X es

$$P(X \le x) = F(x; \alpha, \beta) = F\left(\frac{x}{\beta}; \alpha\right)$$

donde $F(\cdot\,; \alpha)$ es la función gamma incompleta.

EJEMPLO 4.24 Suponga que el tiempo de sobrevivencia X en semanas de un ratón macho seleccionado al azar y expuesto a 240 rads de radiación gamma tiene una distribución gamma con $\alpha = 8$ y $\beta = 15$. (La información en ***Survival Distributions: Reliability Applications in the Biomedical Services*, de A. J. Gross y V. Clark**, sugiere $\alpha \approx 8.5$ y $\beta \approx 13.3$.) El tiempo de sobrevivencia esperado es $E(X) = (8)(15) = 120$ semanas, en tanto que $V(X) = (8)(15)^2 = 1800$ y $\sigma_X = \sqrt{1800} = 42.43$ semanas. La probabilidad de que un ratón sobreviva entre 60 y 120 semanas es

$$\begin{aligned} P(60 \le X \le 120) &= P(X \le 120) - P(X \le 60) \\ &= F(120/15; 8) - F(60/15; 8) \\ &= F(8; 8) - F(4; 8) = .547 - .051 = .496 \end{aligned}$$

La probabilidad de que un ratón sobreviva por lo menos 30 semanas es

$$\begin{aligned} P(X \ge 30) &= 1 - P(X < 30) = 1 - P(X \le 30) \\ &= 1 - F(30/15; 8) = .999 \end{aligned}$$ ■

Distribución ji-cuadrada

La distribución ji-cuadrada es importante porque es la base de varios procedimientos de inferencia estadística. El papel central desempeñado por la distribución ji-cuadrada en inferencia se deriva de su relación con distribuciones normales (véase el ejercicio 71). Esta distribución se abordará con más detalle en capítulos posteriores.

DEFINICIÓN

Sea ν un entero positivo. Se dice, por tanto, que una variable aleatoria X tiene una **distribución chi o ji-cuadrada** con parámetro ν si la función de densidad de probabilidad de X es la densidad gamma con $\alpha = \nu/2$ y $\beta = 2$. La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria ji-cuadrada es entonces

$$f(x; \nu) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} x^{(\nu/2)-1} e^{-x/2} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \qquad \textbf{(4.10)}$$

El parámetro ν se llama **número de grados de libertad** (gl) de X. A menudo se utiliza el símbolo χ^2 en lugar de "ji-cuadrada".

EJERCICIOS Sección 4.4 (59–71)

59. Sea X = el tiempo entre dos llegadas sucesivas a la ventanilla de autopago de un banco local. Si X tiene una distribución exponencial con $\lambda = 1$ (la cual es idéntica a una distribución gamma estándar con $\alpha = 1$) calcule lo siguiente:

a. El tiempo esperado entre dos llegadas sucesivas.

b. La desviación estándar del tiempo entre llegadas sucesivas

c. $P(X \leq 4)$ **d.** $P(2 \leq X \leq 5)$

60. Sea X la distancia (m) que un animal recorre desde el sitio de su nacimiento hasta el primer territorio disponible que encuentra. Suponga que para ratas canguro cola de bandera, X tiene una distribución exponencial con parámetro $\lambda = .01386$ (como lo sugiere el artículo **"Competition and Dispersal from Multiple Nests", *Ecology*, 1997: 873–883**).

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la distancia sea cuando mucho de 100 m? ¿Y cuándo mucho de 200 m? ¿Y entre 100 y 200 m?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la distancia exceda la distancia media por más de 2 desviaciones estándar?

c. ¿Cuál es el valor de la distancia mediana?

61. Los datos recogidos en el Aeropuerto Internacional Toronto Pearson sugieren que una distribución exponencial con valor medio de 2.725 horas es un buen modelo para la duración de la lluvia (***Urban Stormwater Management Planning with Analytical Probabilistic Models*, 2000, p. 69**).

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la duración de un evento de lluvia en este lugar particular sea al menos de 2 horas? ¿A lo más de 3 horas? ¿Entre 2 y 3 horas?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la duración de la lluvia supere la media por más de dos desviaciones estándar? ¿Cuál es la probabilidad de que sea menor que la media en más de una desviación estándar?

62. El artículo **"Microwave Observations of Daily Antarctic Sea-Ice Edge Expansion and Contribution Rates" (*IEEE Geosci. and Remote Sensing Letters*, 2006: 54–58)** establece que "la distribución del avance-retroceso diario del hielo marino respecto a cada sensor es similar y es aproximadamente una exponencial doble". La distribución exponencial doble propuesta tiene una función de densidad con $f(x) = .5\lambda e^{-\lambda|x|}$ para $-\infty < x < \infty$. La desviación estándar se da como 40.9 km.

a. ¿Cuál es el valor del parámetro λ?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la extensión del cambio del hielo marino esté dentro de 1 desviación estándar de la media?

63. Un consumidor está tratando de decidir entre dos planes de llamadas de larga distancia. El primero aplica una sola tarifa de 10¢ por minuto, en tanto que el segundo cobra una tarifa de 99¢ por llamadas hasta de 20 minutos y luego 10¢ por cada minuto adicional que exceda de 20 (suponga que las llamadas que duran un número no entero de minutos se cobran en proporcionalmente a un cargo por minuto entero). Suponga que la distribución de la duración de llamadas del consumidor es exponencial con parámetro λ.

a. Explique intuitivamente cómo la selección del plan de llamadas deberá depender de cuál sea la duración de las llamadas.

b. ¿Cuál plan es mejor si la duración esperada de las llamadas es de 10 minutos? ¿Y si es de 15 minutos? [*Sugerencia:* Sea $h_1(x)$ el costo del primer plan cuando la duración de las llamadas es de x minutos y sea $h_2(x)$ la función de costo del segundo plan. Dé expresiones para estas dos funciones de costo y luego determine el costo esperado de cada plan.]

64. Evalúe lo siguiente:

a. $\Gamma(6)$ **b.** $\Gamma(5/2)$

c. $F(4; 5)$ (la función gamma incompleta) y $F(5; 4)$

d. $P(X \leq 5)$ cuando X tiene una distribución gamma estándar con $\alpha = 7$.

e. $P(3 < X < 8)$ cuando X tiene la distribución especificada en (d).

65. X indica el tiempo de transferencia de datos (ms) en un sistema de red informática (el tiempo requerido para la transferencia de

datos entre una computadora "trabajador" y una computadora "maestro". Suponga que X tiene una distribución gamma con media de 37.5 ms y desviación estándar 21.6 (sugeridos por el artículo **"Computation Time of Grid Computing with Data Transfer Times that Follow a Gamma Distribution,"** ***Proceedings of the First International Conference on Semantics, Knowledge, and Grid*****, 2005).**

a. ¿Cuáles son los valores de α y β?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de la transferencia de datos sea mayor de 50 ms?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que tiempo de transferencia de datos este entre 50 y 75 ms?

66. La distribución gamma de dos parámetros se puede generalizar al introducir un tercer parámetro γ, llamado parámetro *umbral* o de *ubicación*: sustituya x en (4.8) por $x - \gamma$ y $x \geq 0$ por $x \geq \gamma$. Estas cantidades recorren las curvas de densidad en la figura 4.27 de tal manera que empiezan a ascender o descender en γ y no en 0. El artículo **"Bivariate Flood Frequency Analysis with Historical Information Based on Copulas"** (***J. of Hydrologic Engr.*****, 2013: 1018–1030)** emplea esta distribución para modelar X = 3 días de volumen de inundación (10^8 m^3). Supongamos que los valores de los parámetros son $\alpha = 12$, $\beta = 7$, $\gamma = 40$ (muy cerca de las estimaciones en el citado artículo con base en datos del pasado).

a. ¿Cuáles son la media y la desviación estándar de X?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el volumen de inundación esté entre 100 y 150?

c. ¿Cuál es la probabilidad que el volumen de inundación exceda su media por más de una desviación estándar?

d. ¿Cuál es el percentil 95 de la distribución del volumen de inundación?

67. Suponga que cuando un transistor de cierto tipo se somete a una prueba de duración acelerada, la duración X (en semanas) tiene una distribución gamma con media de 24 semanas y desviación estándar de 12 semanas.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que un transistor dure entre 12 y 24 semanas?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que un transistor dure cuando mucho 24 semanas? ¿Es la mediana de la distribución de duración menor que 24? ¿Por qué sí o por qué no?

c. ¿Cuál es el percentil 99 de la distribución de duración?

d. Suponga que en realidad la prueba termina después de t semanas. ¿Qué valor de t es tal que sólo .5% de todos los transistores continuarán funcionando al término?

68. El caso especial de la distribución gamma en la cual α es un entero positivo n se llama distribución de Erlang. Si se reemplaza β por $1/\lambda$ en la expresión (4.8), la función de densidad de probabilidad de Erlang es

$$f(x; \lambda, n) = \begin{cases} \dfrac{\lambda(\lambda x)^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Se puede demostrar que si los tiempos entre eventos sucesivos son independientes, cada uno con distribución exponencial con parámetro λ, entonces el tiempo total X que transcurre antes de que ocurran los siguientes n eventos tiene una función de densidad de probabilidad $f(x; \lambda, n)$.

a. ¿Cuál es el valor esperado de X? Si el tiempo (en minutos) entre llegadas de clientes sucesivos está exponencialmente distribuido con $\lambda = .5$, ¿cuánto tiempo se puede esperar que transcurra antes de que llegue el décimo cliente?

b. Si el tiempo entre llegadas de los clientes está exponencialmente distribuido con $\lambda = .5$, ¿cuál es la probabilidad de que el décimo cliente (después del que recién ha llegado) llegue dentro de los siguientes 30 min?

c. El evento $\{X \leq t\}$ ocurre si al menos ocurren n eventos en las siguientes t unidades de tiempo. Use el hecho de que el número de eventos que ocurren en un intervalo de duración t tiene una distribución de Poisson con parámetro λt para escribir una expresión (que implique probabilidades de Poisson) para la función de distribución acumulada $f(t; \lambda, n) = P(X \leq t)$.

69. Un sistema consta de cinco componentes idénticos conectados en serie tal como se muestra:

En cuanto un componente falla, todo el sistema lo hace. Suponga que cada componente tiene una duración que está exponencialmente distribuida con $\lambda = .01$ y que los componentes fallan de manera independiente uno de otro. Defina los eventos A_i = {el componente i-ésimo dura al menos t horas}, $i = 1, \ldots, 5$, de modo que los A_i son eventos independientes. Sea X = el tiempo en el cual el sistema falla; es decir, la duración más corta (mínima) entre los cinco componentes.

a. ¿A qué evento equivale el evento $\{X \geq t\}$ que implique $A_1, \ldots A_5$?

b. Utilizando la independencia de los eventos A_i calcule $P(X \leq t)$. Luego obtenga $F(t) = P(X \leq t)$ y la función de densidad de probabilidad de X. ¿Qué tipo de distribución tiene X?

c. Suponga que existen n componentes y que cada uno tiene una duración exponencial con parámetro λ. ¿Qué tipo de distribución tiene X?

70. Si X tiene una distribución exponencial con parámetro λ, deduzca una expresión general para el $(100p)^{\circ}$ percentil de la distribución. Luego especialícela para obtener la mediana.

71. **a.** ¿A qué evento equivale el evento $\{X^2 \leq y\}$ que implica a la X misma?

b. Si X tiene una distribución normal estándar use el inciso a) para escribir la integral que es igual a $P(X^2 \leq y)$. Luego derívela respecto a y para obtener la función de densidad de probabilidad de X^2 [el cuadrado de una variable $N(0, 1)$]. Por último, demuestre que tiene una distribución ji-cuadrada con $\nu = 1$ [véase (4.10)]. [*Sugerencia:* Use la siguiente identidad.]

$$\frac{d}{dy}\left\{\int_{a(y)}^{b(y)} f(x)\,dx\right\} = f[b(y)] \cdot b'(y) - f[a(y)] \cdot a'(y)$$

4.5 Otras distribuciones continuas

Las familias de distribuciones normal, gamma (incluida la exponencial) y uniforme proporcionan una amplia variedad de modelos de probabilidad de variables continuas, pero existen muchas situaciones prácticas en las cuales ningún miembro de estas familias se adapta bien a un conjunto de datos observados. Los estadísticos y otros investigadores han desarrollado otras familias de distribuciones que a menudo son apropiadas en la práctica.

Distribución de Weibull

El físico sueco Waloddi Weibull introdujo la familia de distribuciones Weibull en 1939; su artículo de 1951 **"A Statistical Distribution Function of Wide Applicability"** (***J. of Applied Mechanics*, vol. 18: 293–297**) aborda varias aplicaciones.

DEFINICIÓN

Se dice que una variable aleatoria X tiene una **distribución de Weibull** con parámetros de forma α y de escala β ($\alpha > 0, \beta > 0$) si la función de densidad de probabilidad de X es

$$f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-(x/\beta)^{\alpha}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \qquad \textbf{(4.11)}$$

En algunas situaciones existen justificaciones teóricas para la pertinencia de la distribución de Weibull, pero en muchas aplicaciones $f(x; \alpha, \beta)$ simplemente proporciona una concordancia respecto a los datos observados con valores particulares de α y β. Cuando $\alpha = 1$, la función de densidad de probabilidad se reduce a la distribución exponencial (con $\lambda = 1/\beta$), de modo que la distribución exponencial es un caso especial, tanto de la distribución gamma como de la distribución de Weibull. No obstante, existen distribuciones gamma que no son Weibull, y viceversa, por lo que una familia no es un subconjunto de la otra. Tanto α como β pueden ser variadas para obtener diferentes formas de curvas de densidad, como se ilustra en la figura 4.28.

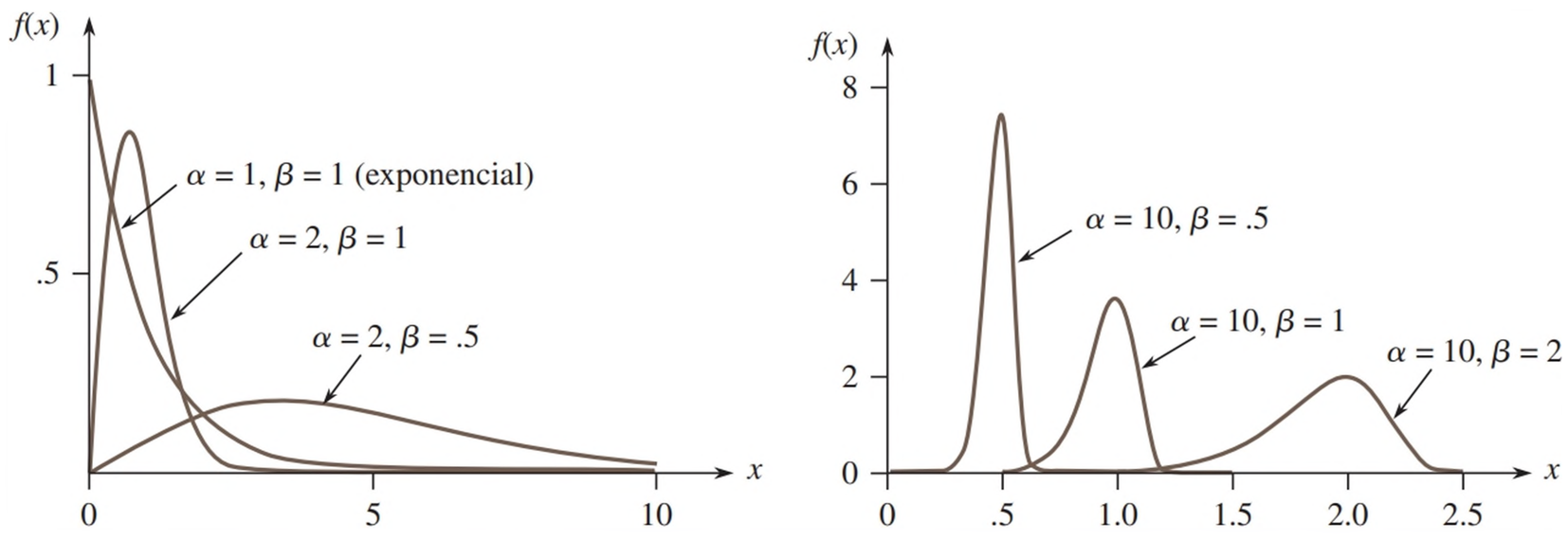


Figura 4.28 Curvas de densidad de Weibull

Al integrar para obtener $E(X)$ y $E(X^2)$ se obtiene

$$\mu = \beta\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \qquad \sigma^2 = \beta^2\left\{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\right]^2\right\}$$

El cálculo de μ y σ^2 requiere, por tanto, el uso de la función gamma.

La integración $\int_0^x f(y; \alpha, \beta)\, dy$ es fácil de realizar para obtener la función de distribución acumulada de X.

La función de distribución acumulada de una variable aleatoria de Weibull con parámetros α y β es

$$F(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-(x/\beta)^\alpha} & x \geq 0 \end{cases} \qquad \textbf{(4.12)}$$

EJEMPLO 4.25 En años recientes la distribución de Weibull se ha utilizado para modelar emisiones de varios contaminantes por motor. Sea X la cantidad de emisiones de NO_x (g/gal) de un motor de cuatro tiempos de un tipo seleccionado al azar, y suponga que X tiene una distribución de Weibull con $\alpha = 2$ y $\beta = 10$ (sugeridos por la información que aparece en el artículo **"Quantification of Variability and Uncertainty in Lawn and Garden Equipment NO_x and Total Hydrocarbon Emission Factors", *J. of the Air and Waste Management Assoc.*, 2002: 435–448**). La curva de densidad correspondiente se ve exactamente como la de la figura 4.28 con $\alpha = 2$, $\beta = 1$, excepto que ahora los valores 50 y 100 reemplazan a 5 y 10 en el eje horizontal. Por tanto.

$$P(X \leq 10) = F(10; 2, 10) = 1 - e^{-(10/10)^2} = 1 - e^{-1} = .632$$

Asimismo, $P(X \leq 25) = .998$, así que la distribución está concentrada casi por completo en valores entre 0 y 25. El valor c el cual separa 5% de todos los motores que emiten las más grandes cantidades de NO_x del 95% restante, satisface

$$.95 = 1 - e^{-(c/10)^2}$$

Al aislar el término exponencial de un lado, sacar logaritmos y resolver la ecuación resultante se obtiene $c \approx 17.3$ como el percentil 95 de la distribución de emisiones. ■

En situaciones prácticas un modelo de Weibull puede ser razonable excepto que el valor más pequeño posible de X puede ser algún valor γ que no se supuso que fuera cero (esto también se aplicaría a un modelo gamma). La cantidad γ puede entonces ser considerada como un tercer (umbral o ubicación) parámetro de la distribución, lo cual es lo que Weibull hizo en su trabajo original. Por ejemplo, con $\gamma = 3$ todas las curvas que aparecen en la figura 4.28 se desplazarían 3 unidades a la derecha. Esto equivale a decir que $X - \gamma$ tiene la función de densidad de probabilidad (4.11), de modo que la función de distribución acumulada de X se obtiene reemplazando x en (4.12) por $x - \gamma$.

EJEMPLO 4.26 La comprensión de las propiedades volumétricas del asfalto es importante en el diseño de las mezclas que se traducirán en pavimento de alta durabilidad. El artículo **"Is a Normal Distribution the Most Appropriate Statistical Distribution for Volumetric Properties in Asphalt Mixtures?" (*J. of Testing and Evaluation*, septiembre de 2009: 1–11)** utiliza el análisis de algunos datos de la muestra para recomendar que para una mezcla particular, X = volumen vacío de aire (%) se modele con una distribución de Weibull de tres parámetros. Supongamos los valores de los parámetros: $\gamma = 4$, $\alpha = 1.3$ y $\beta = .8$ (muy cerca de las estimaciones hechas en el artículo).

Para $x > 4$ la función de distribución acumulativa es

$$F(x; \alpha, \beta, \gamma) = F(x; 1.3, .8, 4) = 1 - e^{-[(x-4)/.8]^{1.3}}$$

La probabilidad de que el volumen vacío de aire de una muestra está entre 5 y 6% es

$$P(5 \le X \le 6) = F(6; 1.3, .8, 4) - F(5; 1.3, .8, 4) = e^{-[(5-4)/.8]^{1.3}} - e^{-[(6-4)/.8]^{1.3}}$$
$$= .263 - .037 = .226$$

La figura 4.29 muestra una gráfica de Minitab de la correspondiente función de densidad de Weibull en la que el área sombreada corresponde a la probabilidad que se recién se ha calculado.

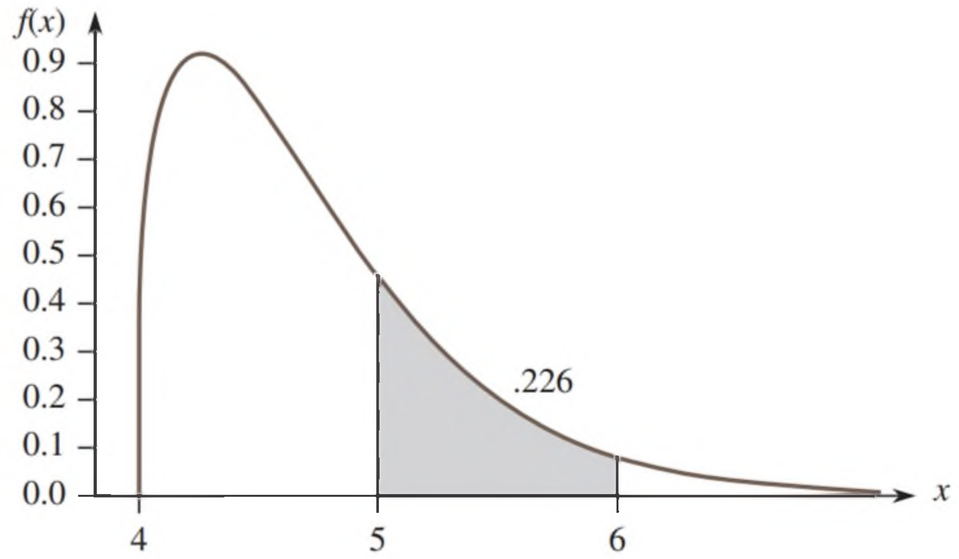


Figura 4.29 Curva de densidad de Weibull con umbral = 4, forma = 1.3, escala = .8 ■

Distribución lognormal

DEFINICIÓN

Se dice que una variable aleatoria no negativa X tiene una **distribución lognormal** si la variable aleatoria $Y = \ln(X)$ tiene una distribución normal. La función de densidad de probabilidad resultante de una variable aleatoria lognormal cuando el $\ln(X)$ está normalmente distribuido con parámetros μ y σ es

$$f(x; \mu, \sigma) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-[\ln(x)-\mu]^2/(2\sigma^2)} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Hay que tener cuidado aquí; los parámetros μ y σ no son la media y la desviación estándar de X, sino de $\ln(X)$. Se puede demostrar que la media y la varianza de X son

$$E(X) = e^{\mu+\sigma^2/2} \qquad V(X) = e^{2\mu+\sigma^2} \cdot (e^{\sigma^2} - 1)$$

En el capítulo 5 se presenta una justificación teórica para esta distribución en conexión con el teorema del límite central, pero como con cualesquiera otras distribuciones, se puede utilizar la lognormal como modelo, incluso en ausencia de semejante justificación. La figura 4.30 ilustra gráficas de la función de densidad de probabilidad lognormal; aunque una curva normal sea simétrica, una curva lognormal tiene una asimetría positiva.

Debido a que $\ln(X)$ tiene una distribución normal la función de distribución acumulada de X puede expresarse en términos de la función de distribución acumulada $\Phi(z)$ de una variable aleatoria normal estándar Z.

$$F(x; \mu, \sigma) = P(X \le x) = P[\ln(X) \le \ln(x)]$$
$$= P\left(Z \le \frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}\right) \qquad x \ge 0 \qquad \textbf{(4.13)}$$

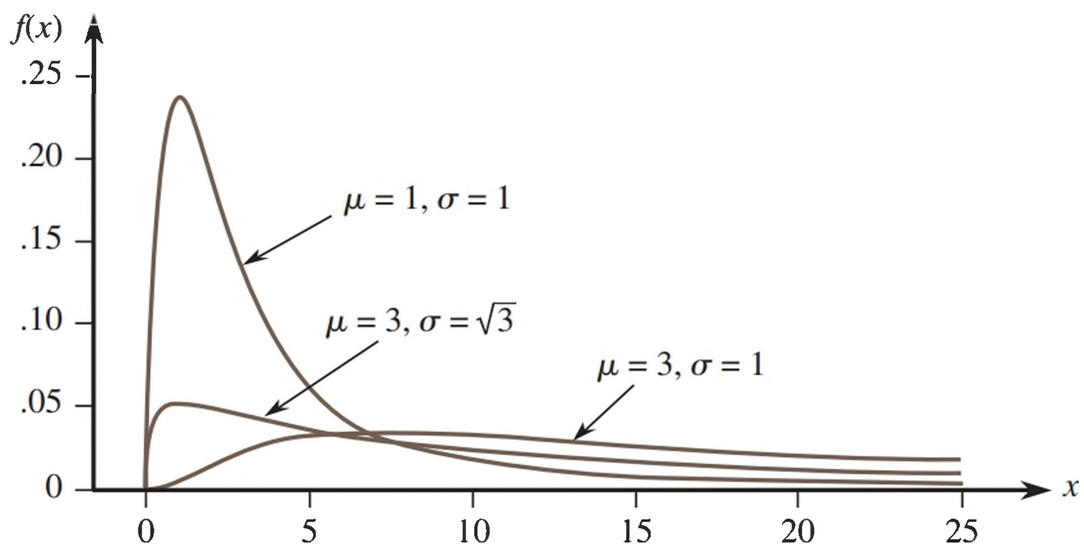


Figura 4.30 Curvas de densidad lognormal

EJEMPLO 4.27 De acuerdo con el artículo **"Predictive Model for Pitting Corrosion in Buried Oil and Gas Pipelines" (*Corrosion*, 2009: 332–342),** la distribución logarítmica normal ha sido considerada la mejor opción para describir la distribución de los datos de la máxima profundidad de pozo en el suelo de las tuberías de hierro fundido. Los autores sugieren que una distribución logarítmica normal con $\mu = .353$ y $\sigma = .754$ es apropiada para la profundidad de pozo máxima (mm) de tuberías enterradas. Para esta distribución la media y la varianza de la profundidad de pozo son

$$E(X) = e^{.353 + (.754)^2/2} = e^{.6373} = 1.891$$
$$V(X) = e^{2(.353) + (.754)^2} \cdot (e^{(.754)^2} - 1) = (3.57697)(.765645) = 2.7387$$

La probabilidad de que la máxima profundidad de pozo esté entre 1 y 2 mm es

$$P(1 \le X \le 2) = P(\ln(1) \le \ln(X) \le \ln(2)) = P(0 \le \ln(X) \le .693)$$
$$= P\left(\frac{0 - .353}{.754} \le Z \le \frac{.693 - .353}{.754}\right) = \Phi(.47) - \Phi(-.45) = .354$$

Esta probabilidad se ilustra en la figura 4.31 (de Minitab).

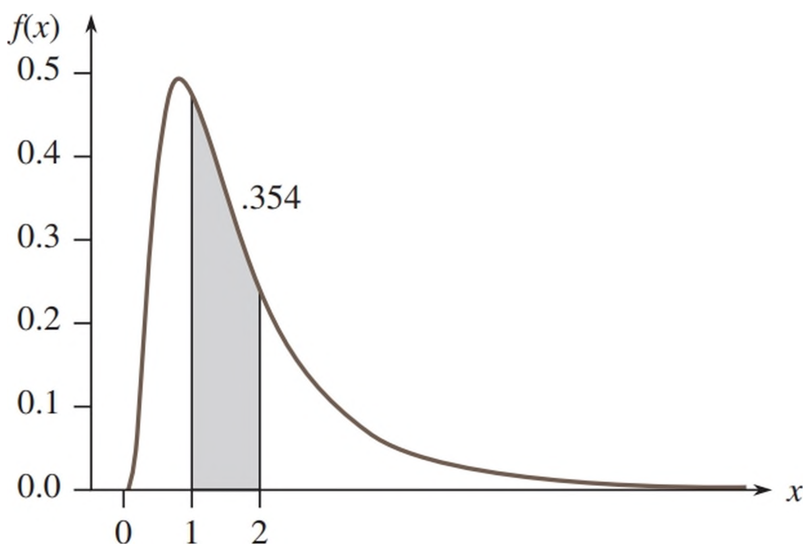


Figura 4.31 Curva de densidad lognormal con $\mu = .353$ y escala $\sigma = .754$

¿Qué valor de c es tal que sólo 1% de todas las muestras tiene una profundidad máxima de pozo que excede c? El valor que se desea es

$$.99 = P(X \le c) = P\left(Z \le \frac{\ln(c) - .353}{.754}\right)$$

El valor z crítico 2.33 captura un área de cola superior de .01 ($z_{.01} = 2.33$) y, por tanto, un área acumulada de .99. Esto implica que

$$\frac{\ln(c) - .353}{.754} = 2.33$$

con lo que $\ln(c) = 2.1098$ y $c = 8.247$. Por tanto, 8.247 es el 99º percentil de la distribución de la máxima profundidad de pozo. ■

Distribución beta

Todas las familias de distribuciones continuas estudiadas hasta ahora, excepto la distribución uniforme, tienen densidad positiva a lo largo de un intervalo infinito (aunque por lo general la función de densidad se reduce con rapidez a cero más allá de unas cuantas desviaciones estándar de la media). La distribución beta proporciona densidad positiva sólo para X en un intervalo de longitud finita.

DEFINICIÓN

Se dice que una variable aleatoria X tiene una **distribución beta** con parámetros (ambos positivos), A y B si la función de densidad de probabilidad de X es

$$f(x;\alpha,\beta,A,B) = \begin{cases} \dfrac{1}{B-A}\cdot\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}\left(\dfrac{x-A}{B-A}\right)^{\alpha-1}\left(\dfrac{B-x}{B-A}\right)^{\beta-1} & A\le x\le B \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

El caso $A = 0$, $B = 1$ da la **distribución beta estándar.**

La figura 4.32 ilustra varias funciones de densidad de probabilidad beta estándar. Las gráficas de la función de densidad de probabilidad son similares, excepto que están desplazadas y luego alargadas o comprimidas para ajustarse al intervalo $[A, B]$. A menos que α y β sean enteros, la integración de la función de densidad de probabilidad para calcular probabilidades es difícil. Se deberá utilizar una tabla de la función beta incompleta o un programa de computadora apropiado. La media y la varianza de X son

$$\mu = A + (B-A)\cdot\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \qquad \sigma^2 = \frac{(B-A)^2\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

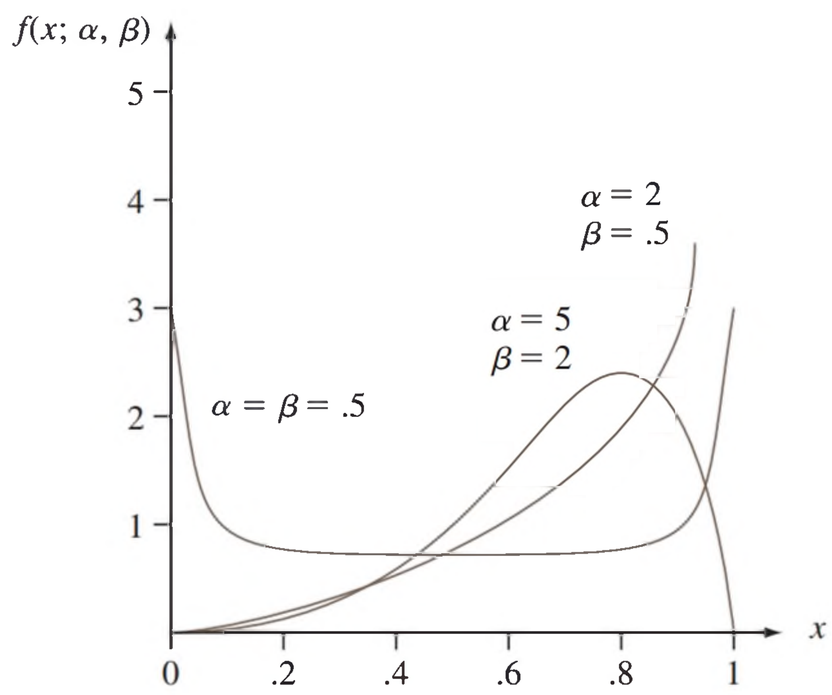


Figura 4.32 Curvas de densidad beta estándar

EJEMPLO 4.28 Los gerentes de proyectos a menudo utilizan un método llamado PERT (por las siglas en inglés de técnica de revisión y evaluación de programas) para coordinar las diversas actividades que conforman un gran proyecto. (Una aplicación exitosa ocurrió en la construcción de la nave espacial *Apolo*.) Una suposición estándar en el análisis PERT es que el tiempo necesario para completar cualquier actividad particular una vez que se ha iniciado tiene una distribución beta con A = el tiempo optimista (si todo sale bien) y B = tiempo pesimista (si todo sale mal). Suponga que al construir una casa unifamiliar, el

tiempo X (en días) necesario para echar los cimientos tiene una distribución beta con $A = 2$, $B = 5$, $\alpha = 2$ y $\beta = 3$. Entonces $\alpha/(\alpha + \beta) = .4$, así, $E(X) = 2 + (3)(.4) = 3.2$. Con estos valores de α y β la función de densidad de probabilidad de X es una función polinomial simple. La probabilidad de que se requieran a lo más tres días para echar los cimientos es

$$P(X \le 3) = \int_2^3 \frac{1}{3} \cdot \frac{4!}{1!2!}\left(\frac{x-2}{3}\right)\left(\frac{5-x}{3}\right)^2 dx$$

$$= \frac{4}{27}\int_2^3 (x-2)(5-x)^2 dx = \frac{4}{27} \cdot \frac{11}{4} = \frac{11}{27} = .407$$ ■

La distribución beta estándar se utiliza comúnmente para modelar la variación en la proporción o el porcentaje de una cantidad que ocurre en diferentes muestras, tal como la proporción de un día en que un individuo está despierto o la proporción de cierto elemento en un compuesto químico.

EJERCICIOS Sección 4.5 (72–86)

72. La duración X (en cientos de horas) de un tipo de tubo de vacío tiene una distribución de Weibull con parámetros $\alpha = 2$ y $\beta = 3$. Calcule lo siguiente:

a. $E(X)$ y $V(X)$

b. $P(X \le 6)$

c. $P(1.5 \le X \le 6)$

(Esta distribución de Weibull se sugiere como modelo del tiempo de servicio en **"On the Assessment of Equipment Reliability: Trading Data Collection Costs for Precision"**, ***J. of Engr. Manuf.*, 1991: 105–109.**)

73. Los autores del artículo **"A Probabilistic Insulation Life Model for Combined Thermal-Electrical Stresses"** (***IEEE Trans. On Elect. Insulation*, 1985: 519–522**) expresan que "la distribución de Weibull se utiliza mucho en problemas estadísticos relacionados con el desgaste de materiales sólidos aislantes sometidos a envejecimiento y esfuerzo". Proponen usar la distribución como modelo del tiempo (en horas) hasta que fallen las muestras aislantes sólidas sometidas a voltaje de CA. Los valores de los parámetros dependen del voltaje y la temperatura; suponga $\alpha = 2.5$ y $\beta = 200$ (valores sugeridos por la información que aporta el artículo).

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la duración de una muestra sea cuando mucho de 250? ¿Y de menos de 250? ¿Y de más de 300?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la duración de una muestra esté entre 100 y 250?

c. ¿Qué valor será tal que exactamente 50% de todas las muestras tienen duraciones que sobrepasan ese valor?

74. Una vez que un individuo ha sido infectado con una determinada enfermedad, X representa el tiempo (días) que transcurre antes de que el individuo se convierta en infeccioso. El artículo **"The Probability of Containment for Multitype Branching Process Models for Emerging Epidemics"** (***J. of Applied Probability*, 2011: 173–188**) propone una distribución de Weibull con un $\alpha = 2.2$, $\beta = 1.1$ y $\gamma = .5$ (consulte el ejemplo 4.26).

a. Calcule $P(1 < X < 2)$.

b. Calcule $P(X > 1.5)$.

c. ¿Cuál es el percentil 90 de la distribución?

d. ¿Cuáles son la media y la desviación estándar de X?

75. Si X tiene una distribución de Weibull con la función de densidad de probabilidad de la expresión (4.11), verifique que $\mu = \beta\Gamma(1 + 1/\alpha)$. [*Sugerencia:* En la integral para $E(X)$ cambie la variable $y = (x/\beta)^\alpha$, de modo que $x = \beta y^{1/\alpha}$.]

76. El artículo **"The Statistics of Phytotoxic Air Pollutants"** (***J. of Royal Stat. Soc.*, 1989: 183–198**) sugiere la distribución lognormal como modelo para la concentración de SO_2 arriba de un determinado bosque. Supongamos que los valores de los parámetros son $\mu = 1.9$ y $\sigma = .9$.

a. ¿Cuál es la media y la desviación estándar de la concentración?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la concentración sea a lo más 10? ¿Y entre 5 y 10?

77. Los autores del artículo del cual se extrajo la información en el ejercicio 1.27 sugieren que un modelo de probabilidad razonable de la duración de las brocas es una distribución lognormal con $\mu = 4.5$ y $\sigma = .8$.

a. ¿Cuáles son la media y la desviación estándar de la duración?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la duración sea cuando mucho de 100?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que la duración sea al menos de 200? ¿Y de más de 200?

78. El artículo **"On Assessing the Accuracy of Offshore Wind Turbine Reliability-Based Design Loads from the Environmental Contour Method"** (***Intl. J. of Offshore and Polar Engr.*, 2005: 132–140**) propone la distribución de Weibull con $\alpha = 1.817$ y $\beta = .863$ como modelo de una altura (m) de olas significativa durante 1 hora en un sitio particular.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la altura de las olas sea cuando mucho de .5 m?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la altura de las olas exceda su media por más de una desviación estándar?

c. ¿Cuál es la mediana de la distribución de la altura de las olas?

d. Para $0 < p < 1$ proporcione una expresión general para el percentil 100 de la distribución de la altura de las olas.

79. Las cargas de fuentes no puntuales son masas de químicos que viajan al tallo principal de un río y sus afluentes, en flujos que se distribuyen sobre una corriente relativamente de largo alcance, en comparación con los que entran en puntos bien definidos y regulados. El artículo **"Assessing Uncertainty in Mass Balance Calculation of River Nonpoint Source Loads"** (***J. of Envir. Engr.*, 2008: 247–258**) sugiere que para cierto periodo y lugar X = carga de fuentes no puntuales de sólidos disueltos totales podría ser modelada con una distribución logarítmica normal con valor medio de 10 281 kg/día/km y un coeficiente de variación $CV = .40$ ($CV = \sigma_X/\mu_X$).

a. ¿Cuáles son la media y la desviación estándar de $\ln(X)$?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que X sea a lo más 15 000 kg/día/km?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que X supere su media y por qué esta probabilidad no es .5?

d. ¿Es 17 000 el percentil 95 de la distribución?

80. **a.** Use la ecuación (4.13) para escribir una fórmula para la mediana $\tilde{\mu}$ de la distribución lognormal. ¿Cuál es la mediana de la distribución de carga del ejercicio 79?

b. Al recordar z_α que es la notación para el percentil de la distribución normal estándar, escriba una expresión para el percentil de la distribución lognormal. En el ejercicio 79 ¿qué valor excederá sólo 1% del tiempo la carga recibida?

81. El retraso en las ventas es el tiempo transcurrido entre la fabricación de un producto y su venta. De acuerdo con el artículo **"Warranty Claims Data Analysis Considering Sales Delay"** (***Quality and Reliability Engr. Intl.*, 2013: 113–123**), es muy común que los investigadores modelen el retraso de las ventas usando una distribución lognormal. Para un producto en particular el artículo citado propone esta distribución con valores de parámetros $\mu = 2.05$ y $\sigma^2 = .06$ (aquí la unidad de retraso es el mes).

a. ¿Cuáles son la varianza y la desviación estándar del tiempo de retraso?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de retraso exceda los 12 meses?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que tiempo de retraso está dentro de una desviación estándar de la media?

d. ¿Cuál es la mediana de la distribución del tiempo de retraso?

e. ¿Qué es el percentil 99 de la distribución del tiempo de retraso?

f. Entre 10 artículos seleccionados al azar, ¿cuántos esperaría que tuvieran un retraso de tiempo mayor a 8 meses?

82. Tal como en el caso de las distribuciones de Weibull y Gamma la distribución lognormal puede ser modificada por la introducción de un tercer parámetro γ de modo que la función de densidad de probabilidad se cambia a positiva sólo para $x > \gamma$. El artículo citado en el ejercicio 4.39 sugiere que una distribución lognormal, con corrimiento (es decir, umbral) = 1.0, media = 2.16 y desviación estándar = 1.03 sería un modelo apropiado para la variable aleatoria X = *cociente del máximo entre profundidad promedio* de un defecto de corrosión de acero presurizado.

a. ¿Cuáles son los valores de μ y σ para la distribución propuesta?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el cociente profundidad sea mayor de 2?

c. ¿Cuál es la mediana de la distribución del cociente de profundidad?

d. ¿Cuál es el percentil 99 de la distribución del cociente de profundidad?

83. ¿Qué condición en relación con α y β es necesaria para que la función de densidad de probabilidad beta estándar sea simétrica?

84. Suponga que la proporción X del área superficial en un cuadrado seleccionado al azar que está cubierto por cierta planta tiene una distribución beta estándar con $\alpha = 5$ y $\beta = 2$.

a. Calcule $E(X)$ y $V(X)$.

b. Calcule $P(X \le .2)$.

c. Calcule $P(.2 \le X \le .4)$.

d. ¿Cuál es la proporción esperada de la región de muestreo no cubierta por la planta?

85. Sea X que tiene una densidad beta estándar con parámetros α y β.

a. Verifique la fórmula para $E(X)$ dada en la sección.

b. Calcule $E[(1 - X)^m]$. Si X representa la proporción de una sustancia compuesta por un ingrediente particular, ¿cuál es la proporción esperada que no se compone de ese ingrediente?

86. Se aplica esfuerzo a una barra de acero de 20 pulg sujeta por cada extremo en una posición fija. Sea Y = la distancia del extremo izquierdo al punto donde se rompe la barra. Suponga que $Y/20$ tiene una distribución beta estándar con $E(Y) = 10$ y $V(Y) = \frac{100}{7}$.

a. ¿Cuáles son los parámetros de la distribución beta estándar pertinente?

b. Calcule $P(8 \le Y \le 12)$.

c. Calcule la probabilidad de que la barra se rompa a más de 2 pulg de donde esperaba que se rompiera.

4.6 Gráficas de probabilidad

Con frecuencia un investigador obtiene una muestra numérica $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y desea saber si es factible que provenga de una distribución de población de un tipo particular (p. ej., de una distribución normal). Entre otras cosas, muchos procedimientos formales de inferencia estadística están basados en la suposición de que la distribución de población es de un tipo específico. El uso de un procedimiento como esos es inapropiado si la distribución de probabilidad subyacente real difiere en gran medida del tipo supuesto. Por ejemplo, el artículo **"Toothpaste Detergents: A Potential Source of Oral Soft Tissue Damage" (*Intl. J. of Dental Hygiene*, 2008: 193–198)** contiene la siguiente declaración: "Debido a que el número de muestras para cada experimento (replicación) fue limitado a tres fuentes, según el tipo de tratamiento, se supone que los datos están normalmente distribuidos". Como justificación de este acto de fe los autores escribieron que "las estadísticas descriptivas mostraron desviaciones estándar que sugieren una distribución normal altamente probable". *Nota*: Este argumento no es muy convincente.

Además, entender la distribución subyacente en ocasiones puede dar una idea de los mecanismos físicos implicados en la generación de los datos. Una forma efectiva de verificar una suposición distribucional es construir una **gráfica de probabilidad**. La esencia de una gráfica como esa es que si la distribución en la cual está basada es correcta, los puntos en la gráfica quedarán casi en una línea recta. Si la distribución real es bastante diferente de la utilizada para construir la gráfica, los puntos deberán apartarse sustancialmente de un patrón lineal.

Percentiles muestrales

Los detalles implicados al construir gráficas de probabilidad difieren un poco de una fuente a otra. La base de la construcción es una comparación entre percentiles de los datos muestrales y los percentiles correspondientes de la distribución considerada. Recuerde que el $(100p)^{\text{o}}$ percentil de una distribución continua con función de distribución acumulada $F(\cdot)$ es el número $\eta(p)$ que satisface $F(\eta(p)) = p$. Es decir, $\eta(p)$ es el número sobre la escala de medición de modo que el área bajo la curva de densidad a la izquierda de $\eta(p)$ es p. Por tanto, el 50° percentil, $\eta(.5)$ satisface $F(\eta(.5)) = .5$, y el 90° percentil satisface $F(\eta(.9)) = .9$. Considere como ejemplo la distribución normal estándar para la cual la función de distribución acumulada es $\Phi(\cdot)$. En la tabla A.3 del apéndice, el 20° percentil se localiza al ubicar la fila y la columna en las que aparece .2000 (o un número tan cerca de este como sea posible) en el interior de la tabla. Puesto que .2005 aparece en la intersección de la fila $-.8$ y en la columna .04, el 20° percentil es aproximadamente $-.84$. Asimismo, el percentil 25 de la distribución normal estándar es (utilizando interpolación lineal) aproximadamente $-.675$.

En general, los percentiles muestrales se definen del mismo modo que los percentiles de una distribución de población. El 50° percentil muestral deberá separar al más pequeño 50% de la muestra del 50% más grande; el 90° percentil deberá ser tal que 90% de la muestra quede debajo de ese valor y 10% quede sobre este, y así de manera sucesiva. Desafortunadamente, se presentan problemas cuando en realidad se trata de calcular los percentiles muestrales de una muestra particular de n observaciones. Si, por ejemplo, $n = 10$, se puede separar 20% de estos valores o 30% de los datos, pero no hay ningún valor que separe con exactitud 23% de estas diez observaciones. Para ir más allá, se requiere una definición operacional de percentiles muestrales (este es un lugar donde diferentes personas hacen cosas un poco diferentes). Recuerde que cuando n es impar, la mediana muestral o el 50° percentil muestral es la media en la lista ordenada, por ejemplo, el sexto valor más grande cuando $n = 11$. Esto equivale a considerar la observación media como la mitad en la mitad inferior de los datos y la mitad en la mitad superior. Asimismo, suponga $n = 10$.

Entonces, si a este tercer valor más pequeño se le da el nombre de 25° percentil, ese valor se está considerando como la mitad en el grupo inferior (compuesto de las dos observaciones más pequeñas) y la mitad en el grupo superior (las siete observaciones más grandes). Esto conduce a la siguiente definición general de percentiles muestrales.

DEFINICIÓN

Se ordenan las n observaciones muestrales de la más pequeña a la más grande. Entonces se considera la observación i-ésima más pequeña en la lista que es el **[100(i − .5)/n]° percentil muestral**.

Una vez calculados los valores porcentuales $100(i - .5)/n$ ($i = 1, 2,\ldots, n$) se pueden obtener los percentiles muestrales correspondientes a porcentajes intermedios mediante interpolación lineal. Por ejemplo, si $n = 10$, los porcentajes correspondientes a las observaciones muestrales ordenadas son $100(1 - .5)/10 = 5\%$, $100(2 - .5)/10 = 15\%$, $25\%,\ldots$, y $100(10 - .5)/10 = 95\%$. El 10° percentil está entonces a la mitad entre el 5° (observación muestral más pequeña) y el 15° (segunda observación más pequeña). Para los propósitos de este libro, tal interpolación no es necesaria porque una gráfica de probabilidad se basa sólo en los porcentajes $100(i - .5)/n$ correspondientes a las n observaciones muestrales.

Gráfica de probabilidad

Suponga ahora que para los porcentajes $100(i - .5)/n$ ($i = 1, 2,\ldots, n$) se determinan los percentiles de una distribución de población especificada cuya factibilidad está siendo investigada. Si la muestra en realidad se seleccionó de la distribución especificada, los percentiles muestrales (observaciones muestrales ordenadas) deberán estar razonablemente próximos a los percentiles de distribución de población correspondientes. Es decir, con $i = 1, 2,\ldots, n$ deberá haber una razonable entre la i-ésima observación muestral más pequeña y el $[100(i - .5)/n]$° percentil de la distribución especificada. Considere los pares (percentil poblacional, percentil muestral); es decir, los pares

$$\left(\begin{array}{l}[100(i - .5)/n]^\circ \text{ percentil} \\ \text{de la distribución,}\end{array}\ ,\ \begin{array}{l}i\text{−ésima observación} \\ \text{muestral más pequeña}\end{array}\right)$$

con $i = 1,\ldots n$. Cada uno de estos pares se grafica como un punto en un sistema de coordenadas bidimensional. Si los percentiles muestrales se acercan a los percentiles de distribución de población correspondientes, el primer número en cada par será aproximadamente igual al segundo número. Los puntos graficados quedarán entonces cerca de una recta a 45°. Desviaciones sustanciales de los puntos graficados respecto a una recta a 45° hacen dudar de la suposición de que la distribución considerada sea la correcta.

EJEMPLO 4.29 Un experimentador conoce el valor de cierta constante física. El experimentador realiza $n = 10$ mediciones independientes de este valor mediante un dispositivo de medición particular y anota los errores de medición resultantes (error = valor observado − valor verdadero). Estas observaciones aparecen en la siguiente tabla.

Porcentaje	5	15	25	35	45
percentil z	−1.645	−1.037	−.675	−.385	−.126
Observación muestral	−1.91	−1.25	−.75	−.53	.20
Porcentaje	55	65	75	85	95
percentil z	.126	.385	.675	1.037	1.645
Observación muestral	.35	.72	.87	1.40	1.56

¿Es factible que el *error de medición* de una variable aleatoria tenga una distribución normal estándar? En la tabla también se muestran los percentiles normales (z) estándar requeridos. Por tanto, los puntos en la gráfica de probabilidad son $(-1.645, -1.91)$, $(-1.037, -1.25)$,..., y $(1.645, 1.56)$. La figura 4.33 muestra la gráfica resultante. Aunque los puntos se desvían un poco de la recta a 45°, la impresión predominante es que la recta se adapta muy bien a los puntos. La gráfica sugiere que la distribución normal estándar es un modelo de probabilidad razonable para el error de medición.

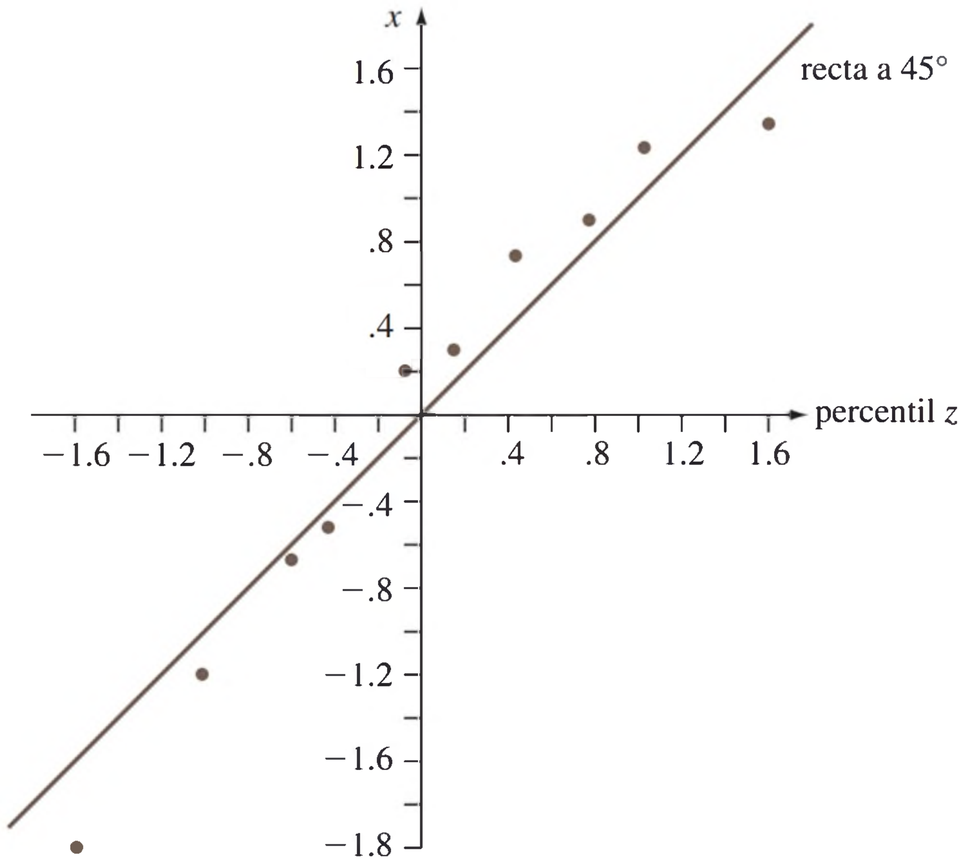


Figura 4.33 Gráficas de pares (percentil z, valor observado) con los datos del ejemplo 4.29

La figura 4.34 muestra una gráfica de pares (percentil z, observación) de una segunda muestra de diez observaciones. La recta a 45° da una buena adaptación a la parte media de la muestra, pero no a los extremos. La gráfica tiene apariencia de S bien definida. Las dos observaciones muestrales más pequeñas son considerablemente más grandes que los percentiles z correspondientes (los puntos a la extrema izquierda de la gráfica están bien por arriba de la recta a 45°). Asimismo, las dos observaciones muestrales más grandes son mucho más pequeñas que los percentiles z asociados. Esta gráfica indica que la distribución normal estándar no sería una opción factible para el modelo de probabilidad que dio lugar a estos errores de medición observados.

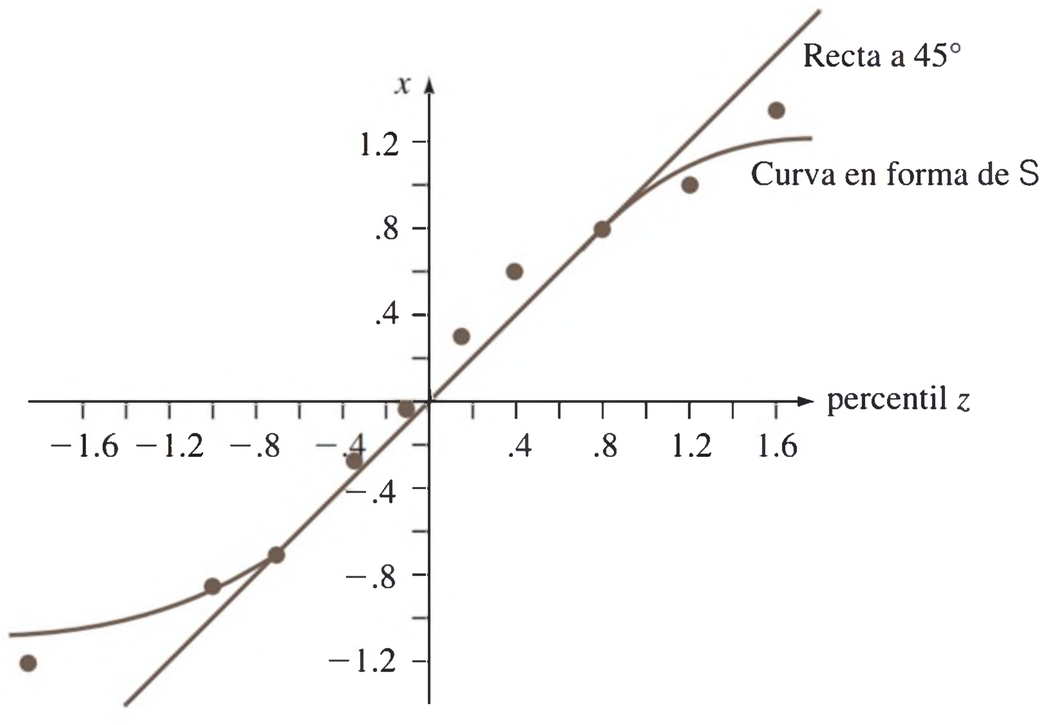


Figura 4.34 Gráficas de pares (percentil z, valor observado) con los datos del escenario del ejemplo 4.29: segunda muestra ■

En general a un investigador no le interesa saber con exactitud si una distribución de probabilidad especificada, tal como la distribución normal estándar (normal con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$) o la distribución exponencial con $\lambda = .1$, es un modelo plausible de la distribución de población de la cual se seleccionó la muestra. En cambio, la cuestión es si *algún* miembro de una familia de distribuciones de probabilidad especifica un modelo plausible: la familia de distribuciones normales, la familia de distribuciones exponenciales, la familia de distribuciones Weibull, etcétera. Los valores de los parámetros de una distribución casi nunca se especifican al principio. Si la familia de distribuciones Weibull se considera como modelo de datos de duración, ¿existen *algunos* valores de los parámetros α y β con los cuales la distribución de Weibull correspondiente se adapte bien a los datos? Por fortuna casi siempre es el caso de que sólo una gráfica de probabilidad basta para evaluar la factibilidad de una familia completa. Si la gráfica se desvía sustancialmente de una línea recta ningún miembro de la familia es factible. Cuando la gráfica es bastante recta se requiere más trabajo para estimar valores de los parámetros que generen la distribución más razonable del tipo especificado.

Habrá que enfocarse en una gráfica para verificar la normalidad. Tal gráfica es útil en trabajo aplicado porque muchos procedimientos estadísticos formales dan inferencias precisas sólo cuando la distribución de población es por lo menos aproximadamente normal. Estos procedimientos en general no deben ser utilizados si la gráfica de probabilidad normal muestra un alejamiento muy pronunciado de la linealidad. La clave para construir una gráfica de probabilidad normal que comprenda varios elementos es la relación entre los percentiles normales(z) estándar y aquellos de cualquier otra distribución normal:

$$\text{percentil de una distribución normal}(\mu, \sigma) = \mu + \sigma \cdot (\text{percentil } z \text{ correspondiente})$$

Considere primero el caso, $\mu = 0$. Si cada observación es exactamente igual al percentil normal correspondiente para algún valor de σ, los pares ($\sigma \cdot$ [percentil z], observación) quedan sobre una recta a 45°, cuya pendiente es 1. Esto implica que los pares (percentil z, observación) quedan sobre una recta que pasa por (0, 0) (es decir, una con intersección y en 0) pero con pendiente σ en lugar de 1. El efecto del valor no cero de μ es simplemente cambiar la intersección y de 0 a μ.

Una gráfica de los n pares

$$([100(i - .5)/n]^{\text{o}} \text{ percentil } z, \text{ observación } i\text{-ésima más pequeña})$$

se llama **gráfica de probabilidad normal**. Si las observaciones muestrales se extraen en realidad de una distribución normal con media μ y desviación estándar σ, los puntos deberán quedar cerca de una línea recta con pendiente σ e intercepción en μ. Así pues, una gráfica en la cual los puntos quedan cerca de alguna recta sugiere que la suposición de una distribución de población normal es factible.

EJEMPLO 4.30 Ha habido un reciente aumento en el uso de pilotes de Auger cast (ACIP) y de desplazamiento perforado (DD) en los cimientos de edificios y transportación de estructuras. En el artículo **"Design Methodology for Axially Loaded Auger Cast-in-Place and Drilled Displacement Piles" (*J. of Geotech. Geoenviron. Engr.*, 2012: 1431–1441)** los investigadores proponen una metodología de diseño para mejorar la eficiencia de estos pilotes. A continuación se presentan el cociente de las medidas longitud y diámetro de 17 cargas de prueba en pilotes estáticos de ACIP y de DD de diferentes lugares de construcción.

Los valores de p para los cuales son necesarios los percentiles z son $(1 - .5)/17 = .029$, $(2 - .5)/17 = .088$, … y.971.

$x_{(i)}$:	30.86	37.68	39.04	42.78	42.89	42.89	45.05	47.08	47.08
percentil z:	–1.89	–1.35	–1.05	–0.82	–0.63	–0.46	–0.30	–0.15	0.00
$x_{(i)}$:	48.79	48.79	52.56	52.56	54.80	55.17	56.31	59.94	
percentil z:	0.15	0.30	0.46	0.63	0.82	1.05	1.35	1.89	

La figura 4.35 muestra el correspondiente diagrama de probabilidad normal generado por el paquete de software R. El patrón de la gráfica es bastante recto, lo que indica que es factible que la distribución de la población del cociente longitud-diámetro sea normal.

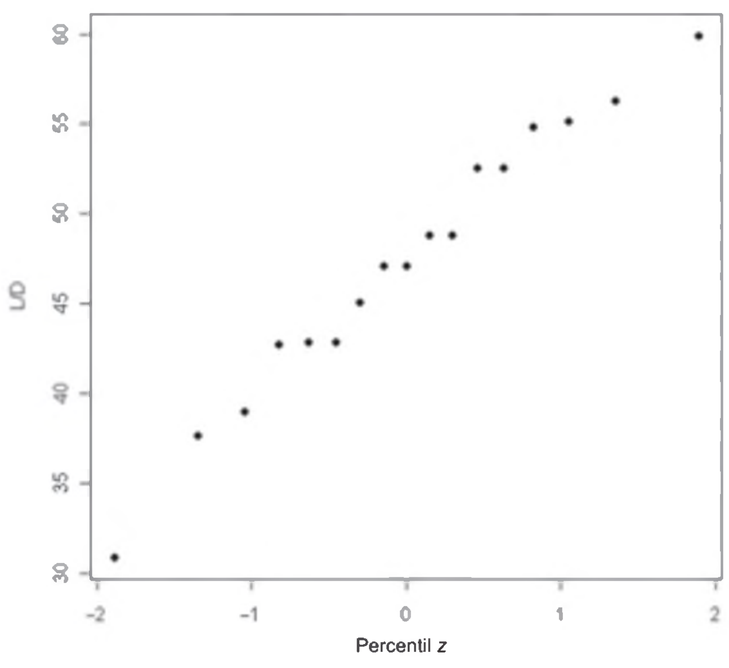


Figura 4.35 Diagrama de probabilidad normal de R para los datos del cociente longitud-diámetro ■

Hay una versión alternativa de un diagrama de probabilidad normal en donde el eje percentil z se sustituye por un eje de porcentaje no lineal. La escala de este eje se construye de modo que los puntos trazados deben caer cerca de una recta cuando la distribución de la muestra es normal. La figura 4.36 muestra la gráfica de Minitab para los datos del cociente del ejemplo 4.30. (Los dos últimos números en el pequeño recuadro a la derecha serán explicados en el capítulo 14.)

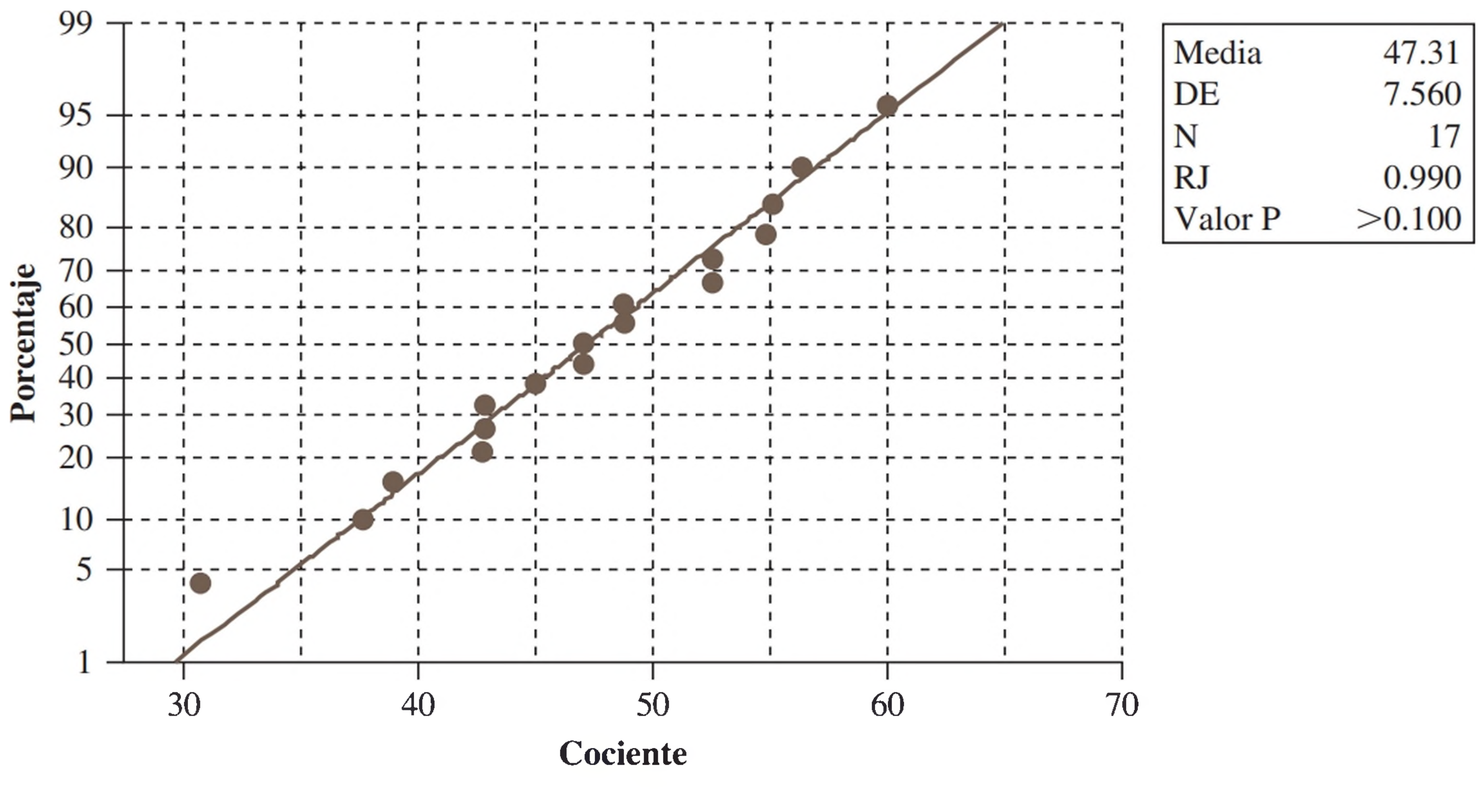


Figura 4.36 Gráfica de probabilidad normal de los datos del cociente generada por Minitab

Con frecuencia una distribución de población no normal puede ser colocada en una de las siguientes tres categorías:

1. Es simétrica y tiene "colas más livianas" que una distribución normal; es decir, la curva de densidad declina con más rapidez en las colas que una curva normal.
2. Es simétrica y con colas pesadas en comparación con una distribución normal.
3. Es asimétrica.

Una distribución uniforme es de cola liviana, puesto que su función de densidad se reduce a cero afuera de un intervalo finito. La función de densidad de Cauchy $f(x) = 1/[\pi\beta(1 + ((x - \theta)/\beta^2)]$ para $-\infty < x < \infty$ es de cola pesada, puesto que $1/(1 + x^2)$ declina mucho menos rápidamente que $e^{-x^2/2}$. Las distribuciones lognormal y de Weibull se encuentran entre aquellas que son asimétricas. Cuando los puntos en una gráfica de probabilidad normal no se adhieren a una línea recta, la configuración con frecuencia sugerirá que la distribución de la población se encuentra en una de estas tres categorías en particular.

Las observaciones más grande y más pequeña en general no son tan extremas como podría esperarse de una muestra aleatoria normal. Visualice una recta a través de la parte media de la gráfica; los puntos a la extrema derecha tienden a estar debajo de la recta (valor observado $<$ percentil z) en tanto que los puntos a la extrema izquierda de la gráfica tienden a quedar sobre la recta (valor observado $>$ percentil z). El resultado es una configuración en forma de S del tipo ilustrado en la figura 4.34.

Una muestra tomada de una distribución de cola pesada también tiende a producir una gráfica en forma de S. Sin embargo, en contraste con el caso de cola liviana, el extremo izquierdo de la gráfica se curva hacia abajo (observado $<$ percentil z), como se muestra en la figura 4.37(a). Si la distribución subyacente es positivamente asimétrica (una cola izquierda corta y una cola larga derecha), las observaciones muestrales más pequeñas serán más grandes que las esperadas de una muestra normal y también lo serán las observaciones más grandes. En este caso, los puntos en ambos extremos de la gráfica quedarán sobre una recta que pasa por la parte media que produce una configuración curvada, como se ilustra en la figura 4.37(b). Una muestra tomada de una distribución lognormal casi siempre producirá la configuración mencionada. Una gráfica de pares (percentil z, $\ln(x)$) deberá parecerse entonces a una línea recta.

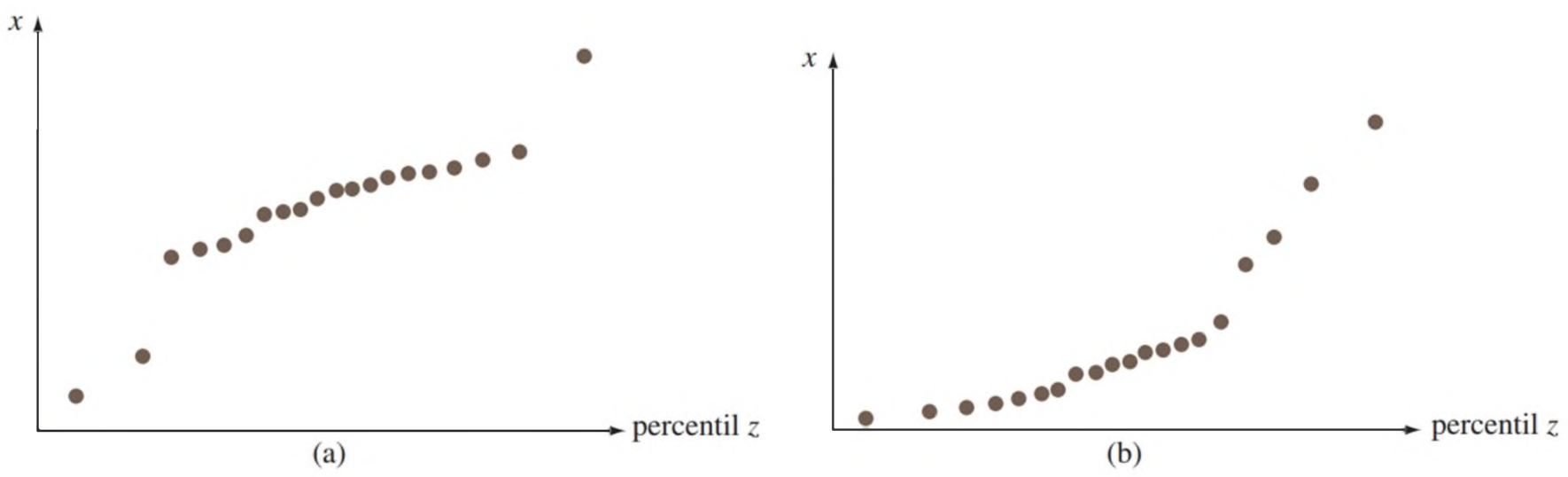


Figure 4.37 Gráficas de probabilidad que sugieren una distribución no normal: (a) una gráfica compatible con una distribución de cola pesada; (b) una gráfica compatible con una distribución positivamente asimétrica

Aunque la distribución de la población sea normal, los percentiles muestrales no coincidirán exactamente con los teóricos debido a la variabilidad del muestreo. ¿Qué tanto pueden desviarse los puntos de la gráfica de probabilidad de un patrón de línea recta antes de que la suposición de normalidad ya no sea factible? Esta no es una pregunta fácil de responder. En general, es más probable que una muestra pequeña de una distribución normal produzca una gráfica con un patrón no lineal que una muestra grande. El libro ***Fitting Equations to Data*** (véase la bibliografía del capítulo 13) presenta los resultados de un

estudio de simulación en el cual se seleccionaron numerosas muestras de diferentes tamaños de distribuciones normales. Los autores concluyeron que generalmente con tamaños de muestra de menos de 30 varía mucho la apariencia de la gráfica de probabilidad y sólo con tamaños de muestra mucho más grandes en general predomina el patrón lineal. Cuando una gráfica está basada en un pequeño tamaño de muestra, sólo un alejamiento muy sustancial de la linealidad se deberá considerar como evidencia concluyente de no normalidad. Un argumento similar se aplica a gráficas de probabilidad para comprobar la factibilidad de otros tipos de distribuciones.

Más allá de la normalidad

Considere una familia de distribuciones de probabilidad que implica dos parámetros θ_1 y θ_2 y sea $F(x; \theta_1, \theta_2)$ la función de distribución acumulada correspondiente. La familia de distribuciones normales es una de esas familias, con $\theta_1 = \mu$, $\theta_2 = \sigma$, y $F(x; \mu, \sigma) = \Phi[(x - \mu)/\sigma]$. Otro ejemplo es la familia de Weibull, con $\theta_1 = \alpha$, $\theta_2 = \beta$, y

$$F(x; \alpha, \beta) = 1 - e^{-(x/\beta)^{\alpha}}$$

Otra familia de este tipo es la familia gamma para la cual la función de distribución acumulativa es una integral que implica la función gamma incompleta que no puede ser expresada de ninguna forma más simple.

Se dice que los parámetros θ_1 y θ_2 son **parámetros de ubicación** y **escala**, respectivamente, si $F(x; \theta_1, \theta_2)$ es una función de $(x - \theta_1)/\theta_2$. Los parámetros μ y σ de la familia normal son los parámetros de ubicación y escala, respectivamente. Al cambiar θ_1 la curva de densidad en forma de campana se desplaza a la derecha o a la izquierda y al cambiar θ_2 se alarga o comprime la escala de medición. Otro ejemplo está dado por la función de densidad acumulada

$$F(x; \theta_1, \theta_2) = 1 - e^{-e^{(x-\theta_1)/\theta_2}} \quad -\infty < x < \infty$$

Se dice que una variable aleatoria con esta función de distribución acumulada tiene una *distribución de valor extremo*. Se utiliza en aplicaciones que implican la duración de un componente y la resistencia de un material.

Aunque la forma de la función de distribución acumulada de valor extremo a primera vista pudiera sugerir que θ_1 es el punto de simetría de la función de densidad y, por ende, la media y la mediana, este no es el caso. En cambio, $P(X \leq \theta_1) = F(\theta_1; \theta_1, \theta_2) = 1 - e^{-1} = .632$, y la función de densidad $f(x; \theta_1, \theta_2) = F'(x; \theta_1, \theta_2)$ es negativamente asimétrica (una larga cola inferior). Asimismo, el parámetro de escala θ_2 no es la desviación estándar ($\mu = \theta_1 - .5772\theta_2$ y $\sigma = 1.283\theta_2$). Sin embargo, al cambiar el valor de θ_1 cambia la ubicación de la curva de densidad, mientras que al cambiar θ_2 cambia la escala del eje de medición.

El parámetro β de la distribución de Weibull es un parámetro de escala, pero α no es un parámetro de ubicación. Un argumento similar es pertinente para los parámetros α y β de la distribución gamma. Y para la distribución lognormal, μ no es un parámetro de ubicación y σ no es un parámetro de escala. En la forma usual, la función de densidad de cualquier miembro de la distribución gamma o de Weibull es positiva para $x > 0$ y de lo contrario es cero. Los ejemplos y ejercicios en las dos secciones anteriores introdujeron un tercer parámetro de ubicación (es decir, un umbral) γ para estas tres distribuciones; esto cambia la función de densidad que es positiva si $x > \gamma$ y de lo contrario, es cero.

Cuando la familia que se ha considerado tiene sólo parámetros de ubicación y escala el tema de si cualquier miembro de la familia es una distribución de población plausible puede ser abordado mediante una gráfica de probabilidad única de fácil construcción. Primero se obtienen los percentiles de la *distribución estándar*, una con $\theta_1 = 0$ y $\theta_2 = 1$, con los porcentajes $100(i - 5)/n (i = 1, \ldots, n)$. Los n pares (percentil estandarizado, observación) dan los puntos en la gráfica. Esto es exactamente lo que se hizo para obtener una gráfica de probabilidad normal ómnibus. Un tanto sorprendentemente, esta metodología

puede ser aplicada para dar una gráfica de probabilidad Weibull más general. El resultado clave es que si X tiene una distribución de Weibull con parámetro de forma α y parámetro de escala β, entonces la variable transformada $\ln(X)$ tiene una distribución de valor extremo con parámetro de ubicación $\theta_1 = \ln(\beta)$ y parámetro de escala $1/\alpha$. Así pues, una gráfica de los pares (percentil estandarizado de valor extremo, $\ln(x)$) que muestre un fuerte patrón lineal apoya que se seleccione la distribución de Weibull como modelo de una población.

EJEMPLO 4.31 Las siguientes observaciones son respecto a la duración (en horas) del aislante de los aparatos eléctricos cuando la aceleración del esfuerzo térmico y eléctrico se mantuvo fija en valores particulares (**"On the Estimation of Life of Power Apparatus Insulation Under Combined Electrical and Thermal Stress"**, ***IEEE Trans. on Electrical Insulation*****, 1985: 70–78**). Una gráfica de probabilidad de Weibull necesita calcular primero los percentiles 5°, 15°,..., y 95° de la distribución de valor extremo estándar. El $(100p)^{\circ}$ percentil $\eta(p)$ satisface

$$p = F(\eta(p)) = 1 - e^{-e^{\eta(p)}}$$

de donde $\eta(p) = \ln[-\ln(1 - p)]$

Percentil	−2.97	−1.82	−1.25	−.84	−.51
x	282	501	741	851	1072
$ln(x)$	5.64	6.22	6.61	6.75	6.98
Percentil	−.23	.05	.33	.64	1.10
x	1122	1202	1585	1905	2138
$ln(x)$	7.02	7.09	7.37	7.55	7.67

Los pares (−2.97, 5.64), (−1.82, 6.22),..., (1.10, 7.67) se grafican como puntos en la figura 4.38. Lo recto de la gráfica argumenta firmemente en favor del uso de la distribución de Weibull como modelo de duración del aislante, una conclusión a la que también llegó el autor del artículo citado.

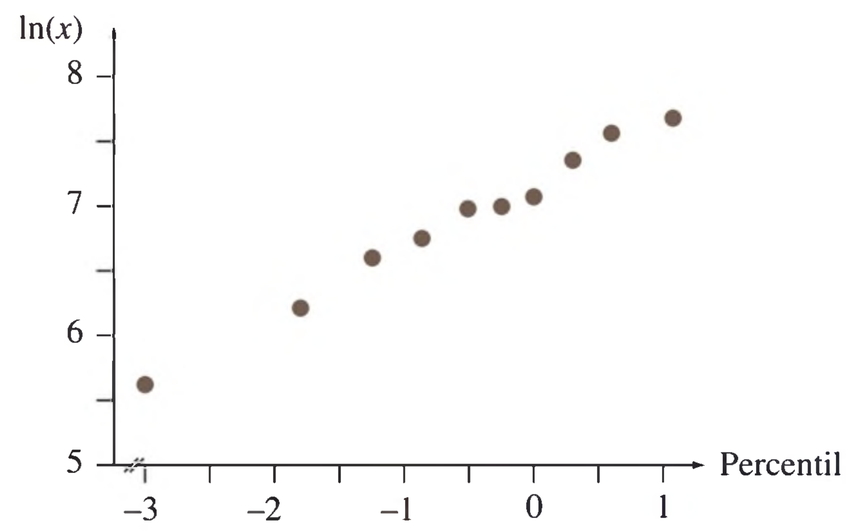


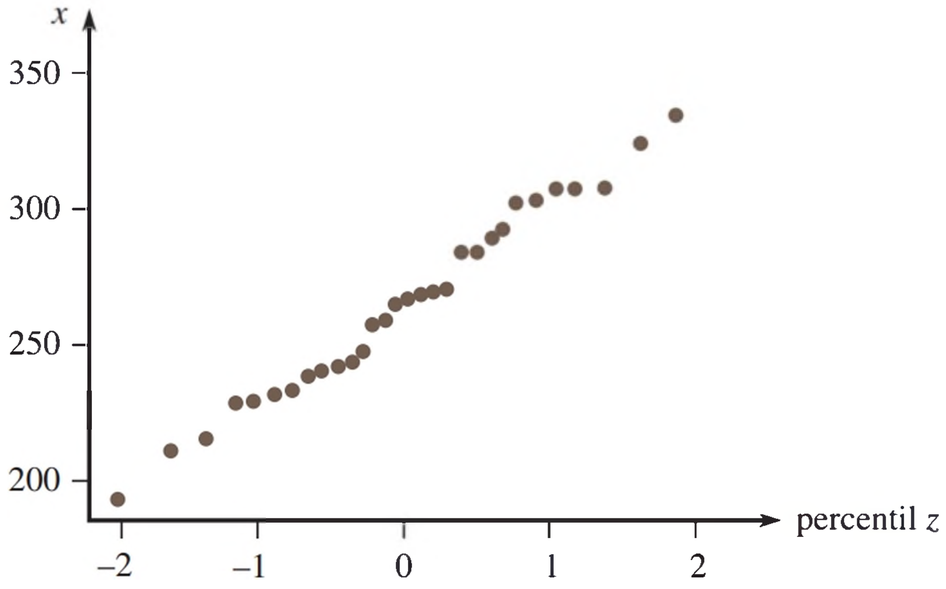
Figura 4.38 Gráfica de probabilidad Weibull de los datos de duración del aislante ■

La distribución gamma es el ejemplo de una familia que implica un parámetro para el cual no hay ninguna transformación $h(\cdot)$ de tal suerte que $h(X)$ tiene una distribución que depende sólo de los parámetros de ubicación y escala. Para construir una gráfica de probabilidad primero se tiene que estimar el parámetro de los datos muestrales (algunos métodos para realizar lo anterior se describen en el capítulo 6). En ocasiones un investigador desea saber si la variable transformada X^{θ} tiene una distribución normal para algún valor de θ (por convención, $\theta = 0$ es idéntica a la transformación logarítmica en cuyo caso X tiene una distribución lognormal). El libro ***Graphical Methods for Data Analysis***, que se cita en la bibliografía del capítulo 1, aborda este tipo de problema, así como también otros criterios

de construcción de gráficas de probabilidad. Afortunadamente, la amplia disponibilidad de variedad de gráficas de probabilidad junto con paquetes de software estadísticos significa que con frecuencia el usuario puede hacer a un lado los detalles técnicos.

EJERCICIOS Sección 4.6 (87–97)

87. La siguiente gráfica de probabilidad normal se construyó con una muestra de 30 lecturas de la tensión de las pantallas de malla localizadas detrás de la superficie de los tubos de pantallas de video que se utilizan en los monitores de computadora. ¿Parece factible que la distribución de tensión sea normal?



88. Se seleccionó una muestra de 15 golfistas universitarias y la velocidad de la cabeza del palo (km/h), mientras se hace *swing* con un *driver*, fue determinada para cada una, dando como resultado los siguientes datos (**"Hip Rotational Velocities During the Full Golf Swing", *J. of Sports Science and Medicine*, 2009: 296–299**):

69.0	69.7	72.7	80.3	81.0
85.0	86.0	86.3	86.7	87.7
89.3	90.7	91.0	92.5	93.0

Los correspondientes percentiles z son

−1.83	−1.28	−0.97	−0.73	−0.52
−0.34	−0.17	0.0	0.17	0.34
0.52	0.73	0.97	1.28	1.83

Construya una gráfica de probabilidad normal y una gráfica de puntos. ¿Es factible que la distribución de la población sea normal?

89. La muestra que se adjunta consiste en $n = 20$ observaciones del voltaje de ruptura dieléctrica de un fragmento de resina de epoxy que se menciona en el artículo **"Maximum Likelihood Estimation in the 3-Parameter Weibull Distribution (*IEEE Trans. on Dielectrics and Elec. Insul.*, 1996: 43–55).** Los valores de $(i - .5)/n$ que necesitan z percentiles son $(1 - .5)/20 = .025$, $(2 - .5)/20 = .075$,..., y .975. ¿Se siente cómodo estimando la media de la población del voltaje utilizando un método que supone una distribución poblacional normal?

Observación	24.46	25.61	26.25	26.42	26.66
Percentil z	−1.96	−1.44	−1.15	−.93	−.76
Observación	27.15	27.31	27.54	27.74	27.94
Percentil z	−.60	−.45	−.32	−.19	−.06
Observación	27.98	28.04	28.28	28.49	28.50
Percentil z	.06	.19	.32	.45	.60
Observación	28.87	29.11	29.13	29.50	30.88
Percentil z	.76	.93	1.15	1.44	1.96

90. El artículo **"A Probabilistic Model of Fracture in Concrete and Size Effects on Fracture Toughness" (*Magazine of Concrete Res.*, 1996: 311–320)** da argumentos de por qué la distribución de la resistencia a la fractura en muestras de concreto debe tener una distribución de Weibull y presenta varios histogramas de datos que parecen ajustar bien a curvas de Weibull superpuestas. Considere la siguiente muestra de tamaño $n = 18$ observaciones de tenacidad del concreto de alta resistencia (compatible con uno de los histogramas); también se dan los valores de $p_i = (i - .5)/18$.

Observación	.47	.58	.65	.69	.72	.74
p_i	.0278	.0833	.1389	.1944	.2500	.3056
Observación	.77	.79	.80	.81	.82	.84
p_i	.3611	.4167	.4722	.5278	.5833	.6389
Observación	.86	.89	.91	.95	1.01	1.04
p_i	.6944	.7500	.8056	.8611	.9167	.9722

Construya una gráfica de probabilidad de Weibull y coméntela.

91. Construya una gráfica de probabilidad normal con los datos de propagación de las grietas por fatiga dados en el ejercicio 39 (capítulo 1). ¿Parece factible que la duración de la propagación tenga una distribución normal? Explique.

92. El artículo **"The Load-Life Relationship for M50 Bearings with Silicon Nitride Ceramic Balls" (*Lubrication Engr.*, 1984:153–159)** reporta los datos adjuntos de duración de los cojinetes (millones de revoluciones) probados con una carga de 6.45 kN.

47.1	68.1	68.1	90.8	103.6	106.0	115.0
126.0	146.6	229.0	240.0	240.0	278.0	278.0
289.0	289.0	367.0	385.9	392.0	505.0	

a. Construya una gráfica de probabilidad normal. ¿La normalidad es factible?

b. Construya una gráfica de probabilidad de Weibull. ¿Es adecuada la familia de distribución de Weibull?

93. Construya una gráfica de probabilidad que le permita evaluar qué tan adecuada es la distribución lognormal como modelo de los datos de cantidad de lluvia del ejercicio 83 (capítulo 1).

94. Las observaciones adjuntas son valores de precipitación durante marzo a lo largo de un periodo de 30 años en Mineápolis-St. Paul.

.77	1.20	3.00	1.62	2.81	2.48
1.74	.47	3.09	1.31	1.87	.96
.81	1.43	1.51	.32	1.18	1.89
1.20	3.37	2.10	.59	1.35	.90
1.95	2.20	.52	.81	4.75	2.05

a. Construya e interprete una gráfica de probabilidad normal con este conjunto de datos.

b. Calcule la raíz cuadrada de cada valor y luego construya una gráfica de probabilidad normal con base en estos datos transformados. ¿Parece factible que la raíz cuadrada de la precipitación esté normalmente distribuida?

c. Repita el inciso b) después de transformar mediante raíces cúbicas.

95. Use un paquete de software estadístico para construir una gráfica de probabilidad normal de los datos de mejor resistencia a la tensión dados en el ejercicio 13 del capítulo 1 y comente.

96. Sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$, las observaciones muestrales *ordenadas* denotadas por (con y_1 como la más pequeña y y_n como la más grande). Una verificación sugerida de normalidad es graficar los pares $(\Phi^{-1}((i - .5)/n), y_i)$. Suponga que se cree que las observaciones provienen de una distribución con media 0 y sean $w_1, \ldots, w_n$ los valores *absolutos ordenados* de las x_i. Una gráfica **seminormal** es una gráfica de probabilidad de las w_i. Más específicamente, puesto que $P(|Z| \le w) = P(-w \le Z \le w) = 2\Phi(w) - 1$, una gráfica seminormal es una gráfica de los pares $(\Phi^{-1}/\{[(i - .5)/n + 1]/2\}, w_i)$. La virtud de esta es que los valores atípicos, pequeños o grandes, en la muestra original ahora aparecerán sólo en el extremo superior de la gráfica y no en ambos extremos. Construya una gráfica seminormal con la siguiente muestra de errores de medición, y comente: −3.78, −1.27, 1.44, −.39, 12.38, −43.40, 1.15, −3.96, −2.34, 30.84.

97. Las siguientes observaciones de tiempo de falla (miles de horas) se obtuvieron con una prueba de duración acelerada de 16 chips de circuitos integrados de cierto tipo:

82.8	11.6	359.5	502.5	307.8	179.7
242.0	26.5	244.8	304.3	379.1	212.6
229.9	558.9	366.7	204.6		

Use los percentiles correspondientes de la distribución exponencial para construir una gráfica de probabilidad. Luego explique por qué la gráfica valora la aptitud de la muestra habiendo sido generada a partir de *cualquier* distribución exponencial.

EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS (98–128)

98. Sea X = el tiempo que requiere una cabeza de lectura-escritura para localizar un registro deseado en un dispositivo de memoria de disco de una computadora luego que la cabeza se ha colocado sobre la pista correcta. Si los discos giran una vez cada 25 milisegundos, una suposición razonable es que X está uniformemente distribuida en el intervalo [0, 25].

a. Calcule $P(10 \le X \le 20)$.

b. Calcule $P(X \ge 10)$.

c. Obtenga la función de distribución acumulada $F(X)$.

d. Calcule $E(X)$ y σ_X.

99. Una barra de 12 pulg que está sujeta por ambos extremos se somete a una cantidad creciente de esfuerzo hasta que se rompe. Sea Y = la distancia del extremo izquierdo al punto donde ocurre la ruptura. Suponga que Y tiene la función de densidad de probabilidad

$$f(y) = \begin{cases} \left(\frac{1}{24}\right)y\left(1 - \frac{y}{12}\right) & 0 \le y \le 12 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Calcule lo siguiente:

a. La función de distribución acumulada de Y y grafíquela.

b. $P(Y \le 4)$, $P(Y > 6)$ y $P(4 \le Y \le 6)$

c. $E(Y)$, $E(Y^2)$ y $V(Y)$.

d. La probabilidad de que el punto de ruptura ocurra a más de 2 pulg del punto de ruptura esperado.

e. La longitud esperada del segmento más corto cuando ocurre la ruptura.

100. Sea X el tiempo hasta la falla (en años) de cierto componente hidráulico. Suponga que la función de densidad de probabilidad de X es $f(x) = 32/(x + 4)^3$ con $x < 0$.

a. Verifique que $f(x)$ es una función de densidad de probabilidad legítima.

b. Determine la función de distribución acumulada.

c. Use el resultado del inciso b) para calcular la probabilidad de que el tiempo hasta la falla sea de entre 2 y 5 años.

d. ¿Cuál es el tiempo esperado hasta la falla?

e. Si el componente tiene un valor de recuperación igual a $100/(4 + x)$, cuando su tiempo hasta la falla es x, ¿cuál es el valor de recuperación esperado?

101. El tiempo X para terminar cierta tarea tiene una función de distribución acumulada $F(x)$ dada por

$$\begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^3}{3} & 0 \le x < 1 \\ 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{7}{3} - x\right)\left(\frac{7}{4} - \frac{3}{4}x\right) & 1 \le x \le \frac{7}{3} \\ 1 & x > \frac{7}{3} \end{cases}$$

a. Obtenga la función de densidad de probabilidad $f(x)$ y trace su gráfica.

b. Calcule $P(.5 \leq X \leq 2)$.

c. Calcule $E(X)$.

102. X representa el número de individuos que responden a una oferta particular de cupones en línea. Suponga que X tiene aproximadamente una distribución Weibull con $\alpha = 10$ y $\beta = 20$. Calcule la mejor aproximación posible a la probabilidad de que X esté entre 15 y 20, inclusive.

103. El artículo **"Computer Assisted Net Weight Control" (*Quality Progress*, 1983: 22–25)** sugiere una distribución normal con media de 137.2 oz y desviación estándar de 1.6 oz del contenido real de cierto tipo de frascos. El contenido declarado fue de 135 oz.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que un solo frasco contenga más que el contenido declarado?

b. Entre diez frascos seleccionados al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos ocho contengan más que el contenido declarado?

c. Suponiendo que la media permanece en 137.2, ¿a qué valor se tendría que cambiar la desviación estándar de modo que 95% de todos los frascos contengan más que el contenido declarado?

104. Cuando se someten a prueba las tarjetas de circuito utilizadas en la fabricación de reproductores de discos compactos el porcentaje de tarjetas defectuosas a largo plazo es de 5%. Suponga que se recibió un lote de 250 tarjetas y que la condición de cualquier tarjeta particular es independiente de la de cualquier otra.

a. ¿Cuál es la probabilidad aproximada de que al menos 10% de las tarjetas en el lote resulte defectuoso?

b. ¿Cuál es la probabilidad aproximada de que en el lote haya exactamente 10 tarjetas defectuosas?

105. El ejercicio 38 introdujo dos máquinas que producen corchos de vino, la primera de ellas con una distribución normal de diámetro con media de 3 cm y desviación típica de .1 cm; y la segunda con una distribución de diámetro normal con media de 3.04 cm y desviación estándar de.02 cm. Los corchos aceptables tienen diámetros entre 2.9 y 3.1 cm. Si 60% de todos los corchos utilizados proviene de la primera máquina y se encuentra aceptable un corcho seleccionado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que se haya producido en la primera máquina?

106. El tiempo de reacción (en segundos) a un estímulo es una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^2} & 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

a. Obtenga la función de distribución acumulada.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de reacción sea cuando mucho de 2.5 s? ¿Y de que esté entre 1.5 y 2.5 s?

c. Calcule el tiempo de reacción esperado.

d. Calcule la desviación estándar del tiempo de reacción.

e. Si un individuo requiere más de 1.5 s para reaccionar, una luz se enciende y permanece así hasta que transcurre un segundo más o hasta que la persona reacciona (lo que suceda primero). Determine la cantidad de tiempo que se espera que la luz permanezca encendida. [*Sugerencia:* Sea $h(X)$ = el tiempo que la luz está encendida como una función del tiempo de reacción X.]

107. Sea X la temperatura a la cual ocurre una reacción química. Suponga que X tiene una función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}(4 - x^2) & -1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

a. Trace la gráfica $f(x)$.

b. Determine la función de distribución acumulada y grafíquela.

c. ¿Es 0 la temperatura mediana a la cual ocurre la reacción? Si no, ¿es la temperatura mediana más pequeña o más grande que 0?

d. Suponga que esta reacción se realiza de manera independiente una vez en cada uno de diez laboratorios diferentes y que la función de densidad de probabilidad del tiempo de reacción en cada laboratorio es como se da. Sea Y = el número entre los diez laboratorios en los cuales la temperatura excede de 1. ¿Qué clase de distribución tiene Y? (Dé los nombres y valores de los parámetros.)

108. Un ovocito es una célula germinal femenina relacionado con la reproducción. Con base en el análisis de una muestra grande, el artículo **"Reproductive Traits of Pioneer Gastropod Species Colonizing Deep-Sea Hydrothermal Vents After an Eruption" (*Marine Biology*, 2011: 181–192)** propone la siguiente mezcla de distribuciones normales como un modelo para la distribución de X = diámetro del ovocito (μm):

$$f(x) = pf_1(x; \mu_1, \sigma) + (1 - p) f_2(x; \mu_2, \sigma)$$

donde f_1 y f_2 son funciones de densidad de probabilidad normal. Los valores de los parámetros sugeridos fueron $p = .35$, $\mu_1 = 4.4$, $\mu_2 = 5.0$ y $\sigma = .27$.

a. ¿Cuál es el valor esperado (es decir la media) del diámetro del ovocito?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el diámetro del ovocito esté entre 4.4 μm y 5.0 μm? [*Sugerencia:* Escriba una expresión para la integral correspondiente, integre las dos componentes y después use el hecho de que cada componente es una función de densidad de probabilidad normal].

c. ¿Cuál es la probabilidad de que el diámetro del ovocito sea menor que su media? ¿Qué implica esto respecto a la forma de la curva densidad?

109. El artículo **"The Prediction of Corrosion by Statistical Analysis of Corrosion Profiles" (*Corrosion Science*, 1985: 305–315)** sugiere la siguiente función de distribución acumulada de la profundidad X del pozo más profundo en un experimento que implica exponer acero de manganeso de carbono al agua de mar acidificada.

$$F(x; \alpha, \beta) = e^{-e^{-(x-\alpha)/\beta}} \quad -\infty < x < \infty$$

Los autores proponen los valores $\alpha = 150$ y $\beta = 90$. Suponga que este es el modelo correcto.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la profundidad del pozo más profundo sea cuando mucho de 150? ¿Y cuando mucho de 300? ¿De que esté entre 150 y 300?

b. ¿Por debajo de qué valor estará la profundidad del pozo máximo en 90% de todos los experimentos?

c. ¿Cuál es la función de densidad de X?

d. Se puede demostrar que la función de densidad es unimodal (una sola cresta). ¿Por encima de qué valor sobre el eje de medición ocurre esta cresta? (Este valor es la moda.)

e. Se puede demostrar que $E(X) \approx .5772\beta + \alpha$. ¿Cuál es la media de los valores dados de α y β y cómo se compara esto con la mediana y la moda? Trace la gráfica de la función de densidad. [*Nota*: Esta se conoce como *distribución de valor extremo más grande*.]

110. Sea t = la cantidad del impuesto sobre las ventas que un minorista debe al gobierno por un periodo determinado. En el artículo **"Statistical Sampling in Tax Audits" (*Statistics and the Law*, 2008: 320–343)** se propone modelar la incertidumbre en t, considerándola como una variable aleatoria distribuida normalmente con media μ y desviación estándar σ (en el artículo, estos dos parámetros se estiman a partir de los resultados de una inspección fiscal que implican n operaciones de muestreo). Si a representa el monto con el que minorista es evaluado, entonces resulta una subevaluación si $t > a$ y una sobreevaluación de resultados si $a > t$. La función de sanción propuesta (es decir, la pérdida) para la sobreevaluación o la subevaluación es $L(a, t) = t - a$ si $t > a$ y $= k(a - t)$ si $t \le a$ (se sugiere $k > 1$ para incorporar la idea de que la sobreevaluación es más grave que una subevaluación).

a. Demuestre que $a^* = \mu + \sigma\Phi^{-1}(1/(k + 1))$ es el valor de a que minimiza la pérdida esperada, donde Φ^{-1} es la función inversa de la función de distribución acumulativa normal estándar.

b. Si $k = 2$ (como se sugiere en el artículo), $\mu =$ \$100 000 y $\sigma =$ \$10 000, ¿cuál es el valor óptimo de a y cuál es la probabilidad resultante de la sobreevaluación?

111. La *moda* de una distribución continua es el valor x^* que incrementa al máximo $f(x)$.

a. ¿Cuál es la moda de una distribución normal con parámetros μ y σ?

b. ¿Tiene una sola moda la distribución uniforme con parámetros A y B? ¿Por qué si o por qué no?

c. ¿Cuál es la moda de una distribución exponencial con parámetro λ? (Trace una gráfica.)

d. Si X tiene una distribución gamma con parámetros α y β, y $\alpha > 1$, halle la moda. [*Sugerencia:* $\ln[f(x)]$ se incrementará al máximo si y sólo si $f(x)$ es, y será más simple sacar la derivada de $\ln[f(x)]$.

e. ¿Cuál es la moda de una distribución ji-cuadrada con ν grados de libertad?

112. El artículo **"Error Distribution in Navigation" (*J. of the Institute of Navigation*, 1971: 429–442)** sugiere que una distribución de frecuencia de errores positivos (magnitudes de errores) es mejor aproximada por una distribución exponencial. Sea X = el error de posición lateral (millas náuticas) el cual puede ser positivo o negativo. Suponga que la función de densidad de probabilidad de X es

$$f(x) = (.1)e^{-.2|x|} \quad -\infty < x < \infty$$

a. Trace una gráfica $f(x)$ y compruebe que $f(x)$ es una función de densidad de probabilidad legítima (demuestre que esta se integra a 1).

b. Obtenga la función de distribución acumulada de X y trácela.

c. Calcule $P(X \le 0)$, $P(X \le 2)$, $P(-1 \le X \le 2)$, y la probabilidad de que se cometa un error de más de 2 millas.

113. El artículo **"Statistical Behavior Modeling for Driver-Adaptive Precrash Systems" (*IEEE Trans. on Intelligent Transp. Systems*, 2013: 1–9)** propone la siguiente mezcla de dos distribuciones exponenciales para modelar el comportamiento de lo que los autores llaman "el nivel de criticidad de una situación" X.

$$f(x; \lambda_1, \lambda_2, p) = \begin{cases} p\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} + (1 - p)\lambda_2 e^{-\lambda_2 x} & x \ge 0 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Esta a menudo se denomina distribución hiperexponencial o exponencial mixta. Esta distribución también se propone como un modelo para la cantidad de precipitación en **"Modeling Monsoon Affected Rainfall of Pakistan by Point Processes" (*J. of Water Resources Planning and Mgmnt.*, 1992: 671–688).**

a. Determine $E(X)$ y $V(X)$. *Sugerencia:* Para X distribuidas exponencialmente, $E(X) = 1/\lambda$ y $V(X) = 1/\lambda^2$; ¿qué implica esto sobre $E(X^2)$?

b. Determine la función de distribución acumulada X.

c. Si $p = .5$, $\lambda_1 = 40$ y $\lambda_2 = 200$ (valores de λ sugeridos en el citado artículo), calcule $P(X > .01)$.

d. Para los valores de parámetro en c), ¿cuál es la probabilidad de que X esté dentro de una desviación estándar de su media?

e. El coeficiente de variación de una variable aleatoria (o distribución) es $CV = \sigma/\mu$. ¿Cuál es el CV de una variable aleatoria exponencial? ¿Qué se puede decir acerca del valor de CV cuando X tiene una distribución hiperexponencial?

f. ¿Qué es el CV para una distribución de Erlang con parámetros λ y n como se define en el ejercicio 68? [*Nota*: En el trabajo aplicado, el CV de la muestra se utiliza para decidir cuál de las tres distribuciones podría ser la adecuada.]

114. Suponga que en un estado particular se permite que los personas físicas que presentan su declaración de impuestos detallen sus deducciones sólo si el total de las deducciones detalladas es al menos de \$5000. Sea X (en miles de dólares) el total de deducciones detalladas en un formulario seleccionado al azar. Suponga que X tiene la función de densidad de probabilidad

$$f(x; \alpha) = \begin{cases} k/x^\alpha & x \ge 5 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

a. Encuentre el valor de k. ¿Qué restricción es necesaria en α?

b. ¿Cuál es la función de distribución acumulada de X?

c. ¿Cuál es la deducción total esperada en un formulario seleccionado al azar? ¿Qué restricción es necesaria en α para que $E(X)$ sea finita?

d. Demuestre que $\ln(X/5)$ tiene una distribución exponencial con parámetro $\alpha - 1$.

115. Sea I_i la corriente de entrada a un transistor e I_0 la corriente de salida. En ese caso la ganancia de corriente es proporcional a $\ln(I_0/I_i)$. Suponga que la constante de proporcionalidad es 1

(lo que conduce a seleccionar una unidad de medición particular), por tanto, la ganancia de corriente = $X = \ln(I_0/I_i)$. Suponga que X está normalmente distribuida con $\mu = 1$ y $\sigma = .05$.

a. ¿Qué tipo de distribución tiene la razón I_0/I_i?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la corriente de salida sea más de dos veces la corriente de entrada?

c. ¿Cuáles son el valor esperado y la varianza de la razón entre corriente de salida y corriente de entrada?

116. El artículo **"Response of SiCf/Si_3N_4 Composites Under Static and Cyclic Loading–An Experimental and Statistical Analysis" (*J. of Engr. Materials and Technology*, 1997: 186–193)** sugiere que la resistencia a la tensión (MPa) de compuestos en condiciones especificadas puede ser modelada por una distribución de Weibull con $\alpha = 9$ y $\beta = 180$.

a. Trace una gráfica de la función de densidad.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la resistencia de una muestra seleccionada al azar exceda de 175? ¿De que esté entre 150 y 175?

c. Si se seleccionan al azar dos muestras y sus resistencias son independientes entre sí, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una tenga una resistencia de entre 150 y 175?

d. ¿Qué valor de resistencia separa a 10% de todos los especímenes más débiles del restante 90%?

117. Si Z tiene una distribución normal estándar, defina una nueva variable aleatoria Y como $Y = \sigma Z + \mu$. Demuestre que Y tiene una distribución normal con parámetros μ y σ. [*Sugerencia:* $Y \le y$ si y sólo si $Z \le$? Use esto para definir la función de distribución acumulada de Y y luego derívela respecto a y.]

118. **a.** Suponga que la duración X de un componente, medida en horas, tiene una distribución gamma con parámetros α y β. Sea Y la duración medida en minutos. Deduzca la función de densidad de probabilidad de Y. [*Sugerencia:* Si $Y \le y$ si y sólo si $X \le y/60$. Use esto para obtener la función de distribución acumulada de Y y luego derívela para obtener la función de densidad de probabilidad.]

b. Si X tiene una distribución gamma con parámetros α y β, ¿cuál es la distribución de probabilidad de $Y = cX$?

119. En los ejercicios 117 y 118, así como también en muchas otras situaciones, se tiene la función de densidad de probabilidad $f(x)$ de X y se desea conocer la función de densidad de probabilidad de $y = h(X)$. Suponga que $h(\cdot)$ es un función invertible, de modo que $y = h(x)$ se resuelve para x a fin de obtener $x = k(y)$. Entonces se puede demostrar que la función de densidad de probabilidad de Y es

$$g(y) = f[k(y)] \cdot |k'(y)|$$

a. Si X tiene una distribución uniforme con $A = 0$ y $B = 1$, obtenga la función de densidad de probabilidad de $Y = -\ln(X)$.

b. Resuelva el ejercicio 117 utilizando este resultado.

c. Resuelva el ejercicio 118(b) utilizando este resultado.

120. Con base en los datos del experimento del lanzamiento de un dardo el artículo **"Shooting Darts" (*Chance*, verano de 1997: 16–19)** propone que los errores horizontales y verticales al apuntar a un blanco deben ser independientes unos de otros, cada uno con una distribución normal con media 0 y varianza σ^2. Se puede demostrar entonces que la distancia V del blanco al punto de aterrizaje es

$$f(v) = \frac{v}{\sigma^2} \cdot e^{-v^2/2\sigma^2} \quad v > 0$$

a. ¿A qué familia de las presentadas en este capítulo pertenece esta función de densidad de probabilidad?

b. Si $\sigma = 20$ mm (cerca del valor sugerido por el artículo), ¿cuál es la probabilidad de que un dardo aterrice dentro de los 25 mm (aproximadamente 1 pulg) del blanco?

121. El artículo **"Three Sisters Give Birth on the Same Day" (*Chance*, primavera de 2001, 23–25)** utiliza el hecho de que tres hermanas de Utah parieron el 11 de marzo de 1998 para plantear algunas preguntas interesantes respecto a coincidencias de fechas de nacimiento.

a. Sin considerar el año bisiesto y suponiendo que los otros 365 días son igualmente probables, ¿cuál es la probabilidad de que tres nacimientos seleccionados al azar ocurran el 11 de marzo? Asegúrese de indicar qué suposiciones adicionales está haciendo.

b. Con las suposiciones en el inciso a), ¿cuál es la probabilidad de que tres nacimientos seleccionados al azar ocurran el mismo día?

c. El autor sugiere, basado en datos extensos, que el tiempo de gestación (tiempo entre la concepción y el nacimiento) podía ser modelado como si tuviera una distribución normal con valor medio de 280 días y desviación estándar de 19.88 días. Las fechas esperadas para las tres hermanas de Utah fueron el 15 de marzo, el 1 de abril y el 4 de abril, respectivamente. Suponiendo que las tres fechas esperadas están en la media de la distribución, ¿cuál es la probabilidad de que los nacimientos ocurran el 11 de marzo? [*Sugerencia:* La desviación de la fecha de nacimiento respecto a la fecha esperada está normalmente distribuida con media 0.]

d. Explique cómo utilizaría la información del inciso c) para calcular la probabilidad de una fecha de nacimiento común.

122. Sea X la duración de un componente, con $f(x)$ y $F(x)$ como la función de densidad de probabilidad y la función de distribución acumulada de X. La probabilidad de que el componente falle en el intervalo $(x, x + \Delta x)$ es aproximadamente $f(x) \cdot \Delta x$. La probabilidad condicional de que falle en $(x, x + \Delta x)$ puesto que ha durado al menos x es $f(x) \cdot \Delta x/[1 - F(x)]$. Al dividir esto entre Δx se produce la **función de tasa de falla**:

$$r(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}$$

Una función de tasa de falla creciente indica que la probabilidad de que los componentes viejos se desgasten es cada vez más grande, mientras que una tasa de falla decreciente evidencia una confiabilidad cada vez más grande con la edad. En la práctica, a menudo se supone una falla "en forma de tina de baño".

a. Si X está exponencialmente distribuida, ¿cuál es $r(x)$?

b. Si X tiene una distribución de Weibull con parámetros α y β, ¿cuál es $r(x)$? ¿Con qué valores de parámetros se incrementará $r(x)$? ¿Con qué valores de parámetros decrecerá $r(x)$ con x?

c. A partir de que $r(x) = -(d/dx)\ln[1 - F(x)]$, $\ln[1 - F(x)] = -\int r(x)dx$. Suponga

$$r(x) = \begin{cases} \alpha\left(1 - \dfrac{x}{\beta}\right) & 0 \le x \le \beta \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

de modo que si un componente dura β horas, durará por siempre (si bien parece poco razonable, este modelo puede ser utilizado para estudiar el "desgaste inicial"). ¿Cuáles son la función de distribución acumulada y la función de densidad de probabilidad de X?

123. Sea U con una distribución uniforme en el intervalo [0, 1]. Los valores observados que tienen esta distribución se pueden obtener con un generador de números aleatorios por computadora. Sea $X = -(1/\lambda)\ln(1 - U)$.

a. Demuestre que X tiene una distribución exponencial con parámetro λ. [*Sugerencia:* La función de distribución acumulada de X es $F(x) = P(X \le x)$; $X \le x$ ¿equivale a $U \le$?]

b. ¿Cómo utilizaría el inciso a) y un generador de números aleatorios para obtener valores observados derivados de una distribución exponencial con parámetro $\lambda = 10$?

124. Considere una variable aleatoria X con media μ y desviación estándar σ; y sea $g(X)$ una función especificada de X. La aproximación de la serie de Taylor de primer orden a $g(X)$ en la cercanía de μ es

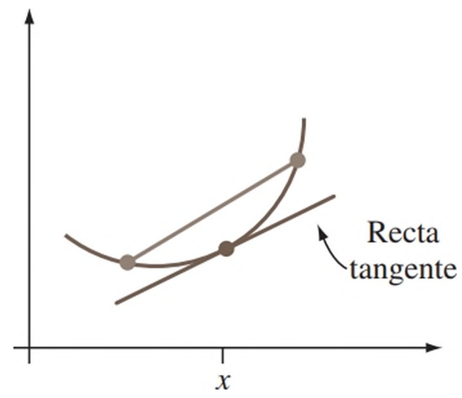
$$g(X) \approx g(\mu) + g'(\mu) \cdot (X - \mu)$$

El miembro del lado derecho de esta ecuación es una función lineal de X. Si la distribución de X está concentrada en un intervalo a lo largo del cual g(·)es aproximadamente lineal [p. ej., $\sqrt{x}$ es aproximadamente lineal en (1, 2)], entonces la ecuación produce aproximaciones a $E(g(X))$ y $V(g(X))$.

a. Dé expresiones para estas aproximaciones. [*Sugerencia:* Use reglas de valor esperado y varianza para una función lineal $aX + b$.]

b. Si el voltaje ν a través de un medio se mantiene fijo, pero la corriente I es aleatoria, entonces la resistencia también será una variable aleatoria relacionada con I por $R = \nu/I$. Si $\mu_I = 20$ y $\sigma_I = .5$, calcule aproximaciones a μ_R y σ_R.

125. Una función $g(x)$ es *convexa* si la cuerda que conecta dos puntos cualesquiera de su gráfica quedan sobre ésta. Cuando $g(x)$ es derivable una condición equivalente es que para cada x la recta tangente en x quede por completo sobre la gráfica o debajo de esta. (Observe la siguiente figura.) ¿Cómo es que $g(\mu) = g(E(X))$ se compara con $E(g(X))$? [*Sugerencia:* La ecuación de la recta tangente en $x = \mu$ es $y = g(\mu) + g'(\mu) \cdot (x - \mu)$. Use la condición de convexidad, sustituya X por x y considere los valores esperados. [*Nota*: A menos que $g(x)$ sea lineal, la desigualdad resultante (por lo general llamada desigualdad de Jensen) es estricta ($<$ en lugar de $\le$); es válida igualmente con variables aleatorias continuas y discretas.]



126. Si X tiene una distribución de Weibull con parámetros $\alpha = 2$ y β, demuestre que tiene una distribución ji-cuadrada con $\nu = 2$. [*Sugerencia:* La función de distribución acumulada de Y es $P(Y \le y)$; exprese esta probabilidad en la forma $P(X \le g(y))$, use el hecho de que X tiene una función de distribución acumulada de la forma de la expresión (4.12) y derive respecto a y para obtener la función de densidad de probabilidad de Y.]

127. El registro crediticio de un individuo es un número calculado con base en su historial el cual ayuda a un prestamista a determinar cuánto se le puede prestar o qué límite debe ser establecido para una tarjeta de crédito. Un artículo en ***Los Ángeles Times*** presentó datos que sugerían que una distribución beta con parámetros $A = 150$, $B = 850$, $\alpha = 8$, $\beta = 2$ proporcionaría una aproximación razonable a la distribución de registros crediticios de los Estados Unidos. [*Nota*: Los registros de crédito son valores enteros.]

a. Sea X un registro estadounidense de crédito seleccionado al azar. ¿Cuáles son la media y la desviación estándar de esta variable aleatoria? ¿Cuál es la probabilidad de que X esté dentro de 1 desviación estándar de su valor medio?

b. ¿Cuál es la probabilidad aproximada de que un registro seleccionado al azar exceda de 750 (lo que los prestamistas consideran un muy buen registro)?

128. Sea V el volumen de lluvia y W el volumen de escurrimiento (ambos en mm). De acuerdo con el artículo **"Runoff Quality Analysis of Urban Catchments with Analytical Probability Models"** (***J. of Water Resource Planning and Management*, 2006: 4–14**), el volumen de escurrimiento será 0 si y $V \le v_d$ y será $k(V - v_d)$ si $V > v_d$. Aquí v_d es el volumen de almacenamiento en una depresión (una constante) y k (también una constante) es el coeficiente de escurrimiento. El artículo citado propone una distribución exponencial con parámetro λ para V.

a. Obtenga una expresión para la función de distribución acumulada de W. [*Nota*: W no es puramente continua ni puramente discreta; en cambio tiene una distribución "combinada" con un componente discreto en 0 y es continua con valores $w > 0$.]

b. ¿Cuál es la función de densidad de probabilidad de W para $w > 0$? Úsela para obtener una expresión para el valor esperado del volumen de escurrimiento.

BIBLIOGRAFÍA

Bury, Karl, *Statistical Distributions in Engineering*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, Inglaterra, 1999. Un estudio informativo y fácil de leer sobre las distribuciones y sus propiedades.

Johnson, Norman, Samuel Kotz y N. Balakrishnan, *Continuous Univariate Distributions*, vols. 1–2, Wiley, Nueva York, 1994. Estos dos volúmenes juntos presentan un estudio exhaustivo de varias distribuciones continuas.

Nelson, Wayne, *Applied Data Analysis*, Wiley, Nueva York, 1982. Aborda ampliamente las distribuciones y los métodos que se utilizan en el análisis de datos de vida útil.

Olkin, Ingram, Cyrus Derman y Leon Gleser, *Probability Models and Applications* (2a. ed.), Macmillan, Nueva York, 1994. Una buena cobertura de las propiedades generales y las distribuciones específicas.

5 Distribuciones de probabilidad conjunta y muestras aleatorias

INTRODUCCIÓN

En los capítulos 3 y 4 se estudiaron los modelos de probabilidad para una sola variable aleatoria. Muchos problemas de probabilidad y estadística implican diversas variables aleatorias al mismo tiempo. Por ejemplo, X y Y pueden ser la altura y el peso, respectivamente, de un individuo seleccionado al azar. O X_1, X_2 y X_3 pueden ser el número de compras realizadas con tarjetas de crédito Visa, MasterCard y American Express, respectivamente, en una tienda en un día en particular. En la sección 5.1 se abordan modelos de probabilidad del comportamiento conjunto (es decir, simultáneo) de diversas variables aleatorias con énfasis especial cuando las variables son independientes una de otra. La sección 5.2 considera el valor esperado de una función de dos o más variables aleatorias [por ejemplo, el valor esperado de Y/X^2, el índice de masa corporal (IMC) cuando X se expresa en cm y Y en kg].Lo anterior lleva a una discusión sobre la covarianza y la correlación como medidas del grado de asociación entre dos variables. Al final de la sección se presenta la distribución normal bivariante como una generalización de la distribución normal univariante.

Las secciones 5.3 y 5.4 consideran funciones de n variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ que constituyen la muestra de una distribución o población (por ejemplo, una muestra de pesos de niños recién nacidos). La función más importante de este tipo es el promedio de muestra $(X_1 + \cdots + X_n)/n$. Tal función, por sí misma una variable aleatoria, recibe el nombre de *estadístico*. Para obtener información sobre la distribución de un estadístico se utilizan métodos de probabilidad. El resultado principal de este tipo es el teorema del límite central (TLC), la base de muchos procedimientos inferenciales que implican tamaños de muestra grandes. La última sección del capítulo trata sobre las funciones lineales de la forma $a_1X_1 + \cdots + a_nX_n$ donde las a_i son constantes numéricas.

5.1 Variables aleatorias conjuntamente distribuidas

Existen muchas situaciones experimentales en las cuales más de una variable aleatoria (va) será de interés para un investigador. Primero se consideran las distribuciones de probabilidad conjunta para dos variables aleatorias discretas, en seguida para dos variables continuas y por último para más de dos variables.

Dos variables aleatorias discretas

La función de masa de probabilidad (pmf, por sus siglas en inglés) de una sola variable aleatoria discreta X especifica cuánta masa de probabilidad está colocada en cada valor posible de X. La función de masa de probabilidad conjunta de dos variables aleatorias discretas X y Y describe cuánta masa de probabilidad se coloca en cada posible par de valores (x, y).

DEFINICIÓN

Sean X y Y dos variables aleatorias discretas definidas en el espacio muestral $\mathcal{S}$ de un experimento. La **función de masa de probabilidad conjunta** $p(x, y)$ se define para cada par de números (x, y) como

$$p(x, y) = P(X = x \text{ y } Y = y)$$

Debe ser el caso en que $p(x, y) \geq 0$ y $\sum_x \sum_y p(x, y) = 1$

Ahora sea A cualquier conjunto compuesto de pares de valores (x, y) (p. ej., $A = \{(x, y): x + y = 5\}$ o $\{(x, y): \max(x, y) \leq 3\}$). Entonces la probabilidad $P[(X, Y) \in A]$ se obtiene sumando la función de masa de probabilidad conjunta incluidos todos los pares en A:

$$P[(X, Y) \in A] = \sum_{(x, y) \in A} \sum p(x, y)$$

EJEMPLO 5.1 Quienquiera que compre una póliza de seguro para su casa o automóvil debe especificar una cantidad deducible, la cantidad de pérdida que será absorbida por el poseedor de la póliza antes de que la compañía de seguros haga cualquier pago. Suponga que una compañía particular ofrece cantidades deducibles para automóviles de \$100, \$500 y \$1000 y cantidades deducibles para propietarios de casas de \$500, \$1000 y \$2000. Suponga que se selecciona al azar un individuo con ambos tipos de póliza de los archivos de la agencia. Sea X = la cantidad deducible sobre la póliza de automóvil y Y = la cantidad deducible sobre la póliza de propietario de casa. La función de masa de probabilidad conjunta de estas dos variables aparece en la *tabla de probabilidad conjunta*:

		y		
	$p(x, y)$	500	1000	5000
	100	.30	.05	0
x	500	.15	.20	.05
	1000	.10	.10	.05

Entonces, de acuerdo con esta función de masa de probabilidad conjunta hay nueve pares (X, Y) posibles: (100, 500), (100, 1000),... y finalmente (1000, 5000). La probabilidad de (100, 500) es $p(100, 500) = P(X = 100 \text{ y } Y = 500) = .30$. Claramente $p(x, y) \geq 0$, y es fácil confirmar que la suma de las nueve probabilidades mostradas es 1. La probabilidad $P(X = Y)$

se calcula sumando $p(x, y)$ sobre los dos pares (x, y) para los cuales ambas cantidades del deducible son idénticas:

$$P(X = Y) = p(500, 500) + p(1000, 1000) = .15 + .10 = .25$$

De manera similar, la probabilidad de que la cantidad del deducible de automóvil sea al menos de \$500 es la suma de todas las probabilidades que corresponden a los pares (x, y) para los cuales $X \geq 500$; esta es la suma de probabilidades en las dos filas al final de la tabla de probabilidad conjunta:

$$P(X \geq 500) = .15 + .20 + .05 + .10 + .10 + .05 = .65$$ ■

Una vez que se ha calculado la función de masa de probabilidad conjunta de las dos variables X y Y es muy fácil en principio obtener la distribución de solamente una de dichas variables. Por ejemplo, sean X y Y el número de cursos de estadística y matemáticas, respectivamente, que se imparten actualmente en una licenciatura en estadística. Suponga que se desea la distribución de X y que cuando $X = 2$, los únicos valores posibles de Y son 0, 1 y 2. Entonces

$$\begin{aligned} p_X(2) = P(X = 2) &= P[(X, Y) = (2, 0) \text{ o } (2, 1) \text{ o } (2, 2)] \\ &= p(2, 0) + p(2, 1) + p(2, 2) \end{aligned}$$

Es decir, la función de masa de probabilidad conjunta se resume en todos los pares de la forma $(2, y)$. De manera más general, para cualquier posible valor x de X, la probabilidad $p_X(x)$ resulta de mantener a x fija y sumar la función de masa de probabilidad conjunta $p(x, y)$ sobre toda y para la cual el par (x, y) tiene una masa de probabilidad positiva. La misma estrategia se aplica para obtener la distribución de Y por sí misma.

DEFINICIÓN

La **función de masa de probabilidad marginal de X,** denotada por $p_X(x)$, está dada por

$$p_X(x) = \sum_{y:\, p(x, y) > 0} p(x, y) \quad \text{para cada valor posible } x$$

De manera similar, la **función de masa de probabilidad marginal de Y** es

$$p_Y(y) = \sum_{x:\, p(x, y) > 0} p(x, y) \quad \text{para cada valor posible } y.$$

El uso de la palabra *marginal* aquí es una consecuencia del hecho de que si la función de masa de probabilidad conjunta se muestra en una tabla rectangular como en el ejemplo 5.1, entonces los totales de los renglones dan como resultado la función de masa de probabilidad marginal de X, y los totales de las columnas dan como resultado la función de masa de probabilidad marginal de Y. Una vez que estas pmf marginales están disponibles, se puede calcular la probabilidad de cualquier evento que involucre solamente a X o a Y.

EJEMPLO 5.2 (Continuación del ejemplo 5.1)

Los valores posibles de X son $x = 100$, 500 y 1000 por lo que si se calculan los totales en los renglones de la tabla de probabilidad conjunta se obtiene

$$p_X(100) = p(100, 500) + p(100, 1000) + p(100, 5000) = .30 + .05 + 0 = .35$$
$$p_X(500) = .15 + .20 + .05 = .40,\ p_X(1000) = 1 - (.35 + .40) = .25$$

La función de masa de probabilidad marginal de X es entonces

$$p_X(x) = \begin{cases} .35 & x = 100 \\ .40 & x = 500 \\ .25 & x = 1000 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

A partir de esta pmf, $P(X \geq 500 = .40 + .25 = .65$, lo cual ya se calculó en el ejemplo 5.1. De manera similar, la pmf marginal de Y se obtiene a partir de la columna de totales como

$$p_Y(y) = \begin{cases} .55 & y = 500 \\ .35 & y = 1000 \\ .10 & y = 5000 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

■

Dos variables aleatorias continuas

La probabilidad de que el valor observado de una variable aleatoria continua X esté en un conjunto unidimensional A (tal como un intervalo) se obtiene al integrar la función de densidad de probabilidad $f(x)$ a lo largo del conjunto A. Asimismo, la probabilidad de que el par (X, Y) de variables aleatorias continuas quede en un conjunto A en dos dimensiones (tal como un rectángulo) se obtiene al integrar una función llamada *función de densidad conjunta*.

DEFINICIÓN

Sean X y Y variables aleatorias continuas. Una **función de densidad de probabilidad conjunta** $f(x, y)$ para estas dos variables es una función que satisface $f(x, y) \geq 0$ y $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx\,dy = 1$. Entonces para cualquier conjunto A en dos dimensiones

$$P[(X, Y) \in A] = \iint_A f(x, y)\,dx\,dy$$

En particular, si A es el rectángulo bidimensional $\{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, entonces

$$P[(X,Y) \in A] = P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dy\,dx$$

Se puede considerar que $f(x, y)$ especifica una superficie situada a una altura $f(x, y)$ encima del punto (x, y) en un sistema de coordenadas tridimensional. Entonces $P[(X, Y) \in A]$ es el volumen debajo de esta superficie y sobre la región A, similar al área bajo una curva en el caso de una sola variable aleatoria. Esto se ilustra en la figura 5.1.

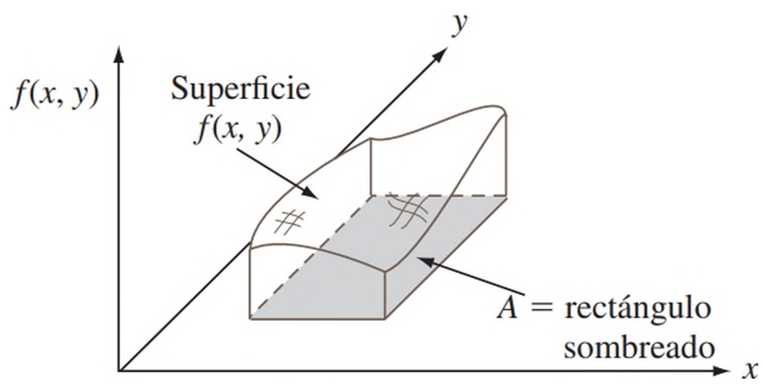


Figura 5.1 $P[(X, Y) \in A]$ = volumen bajo la superficie de densidad sobre A

EJEMPLO 5.3 Un banco dispone de una ventanilla para automovilistas y una ventanilla normal. En un día seleccionado al azar, sea X = la proporción de tiempo que la ventanilla para automovilistas está en uso (al menos un cliente está siendo atendido o está esperando ser atendido) y Y = la proporción del tiempo que la ventanilla normal está en uso. Entonces el conjunto de

valores posibles de (X, Y) es el rectángulo $D = \{(x, y): 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$. Suponga que la función de densidad de probabilidad conjunta de (X, Y) está dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{6}{5}(x + y^2) & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Para verificar que esta es una función de densidad de probabilidad legítima, observe que $f(x, y) \ge 0$ y

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx\,dy &= \int_0^1\int_0^1 \frac{6}{5}(x + y^2)\,dx\,dy \\ &= \int_0^1\int_0^1 \frac{6}{5}x\,dx\,dy + \int_0^1\int_0^1 \frac{6}{5}y^2\,dx\,dy \\ &= \int_0^1 \frac{6}{5}x\,dx + \int_0^1 \frac{6}{5}y^2\,dy = \frac{6}{10} + \frac{6}{15} = 1 \end{aligned}$$

La probabilidad de que ninguna ventanilla esté ocupada más de un cuarto del tiempo es

$$\begin{aligned} P\left(0 \le X \le \frac{1}{4}, 0 \le Y \le \frac{1}{4}\right) &= \int_0^{1/4}\int_0^{1/4} \frac{6}{5}(x + y^2)\,dx\,dy \\ &= \frac{6}{5}\int_0^{1/4}\int_0^{1/4} x\,dx\,dy + \frac{6}{5}\int_0^{1/4}\int_0^{1/4} y^2\,dx\,dy \\ &= \frac{6}{20}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=1/4} + \frac{6}{20}\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_{y=0}^{y=1/4} = \frac{7}{640} \\ &= .0109 \end{aligned}$$

■

La función de densidad de probabilidad marginal de cada variable se obtiene de una manera análoga a al caso de dos variables discretas. La función de densidad de probabilidad marginal de X en el valor x resulta de mantener x fija en el par (x, y) e *integrar* la función de densidad de probabilidad conjunta sobre y. La integración de la función de densidad de probabilidad conjunta respecto a x da como resultado la función de densidad de probabilidad marginal de Y.

DEFINICIÓN

Las **funciones de densidad de probabilidad marginal** de X y Y, denotadas por $f_X(x)$ y $f_Y(y)$, respectivamente, están dadas por

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy \qquad \text{para } -\infty < x < \infty$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx \qquad \text{para } -\infty < y < \infty$$

EJEMPLO 5.4 (Continuación del ejemplo 5.3)

La función de densidad de probabilidad marginal de X, la cual da la distribución de probabilidad del tiempo que permanece ocupada la ventanilla para automovilistas sin referencia a la ventanilla normal, es

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy = \int_0^1 \frac{6}{5}(x + y^2)\,dy = \frac{6}{5}x + \frac{2}{5}$$

con $0 \le x \le 1$ y de lo contrario 0. La función de densidad de probabilidad marginal de Y es

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{6}{5}y^2 + \frac{3}{5} & 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Por tanto,

$$P(.25 \le Y \le .75) = \int_{.25}^{.75} f_Y(y)\,dy = \frac{37}{80} = .4625$$ ■

En el ejemplo 5.3 la región de densidad conjunta positiva es un rectángulo, lo que facilitó el cálculo de las funciones de densidad de probabilidad marginal. Considere ahora un ejemplo en el cual la región de densidad positiva es más complicada.

EJEMPLO 5.5 Una compañía de nueces comercializa latas de lujo que contienen una combinación de almendras, nueces de acajú y cacahuates. Suponga que el peso neto de cada lata es exactamente de 1 lb, pero la contribución al peso de cada tipo de nuez es aleatoria. Puesto que los tres pesos suman 1, un modelo de probabilidad conjunta de dos cualesquiera proporciona toda la información necesaria sobre el peso del tercer tipo. Sea X = el peso de las almendras en una lata seleccionada y Y = el peso de las nueces de acajú. Así, la región de densidad positiva es $D = \{(x, y): 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, x + y \le 1\}$, la región sombreada que se ilustra en la figura 5.2.

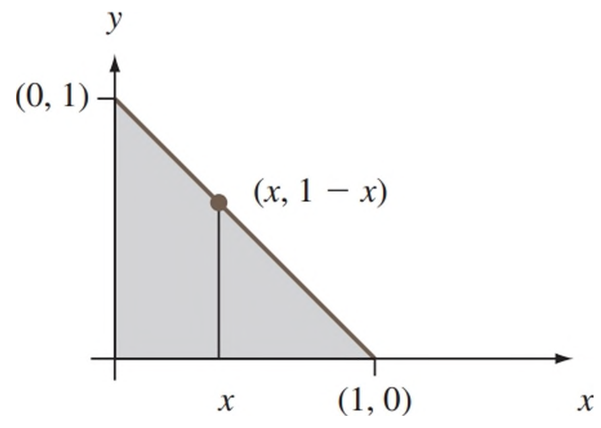


Figura 5.2 Región de densidad positiva para el ejemplo 5.5

Ahora sea la función de densidad de probabilidad conjunta de (X, Y)

$$f(x, y) = \begin{cases} 24xy & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, x + y \le 1 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Con cualquier x fija, $f(x, y)$ se incrementa con y; para y fija, $f(x, y)$ se incrementa con x. Esto es apropiado porque las palabras *de lujo* implican que la mayor parte de lata contiene almendras y nueces de acajú en lugar de cacahuates, así que la función de densidad deberá ser grande cerca del límite superior y pequeña cerca del origen. La superficie determinada por $f(x, y)$ se inclina hacia arriba desde cero a medida que (x, y) se alejan de uno u otro eje.

Claramente, $f(x, y) \ge 0$. Para verificar la segunda condición sobre una función de densidad de probabilidad conjunta, recuerde que una integral doble se calcula como una integral iterada al mantener una variable fija (tal como x en la figura 5.2), integrar con los valores de la otra variable que se localizan a lo largo de la línea recta que pasa a través del valor de la variable fija y, finalmente, al integrar todos los valores posibles de la variable fija. Así

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy\,dx = \iint_D f(x, y)\,dy\,dx = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} 24xy\,dy \right\} dx$$

$$= \int_0^1 24x \left\{ \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=1-x} \right\} dx = \int_0^1 12x(1 - x)^2\,dx = 1$$

Para calcular la probabilidad de que los dos tipos de nueces conformen cuando mucho 50% del contenido de la lata, sea $A = \{(x, y): 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, \text{ y } x + y \le .5\}$, tal como se muestra en la figura 5.3. Por tanto,

$$P((X, Y) \in A) = \iint_A f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^{.5} \int_0^{.5-x} 24xy\, dy\, dx = .0625$$

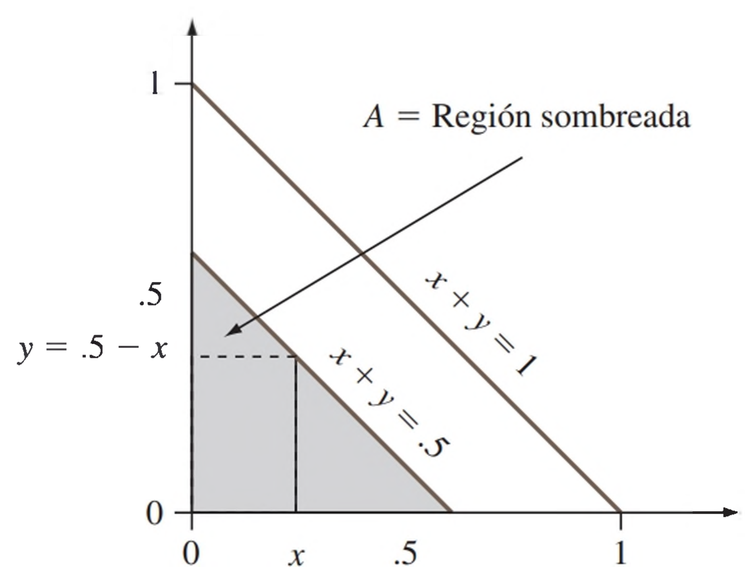


Figura 5.3 Cálculo de $P[(X, Y) \in A]$ para el ejemplo 5.5

La función de densidad de probabilidad marginal de las almendras se obtiene al mantener X fija en x e integrar la función de densidad de probabilidad conjunta $f(x, y)$ a lo largo de la recta vertical que pasa por x:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{1-x} 24xy\, dy = 12x(1 - x)^2 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Por simetría de $f(x, y)$ y la región D, la función de densidad de probabilidad marginal de Y se obtiene reemplazando x y X en $f_X(x)$ por y y Y, respectivamente. ■

Variables aleatorias independientes

En muchas situaciones la información sobre el valor observado de una de las dos variables X y Y proporciona información sobre el valor de la otra variable. En el ejemplo 5.1 la probabilidad marginal de X con $x = 100$ fue de .35, y con $x = 1000$ de .25. Sin embargo, si podemos conocer la probabilidad de que $Y = 5000$, la última columna de la tabla de probabilidad conjunta nos dice que no es posible que X sea igual a 100 y que las otras dos posibilidades, 500 y 1000, son igualmente posibles. Por tanto, sabiendo que el valor de Y cambia la distribución de X, en dichas situaciones es natural decir que existe una dependencia entre ambas variables.

En el capítulo 2 se señaló que una forma de definir la independencia de dos eventos es mediante la condición de que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. A continuación se da una definición análoga de la independencia de dos variables aleatorias.

DEFINICIÓN

Se dice que dos variables aleatorias X y Y son **independientes** si por cada par de valores x y y

$$p(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y) \qquad \text{cuando } X \text{ y } Y \text{ son discretas}$$

o **(5.1)**

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \qquad \text{cuando } X \text{ y } Y \text{ son continuas}$$

Si (5.1) no se satisface con todos los pares (x, y), entonces se dice que X y Y son **dependientes.**

La definición dice que dos variables son independientes si su función de masa de probabilidad conjunta o su función de densidad de probabilidad conjunta son el producto de las dos funciones de masa de probabilidad marginales o de las funciones de densidad de probabilidad marginales. Intuitivamente, la independencia dice que conocer el valor de una de las variables no proporciona información adicional acerca de cuál puede ser el valor de la otra variable.

EJEMPLO 5.6 En la situación de la agencia de seguros de los ejemplos 5.1 y 5.2,

$$p(1000, 5000) = .05 \neq (.10)(.25) = p_X(1000) \cdot p_Y(5000)$$

de modo que X y Y no son independientes. La independencia de X y Y requiere que *toda* entrada en la tabla de probabilidad conjunta sea el producto de las probabilidades marginales que aparecen en los renglones y columnas correspondientes. ■

EJEMPLO 5.7 (Continuación del ejemplo 5.5) Puesto que $f(x, y)$ tiene la forma de un producto, X y Y parecerían ser independientes. Sin embargo, aunque $f_X(3/4) = f_Y(3/4) = 9/16$, $f(3/4, 3/4) = 0 \neq 9/16 \cdot 9/16$, de modo que las variables no son en realidad independientes. Para que sean independientes $f(x, y)$ debe tener la forma $g(x) \cdot h(y)$ además la región de densidad positiva debe ser un rectángulo con sus lados paralelos a los ejes de coordenadas. ■

La independencia de dos variables aleatorias es más útil cuando la descripción del experimento en estudio sugiere que X y Y no tienen ningún efecto sobre otras. Así, una vez que las funciones de masa de probabilidad o de densidad de probabilidad marginales han sido especificadas, la función de masa de probabilidad conjunta o la función de densidad de probabilidad conjunta son simplemente el producto de las dos funciones marginales. Se deduce que

$$P(a \le X \le b, c \le Y \le d) = P(a \le X \le b) \cdot P(c \le Y \le d)$$

EJEMPLO 5.8 Suponga que las duraciones de dos componentes son independientes entre sí y que la distribución exponencial de la primera duración es X_1 con parámetro λ_1, mientras que la distribución exponencial de la segunda es X_2 con parámetro λ_2. Así la función de densidad de probabilidad conjunta es

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \\ &= \begin{cases} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2} = \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2} & x_1 > 0, x_2 > 0 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases} \end{aligned}$$

Sean $\lambda_1 = 1/1000$ y $\lambda_2 = 1/1200$, de modo que las duraciones esperadas son 1000 y 1200 horas, respectivamente. La probabilidad de que ambas duraciones sean de al menos 1500 horas es

$$\begin{aligned} P(1500 \le X_1, 1500 \le X_2) &= P(1500 \le X_1) \cdot P(1500 \le X_2) \\ &= e^{-\lambda_1(1500)} \cdot e^{-\lambda_2(1500)} \\ &= (.2231)(.2865) = .0639 \end{aligned}$$

■

Más de dos variables aleatorias

Para modelar el comportamiento conjunto de más de dos variables aleatorias se amplía el concepto de una distribución conjunta de dos variables.

DEFINICIÓN

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias discretas, la función de masa de probabilidad conjunta de las variables es la función

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n)$$

Si las variables son continuas, la función de densidad de probabilidad conjunta de $X_1, \ldots, X_n$ es la función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de modo tal que para cualesquiera n intervalos $[a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n]$,

$$P(a_1 \le X_1 \le b_1, \ldots, a_n \le X_n \le b_n) = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n \ldots dx_1$$

EJEMPLO 5.9 Un experimento binomial consiste en n intentos dicótomos (éxito-fracaso), homogéneos (probabilidad de éxito constante) e independientes. Ahora considere un experimento *trinomial* en el que cada uno de los n intentos puede resultar en uno de *tres* posibles resultados. Por ejemplo, cada cliente sucesivo en una tienda puede pagar con efectivo, con tarjeta de crédito o con tarjeta de débito. Se asume que los intentos son independientes. Sea $p_1 = P$(el ensayo resulta en 1 tipo de desenlace) y defina p_2 y p_3 de manera análoga para los resultados 2 y 3. Las variables aleatorias de interés aquí son X_i = número de intentos que resultan en un tipo i de desenlace para $i = 1, 2, 3$.

En $n = 10$ intentos, la probabilidad de que los primeros 5 tengan un resultado tipo 1, los siguientes tres tengan uno tipo 2 y los últimos 2 tengan un resultado tipo 3, esto es, la probabilidad del resultado 1111122233, es $p_1^5 \cdot p_2^3 \cdot p_3^2$. Esta es también la probabilidad del resultado 1122311123 y, de hecho, la probabilidad de cualquier resultado que tenga exactamente cinco 1, tres 2 y dos 3. Ahora para determinar la probabilidad $P(X_1 = 5, X_2 = 3$ y $X_3 = 2)$ tenemos que contar el número de resultados que tienen exactamente cinco 1, tres 2 y dos 3. Primero hay $\binom{10}{5}$ maneras de escoger cinco intentos que tengan un resultado tipo 1. Ahora de los siguientes 5 intentos, escogemos 3 para que tengan un resultado tipo 2, lo cual se puede hacer de $\binom{5}{3}$ maneras. Esto determina que los siguientes dos intentos consisten en resultados tipo 3. De tal manera que el número total de maneras de escoger cinco 1, tres 2 y dos 3 es

$$\binom{10}{5} \cdot \binom{5}{3} = \frac{10!}{5!5!} \cdot \frac{5!}{3!2!} = \frac{10!}{5!3!2!} = 2520$$

Por tanto se observa que $P(X_1 = 5, X_2 = 3, X_3 = 2) = 2520\ p_1^5 \cdot p_2^3 \cdot p_3^2$. Generalizando esto para n intentos se obtiene

$$p(x_1, x_2, x_3) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3) = \frac{n!}{x_1!x_2!x_3!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} p_3^{x_3}$$

para $x_1 = 0, 1, 2, \ldots$; $x_2 = 0, 1, 2, \ldots$; $x_3 = 0, 1, 2, \ldots$ de tal manera que $x_1 + x_2 + x_3 = n$. Note que, aunque hay tres variables aleatorias aquí, la tercera variable X_3 es de hecho una variable redundante. Por ejemplo, en el caso de $n = 10$, se tiene que $X_1 = 5$ y $X_2 = 3$ lo cual implica que $X_3 = 2$ (justo como en el experimento binomial, en el que hay de hecho dos variables aleatorias, el número de éxitos y el número de fracasos, aunque esta última es redundante).

En un ejemplo específico, el alelo genético de una sección de un chícharo puede ser AA, Aa o aa. Un modelo genético simple especifica que P(AA) = .25, P(Aa) = .50 y P(aa) = .25. Si los alelos de 10 secciones obtenidas independientemente se determinan, la probabilidad de que exactamente cinco de estos sean tipo Aa y dos sean tipo AA es:

$$p(2, 5, 3) = \frac{10!}{2!5!3!} (.25)^2 (.50)^5 (.25)^3 = 0.769$$

Una extensión del escenario trinomial es un experimento que consiste en n intentos independientes e idénticos, cada uno de los cuales puede tener cualquiera de los r posibles resultados. Sea $p_i = P$ (resultado i en cualquier ensayo particular) y define las variables aleatorias como X_i = el número de ensayos que dan el resultado i ($i = 1,..., r$). Dicho experimento se llama **experimento multinomial** y la función de masa de probabilidad conjunta de $X_1,..., X_r$ se llama **distribución multinomial**. Al usar un argumento de conteo similar al utilizado para deducir la distribución trinomial, la función de masa de probabilidad da como resultado la función de masa de probabilidad multinomial

$$p(x_1,..., x_r) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(x_1!)(x_2!) \cdot \ldots \cdot (x_r!)} \cdot p_1^{x_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{x_r} & x_i = 0, 1, 2, \ldots; \quad x_1 + \cdots + x_r = n \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

■

EJEMPLO 5.10 Cuando se utiliza cierto método para recolectar un volumen fijo de muestras de roca en una región resulta que hay cuatro tipos de roca. Sean X_1, X_2 y X_3 la proporción por volumen de los tipos de roca 1, 2 y 3 en una muestra seleccionada de manera aleatoria (la proporción del tipo de roca 4 es $1 - X_1 - X_2 - X_3$, de modo que una variable X_4 sería redundante). Si la función de densidad de probabilidad conjunta de X_1, X_2, X_3 es

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} kx_1x_2(1 - x_3) & 0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 1, 0 \le x_3 \le 1, x_1 + x_2 + x_3 \le 1 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

entonces k se determina como sigue

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, x_3)\, dx_3\, dx_2\, dx_1$$

$$= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x_1} \left[\int_0^{1-x_1-x_2} kx_1x_2(1 - x_3)\, dx_3 \right] dx_2 \right\} dx_1$$

El valor de la integral iterada es $k/144$, por tanto, $k = 144$. La probabilidad de que las rocas de los tipos 1 y 2 integren más de 50% de la muestra es

$$P(X_1 + X_2 \le .5) = \iiint_{\substack{0 \le x_i \le 1 \text{ para } i = 1,2,3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 1,\, x_1 + x_2 \le .5}} f(x_1, x_2, x_3)\, dx_3\, dx_2\, dx_1$$

$$= \int_0^{.5} \left\{ \int_0^{.5-x_1} \left[\int_0^{1-x_1-x_2} 144x_1x_2(1 - x_3)\, dx_3 \right] dx_2 \right\} dx_1$$

$$= .6066$$

■

El concepto de independencia de más de dos variables aleatorias es similar al concepto de independencia de más de dos eventos.

DEFINICIÓN

Se dice que las variables aleatorias X_1, X_2,... X_n son **independientes** si para *cada* subconjunto X_{i_1}, X_{i_2},..., X_{i_k} de las variables (cada par, cada terna y así sucesivamente) la función de masa de probabilidad conjunta o la función de densidad de probabilidad conjunta del subconjunto es igual al producto de las funciones de masa de probabilidad o las funciones de densidad de probabilidad marginales.aa

Así pues, si las variables son independientes con $n = 4$, entonces la función de masa de probabilidad conjunta o la función de densidad de probabilidad conjunta de dos variables cualesquiera es el producto de las dos marginales y, asimismo, para cualesquiera tres variables y para las cuatro variables juntas. Intuitivamente, independencia significa que conocer los valores de algunas variables no cambia la distribución de las variables restantes. Aún más importante, una vez que se dice que n variables son independientes, la función de masa de probabilidad conjunta o la función de densidad de probabilidad conjunta son el producto de las n marginales.

EJEMPLO 5.11 Si $X_1,\ldots, X_n$ representan las duraciones de n componentes y si estos operan de manera independiente uno de otro y cada duración está exponencialmente distribuida con parámetro λ, entonces para $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,\ldots, x_n \geq 0$,

$$f(x_1, x_2,\ldots, x_n) = (\lambda e^{-\lambda x_1}) \cdot (\lambda e^{-\lambda x_2}) \cdot \cdots \cdot (\lambda e^{-\lambda x_n}) = \lambda^n e^{-\lambda \Sigma x_i}$$

Si estos n componentes constituyen un sistema que fallará en cuanto uno de ellos deje de funcionar, entonces la probabilidad de que el sistema dure más allá del tiempo t es

$$P(T > t) = P(X_1 > t,\ldots, X_n > t) = \int_t^\infty \cdots \int_t^\infty f(x_1,\ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

$$= \left(\int_t^\infty \lambda e^{-\lambda x_1}\, dx_1\right)\ldots\left(\int_t^\infty \lambda e^{-\lambda x_n}\, dx_n\right)$$

$$= (e^{-\lambda t})^n = e^{-n\lambda t}$$

Por consiguiente,

$$P(\text{duración del sistema} \leq t) = 1 - e^{-n\lambda t} \quad \text{con } t \geq 0$$

lo cual demuestra que la distribución de la duración del *sistema* es exponencial con parámetro $n\lambda$; el valor esperado de la duración del sistema es $1/n\lambda$.

Una variación del escenario anterior aparece en el artículo **"A Method for Correlating Field Life Degradation with Reliability Prediction for Electronic Modules" (*Quality and Reliability Engr. Intl.*, 2005: 715–726)**. Los investigadores consideraron una tarjeta de circuitos con n resistores soldados tipo chip. El tiempo de falla de la tarjeta es el mínimo de los tiempos de falla de las conexiones de soldadura individuales (rendimiento para nuestro ejemplo). Se supone que el rendimiento de las conexiones de soldadura era independiente, que la falla en el mismo excedería t si y solo si la resistencia al quiebre de una conexión excedía un valor de corte d, y que cada fuerza de corte se distribuía de manera normal con una media y una desviación estándar que dependían del rendimiento t: $\mu(t) = a_1 - a_2 t$ y $\sigma(t) = a_3 - a_4 t$ (la resistencia al quiebre de la soldadura se deteriora generalmente y se hace más variable a medida que el rendimiento aumenta). Por tanto, la probabilidad de falla en el rendimiento de una tarjeta es

$$P(T > t) = \left(1 - \Phi\left(\frac{d - (a_1 - a_2 t)}{a_3 + a_4 t}\right)\right)^n$$

El artículo sugiere valores para d y para los a_i con base en la información. En comparación con el escenario exponencial, la normalidad de los tiempos de vida individuales no implica una normalidad en el tiempo de vida del sistema. ■

En muchas situaciones experimentales que se considerarán en este libro la independencia es una suposición razonable, de modo que la especificación de la distribución conjunta se reduce a decidir sobre distribuciones marginales apropiadas.

Distribuciones condicionales

Suponga que X = el número de defectos mayores en un automóvil nuevo, seleccionado al azar, y que Y = el número de defectos menores en el mismo vehículo. Si se sabe que el automóvil seleccionado tiene un defecto mayor, ¿cuál es ahora la probabilidad de que cuando mucho tenga tres defectos menores?; es decir, ¿cuál es $P(Y \le 3 \mid X = 1$? Asimismo, si X y Y denotan las duraciones de los neumáticos delantero y trasero de una motocicleta y sucede que $X = 10\,000$ millas, ¿cuál es ahora la probabilidad de que Y sea cuando mucho de 15 000 millas y cuál es la duración esperada del neumático trasero "condicionada en"este valor de X? Preguntas de esta clase pueden responderse estudiando distribuciones de probabilidad condicional.

DEFINICIÓN

Sean X y Y dos variables aleatorias continuas con función de densidad de probabilidad conjunta $f(x, y)$ y función de densidad de probabilidad marginal X, $f_X(x)$. Así entonces para cualquier valor x de X para el cual $f_X(x) > 0$, la **función de densidad de probabilidad condicional de Y, dado que $X = x$,** es

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} \qquad -\infty < y < \infty$$

Si X y Y son discretas al reemplazar las funciones de densidad de probabilidad por funciones de masa de probabilidad, en esta definición se obtiene la **función de masa de probabilidad condicional de Y cuando $X = x$.**

Observe que la definición de $f_{Y|X}(y|x)$ es igual a la de $P(B|A)$, la probabilidad condicional de que B ocurra, dado que A ha ocurrido. Una vez que la función de densidad de probabilidad o la función de masa de probabilidad han sido determinadas, preguntas como la planteada al principio de esta subsección pueden responderse integrando o sumando a lo largo de un conjunto apropiado de valores Y.

EJEMPLO 5.12 Reconsidere la situación de los ejemplos 5.3 y 5.4 que implican que X = la proporción del tiempo que permanece ocupada la ventanilla bancaria para automovilistas y Y = la proporción análoga de la ventanilla normal. La función de densidad de probabilidad condicional de Y, dado que $X = .8$, es

$$f_{Y|X}(y|.8) = \frac{f(.8, y)}{f_X(.8)} = \frac{1.2(.8 + y^2)}{1.2(.8) + .4} = \frac{1}{34}(24 + 30y^2) \quad 0 < y < 1$$

La probabilidad de que la ventanilla normal esté ocupada cuando mucho la mitad del tiempo, dado que $X = .8$ es, por tanto,

$$P(Y \le .5|X = .8) = \int_{-\infty}^{.5} f_{Y|X}(y|.8)\,dy = \int_{0}^{.5} \frac{1}{34}(24 + 30y^2)\,dy = .390$$

Utilizando la función de densidad de probabilidad marginal de Y se obtiene $P(Y \le .5) = .350$. Además $E(Y) = .6$, mientras que la proporción esperada del tiempo que la ventanilla normal permanece ocupada, dado que $X = .8$ (una expectativa *condicional*), es

$$E(Y|X = .8) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_{Y|X}(y|.8)\,dy = \frac{1}{34}\int_{0}^{1} y(24 + 30y^2)\,dy = .574$$ ■

Si las dos variables son independientes, las funciones de masa de probabilidad o de densidad de probabilidad marginales en el denominador cancelarán el factor correspondiente en el numerador. La distribución condicional es entonces idéntica a la distribución marginal correspondiente.

EJERCICIOS Sección 5.1 (1–21)

1. Una gasolinera cuenta con islas de autoservicio y de servicio completo. En cada isla hay una sola bomba de gasolina sin plomo regular con dos mangueras. Sea X el número de mangueras que se utilizan en la isla de autoservicio en un tiempo particular; y sea Y el número de mangueras en uso en la isla de servicio completo en ese mismo tiempo. La función de masa de probabilidad conjunta de X y Y aparece en la tabla adjunta.

$p(x, y)$		y = 0	1	2
	0	.10	.04	.02
x	1	.08	.20	.06
	2	.06	.14	.30

a. ¿Cuál es $P(X = 1 \text{ y } Y = 1)$?

b. Calcule $P(X \leq 1 \text{ y } Y \leq 1)$.

c. Describa con palabras el evento $\{X \neq 0 \text{ y } Y \neq 0\}$ y calcule su probabilidad.

d. Calcule la función de masa de probabilidad marginal de X y Y. Utilizando $p_X(x)$, ¿cuál es $P(X \leq 1)$?

e. ¿Son X y Y variables aleatorias independientes? Explique.

2. Un país grande pero poco poblado tiene dos hospitales pequeños, uno en el extremo sur del país y el otro en el extremo norte. La sala de emergencias del hospital del sur tiene cuatro camas, mientras que la sala de emergencias del hospital del norte tiene únicamente tres camas. Sea X el número de camas ocupadas en el hospital del sur por un tiempo particular en cierto día, y sea Y el número de camas ocupadas en el hospital del norte durante el mismo tiempo el mismo día. Suponga que estas dos variables aleatorias son independientes y que la función de masa de probabilidad de X asigna las masas de probabilidad .1, .2, .3, .2 y .2 en los valores de x 0, 1, 2, 3 y 4 respectivamente; y que la función de masa de probabilidad de Y distribuye las probabilidades .1, .3, .4 y .2 en los valores de y 1, 2, 3 y 3, respectivamente.

a. Escriba la función de masa de probabilidad conjunta de X y de Y en una tabla de probabilidad conjunta.

b. Calcule $P(X \leq 1 \text{ y } Y \leq 1)$ agregando las probabilidades de la función de masa de probabilidad conjunta, y verifique que esta es igual al producto de $P(X \leq 1)$ y $P(Y \leq 1)$.

c. Exprese el evento en el que el número total de camas ocupadas en los dos hospitales juntos es a lo más de 1 en términos de X y Y, y después calcule esta probabilidad.

d. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los dos hospitales no tenga camas ocupadas?

3. Un supermercado cuenta con una caja rápida y una extrarrápida. Sea X_1 el número de clientes formados en la caja rápida a una hora particular del día y sea X_2 el número de clientes formados en la caja extrarrápida a la misma hora. Suponga que la función de masa de probabilidad conjunta de X_1 y X_2 es la que aparece en la siguiente tabla.

		x_2 = 0	1	2	3
	0	.08	.07	.04	.00
	1	.06	.15	.05	.04
x_1	2	.05	.04	.10	.06
	3	.00	.03	.04	.07
	4	.00	.01	.05	.06

a. ¿Cuál es $P(X_1 = 1, X_2 = 1)$; es decir, la probabilidad de que haya exactamente un cliente en cada caja?

b. ¿Cuál es $P(X_1 = X_2)$; es decir, la probabilidad de que el número de clientes en cada caja sea el mismo?

c. Sea A el evento en que hay al menos dos clientes más en una caja que en la otra. Exprese A en función de X_1 y X_2 y calcule la probabilidad de este evento.

d. ¿Cuál es la probabilidad de que el número total de clientes en las dos líneas sea exactamente cuatro? ¿Y al menos cuatro?

4. Regrese a la situación descrita en el ejercicio 3.

a. Determine la función de masa de probabilidad marginal de X_1 y enseguida calcule el número esperado de clientes formados en la caja rápida.

b. Determine la función de masa de probabilidad marginal de X_2.

c. Mediante inspección de las probabilidades $P(X_1 = 4)$, $P(X_2 = 0)$ y $P(X_1 = 4, X_2 = 0)$, ¿son X_1 y X_2 variables aleatorias independientes? Explique.

5. El número de clientes que esperan en el servicio de envoltura de regalos en una tienda de departamentos es una variable aleatoria X con valores posibles 0, 1, 2, 3, 4 y probabilidades correspondientes .1, .2, .3, .25, .15. Un cliente seleccionado al azar tendrá 1, 2 o 3 paquetes para envoltura con probabilidades de .6, .3 y .1, respectivamente. Sea Y = el número total de paquetes que serán envueltos para los clientes que esperan formados en la fila (suponga que el número de paquetes entregado por un cliente es independiente del número entregado por cualquier otro cliente).

a. Determine $P(X = 3, Y = 3)$, es decir, $p(3, 3)$.

b. Determine $p(4, 11)$.

6. Sea X el número de cámaras digitales Canon vendidas durante una semana particular en una tienda. La función de masa de probabilidad de X es

x	0	1	2	3	4
$p_X(x)$	.1	.2	.3	.25	.15

Sesenta por ciento de todos los clientes que compran estas cámaras también compran una garantía extendida. Sea Y el número de compradores durante esta semana que adquieren una garantía extendida.

a. ¿Cuál es $P(X = 4, Y = 2)$? [*Sugerencia*: Esta probabilidad es igual a $P(Y = 2 | X = 4) \cdot P(X = 4)$; ahora piense en las cuatro compras como cuatro ensayos de un experimento binomial, con éxito en el correspondiente a la compra de una garantía extendida.]

b. Calcule $P(X = Y)$.

c. Determine la función de masa de probabilidad conjunta de X y Y y luego la función de masa de probabilidad marginal de Y.

7. En la siguiente tabla de probabilidad conjunta se muestra la distribución de probabilidad conjunta del número X de automóviles y el número Y de autobuses por cada ciclo de señalización propuesto en un carril de vuelta a la izquierda.

$p(x, y)$		y = 0	1	2
	0	.025	.015	.010
	1	.050	.030	.020
	2	.125	.075	.050
x	3	.150	.090	.060
	4	.100	.060	.040
	5	.050	.030	.020

a. ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente un automóvil y exactamente un autobús durante un ciclo?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que haya cuando mucho un automóvil y cuando mucho un autobús durante un ciclo?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente un automóvil durante un ciclo? ¿Y exactamente un autobús?

d. Suponga que el carril de vuelta a la izquierda tiene una capacidad de cinco automóviles y que un autobús equivale a tres. ¿Cuál es la probabilidad de un exceso de vehículos durante un ciclo?

e. ¿Son X y Y variables aleatorias independientes? Explique.

8. Un almacén cuenta con 30 componentes de un tipo, de los cuales 8 fueron surtidos por el proveedor 1, 10 por el proveedor 2 y 12 por el proveedor 3. Seis de estos tienen que ser seleccionados al azar para un ensamble particular. Sea X = el número de componentes seleccionados del proveedor 1, Y = el número de componentes seleccionados del proveedor 2 y que $p(x, y)$ denote la función de masa de probabilidad conjunta de X y Y.

a. ¿Cuál es $p(3, 2)$? [*Sugerencia*: la probabilidad de que cada muestra de tamaño 6 sea seleccionada es igual. Por consiguiente, $p(3, 2)$ = (número de resultados con $X = 3$ y $Y = 2$)/(el número total de resultados). Ahora, para obtener el numerador y el denominador use la regla de producto para el conteo.]

b. Utilizando la lógica del inciso a), obtenga $p(x, y)$. (Esto puede ser considerado como un muestreo con distribución hipergeométrica multivariante sin reemplazo de una población finita compuesta por más de dos categorías.)

9. Se supone que cada neumático delantero de un tipo particular de vehículo está inflado a una presión de 26 lb/pulg^2. Suponga que la presión de aire real en cada neumático es una variable aleatoria, X para el neumático derecho y Y para el izquierdo con función de densidad de probabilidad conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} K(x^2 + y^2) & 20 \le x \le 30,\ 20 \le y \le 30 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

a. ¿Cuál es el valor de K?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos neumáticos estén inflados a menos presión?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que la diferencia en la presión del aire entre ambos neumáticos sea de cuando mucho 2 lb/pulg^2?

d. Determine la distribución (marginal) de la presión del aire sólo en el neumático derecho.

e. ¿Son X y Y variables aleatorias independientes?

10. Ana y Álvaro acordaron encontrarse entre las 5:00 p.m. y las 6:00 p.m. para cenar en un restaurante local de comida saludable. Sea X = la hora de llegada de Ana y Y = la hora de llegada de Álvaro. Suponga que X y Y son independientes, cada una distribuida uniformemente en el intervalo [5, 6].

a. ¿Cuál es la función de densidad de probabilidad conjunta de X y Y?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos lleguen entre las 5:15 y las 5:45?

c. Si la primera en llegar espera sólo 10 min antes de irse a comer a otra parte, ¿cuál es la probabilidad de que cenen en el restaurante de comida saludable? [*Sugerencia*: El evento de interés es $A = \{(x, y): |x - y| \le 1/6\}$.]

11. Dos profesores acaban de entregar los exámenes finales para su copia. Sea X el número de errores tipográficos en el examen del primer profesor y Y el número de tales errores en el segundo examen. Suponga que X tiene una distribución de Poisson con parámetro μ_1, que Y tiene una distribución de Poisson con parámetro μ_2 y que X y Y son independientes.

a. ¿Cuál es la función de masa de probabilidad conjunta de X y Y?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que se cometa cuando mucho un error en los dos exámenes juntos?

c. Obtenga una expresión general para la probabilidad de que el número total de errores en los dos exámenes sea m (donde m es un entero no negativo). [*Sugerencia*: $A = \{(x, y): x + y = m\} = \{(m, 0), (m - 1, 1),..., (1, m - 1), (0, m)\}$. Ahora sume la función de masa de probabilidad conjunta a lo largo de $(x, y) \in A$ y use el teorema binomial, el cual dice que

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^k b^{m-k} = (a + b)^m$$

para cualquier a, b.]

12. Dos componentes de una minicomputadora tienen la siguiente función de densidad de probabilidad conjunta de sus vidas útiles X y Y:

$$f(x, y) = \begin{cases} xe^{-x(1+y)} & x \ge 0 \text{ y } y \ge 0 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la vida útil X del primer componente exceda de 3?

b. ¿Cuáles son las funciones de densidad de probabilidad marginales de X y Y? ¿Son independientes las dos vidas útiles? Explique.

c. ¿Cuál es la probabilidad de que la vida útil de al menos un componente exceda de 3?

13. Tiene dos focos para una lámpara particular. Sea X = la vida útil del primer foco y Y = la vida útil del segundo (ambas en miles de horas). Suponga que X y Y son independientes y que cada una tiene una distribución exponencial con parámetro $\lambda = 1$.

a. ¿Cuál es la función de densidad de probabilidad conjunta de X y Y?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que cada foco dure cuando mucho 1000 horas (es decir, $X \le 1$ y $Y \le 1$)?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que la vida útil total de los dos focos sea cuando mucho de 2? [*Sugerencia*: Trace una figura de la región $A = \{(x, y): x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2\}$ antes de integrar.]

d. ¿Cuál es la probabilidad de que la vida útil total sea de entre 1 y 2?

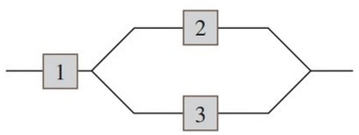
14. Suponga que tiene diez focos y que la vida útil de cada uno es independiente de la del resto y que cada vida útil tiene una distribución exponencial con parámetro λ.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que los diez focos fallen antes del tiempo t?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente k de los diez focos fallen antes del tiempo t?

c. Suponga que nueve de los focos tienen vidas útiles exponencialmente distribuidas con parámetro λ y que el foco restante tiene una vida útil que está exponencialmente distribuida con parámetro θ (este fue fabricado por otra empresa). ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente cinco de los diez focos fallen antes del tiempo t?

15. Considere un sistema compuesto de tres componentes como se ilustra. El sistema continuará funcionando mientras el primer componente funcione y mientras también funcione el componente 2 o el componente 3. Sean X_1, X_2 y X_3 las vidas útiles de los componentes 1, 2 y 3, respectivamente. Suponga que las X_i son independientes una de otra y que cada X_i tiene una distribución exponencial con parámetro λ.



a. Sea Y la vida útil del sistema. Obtenga la función de distribución acumulativa de Y y dedúzcala para obtener la función de densidad de probabilidad. [*Sugerencia*: $F(y) = P(Y \leq y)$; exprese el evento $\{Y \leq y\}$ en función de uniones o intersecciones de los tres eventos $\{X_1 \leq y\}$, $\{X_2 \leq y\}$ y $\{X_3 \leq y\}$.]

b. Calcule la vida útil esperada del sistema.

16. **a.** Para $f(x_1, x_2, x_3)$ del ejemplo 5.10 calcule la *función de densidad marginal conjunta* sólo de X_1 y X_3 (integre para x_2).

b. ¿Cuál es la probabilidad de que las rocas de los tipos 1 y 3 constituyan cuando mucho 50% de la muestra? [*Sugerencia*: Use el resultado del inciso a).]

c. Calcule la función de densidad de probabilidad marginal sólo de X_1 [*Sugerencia*: Use el resultado del inciso a).]

17. Un ecólogo desea seleccionar un punto dentro de una región de muestreo circular de acuerdo con una distribución uniforme (en la práctica esto podría hacerse al seleccionar primero una dirección y luego una distancia a partir del centro en esa dirección). Sea X = la coordenada x del punto seleccionado y Y = la coordenada y del punto seleccionado. Si el círculo tiene su centro en (0, 0) y si su radio es R, entonces la función de densidad de probabilidad conjunta de X y Y es

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi R^2} & x^2 + y^2 \leq R^2 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el punto seleccionado quede dentro de $R/2$ del centro de la región circular? [*Sugerencia*: Trace una figura de la región de densidad positiva D. Debido a que $f(x, y)$ es constante en D el cálculo de probabilidad se reduce al cálculo de un área.]

b. ¿Cuál es la probabilidad de que tanto X como Y difieran de 0 a lo más por $R/2$?

c. Responda el inciso b) reemplazando $R/2$ por $R/\sqrt{2}$.

d. ¿Cuál es la función de densidad de probabilidad marginal de X? ¿Y de Y? ¿Son independientes X y Y?

18. Remítase al ejercicio 1 y responda las siguientes preguntas:

a. Dado que $X = 1$, determine la función de masa de probabilidad condicional de Y; es decir, $p_{Y \mid X}(0 \mid 1)$, $p_{Y \mid X}(1 \mid 1)$, y $p_{Y \mid X}(2 \mid 1)$.

b. Dado que dos mangueras están en uso en la isla de autoservicio, ¿cuál es la función de masa de probabilidad condicional la cantidad de mangueras que están en uso en la isla de servicio completo?

c. Use el resultado del inciso b) para calcular la probabilidad condicional $P(Y \leq 1 \mid X = 2)$.

d. Dado que dos mangueras están en uso en la isla de servicio completo, ¿cuál es la función de masa de probabilidad condicional de la cantidad de mangueras que están en uso en la isla de autoservicio?

19. La función de densidad de probabilidad conjunta de las presiones de los neumáticos delanteros derecho e izquierdo se da en el ejercicio 9.

a. Determine la función de densidad de probabilidad condicional de Y dado que $X = x$ y la función de densidad de probabilidad condicional de X dado que $Y = y$.

b. Si la presión del neumático derecho es de 22 lb/pulg^2, ¿cuál es la probabilidad de que la presión del neumático izquierdo sea de al menos 25 lb/pulg^2? Compare esto con $P(Y \geq 25)$.

c. Si la presión del neumático derecho es de 22 lb/pulg^2, ¿cuál es la presión esperada en el neumático izquierdo y cuál es su desviación estándar de la presión?

20. Sean X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 y X_6 las cantidades de caramelos M&M azules, cafés, verdes, naranjas, rojos y amarillos, respectivamente, en una muestra de tamaño n. Estas X_i tienen una distribución multinomial. De acuerdo con el sitio web de M&M, las proporciones de colores son $p_1 = .24$, $p_2 = .13$, $p_3 = .16$, $p_4 = .20$, $p_5 = .13$ y $p_6 = .14$.

a. Si $n = 12$, ¿cuál es la probabilidad de que haya exactamente dos caramelos M&M de cada color?

b. Con $n = 20$, ¿cuál es la probabilidad de que haya cuando mucho cinco caramelos de color naranja? [*Sugerencia*: Considere el caramelo naranja como un éxito y cualquier otro color como falla.]

c. En una muestra de 20 caramelos M&M, ¿cuál es la probabilidad de que el número de caramelos azules, verdes o naranjas sea al menos de 10?

21. Sean X_1, X_2 y X_3 las vidas útiles de los componentes 1, 2 y 3 en un sistema de tres componentes.

a. ¿Cómo definiría la función de densidad de probabilidad condicional de X_3, dado que $X_1 = x_1$ y $X_2 = x_2$?

b. ¿Cómo definiría la función de densidad de probabilidad conjunta condicional de X_2 y X_3, dado que $X_1 = x_1$?

5.2 Valores esperados, covarianza y correlación

Previamente se vio que cualquier función $h(x)$ de una sola variable aleatoria X es por sí misma una variable aleatoria. Sin embargo, para calcular $E[h(X)]$ no es necesario obtener la distribución de probabilidad de $h(X)$; en cambio, $E[h(X)]$ se calculó como un promedio ponderado de valores de $h(x)$ donde la función de ponderación fue la función de masa de probabilidad $p(x)$ o la función de densidad de probabilidad $f(x)$ de X. Se obtiene un resultado similar para una función $h(X, Y)$ de dos variables aleatorias conjuntamente distribuidas.

PROPOSICIÓN

Sean X y Y variables aleatorias conjuntamente distribuidas con función de masa de probabilidad $p(x, y)$ o función de densidad de probabilidad $f(x, y)$, ya sea que las variables sean discretas o continuas. Entonces el valor esperado de una función $h(X, Y)$ denotada por $E[h(X, Y)]$ o $\mu_{h(X,Y)}$ está dada por

$$E[h(X, Y)] = \begin{cases} \sum_x \sum_y h(x, y) \cdot p(x, y) & \text{si } X \text{ y } Y \text{ son discretas} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) \cdot f(x, y)\, dx\, dy & \text{si } X \text{ y } Y \text{ son continuas} \end{cases}$$

EJEMPLO 5.13 Cinco amigos compraron boletos para un concierto. Si los boletos son para los asientos 1–5 en una fila particular y los boletos se distribuyen al azar entre los cinco, ¿cuál es la cantidad de asientos que se espera que separe a dos de ellos en particular de los otros tres? Sean X y Y los números de asiento del primero y segundo individuos, respectivamente. Los pares posibles (X, Y) son $\{(1, 2), (1, 3),..., (5, 4)\}$ y la función de masa de probabilidad conjunta de (X, Y) es

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{20} & x = 1,\ldots, 5; y = 1,\ldots, 5; x \neq y \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

El número de asientos que separan a los dos individuos es $h(X, Y) = |X - Y| - 1$. La tabla adjunta da $h(x, y)$ para cada posible par (x, y).

		x				
$h(x, y)$		1	2	3	4	5
	1	—	0	1	2	3
	2	0	—	0	1	2
y	3	1	0	—	0	1
	4	2	1	0	—	0
	5	3	2	1	0	—

Por tanto,

$$E[h(X, Y)] = \sum_{(x,y)} \sum h(x, y) \cdot p(x, y) = \sum_{\substack{x=1 \\ x \neq y}}^{5} \sum_{y=1}^{5} (|x - y| - 1) \cdot \frac{1}{20} = 1$$ ■

EJEMPLO 5.14 En el ejemplo 5.5 la función de densidad de probabilidad conjunta de la cantidad X de almendras y la cantidad Y de nueces de acajú en una lata de 1 lb fue

$$f(x, y) = \begin{cases} 24xy & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, x + y \le 1 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Si 1 lb de almendras le cuesta a la compañía \$1.50, 1 lb de nuez de acajú le cuesta \$2.25 y 1 lb de cacahuates le cuesta \$.75, el costo total del contenido de una lata es

$$h(X, Y) = (1.5)X + (2.25)Y + (.75)(1 - X - Y) = .75 + .75X + 1.5Y$$

(puesto que $1 - X - Y$ del peso se compone de cacahuates). El costo esperado total es

$$\begin{aligned} E[h(X, Y)] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) \cdot f(x, y)\, dx\, dy \\ &= \int_{0}^{1}\int_{0}^{1-x} (.75 + .75x + 1.5y) \cdot 24xy\, dy\, dx = \$1.65 \end{aligned}$$

■

El método de calcular el valor esperado de una función $h(X_1, \ldots, X_n)$ de n variables aleatorias es similar al de dos variables aleatorias. Si las X_i son discretas, $E[h(X_1, \ldots, X_n)]$ es una suma de n dimensiones; si las X_i son continuas, es una integral de n dimensiones.

Covarianza

Cuando dos variables aleatorias X y Y no son independientes, con frecuencia es de interés valorar qué tan fuerte están relacionadas una con otra.

DEFINICIÓN

La **covarianza** entre dos variables aleatorias X y Y es

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X, Y) &= E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \\ &= \begin{cases} \displaystyle\sum_x \sum_y (x - \mu_X)(y - \mu_Y) p(x, y) & X, Y \text{ discretas} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f(x, y)\, dx\, dy & X, Y \text{ continuas} \end{cases} \end{aligned}$$

Es decir, puesto que $X - \mu_X$ y $Y - \mu_Y$ son las desviaciones de las dos variables respecto a sus medias, la covarianza es el producto esperado de las desviaciones. Observe que $\mathrm{Cov}(X, X) = E[(X - \mu_X)^2] = V(X)$.

La exposición razonada para la definición es como sigue. Suponga que X y Y tienen una fuerte relación positiva entre sí, lo que significa que los valores grandes de X tienden a ocurrir con valores grandes de Y y los valores pequeños de X, con los valores pequeños de Y. Entonces la mayor parte de la masa o densidad de probabilidad estará asociada para $(x - \mu_X)$ y $(y - \mu_Y)$, ambos positivos (tanto X como Y por encima de sus respectivas medias) o ambos negativos, así que el producto $(x - \mu_X)(y - \mu_Y)$ tenderá a ser positivo. Por tanto, para una fuerte relación positiva, $\mathrm{Cov}(X, Y)$ deberá ser bastante positiva. Con una fuerte relación negativa los signos de $(x - \mu_X)$ y $(y - \mu_Y)$ tenderán a ser opuestos, lo cual da un producto negativo. Por tanto, con una fuerte relación negativa, $\mathrm{Cov}(X, Y)$ deberá ser muy negativa. Si X y Y no están fuertemente relacionadas, los productos positivo y negativo tenderán a eliminarse entre sí, lo que da una covarianza de cerca de 0. La figura 5.4 ilustra las diferentes posibilidades. La covarianza depende *tanto* del conjunto de pares posibles *como* de las probabilidades. En la figura 5.4 las probabilidades podrían cambiarse sin alterar el conjunto de pares posibles y esto cambiaría drásticamente el valor de $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

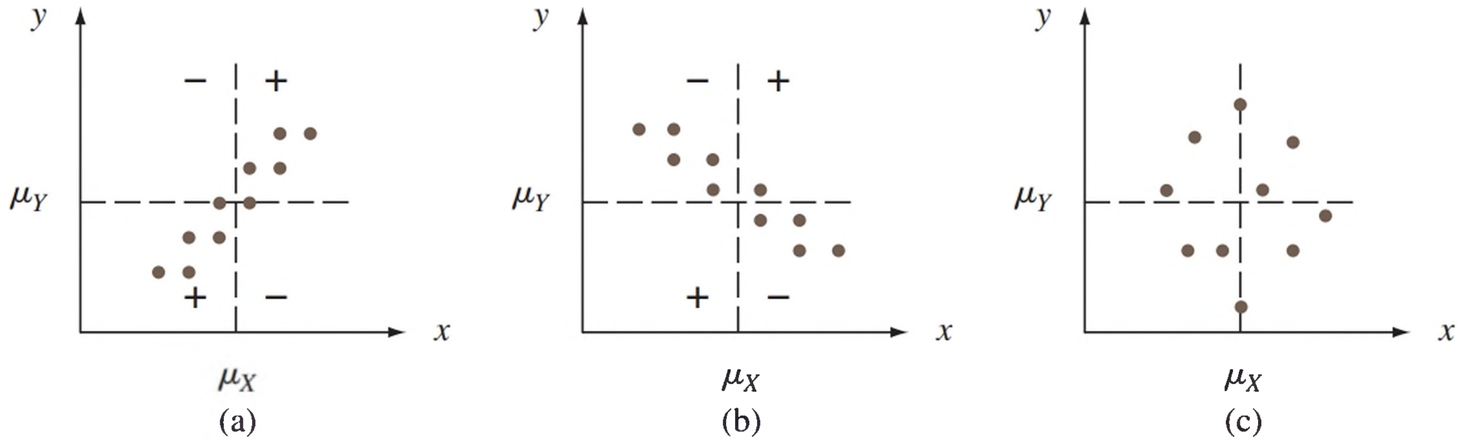


Figura 5.4 $p(x, y) = 1/10$ de cada uno de los diez pares correspondientes a los puntos indicados; (a) covarianza positiva; (b) covarianza negativa; (c) covarianza cerca de cero

EJEMPLO 5.15 Las funciones de masa de probabilidad conjunta y marginal de X = cantidad deducible sobre una póliza de automóvil y Y = cantidad deducible sobre una póliza de propietario de casa en el ejemplo 5.1 fueron

		y		
	$p(x, y)$	500	1000	5000
x	100	.30	.05	0
	500	.15	.20	.05
	1000	.10	.10	.05

x	100	500	1000
$p_X(x)$	.35	.40	.25

y	500	1000	5000
$p_Y(y)$	.55	.35	.10

de las cuales $\mu_X = \Sigma x p_X(x) = 485$ y $\mu_Y = 1125$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= \sum\sum_{(x, y)} (x - 485)(y - 1125)p(x, y) \\ &= (100 - 485)(500 - 1125)(.30) + \ldots \\ &\quad + (1000 - 485)(5000 - 1125)(.05) \\ &= 136\,875\end{aligned}$$

La siguiente fórmula abreviada para $\text{Cov}(X, Y)$ simplifica los cálculos.

PROPOSICIÓN

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - \mu_X \cdot \mu_Y$$

De acuerdo con esta fórmula no se requieren sustracciones intermedias; sólo al final del cálculo se resta $\mu_X \cdot \mu_Y$ de $E(XY)$. La comprobación implica expandir $(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)$ y luego considerar el valor esperado de cada término por separado.

EJEMPLO 5.16 (Continuación del ejemplo 5.5) Las funciones de densidad de probabilidad conjunta y marginal de X = cantidad de almendras y Y = cantidad de nueces de acajú fueron

$$f(x, y) = \begin{cases} 24xy & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, x + y \le 1 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 12x(1 - x)^2 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

con $f_Y(y)$ obtenida al reemplazar x por y en $f_X(x)$. Es fácil verificar que $\mu_X = \mu_Y = \frac{2}{5}$ y

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} xy \cdot 24xy\, dy\, dx$$
$$= 8\int_0^1 x^2(1-x)^3\, dx = \frac{2}{15}$$

Por tanto $\text{Cov}(X, Y) = 2/15 - (2/5)(2/5) = 2/15 - 4/25 = -2/75$. Una covarianza negativa se considera razonable en este caso porque más almendras contenidas en la lata implican menos nueces de acajú. ■

Podría parecer que la relación en el ejemplo de los seguros es bastante fuerte puesto que $\text{Cov}(X, Y) = 136\,875$, mientras que $\text{Cov}(X, Y) = -2/75$ en el ejemplo de las nueces parecería implicar una relación bastante débil. Desafortunadamente, la covarianza tiene un serio defecto que hace imposible interpretar un valor calculado. En el ejemplo de los seguros suponga que la cantidad deducible se expresó en centavos en lugar de dólares. Entonces $100X$ reemplazaría a X, $100Y$ reemplazaría a Y y la covarianza resultante sería $\text{Cov}(100X, 100Y) = (100)(100)\text{Cov}(X, Y) = 1\,386\,750\,000$. Si, por otra parte, la cantidad deducible se hubiera expresado en cientos de dólares la covarianza calculada habría sido $(.01)(.01)(136\,875) = 13.6875$. *El defecto de la covarianza es que su valor calculado depende críticamente de las unidades de medición*. De manera ideal la selección de las unidades no debe tener ningún efecto en la medida de la fuerza de la relación. Esto se logra al graduar a escala la covarianza.

Correlación

DEFINICIÓN

El **coeficiente de correlación** de X y Y, denotado por $\text{Corr}(X, Y)$, $\rho_{X,Y}$ o simplemente ρ está definido por

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

EJEMPLO 5.17 Es fácil verificar que en el escenario de los seguros del ejemplo 5.15, $E(X^2) = 353\,500$, $\sigma_X^2 = 353\,500 = (485)^2 = 118\,275$, $\sigma_X = 343.911$, $E(Y^2) = 2\,987\,500$, $\sigma_Y^2 = 1\,721\,875$ y $\sigma_X = 1312.202$. Esto da

$$\rho = \frac{136\,875}{(343\,911)(1312.202)} = .303$$ ■

La siguiente proposición muestra que ρ remedia el defecto de $\text{Cov}(X, Y)$ y también sugiere cómo reconocer la existencia de una fuerte relación (lineal).

PROPOSICIÓN

1. Si a y c son positivas o negativas,
$$\text{Corr}(aX + b, cY + d) = \text{Corr}(X, Y)$$
2. Para dos variables aleatorias X y Y cualesquiera, $-1 \le \rho \le 1$. Cuando $\rho = 0$ se dice que las dos variables **no están correlacionadas**.

La proposición 1 dice precisamente que el coeficiente de correlación no se ve afectado por un cambio lineal en las unidades de medición (si, por ejemplo, X = temperatura en °C, entonces $9X/5 + 32$ = temperatura en °F). De acuerdo con la proposición 2, la relación positiva más fuerte posible es puesta en evidencia por $\rho = +1$, en tanto que la relación negativa más fuerte posible corresponde a $\rho = -1$ y $\rho = 0$ indica la ausencia de una relación. La comprobación de la primera proposición se ilustra en el ejercicio 35 y la de la segunda aparece en el ejercicio suplementario 87 al final del capítulo. Para propósitos descriptivos la relación se describirá como fuerte si $|\rho| \geq .8$, moderada si $.5 < |\rho| < .8$ y débil si $|\rho| \leq .5$.

Si se considera que $p(x, y)$ o $f(x, y)$ determinan un modelo matemático de cómo las dos variables numéricas X y Y están distribuidas en alguna población (estatura y peso, calificaciones del examen de aptitud escolar verbal y cuantitativa, etc.), entonces ρ es una característica o parámetro que mide cuán fuertemente están relacionadas X y Y en la población. En el capítulo 12 se considerará tomar una muestra de pares $(x_1, y_1),..., (x_n, y_n)$ de la población. El coeficiente de correlación muestral r se definirá y utilizará entonces para hacer inferencias respecto a ρ.

El coeficiente de correlación ρ no es en realidad una medida completamente general de la fuerza de una relación.

PROPOSICIÓN

1. Si X y Y son independientes, entonces $\rho = 0$, pero $\rho = 0$ no implica independencia.
2. $\rho = 1$ o -1 si y sólo si $Y = aX + b$ con algunos números a y b con $a \neq 0$.

Esta proposición dice que ρ mide el grado de relación **lineal** entre X y Y, y sólo cuando las dos variables están perfectamente relacionadas de una manera lineal, ρ será tan positivo o negativo como pueda serlo. Sin embargo, si $|\rho| << 1$ todavía puede haber una relación fuerte entre las dos variables, solo que esta no será lineal. Y aun cuando $|\rho|$ sea cercana a 1, puede ser que la relación no sea realmente lineal, pero puede ser aproximada mediante una línea recta.

EJEMPLO 5.18 Sean X y Y variables aleatorias discretas con función de masa de probabilidad conjunta

$$p(x, y) = \begin{cases} .25 & (x, y) = (-4, 1), (4, -1), (2, 2), (-2, -2) \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Los puntos que reciben masa de probabilidad positiva están identificados en el sistema de coordenadas (x, y) de la figura 5.5. Es evidente por la figura que el valor de X está completamente determinado por el valor de Y, y viceversa, de modo que ambas variables son completamente dependientes. Sin embargo, por simetría $\mu_X = \mu_Y = 0$ y $E(XY) = (-4)(.25) + (-4)(.25) + (4)(.25) + (4)(.25) = 0$. La covarianza es, por tanto, $\text{Cov}(X,Y) = E(XY) - \mu_X \cdot \mu_Y = 0$ y, por consiguiente, $\rho_{X,Y} = 0$. ¡Aunque hay una dependencia perfecta, también hay una ausencia completa de cualquier relación lineal!

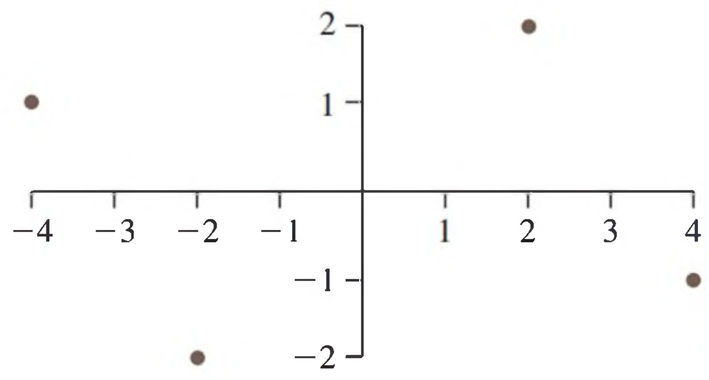


Figura 5.5 La población de los pares para el ejemplo 5.18 ■

Un valor de ρ próximo a 1 no necesariamente implica que el incremento del valor de X *haga* que se incremente Y. Sólo implica que los valores grandes de X están *asociados* a valores grandes de Y. Por ejemplo, en la población de niños, la amplitud del vocabulario y el número de caries no están lo bastante correlacionados positivamente, pero ciertamente que las caries no hacen que el vocabulario se incremente. En cambio, los valores de estas dos variables tienden a incrementarse conforme se incrementa el valor de la edad, una tercera variable. Para niños de una cierta edad, probablemente exista una muy baja correlación entre el número de caries y la amplitud del vocabulario. En resumen, asociación (una alta correlación) no es lo mismo que causa.

Distribución normal bivariante

Tal como en la práctica de la estadística, la distribución univariante más útil es la distribución normal; la distribución conjunta para dos variables X y Y de mayor utilidad es la distribución normal bivariante. Su función de masa de probabilidad es algo complicada:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp$$
$$\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right)$$

En la figura 5.6 se muestra una gráfica de esta función de masa de probabilidad, la gráfica de densidad de superficie. De ello se desprende (después de integrar) que la distribución marginal de X es normal con media μ_1 y una desviación estándar σ_1, y de manera similar la distribución marginal de Y es normal con una media de μ_2 y una desviación estándar σ_2. El quinto parámetro de la distribución es ρ, del cual puede demostrarse que es el coeficiente de correlación entre X y Y.

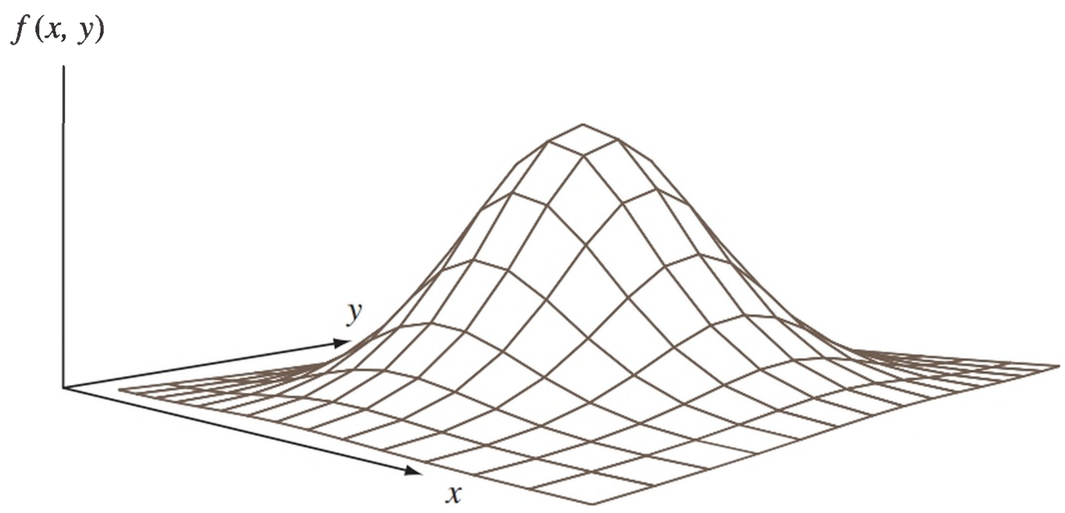


Figura 5.6 Gráfico de una función de masa de probabilidad normal bivariante

No es nada sencillo integrar la función de masa de probabilidad normal bivariante con el fin de calcular probabilidades. En su lugar para este fin algunos paquetes de software utilizan técnicas de integración numérica.

EJEMPLO 5.19 Muchos estudiantes que hacen solicitud para ingresar a la universidad presentan un examen de aptitudes que por muchos años consistió en tres secciones: Lectura crítica, Matemáticas y Redacción. Aunque algunas universidades utilizaban las tres secciones para determinar la admisión, muchas buscaban solamente las primeras dos (Lectura crítica y Matemáticas). Sean X y Y los resultados de Lectura crítica y Matemáticas, respectivamente, para un estudiante seleccionado al azar. De acuerdo con el sitio web de la junta directiva de la universidad la población de estudiantes que presentaron el examen en el otoño de 2012 tuvo las siguientes características: $\mu_1 = 496$, $\sigma_1 = 114$, $\mu_2 = 514$, $\sigma_2 = 117$.

Suponga que X y Y tienen (aproximadamente, dado que ambas variables son discretas) una distribución normal bivariante con un coeficiente de correlación $\rho = .25$ El paquete de software Matlab da $P(X \le 650, Y \le 650) = P$ (ambos valores son a lo más de 650) $= .8097$. ■

Dado que $X = x$ también se puede demostrar que la distribución condicional de Y es normal. Esto puede ser visto de manera geométrica cortando la superficie de densidad con un plano perpendicular a la (x, y) que pasa a través del valor de x en ese eje; el resultado es una curva normal trazada en el plano de corte. El valor de la media condicional es $\mu_{Y \cdot x} = (\mu_2 - \rho\mu_1\sigma_2/\sigma_1) + \rho\sigma_2 x/\sigma_1$, una función lineal de x, y la varianza condicional es $\sigma^2_{Y \cdot x} = (1 - \rho^2)\sigma_2^2$. Mientras más cerca esté el coeficiente de correlación a 1 o a -1 habrá una menor variabilidad en la distribución condicional. Se obtienen resultados análogos para la distribución condicional de X dado que $Y = y$.

La distribución normal bivariante puede generalizarse a la *distribución normal multivariante*. Su función de densidad es bastante complicada, y la única manera de escribirla de manera compacta es empleando notación de matrices. Si un conjunto de variables posee esta distribución, entonces la distribución marginal de cualquier variable individual es normal, la distribución condicional de cualquier variable individual dados los valores de las otras variables es normal, la distribución marginal conjunta de cualquier par de variables es normal bivariante y la distribución marginal conjunta de cualquier subconjunto de tres o más de las variables es otra vez multivariante normal.

EJERCICIOS Sección 5.2 (22-36)

22. Un instructor aplicó un corto examen compuesto de dos partes. Para un estudiante seleccionado al azar, sea X = el número de puntos obtenidos en la primera parte y Y = el número de puntos obtenidos en la segunda parte. Suponga que la función de masa de probabilidad conjunta de X y Y se da en la tabla adjunta.

$p(x, y)$		y = 0	5	10	15
	0	.02	.06	.02	.10
x	5	.04	.15	.20	.10
	10	.01	.15	.14	.01

a. Si la calificación anotada en la libreta de resultados es el número total de puntos obtenidos en ambas partes, ¿cuál es la calificación anotada esperada $E(X + Y)$?

b. Si se anota la mayor de las dos calificaciones, ¿cuál es la calificación anotada esperada?

23. La diferencia entre el número de clientes formados en la fila de la caja rápida y el número formado en la fila de la caja extrarrápida del ejercicio 3 es $X_1 - X_2$. Calcule la diferencia esperada.

24. Seis individuos, incluidos A y B, se sientan alrededor de una mesa circular de una forma completamente al azar. Suponga que los asientos están numerados $1, \ldots, 6$. Sea X = el número de asiento de A y Y = el número de asiento de B. Si A envía un mensaje escrito alrededor de la mesa a B en la dirección en la cual están más cerca, ¿cuántos individuos (incluidos A y B) esperaría que manipulen el mensaje?

25. Un topógrafo desea delimitar una región cuadrada con longitud de lado L. Sin embargo, debido a un error de medición, en su lugar delimita un rectángulo en el cual los lados norte–sur son de longitud X y los lados este–oeste son de longitud Y. Suponga que X y Y son independientes y que cada uno está uniformemente distribuido en el intervalo $[L - A, L + A]$ (donde $0 < A < L$). ¿Cuál es el área esperada del rectángulo resultante?

26. Considere un pequeño transbordador que puede transportar automóviles y autobuses. La cuota para automóviles es de \$3 y para autobuses es de \$10. Sean X y Y el número de automóviles y autobuses, respectivamente, transportados en un solo viaje. Suponga que la distribución conjunta de X y Y aparece en la tabla del ejercicio 7. Calcule el ingreso esperado en un solo viaje.

27. Ana y Álvaro acordaron encontrarse para desayunar entre el mediodía (0:00 p.m.) y la 1:00 p.m. Denote la hora de llegada de Ana por X, y la de Álvaro por Y y suponga que X y Y son independientes con funciones de densidad de probabilidad

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y & 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

¿Cuál es la cantidad de tiempo esperada que el primero en llegar debe aguardar a la otra persona? [*Sugerencia*: $h(X, Y) = |X - Y|$.]

28. Demuestre que si X y Y son variables aleatorias independientes, entonces $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$. Luego aplique esto en el ejercicio 25. [*Sugerencia*: Considere el caso continuo con $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$.]

29. Calcule el coeficiente de correlación ρ de X y Y del ejemplo 5.16 (ya se calculó la covarianza).

30. **a.** Calcule la covarianza de X y Y en el ejercicio 22.
b. Calcule ρ para X y Y en el mismo ejercicio.

31. **a.** Calcule la covarianza entre X y Y en el ejercicio 9.
b. Calcule el coeficiente de correlación ρ para X y Y.

32. Reconsidere las vidas útiles de los componentes de una minicomputadora X y Y como se describe en el ejercicio 12. Determine $E(XY)$. ¿Qué se puede decir sobre $\text{Cov}(X, Y)$ y ρ?

33. Use el resultado del ejercicio 28 para demostrar que cuando X y Y son independientes $\text{Cov}(X, Y) = \text{Corr}(X, Y) = 0$.

34. **a.** Recordando la definición de σ^2 para una sola variable aleatoria X, escriba una fórmula que sea apropiada para calcular la varianza de una función $h(X, Y)$ de dos variables aleatorias. [*Sugerencia*: Recuerde que la varianza es simplemente un valor esperado especial.]
b. Use esta fórmula para calcular la varianza de la calificación anotada $h(X, Y)$ $[= \max(X, Y)]$ en el inciso b) del ejercicio 22.

35. **a.** Use las reglas de valor esperado para demostrar que $\text{Cov}(aX + b, cY + d) = ac\ \text{Cov}(X, Y)$.
b. Use el inciso a) junto con las reglas de varianza y desviación estándar para demostrar que $\text{Corr}(aX + b, cY + d) = \text{Corr}(X, Y)$ cuando a y c tienen el mismo signo.
c. ¿Qué sucede si a y c tienen signos opuestos?

36. Demuestre que si $Y = aX + b$ $(a \neq 0)$, entonces $\text{Corr}(X, Y) = +1$ o -1. ¿En qué condiciones será $\rho = +1$?

5.3 Estadísticos y distribuciones

En el capítulo 1, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ denotaron las observaciones en una sola muestra. Considere seleccionar dos muestras diferentes de tamaño n de la misma distribución de población. Las x_i en la segunda muestra diferirán siempre virtualmente al menos un poco de aquellas en la primera muestra. Por ejemplo, una primera muestra de $n = 3$ automóviles de un tipo particular podría producir eficiencias de combustible $x_1 = 30.7$, $x_2 = 29.4$, $x_3 = 31.1$, mientras que una segunda muestra puede dar $x_1 = 28.8$, $x_2 = 30.0$ y $x_3 = 32.5$. Antes de obtener la información, existe incertidumbre sobre el valor de cada x_i. Debido a esta incertidumbre, *antes* de que los datos estén disponibles, cada observación se considera una variable aleatoria y la muestra se denota por $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (letras mayúsculas para variables aleatorias).

Esta variación en los valores observados implica a su vez que el valor de cualquier función de las observaciones muestrales tales como la media muestral, la desviación estándar muestral o la extensión de los cuartiles muestrales también varía de una muestra a otra. Es decir, antes de obtener $x_1, \ldots, x_n$, existe incertidumbre en cuanto al valor de $\bar{x}$, el valor de s, etcétera.

EJEMPLO 5.20 Suponga que la resistencia del material de un espécimen de un tipo particular, seleccionado al azar, tiene una distribución Weibull con valores de parámetro $\alpha = 2$ (forma) y $\beta = 5$ (escala). En la figura 5.6 se muestra la curva de densidad correspondiente. Las fórmulas de la sección 4.5 dan

$$\mu = E(X) = 4.4311 \quad \tilde{\mu} = 4.1628 \qquad \sigma^2 = V(X) = 5.365 \qquad \sigma = 2.316$$

La media excede a la mediana debido a la asimetría positiva de la distribución.

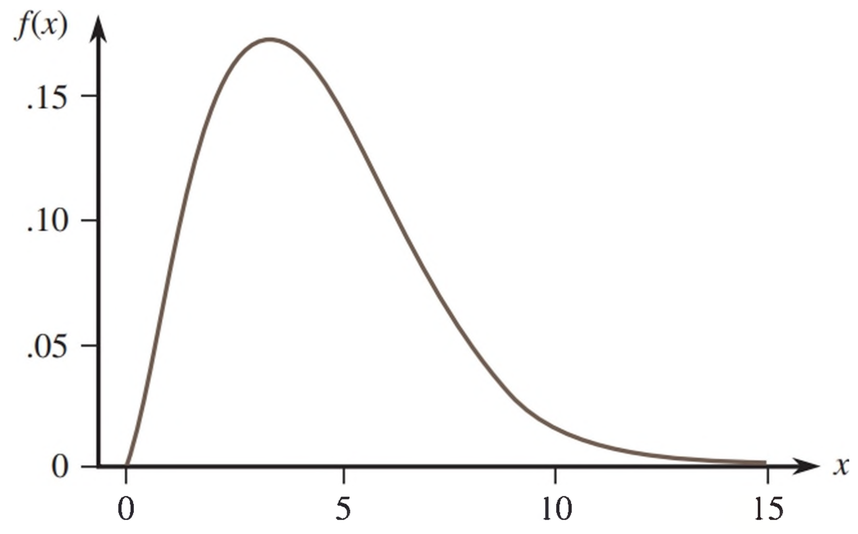


Figura 5.7 Curva de densidad Weibull del ejemplo 5.20

Se utilizó software estadístico para generar seis muestras diferentes, cada una con $n = 10$, de esta distribución (resistencias de material de seis diferentes grupos de diez especímenes cada uno). Los resultados se muestran en la tabla 5.1, seguidos de los valores de la media, la mediana y la desviación estándar de cada muestra. Observe en primer lugar que las diez observaciones en cualquier muestra particular son diferentes de aquellas en cualquier otra muestra. En segundo lugar, los seis valores de la media muestral son diferentes entre sí, como lo son los seis valores de la mediana muestral y los seis valores de la desviación estándar de la muestra. Lo mismo ocurre para las medias recortadas 10%, las distancias entre cuartos de las muestras, etcétera.

Tabla 5.1 Muestras de la distribución Weibull del ejemplo 5.19

Muestra	1	2	3	4	5	6
1	6.1171	5.07611	3.46710	1.55601	3.12372	8.93795
2	4.1600	6.79279	2.71938	4.56941	6.09685	3.92487
3	3.1950	4.43259	5.88129	4.79870	3.41181	8.76202
4	0.6694	8.55752	5.14915	2.49759	1.65409	7.05569
5	1.8552	6.82487	4.99635	2.33267	2.29512	2.30932
6	5.2316	7.39958	5.86887	4.01295	2.12583	5.94195
7	2.7609	2.14755	6.05918	9.08845	3.20938	6.74166
8	10.2185	8.50628	1.80119	3.25728	3.23209	1.75468
9	5.2438	5.49510	4.21994	3.70132	6.84426	4.91827
10	4.5590	4.04525	2.12934	5.50134	4.20694	7.26081
$\bar{x}$	4.401	5.928	4.229	4.132	3.620	5.761
$\bar{x}$	4.360	6.144	4.608	3.857	3.221	6.342
s	2.642	2.062	1.611	2.124	1.678	2.496

Además, el valor de la media de cualquier muestra puede ser considerado como *estimación puntual* (“puntual”porque es un solo número, que corresponde a un solo punto sobre la recta numérica) de la media de la población μ cuyo valor se sabe que es 4.4311. Ninguna de las estimaciones de estas seis muestras es idéntica a la que se está estimando. Las estimaciones de la segunda y sexta muestras son demasiado grandes, en tanto que la quinta da una subestimación sustancial. Asimismo, la desviación estándar muestral da una estimación puntual de la desviación estándar de la población. Las seis estimaciones resultantes están equivocadas al menos en una pequeña cantidad.

En resumen, los valores de las observaciones de las muestras individuales varían de una muestra a otra por lo que, en general, el valor de cualquier cantidad calculada a partir de los datos de la muestra, y el valor de una característica de la muestra utilizada como una estimación de la característica de la población correspondiente casi nunca coinciden con lo que se estimó. ■

DEFINICIÓN

> Un **estadístico** es cualquier cantidad cuyo valor puede ser calculado a partir de datos muestrales. Antes de obtener los datos hay incertidumbre respecto a qué valor de cualquier estadístico particular resultará. Por consiguiente, un estadístico es una variable aleatoria y será denotado por una letra mayúscula; para representar el valor calculado u observado del estadístico se utiliza una letra minúscula.

Por tanto, la media muestral, considerada como estadístico (antes de seleccionar una muestra o realizar un experimento), está denotada por $\bar{X}$; el valor calculado de este estadístico es $\bar{x}$. Del mismo modo, S representa la desviación estándar muestral considerada como estadístico y su valor calculado es s. Si se seleccionan muestras de dos tipos diferentes de ladrillos y las resistencias a la compresión individuales se denotan por $X_1, \ldots, X_m$

y $Y_1, \ldots, Y_n$, respectivamente, entonces el estadístico $\overline{X} - \overline{Y}$, la diferencia entre las dos resistencias a la compresión media de la muestra, a menudo es de gran interés.

Cualquier estadístico, por el hecho de ser una variable aleatoria, tiene una distribución de probabilidad. En particular, la media muestral $\overline{X}$ tiene una distribución de probabilidad. Suponga, por ejemplo, que $n = 2$ componentes se seleccionan al azar y que se determina, para cada uno, el número de descomposturas mientras se encuentran dentro del periodo de garantía. Los valores posibles de la cantidad media muestral de descomposturas $\overline{X}$ son 0 (si $X_1 = X_2 = 0$), .5 (si $X_1 = 0$ y $X_2 = 1$ o $X_1 = 1$ y $X_2 = 0$), 1, 1.5,... . La distribución de probabilidad de $\overline{X}$ especifica $P(\overline{X} = 0)$, $P(\overline{X} = .5)$ y así sucesivamente, a partir de las cuales otras probabilidades tales como $P(1 \leq \overline{X} \leq 3)$ y $P(\overline{X} \geq 2.5)$ pueden ser calculadas. Asimismo, si para una muestra de tamaño $n = 2$, los únicos valores posibles de la varianza muestral son 0, 12.5 y 50 (tal es el caso si X_1 y X_2 pueden tomar sólo los valores 40, 45 o 50), entonces la distribución de probabilidad de S^2 da $P(S^2 = 0)$, $P(S^2 = 12.5)$ y $P(S^2 = 50)$. La distribución de probabilidad de un estadístico en ocasiones se conoce como **distribución de muestreo** para enfatizar que describe cómo varía el valor del estadístico a través de todas las muestras que podrían ser seleccionadas.

Muestras aleatorias

La distribución de probabilidad de cualquier estadístico particular depende no sólo de la distribución de la población (normal, uniforme, etc.) y el tamaño de la muestra n, sino también del método de muestreo. Considere seleccionar una muestra de tamaño $n = 2$ de una población compuesta sólo por los tres valores 1, 5 y 10, y suponga que el estadístico de interés es la varianza muestral. Si el muestreo se realiza "con reemplazo" entonces resultará $S^2 = 0$ si $X_1 = X_2$. Sin embargo, S^2 no puede ser igual a 0 si el muestreo se realiza "sin reemplazo". Por tanto $P(S^2 = 0) = 0$ para un método de muestreo y esta probabilidad es positiva con el otro método. La siguiente definición describe un método de muestreo que se encuentra a menudo (por lo menos aproximadamente) en la práctica.

DEFINICIÓN

Se dice que las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ forman una **muestra aleatoria** (simple) de tamaño n si

1. Las X_i son variables aleatorias independientes.
2. Cada X_i tiene la misma distribución de probabilidad.

Las condiciones 1 y 2 pueden ser parafraseadas diciendo que las X_i son *independientes e idénticamente distribuidas* (iid). Si el muestreo se realiza con reemplazo o desde una población infinita (conceptual), las condiciones 1 y 2 se satisfacen con exactitud. Estas condiciones serán aproximadamente satisfechas si el muestreo se realiza sin reemplazo, aunque el tamaño n de la muestra es mucho más pequeño que el tamaño de la población N. En la práctica, si $n/N \leq .05$ (cuando mucho 5% de la población se muestrea), se puede proceder como si las X_i formaran una muestra aleatoria. La virtud de este método de muestreo es que la distribución de probabilidad de cualquier estadístico es más fácil de obtener que con cualquier otro método de muestreo.

Existen dos métodos generales para obtener información sobre una distribución de muestreo de un estadístico. Uno implica cálculos basados en reglas de probabilidad y el otro implica realizar un experimento de simulación.

Deducción de una distribución de muestreo

Se pueden utilizar reglas de probabilidad para obtener la distribución de un estadístico siempre que sea una función "bastante simple" de las X_i y que existan relativamente pocos valores X_i diferentes en la población o bien, que la distribución de la población tenga una forma "accesible". Los dos ejemplos siguientes ilustran tales situaciones.

EJEMPLO 5.21 Una cierta marca de reproductor MP3 se presenta en tres configuraciones: un modelo con 2 GB de memoria que cuesta $80, un modelo de 4 GB a un precio de $100 y una versión de 8 GB con un precio de $120. Si 20% de todos los compradores elige el modelo de 2 GB, 30% escoge el modelo de 4 GB, y 50% prefiere el modelo de 8 GB, entonces la distribución de probabilidad del costo X de una sola compra de un reproductor de MP3 seleccionado al azar está dada por

x	80	100	120
$p(x)$	.2	.3	.5

con $\mu = 106$, $\sigma^2 = 244$ **(5.2)**

Supongamos que en un día particular sólo se venden dos reproductores de MP3. Sean X_1 = los ingresos procedentes de la primera venta y X_2 = los ingresos de la segunda. Supongamos que X_1 y X_2 son independientes, cada uno con la distribución de probabilidad que se muestra en (5.2) [de manera que X_1 y X_2 constituyen una muestra aleatoria de la distribución (5.2)]. En la tabla 5.2 se enumeran posibles pares (x_1, x_2), la probabilidad de cada uno [calculada utilizando (5.2) y la suposición de independencia] y los valores resultantes de $\bar{x}$ y s^2. [Tenga en cuenta que cuando $n = 2$, $s_2 = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2$.] Ahora, para obtener la distribución de probabilidad $\bar{X}$, la muestra de los ingresos promedio por venta, tenemos que considerar cada posible valor de $\bar{x}$ y calcular su probabilidad. Por ejemplo, $\bar{x} = 100$ aparece tres veces en la tabla con probabilidades de .10, .09 y .10, por lo que

$$p_{\bar{X}}(100) = P(\bar{X} = 100) = .10 + .09 + .10 = .29$$

Asimismo,

$$p_{S^2}(800) = P(S^2 = 800) = P(X_1 = 80, X_2 = 120 \text{ o } X_1 = 120, X_2 = 80$$
$$= .10 + .10 = .20$$

Tabla 5.2 Resultados, probabilidades y valores de $\bar{x}$ y s_2 en el ejemplo 5.20

x_1	x_2	$p(x_1, x_2)$	$\bar{x}$	s^2
80	80	.04	80	0
80	100	.06	90	200
80	120	.10	100	800
100	80	.06	90	200
100	100	.09	100	0
100	120	.15	110	200
120	80	.10	100	800
120	100	.15	110	200
120	120	.25	120	0

Las distribuciones de muestreo completas de $\bar{X}$ y S^2 aparecen en (5.3) y (5.4).

$\bar{x}$	80	90	100	110	120
$P_{\bar{X}}(\bar{x})$	.04	.12	.29	.30	.25

(5.3)

s^2	0	200	800
$Ps^2(s^2)$	.38	.42	.20

(5.4)

La figura 5.8 ilustra un histograma de probabilidad tanto de la distribución original (5.2) como de la distribución $\bar{X}$ (5.3). La figura sugiere primero que la media (valor esperado) de la distribución $\bar{X}$ es igual a la media 106 de la distribución original, puesto que ambos histogramas parecen estar centrados en el mismo lugar.

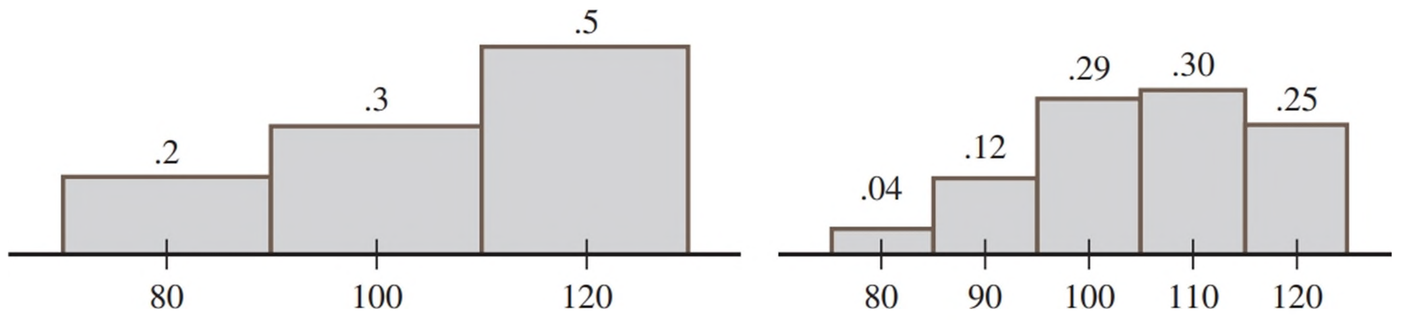


Figura 5.8 Histogramas de probabilidad de la distribución subyacente y distribución $\overline{X}$, en el ejemplo 5.21

De acuerdo con (5.3),

$$\mu_{\overline{X}} = E(\overline{X}) = \Sigma \overline{x} p_{\overline{X}}(\overline{x}) = (80)(.04) + \cdots + (120)(.25) = 106 = \mu$$

En segundo lugar, parece que la distribución $\overline{X}$ tiene una dispersión más pequeña (variabilidad) que la distribución original, puesto que la masa de probabilidad se movió hacia la media. Nuevamente, de acuerdo con (5.3),

$$\begin{aligned}\sigma^2_{\overline{X}} &= V(\overline{X}) = \Sigma \overline{x}^2 \cdot p_{\overline{X}}(\overline{x}) - \mu^2_{\overline{X}} \\ &= (80^2)(.04) + \cdots + (120^2)(.25) - (106)^2 \\ &= 122 = 244/2 = \sigma^2/2\end{aligned}$$

La varianza de $\overline{X}$ es precisamente la mitad de la varianza original (porque $n = 2$).

Utilizando (5.4) la media de S^2 es

$$\begin{aligned}\mu_{S^2} = E(S^2) &= \sum s^2 \cdot p_{S^2}(s^2) \\ &= (0)(.38) + (200)(.42) + (800)(.20) = 244 = \sigma^2\end{aligned}$$

Es decir, la distribución de muestreo $\overline{X}$ tiene su centro en la media de la población μ y la distribución de muestreo S^2 está centrada en la varianza de la población σ^2.

Si se hubieran realizado cuatro compras en el día de interés, el ingreso promedio muestral $\overline{X}$ estaría basado en una muestra aleatoria de cuatro X_i, cada una con la distribución (5.2). Más cálculo a la larga da la función de masa de probabilidad de $\overline{X}$ para $n = 4$ como

$\overline{x}$	80	85	90	95	100	105	110	115	120
$p_{\overline{X}}(\overline{x})$	.0016	.0096	.0376	.0936	.1761	.2340	.2350	.1500	.0625

De acuerdo con esto, $\mu_{\overline{X}} = 106 = \mu$ y $\sigma^2_{\overline{X}} = 61 = \sigma^2/4$. La figura 5.8 es un histograma de probabilidad de esta función de masa de probabilidad.

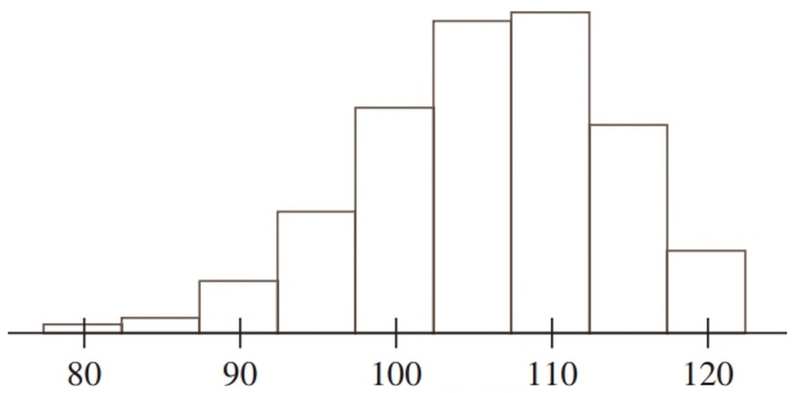


Figura 5.9 Histograma de probabilidad de $\overline{X}$ basado en $n = 4$ en el ejemplo 5.21 ■

El ejemplo 5.21 sugiere primeramente que los cálculos de $p_{\overline{X}}(\overline{x})$ y $ps^2(s^2)$ pueden ser tediosos. Si la distribución original (5.2) hubiera permitido más de tres valores posibles, incluso con $n = 2$ los cálculos habrían sido más complicados. El ejemplo también sugiere, sin embargo, que existen algunas relaciones generales entre $E(\overline{X})$, $V(\overline{X})$, $E(S^2)$ y la media μ y la varianza σ^2 de la distribución original. Estas se formulan en la siguiente sección. Ahora, considere un ejemplo en el cual la muestra aleatoria se saca de una distribución continua.

EJEMPLO 5.22 El tiempo de servicio para un tipo de transacción bancaria es una variable aleatoria con distribución exponencial y parámetro λ. Suponga que X_1 y X_2 son tiempos de servicio para dos clientes diferentes, supuestamente independientes entre sí. Considere el tiempo de servicio total $T_o = X_1 + X_2$ para ambos clientes y también un estadístico. La función de distribución acumulativa de T_o con $t \geq 0$, es

$$F_{T_0}(t) = P(X_1 + X_2 \leq t) = \iint_{\{(x_1, x_2):\, x_1 + x_2 \leq t\}} f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$$

$$= \int_0^t \int_0^{t-x_1} \lambda e^{-\lambda x_1} \cdot \lambda e^{-\lambda x_2}\, dx_2\, dx_1 = \int_0^t [\lambda e^{-\lambda x_1} - \lambda e^{-\lambda t}]\, dx_1$$

$$= 1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t}$$

La región de integración se muestra en la figura 5.9.

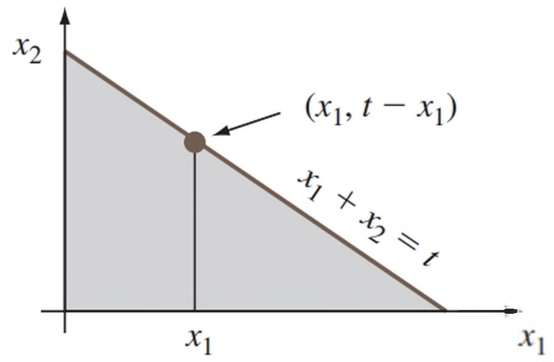


Figura 5.10 Región de integración para obtener la función de distribución acumulada de T_o en el ejemplo 5.22

La función de densidad de probabilidad de T_o se obtiene diferenciando $F_{T_o}(t)$:

$$f_{T_o}(t) = \begin{cases} \lambda^2 t e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{5.5}$$

Esta es una función de densidad de probabilidad gamma ($\alpha = 2$ y $\beta = 1/\lambda$). La función de densidad de probabilidad de $\overline{X} = T_o/2$ se obtiene a partir de la relación $\{\overline{X} \leq \overline{x}\}$ si y sólo si $\{T_o \leq 2\overline{x}\}$ como

$$f_{\overline{X}}(\overline{x}) = \begin{cases} 4\lambda^2 \overline{x} e^{-2\lambda \overline{x}} & \overline{x} \geq 0 \\ 0 & \overline{x} < 0 \end{cases} \tag{5.6}$$

La media y la varianza de la distribución exponencial subyacente son $\mu = 1/\lambda$ y $\sigma^2 = 1/\lambda^2$. Con las expresiones (5.5) y (5.6) se puede verificar que $E(\overline{X}) = 1/\lambda$, $V(\overline{X}) = 1/(2\lambda^2)$, $E(T_o) = 2/\lambda$ y $V(T_o) = 2/\lambda^2$. Estos resultados sugieren de nuevo algunas relaciones generales entre medias y varianzas de $\overline{X}$, T_o y la distribución subyacente. ■

Experimentos de simulación

El segundo método de obtener información sobre distribución de muestreo de un estadístico es realizar un experimento de simulación. Este método casi siempre se utiliza cuando una derivación mediante reglas de probabilidad es demasiado difícil o complicada de realizar. Dicho experimento virtualmente siempre se realiza con la ayuda de una computadora. Las siguientes características de un experimento deben ser especificadas:

1. El estadístico de interés ($\overline{X}$, S, una media recortada particular, etc.)
2. La distribución de la población (normal con $\mu = 100$ y $\sigma = 15$, uniforme con límite inferior $A = 5$ y límite superior $B = 10$, etc.)
3. El tamaño de la muestra n (p. ej., $n = 10$ o $n = 50$)
4. El número de réplicas k (número de muestras que serán obtenidas)

Luego se utiliza una computadora para obtener k diferentes muestras aleatorias, cada una de tamaño n, de la distribución de población designada. Para cada una de las muestras calcule el valor del estadístico y construya un histograma de los k valores. Este histograma da la distribución de muestreo *aproximada* del estadístico. Mientras más grande sea el valor de k, tenderá a ser mejor la aproximación (la distribución de muestreo real emerge a medida que $k \to \infty$). En la práctica, $k = 500$ o 1000 casi siempre es suficiente si el estadístico es "bastante simple".

EJEMPLO 5.22 La distribución de la población del primer estudio de simulación es normal con $\mu = 8.25$ y $\sigma = .75$, como se ilustra en la figura 5.10. [El artículo **"Platelet Size in Myocardial Infarction" (*British Med. J.*, 1983: 449–451)** sugiere esta distribución de volumen de plaquetas en individuos sin ningún historial clínico de problemas cardiacos serios.]

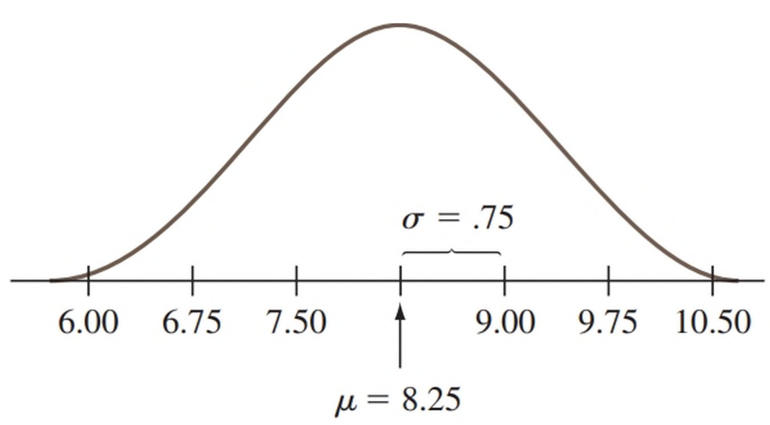


Figura 5.11 Distribución normal, con $\mu = 8.25$ y $\sigma = .75$

En realidad se realizaron cuatro experimentos diferentes, con 500 réplicas por cada uno. En el primero se generaron 500 muestras de $n = 5$ observaciones, cada una con Minitab y los tamaños de las otras tres muestras fueron $n = 10$, $n = 20$ y $n = 30$, respectivamente. La media muestral se calculó para cada muestra y los histogramas resultantes de valores $\bar{x}$ aparecen en la figura 5.11.

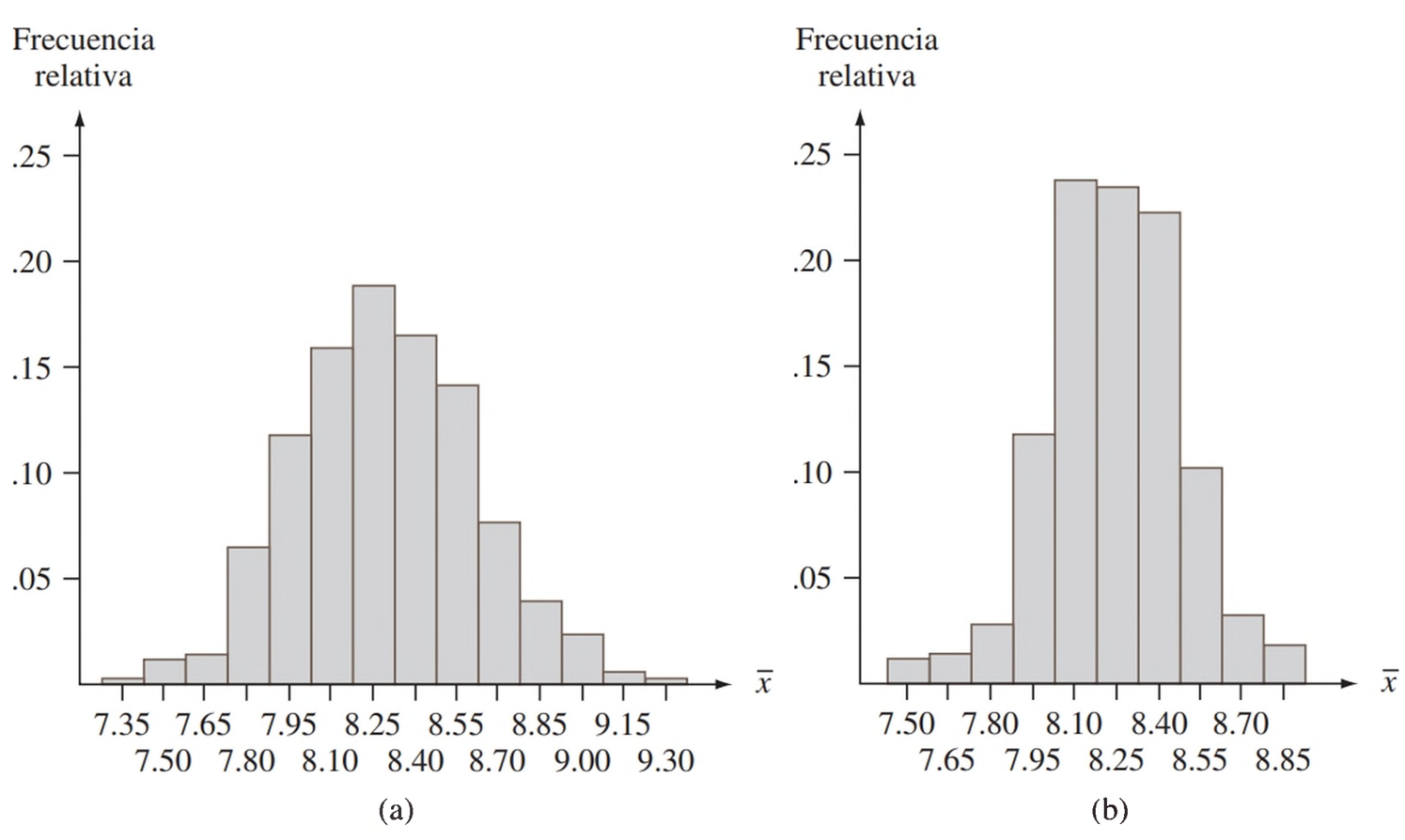


Figura 5.12 Histogramas muestrales de $\bar{x}$ basados en 500 muestras, cada una compuesto de n observaciones: (a) $n = 5$; (b) $n = 10$; (c) $n = 20$; (d) $n = 30$

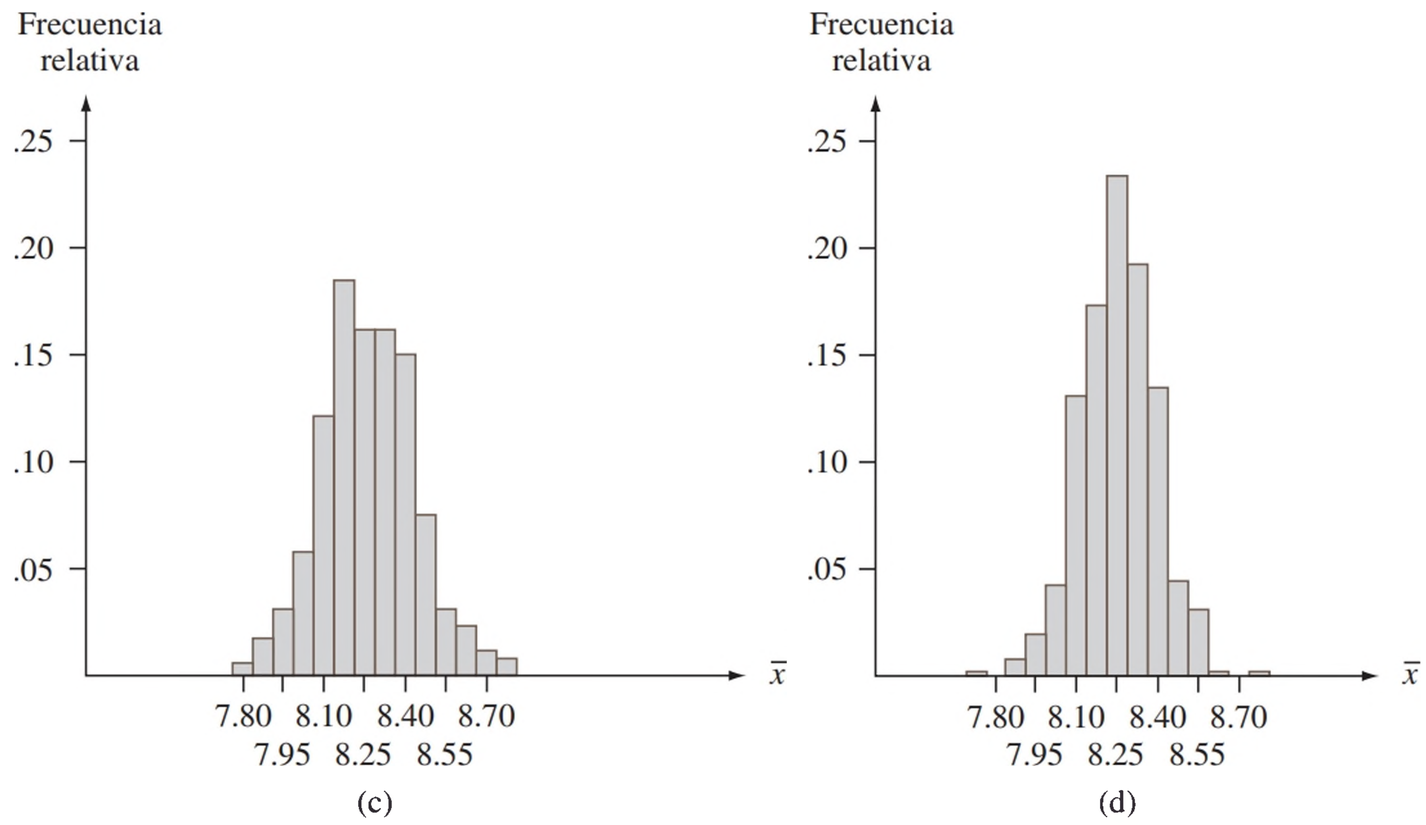


Figura 5.12 (continuación)

Lo primero que se nota en relación con los histogramas es su forma. Con una aproximación razonable cada uno de los cuatro se ve como una curva normal. El parecido sería aún más impactante si cada histograma se hubiera basado en mucho más de 500 valores $\bar{x}$. En segundo lugar, cada histograma está centrado aproximadamente en 8.25, la media de la población muestreada. Si los histogramas se hubieran basado en una secuencia interminable de valores $\bar{x}$, sus centros habrían sido exactamente la media de la población, 8.25.

El aspecto final del histograma es su dispersión uno respecto al otro. Mientras más grande es el valor de n, más concentrada está la distribución muestral sobre la media. Por ello los histogramas con $n = 20$ y $n = 30$ están basados en intervalos de clase más angostos que aquellos para los dos tamaños de muestra más pequeños. Con los tamaños de muestra más grandes, la mayoría de los valores $\bar{x}$ están bastante cerca de 8.25. Este es el efecto de promediar. Cuando n es pequeño, un solo valor inusual x puede dar por resultado un valor $\bar{x}$ alejado del centro. Con un tamaño de muestra grande, cualesquiera valores inusuales x, cuando se promedian con los demás valores muestrales, seguirán tendiendo a producir un valor $\bar{x}$ próximo a μ. Al combinar estas percepciones se obtiene un resultado muy apegado a su intuición: **$\bar{X}$ basado en un n grande tiende a acercarse más a μ que $\bar{X}$ basado en un n pequeño.** ■

EJEMPLO 5.24 Considere un experimento de simulación en el cual la distribución de la población es bastante asimétrica. La figura 5.13 muestra la curva de densidad de las vidas útiles de un

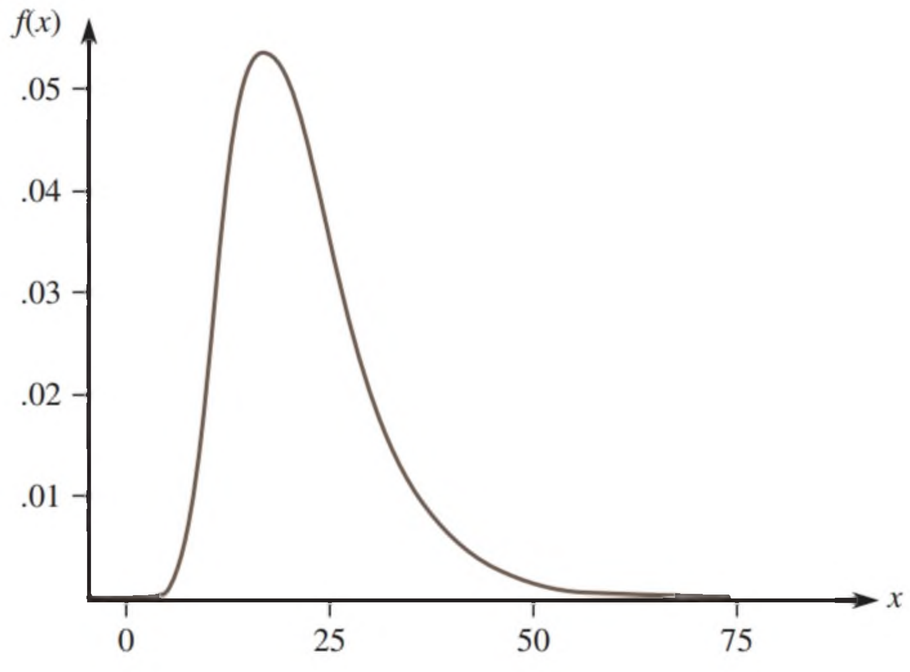


Figura 5.13 Curva de densidad del experimento de simulación del ejemplo 5.24 [$E(X) = 21.7584$, $V(X) = 82.1449$]

tipo de control electrónico [esta es en realidad una distribución lognormal con $E(\ln(X)) = 3$ y $V(\ln(X)) = .16$]. De nueva cuenta el estadístico de interés es la media muestral $\overline{X}$. El experimento utilizó 500 réplicas y consideró los mismos cuatro tamaños de muestra que en el ejemplo 5.23. Los histogramas resultantes junto con una curva de probabilidad normal generada por Minitab con los 500 valores $\overline{x}$ basados en $n = 30$ se muestran en la figura 5.14.

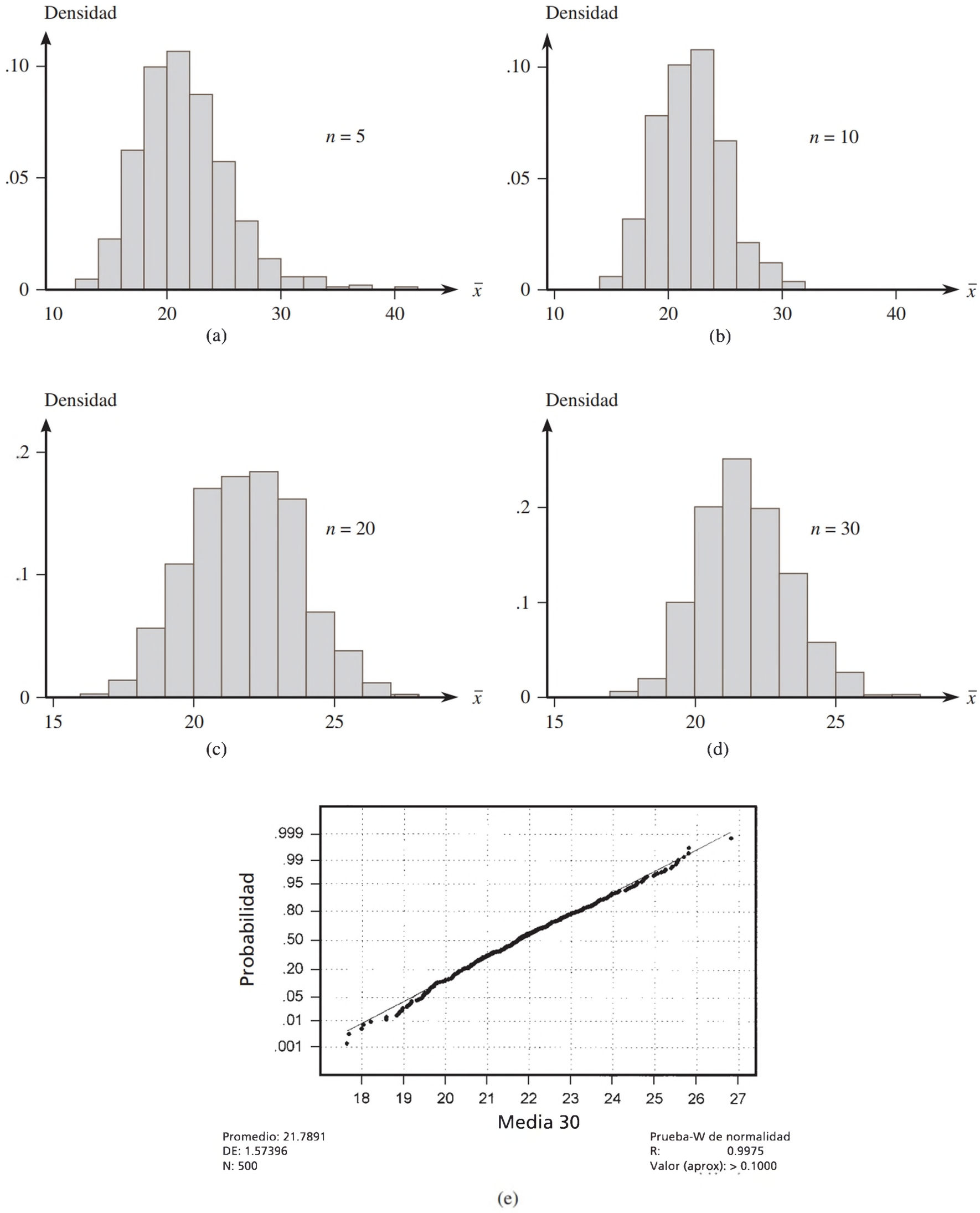


Figura 5.14 Resultados del experimento de simulación del ejemplo 5.24: (a) histograma de $\overline{x}$ con $n = 5$; (b) histograma de $\overline{x}$ con $n = 10$; (c) histograma de $\overline{x}$ con $n = 20$; (d) histograma de $\overline{x}$ con $n = 30$; (e) curva de probabilidad normal con $n = 30$ (generados por Minitab)

A diferencia del caso normal estos histogramas difieren en cuanto a forma. En particular, se vuelven progresivamente menos asimétricos a medida que el tamaño de la muestra n se incrementa. El promedio de los 500 valores $\bar{x}$ con los cuatro tamaños de muestra diferentes se aproxima bastante a la media de la distribución de la población. Si cada histograma se hubiera basado en una secuencia interminable de valores $\bar{x}$ en lugar de en 500 solamente, los cuatro habrían tenido su centro en exactamente 21.7584. Por tanto, los valores diferentes de n cambian la forma mas no el centro de la distribución de muestreo de $\bar{X}$. La comparación de los cuatro histogramas en la figura 5.14 también muestra que conforme n se incrementa la dispersión de los histogramas decrece. El incremento de n produce un mayor grado de concentración en torno a la media de la población y hace que el histograma se vea más como una curva normal. El histograma de la figura 5.14(d) y la curva de probabilidad normal en la figura 5.14(e) proporcionan una evidencia convincente de que un tamaño de muestra $n = 30$ es suficiente para superar la asimetría de la distribución de la población y para producir una distribución de muestreo $\bar{X}$ aproximadamente normal. ■

EJERCICIOS Sección 5.3 (37-45)

37. Una marca particular de jabón para una lavaplatos vende tres tamaños de paquetes: 25 oz, 40 oz y 65 oz. Veinte por ciento de todos los compradores selecciona la caja de 25 oz, 50% selecciona una caja de 40 oz y el restante 30% selecciona la caja de 65 oz. Sean X_1 y X_2 los tamaños de paquete seleccionados por dos compradores seleccionados independientemente.

a. Determine la distribución de muestreo de $\bar{X}$, calcule $E(\bar{X})$ y compare con μ.

b. Determine la distribución de muestreo de la varianza muestral S^2, calcule $E(S^2)$ y compare con σ^2.

38. Hay dos semáforos en mi camino de ida y vuelta al trabajo. Sea X_1 el número de semáforos en los cuales me tengo que detener de ida al trabajo y sea X_2 el número de semáforos en los cuales me tengo que detener de regreso a casa. Suponga que estas dos variables son independientes cada una con una función de masa de probabilidad que se presenta en la siguiente tabla (de modo que X_1, X_2 es una muestra aleatoria de tamaño $n = 2$).

x_1	0	1	2
$p(x_1)$	.2	.5	.3

$\mu = 1.1, \sigma^2 = .49$

a. Sea $T_o = X_1 + X_2$ y determine la función de masa de probabilidad.

b. Calcule μ_{T_o}. ¿Cómo se relaciona con μ la media de la población?

c. Calcule $\sigma^2_{T_o}$. ¿Cómo se relaciona con σ^2, la varianza de la población?

d. Sean X_3 y X_4 el número de luces que se requieren en una parada durante la conducción hacia el trabajo y de regreso por segundo día consecutivo, suponiendo que es independiente de la primera jornada. Con T_o = la suma de todos los cuatro X_i, ¿cuáles son ahora los valores de $E(T_o)$ y $V(T_o)$?

e. De nuevo, respecto a d), ¿cuáles son los valores de $P(T_o = 8)$ y $P(T_o \geq 7)$? [*Sugerencia*: ¡No intente incluir todos los resultados posibles!]

39. Se sabe que 80% de todos los discos de almacenamiento extraíbles funcionan satisfactoriamente durante el periodo de garantía (son "éxitos"). Suponga que se seleccionan al azar $n = 10$ unidades de disco. Sea X = el número de éxitos en la muestra. El estadístico X/n es la proporción de la muestra (fracción) de éxitos. Obtenga la distribución muestral de este estadístico. [*Sugerencia*: Un posible valor de X/n es .2, correspondiente a $X = 3$. ¿Cuál es la probabilidad de este valor (qué clase de variable aleatoria es X)?]

40. Una caja contiene diez sobres sellados numerados $1, \ldots, 10$. Los primeros cinco no contienen dinero, cada uno de los siguientes tres contiene \$5 y hay un billete de \$10 en cada uno de los últimos dos. Se selecciona un tamaño de muestra de 3 *con* reemplazo (así que se tiene una muestra aleatoria) y se obtiene la cantidad más grande en cualquiera de los sobres seleccionados. Si X_1, X_2 y X_3 denotan las cantidades en los sobres seleccionados, el estadístico de interés es M = el máximo de X_1, X_2 y X_3.

a. Obtenga la distribución de probabilidad de este estadístico.

b. Describa cómo realizaría un experimento de simulación para comparar las distribuciones de M con varios tamaños de muestra. ¿Cómo piensa que cambiará la distribución a medida que n se incrementa?

41. Sea X el número de paquetes enviados por un cliente seleccionado al azar mediante una compañía de paquetería y mensajería. Suponga que la distribución de X es como sigue:

x	1	2	3	4
$p(x)$	.4	.3	.2	.1

a. Considere una muestra aleatoria de tamaño $n = 2$ (dos clientes) y sea $\bar{X}$ la media muestral del número de paquetes enviados. Obtenga la distribución de probabilidad de $\bar{X}$.

b. Remítase al inciso a) y calcule $P(\bar{X} \leq 2.5)$.

c. De nuevo considere una muestra aleatoria de tamaño $n = 2$, pero ahora enfóquese en el estadístico R = el rango muestral (diferencia entre los valores más grande y más pequeño

en la muestra). Obtenga la distribución de R. [*Sugerencia*: Calcule el valor de R para cada resultado y use las probabilidades del inciso a).]

d. Si se selecciona una muestra aleatoria de tamaño $n = 4$, ¿cuál es $P(\overline{X} \leq 1.5)$? [*Sugerencia*: No tiene que dar todos los resultados posibles, sólo aquellos para los cuales $\overline{x} \leq 1.5$.]

42. Una compañía mantiene tres oficinas en una región, cada una manejada por dos empleados. Enseguida se muestra información concerniente a los salarios anuales (en miles de dólares):

Oficina	1	1	2	2	3	3
Empleado	1	2	3	4	5	6
Salario	29.7	33.6	30.2	33.6	25.8	29.7

a. Suponga que dos de estos empleados se seleccionan al azar de entre los seis (sin reemplazo). Determine la distribución muestral del salario medio muestral $\overline{X}$.

b. Suponga que se selecciona al azar una de las tres oficinas. Sean X_1 y X_2 los salarios de los empleados. Determine la distribución muestral de $\overline{X}$.

c. ¿Cómo se compara $E(\overline{X})$ de los incisos a) y b) con el salario medio de la población μ?

43. Suponga que la cantidad de líquido despachada por una máquina está uniformemente distribuida con límite inferior $A = 8$ oz y límite superior $B = 10$ oz. Describa cómo realizaría experimentos de simulación para comparar la distribución muestral de la extensión de los cuartiles muestrales con tamaños de muestra $n = 5$, 10, 20 y 30.

44. Realice un experimento de simulación con un paquete de computadora estadístico u otro programa para estudiar la distribución muestral de $\overline{X}$ cuando la distribución de la población es de Weibull con $\alpha = 2$ y $\beta = 5$, como en el ejemplo 5.20. Considere los cuatro tamaños de muestra $n = 5$, 10, 20 y 30 y en cada caso utilice 1000 réplicas. ¿Con cuál de estos tamaños de muestra la distribución muestral $\overline{X}$ parece ser aproximadamente normal?

45. Realice un experimento de simulación con un paquete de computadora estadístico u otro programa para estudiar la distribución muestral de $\overline{X}$ cuando la distribución de la población es lognormal con $E(\ln(X)) = 3$ y $V(\ln(X)) = 1$. Considere los cuatro tamaños de muestra $n = 10$, 20, 30 y 50 y en cada caso utilice 1000 réplicas. ¿Con cuál de estos tamaños de muestra la distribución muestral $\overline{X}$ parece ser aproximadamente normal?

5.4 Distribución de la media muestral

La importancia de la media muestral $\overline{X}$ proviene de su uso al sacar conclusiones sobre la media de la población μ. Algunos de los procedimientos inferenciales que se utilizan con mayor frecuencia están basados en las propiedades de la distribución muestral de $\overline{X}$. Un examen previo de estas propiedades apareció en los cálculos y experimentos de simulación de la sección anterior, donde se observaron las relaciones entre $E(\overline{X})$ y μ y también entre $V(\overline{X})$, σ^2 y n.

PROPOSICIÓN

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución con media μ y desviación estándar σ. Por tanto,

1. $E(\overline{X}) = \mu_{\overline{X}} = \mu$

2. $V(\overline{X}) = \sigma^2_{\overline{X}} = \sigma^2/n$ y $\sigma_{\overline{X}} = \sigma/\sqrt{n}$

Además, con $T_o = X_1 + \cdots + X_n$ (el total de la muestra), $E(T_o) = n\mu$, $V(T_o) = n\sigma^2$ y $\sigma_{T_o} = \sqrt{n}\sigma$.

Las demostraciones de estos resultados se analizan en la siguiente sección. De acuerdo con el resultado 1 la distribución (es decir, la probabilidad) muestral de $\overline{X}$ está centrada precisamente en la media de la población de la cual se seleccionó la muestra. El resultado 2 muestra que la distribución $\overline{X}$ se concentra más en torno a μ a medida que se incrementa el tamaño n de la muestra. En un marcado contraste, la distribución de T_o se dispersa más a medida que n se incrementa. Al promediar la probabilidad se mueve hacia la parte media, en tanto que al totalizar la probabilidad se dispersa sobre un rango cada vez más amplio de valores. La desviación estándar $\sigma_{\overline{X}} = \sigma/\sqrt{n}$ es a menudo llamada **error estándar de la media**; este describe la magnitud de una desviación típica o representativa de la media muestral respecto de la media poblacional.

EJEMPLO 5.25 En una prueba de fatiga por tensión con un espécimen de titanio, el número esperado de ciclos hasta la primera emisión acústica (utilizada para indicar la iniciación del agrietamiento) es $\mu = 28\,000$, y la desviación estándar del número de ciclos es $\sigma = 5000$. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_{25}$ una muestra aleatoria de tamaño 25, donde cada X_i es el número de ciclos en un espécimen diferente seleccionado al azar. Entonces el valor esperado de la media muestral del número de ciclos hasta la primera emisión es $E(\overline{X}) = \mu = 28\,000$ y el número total esperado de ciclos para los 25 especímenes es $E(T_0) = n\mu = 25(28\,000) = 700\,000$. La desviación estándar de $\overline{X}$ (error estándar de la media) y de T_0 son

$$\sigma_{\overline{X}} = \sigma/\sqrt{n} = \frac{5000}{\sqrt{25}} = 1000$$

$$\sigma_{T_o} = \sqrt{n}\sigma = \sqrt{25}(5000) = 25\,000$$

Si el tamaño de la muestra se incrementa a $n = 100$, $E(\overline{X})$ no cambió, pero $\sigma_{\overline{X}} = 500$, la mitad de su valor previo (el tamaño de muestra debe ser cuadruplicado para reducir a la mitad la desviación estándar de $\overline{X}$).

El caso de una distribución de población normal

El experimento de simulación del ejemplo 5.23 indica que cuando la distribución de la población es normal, cada histograma de valores $\overline{x}$ se aproxima muy bien mediante una curva normal.

PROPOSICIÓN

> Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución *normal* con media μ y desviación estándar σ. Entonces con *cualquier* n, $\overline{X}$ está normalmente distribuida (con media μ y desviación estándar $\sigma/\sqrt{n}$), como T_o (con media $n\mu$ y desviación estándar $\sqrt{n}\,\sigma$).*

Se sabe todo lo que se tiene que saber sobre las distribuciones $\overline{X}$ y T_o cuando la distribución de la población es normal. En particular, probabilidades tales como $P(a \le \overline{X} \le b)$ y $P(c \le T_o \le d)$ se obtienen simplemente estandarizando. La figura 5.14 ilustra la proposición.

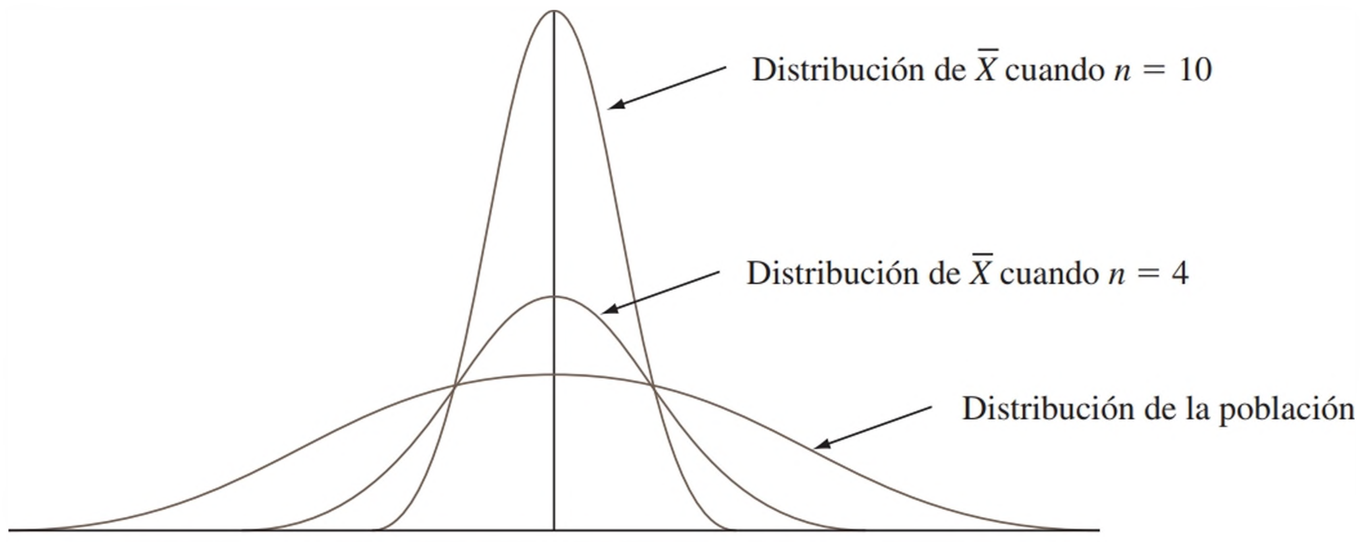


Figura 5.15 Distribución de la población normal y distribuciones muestrales $\overline{X}$

* Una prueba del resultado para T_o cuando $n = 2$ es posible si se utiliza el método del ejemplo 5.22, pero los detalles son complicados. El resultado general casi siempre se comprueba mediante una herramienta teórica llamada *función generadora de momentos*. Para más información se puede consultar una de las referencias del capítulo.

EJEMPLO 5.26 La distribución del peso de los huevos (g) de un cierto tipo es normal y tiene una media de 53 y una desviación estándar de .3 (consistente con los datos en el artículo **"Evaluation of Egg Quality Traits of Chickens Reared under Backyard System in Western Uttar Pradesh" (*Indian J. Of Poultry Sci.*, 2009: 261-262)**). Sean $X_1, X_2, \ldots, X_{12}$ los pesos de una docena de huevos seleccionados al azar; suponiendo que las X_i son una muestra aleatoria de tamaño de 12 a partir de la distribución normal especificada.

El peso total de los 12 huevos es $T_o = X_1 + \cdots + X_{12}$; está distribuido de forma normal y tiene una media con valor $E(T_o) = n\mu = 12(53) = 636$ y una varianza de $V(T_o) = n\sigma^2 = 12(.3)^2 = 1.08$. La probabilidad de que el peso total se encuentre entre 635 y 640 se obtiene ahora estandarizando y refiriéndose a la tabla A.3 del apéndice:

$$P(635 < T_o < 640) = \left(\frac{635 - 636}{\sqrt{1.08}} < Z < \frac{640 - 636}{\sqrt{1.08}}\right) = P(-.96 < Z < 3.85)$$
$$= \Phi(3.85) - \Phi(-.96) \approx 1 - .1685 = .8315$$

Si se seleccionan de manera repetida los paquetes con una docena de huevos, en la corrida corta ligeramente más de 83% de los huevos en un paquete tendrá un peso total de entre 635 y 640 g. Note que $635 < T_o < 640$ es equivalente a $52.9167 < \overline{X} < 53.3333$ (divida entre 12 cada término en el sistema origina de inequidades). Por tanto $P(52.9167 < \overline{X} < 53.3333) \approx .8315$. Esta última probabilidad también puede obtenerse estandarizando $\overline{X}$ directamente.

Ahora considere seleccionar al azar justo cuatro de estos huevos. La media del peso de la muestra $\overline{X}$ se distribuye entonces de manera normal con una media $\mu_{\overline{X}} = \mu = 53$ y una desviación estándar $\sigma_{\overline{X}} = \sigma/\sqrt{n} = .3/\sqrt{4} = .15$. La probabilidad de que la media de la muestra exceda 5.35 g es entonces

$$P(\overline{X} > 53.5) = P\left(Z > \frac{53.5 - 53}{.15}\right)$$
$$= P(Z > 3.33) = 1 - \Phi(3.33) = 1 - .9996 = .0004$$

Debido a que 53.5 es 3.333 desviaciones estándar (de $\overline{X}$) más grande que la media de 53, es muy improbable que la media de la muestra exceda de 53.5. ■

Teorema del límite central

Cuando las X_i están normalmente distribuidas, también lo está $\overline{X}$ para cada tamaño de muestra n. Las deducciones del ejemplo 5.21 y el experimento de simulación del ejemplo 5.24 sugieren que, incluso cuando la distribución de la población es altamente no normal, el cálculo de promedios produce una distribución más acampanada que la que está siendo muestreada. Una conjetura razonable es que si n es grande, una curva normal apropiada representará de forma más o menos aproximada la distribución real de $\overline{X}$. El planteamiento formal de este resultado es el más importante teorema de probabilidad.

TEOREMA

Teorema del límite central (TLC)

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución con media μ y varianza σ^2. Por tanto, si n es suficientemente grande, $\overline{X}$ tiene aproximadamente una distribución normal con $\mu_{\overline{X}} = \mu$ y $\sigma^2_{\overline{X}} = \sigma^2/n$ y T_o también tiene aproximadamente una distribución normal con $\mu_{T_o} = n\mu$, $\sigma^2_{T_o} = n\sigma^2$. Mientras más grande es el valor de n, mejor es la aproximación.

La figura 5.16 ilustra el teorema del límite central. De acuerdo con el TLC, cuando n es grande y se desea calcular una probabilidad como $P(a \leq \overline{X} \leq b)$, lo único que se requiere

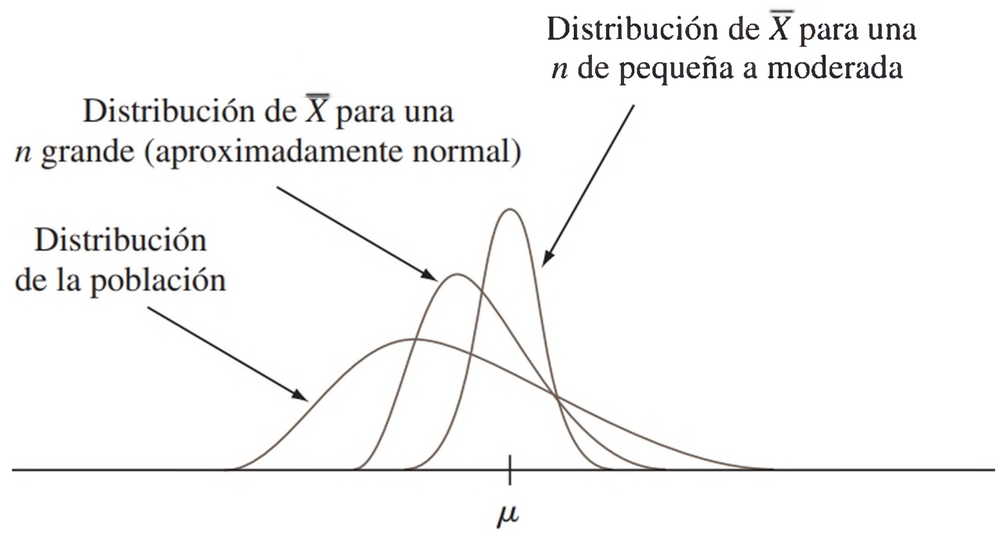


Figura 5.16 Teorema del límite central ilustrado

es "suponer" que $\overline{X}$ es normal, estandarizarla y utilizar la tabla normal. La respuesta resultante será aproximadamente correcta. Se podría obtener la respuesta correcta determinando primero la distribución de $\overline{X}$, así que el TLC proporciona un atajo verdaderamente impresionante. La comprobación del teorema implica muchas matemáticas avanzadas.

EJEMPLO 5.27 La cantidad de una impureza particular en un lote de cierto producto químico es una variable aleatoria con media de 4.0 g y desviación estándar de 1.5 g. Si se preparan 50 lotes de forma independiente, ¿cuál es la probabilidad (aproximada) de que la cantidad promedio muestral de la impureza $\overline{X}$ esté entre 3.5 y 3.8 g? De acuerdo con la regla empírica que se formulará en breve, $n = 50$ es suficientemente grande como para que el TLC sea aplicable. En ese caso $\overline{X}$ tiene aproximadamente una distribución normal con media $\mu_{\overline{X}} = 4.0$ y $\sigma_{\overline{X}} = 1.5/\sqrt{50} = .2121$, por tanto

$$P(3.5 \le \overline{X} \le 3.8) \approx P\left(\frac{3.5 - 4.0}{.2121} \le Z \le \frac{3.8 - 4.0}{.2121}\right)$$
$$= \Phi(-.94) - \Phi(-2.36) = .1645$$

Ahora considere seleccionar al azar 100 lotes, y sea T_o la cantidad total de impurezas en estos lotes. Entonces la media y la desviación estándar de T_o será $100(4) = 400$ y $\sqrt{100}(1.5) = 15$, respectivamente, y la TLC implica que T_0 tiene aproximadamente una distribución normal. La probabilidad de que este total sea de a lo más 425 g es

$$P(T_0 \le 425) \approx P\left(Z \le \frac{425 - 400}{15}\right) = P(Z \le 1.67) = \Phi(1.67) = .9525$$ ■

EJEMPLO 5.28 Sea X = número de personas, seleccionadas al azar en una universidad grande, que durante un día en particular enviaron mensajes de texto. Suponga que la media de X es 7 y que la desviación estándar es 6 (los valores son muy cercanos a los que se reportan en el artículo **"Cell Phone Use and Grade Point Average Among Undergraduate University Students" (*College Student J.*, 2011: 544-551)**. Entre 100 estudiantes seleccionados al azar, qué tan probable es que el número medio de la muestra de diferentes personas que enviaron mensajes de texto exceda 5? Note que la distribución que está siendo muestreada es discreta, pero el TLC es aplicable sea la variable de interés discreta o continua. También, aunque el hecho de que la desviación estándar sea una variable no negativa es muy grande en relación con la media sugiere que la distribución está sesgada positivamente, el tamaño de la muestra tan grande implica que $\overline{X}$ tiene aproximadamente una distribución normal. Utilizando $\mu_{\overline{X}} = 7$ y $\sigma_{\overline{X}} = .6$,

$$P(\overline{X} > 5) \approx P\left(Z > \frac{5 - 7}{.6}\right) = 1 - \Phi(-3.33) = .9996$$

Nota: El artículo citado menciona que la frecuencia de envío de menajes de texto estaba correlacionada de manera negativa con el promedio de calificaciones. ■

El TLC da una idea de por qué muchas variables aleatorias tienen distribuciones de probabilidad que son aproximadamente normales. Por ejemplo, el error de medición en un experimento científico puede ser considerado como la suma de varias perturbaciones y errores subyacentes de pequeña magnitud.

Una dificultad al aplicar el teorema del límite central es saber cuándo n es suficientemente grande. El problema es que la precisión de la aproximación con una n particular depende de la forma de la distribución subyacente original que está siendo muestreada. Si la distribución subyacente tiende a una curva de densidad normal, entonces la aproximación será buena incluso con n pequeña, mientras que si está lejos de ser normal, entonces se requerirá una n grande.

Regla empírica

Si $n > 30$, se puede utilizar el teorema del límite central.

Existen distribuciones de población para las cuales incluso una n de 40 o 50 no es suficiente, pero tales distribuciones rara vez se encuentran en la práctica. Por otra parte, la regla empírica a menudo es conservadora; para muchas distribuciones de población una n mucho menor que 30 sería suficiente. Por ejemplo, en el caso de una distribución de población uniforme, el teorema del límite central da una buena aproximación con $n \geq 12$.

EJEMPLO 5.29 Considere la distribución que se muestra en la figura 5.17 para la cantidad (redondeada al dólar más cercano) que compra un cliente, seleccionado al azar, en una gasolinera en particular (una distribución similar para las compras en Gran Bretaña (en libras) apareció en el artículo **"Data Mining for Fun and Profit", *Statistical Science*, 2000: 111-131**; hubo grandes picos en los valores, 10, 15, 20, 25 y 30). La distribución es, obviamente, muy distinta de la normal.

Se le pidió a Minitab seleccionar 1000 muestras diferentes, cada una compuesta de $n = 15$ observaciones y calcular la media muestral $\overline{X}$ para cada una. La figura 5.17 es un histograma de los 1000 valores resultantes; esta es la distribución aproximada de x de la toma de muestras en las circunstancias especificadas. Claramente esta distribución es apro-

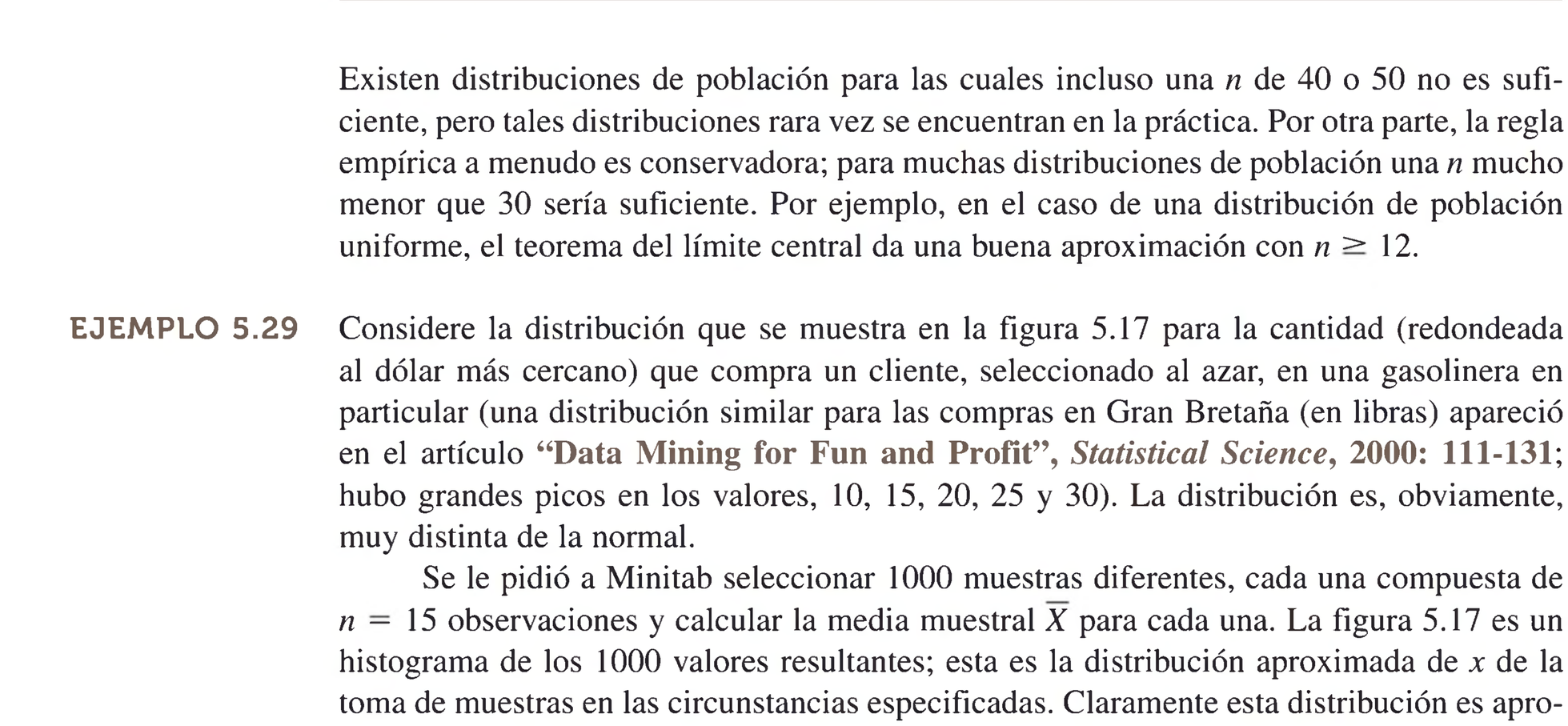


Figura 5.17 Distribución de probabilidad de X = cantidad de gasolina comprada ($)

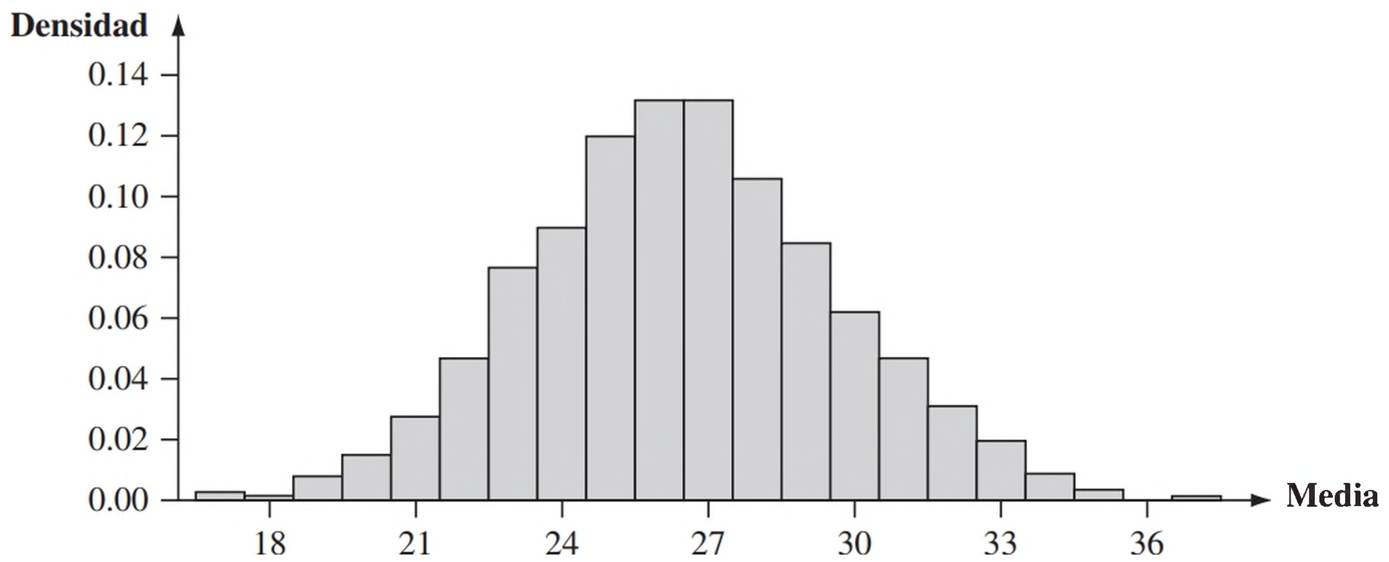


Figura 5.18 Distribución de muestreo aproximada de la media muestral significa la cantidad comprada cuando $n = 15$ y la distribución de población es como se ve en la figura 5.17

ximadamente normal a pesar de que el tamaño de la muestra es en realidad mucho menor de 30, nuestra regla de oro de corte para invocar el teorema del límite central. Como una prueba más de la normalidad, la figura 5.18 muestra una gráfica de probabilidad normal de los 1000 valores de $\overline{X}$; el patrón lineal es muy prominente. Usualmente no es la no-normalidad en la parte central de la distribución de la población lo que hace que el TLC falle, sino una asimetría muy importante.

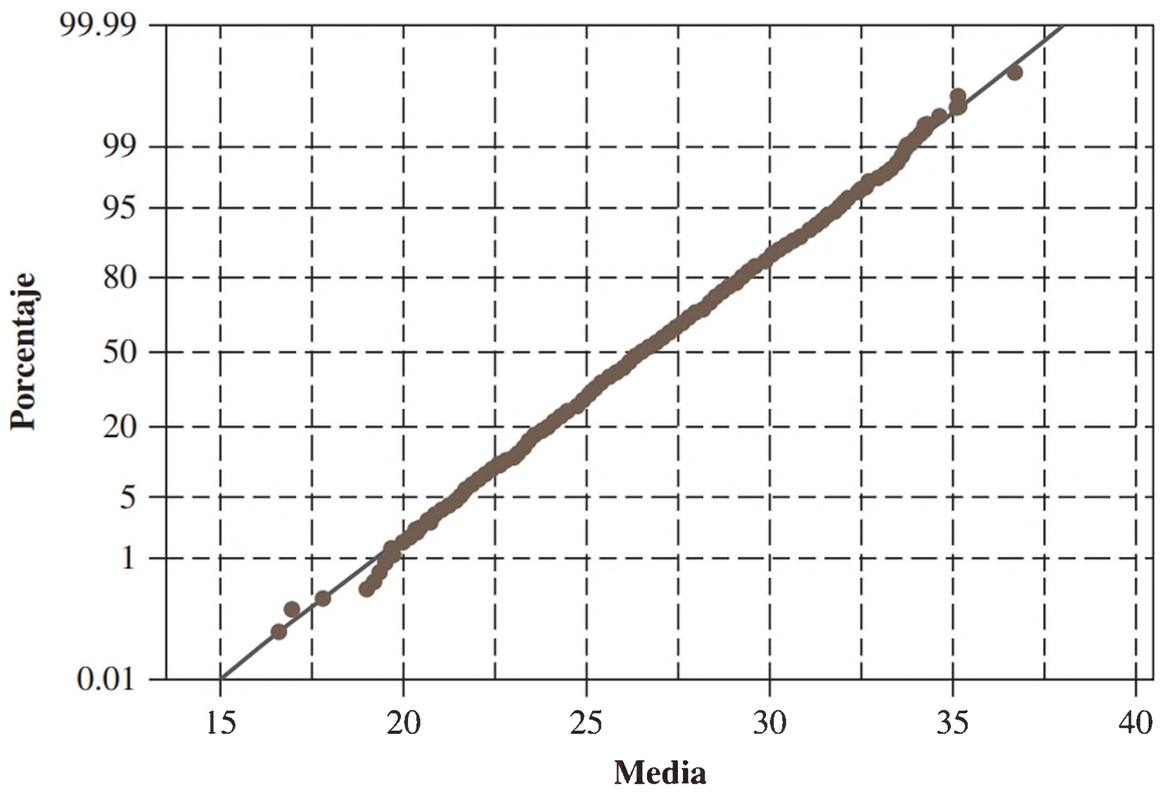


Figura 5.19 Gráfica de la probabilidad normal obtenida con Minitab de los 1000 valores de $\overline{x}$ con base en muestras de tamaño $n = 15$ ■

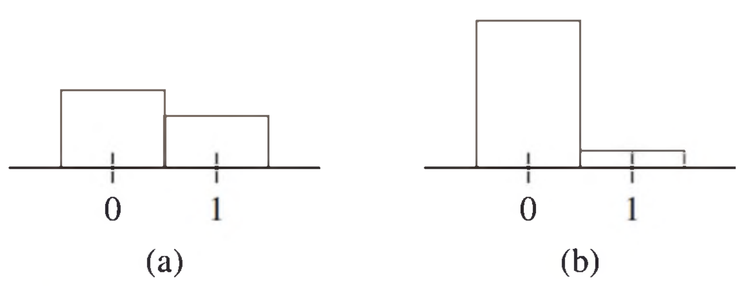
Otras aplicaciones del teorema del límite central

El teorema del límite central se utiliza para justificar la aproximación normal a la distribución binomial que se aborda en el capítulo 4. Recuerde que una variable binomial X es el número de éxitos en una experiencia binomial compuesta de n ensayos independientes con éxitos/fallas y $p = P(S)$ para cualquier ensayo particular. Defina una nueva variable aleatoria X_1 como

$$X_1 = \begin{cases} 1 & \text{si el primer ensayo produce un éxito} \\ 0 & \text{si el primer ensayo produce una falla} \end{cases}$$

y defina $X_2, X_3, \ldots, X_n$ de manera análoga para los otros $n - 1$ ensayos. Cada X_i indica si hay o no un éxito en el ensayo correspondiente.

Debido a que los ensayos son independientes y $P(S)$ es constante de un ensayo a otro, las X_i son independientes e idénticamente distribuidas (una muestra aleatoria de una distribución de Bernoulli). El teorema del límite central implica entonces que si n es suficientemente grande, tanto la suma como el promedio de las X_i tienen distribuciones normales de manera aproximada. Cuando se suman las X_i se agrega un 1 por cada S (éxito) que ocurra y un 0 por cada F (falla), por tanto $X_1 + \cdots + X_n = X$. La media muestral de las X_i es X/n, la proporción muestral de éxitos. Es decir, cuando n es grande tanto X como X/n son aproximadamente normales. El tamaño de muestra necesario para esta aproximación depende del valor de p: cuando p se acerca a .5, la distribución de cada X_i es razonablemente simétrica (véase la figura 5.20), mientras que la distribución es bastante asimétrica cuando p se acerca a 0 o 1. El uso de la aproximación sólo si $np \geq 10$ y $n(1 - p) \geq 10$ garantiza que n es suficientemente grande para superar cualquier asimetría en la distribución de Bernoulli subyacente.



(a) (b)

Figura 5.20 Dos distribuciones de Bernoulli: (a) $p = .4$ (razonablemente simétrica); (b) $p = .1$ (muy asimétrica)

Considere n variables aleatorias de Poisson independientes $X_1 \ldots, X_n$, cada una con una media de μ/n. Se puede demostrar que $X = X_1 + \cdots + X_n$ tiene una distribución de Poisson con una media μ (debido a que la suma general de variables aleatorias de Poisson independientes tiene una distribución de Poisson). El TLC implica entonces que una variable aleatoria de Poisson con una μ suficientemente grande tiene una distribución normal. Una regla empírica común es que $\mu > 20$.

Finalmente, recuerde de la sección 4.5 que X tiene una distribución lognormal si $\ln(X)$ tiene una distribución normal. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución para la que solo son posibles valores positivos $[P(X_i > 0) = 1]$. Entonces si n es lo suficientemente grande, el producto $Y = X_1X_2 \cdot \cdots \cdot X_n$ tiene aproximadamente una distribución lognormal.

Para verificar esto observe que

$$\ln(Y) = \ln(X_1) + \ln(X_2) + \cdots + \ln(X_n)$$

Puesto que $\ln(Y)$ es una suma de variables aleatorias independientes y distribuidas de manera idéntica [las $\ln(X_i)$], es aproximadamente normal cuando n es grande, así que Y tiene aproximadamente una distribución lognormal. Como ejemplo de la aplicabilidad de este resultado, Bury (*Statistical Models in Applied Science*, Wiley, pág. 590) argumenta que el proceso de daños en el flujo plástico y en la propagación de grietas es un proceso multiplicativo, de modo que variables tales como el porcentaje de alargamiento y la resistencia a la ruptura tienen aproximadamente distribuciones lognormales.

EJERCICIOS Sección 5.4 (46-57)

46. El módulo de Young es una medida cuantitativa de la rigidez de un material elástico. Suponga que la media y la desviación estándar de ciertas hojas de aleación de aluminio de un tipo particular, son de 70 GPa y 1.6 GPa, respectivamente (los valores dados en el artículo **"Influence of Material Properties Variability on Springback and Thinning in Sheet Stamping Processes: a Stochastic Analysis" (*Intl . J. Of Advanced Manuf. Tech*., 2010:117-134)).**

a. Si $\overline{X}$ es la media del módulo de Young de la muestra para una muestra aleatoria de $n = 16$ hojas, ¿dónde está centrada la distribución de muestreo de $\overline{X}$ y cuál es la desviación estándar de la distribución de $\overline{X}$?

b. Conteste las preguntas propuestas en el inciso a) para una muestra con tamaño $n = 64$ hojas

c. Para cuál de las dos muestras aleatorias, la de la pregunta a) y la de la pregunta b) es más probable que $\overline{X}$ esté entre 1 y 70 GPa? Explique su razonamiento.

47. Remítase al ejercicio 46. Suponga que la distribución es normal (el artículo citado asume e inclusive incluye la curva de densidad normal correspondiente).

a. Calcule $P(69 \leq \overline{X} \leq 71)$, cuando $n = 16$.

b. ¿Qué tan probable es que el diámetro medio muestral exceda de 71 cuando $n = 25$?

48. La **National Health Statistics Reports** en un informe de fecha 22 de octubre de 2008 declaró que para un tamaño de muestra de 277 hombres estadounidenses de 18 años de edad, la media muestral del diámetro de la cintura fue de 86.3 cm. Para *estimar* varios percentiles de la población se utilizó un método algo complicado, lo que dio como resultado los siguientes valores:

5º	10º	25º	50º	75º	90º	95º
69.6	70.9	75.2	81.3	95.4	107.1	116.4

a. ¿Es admisible que la distribución del diámetro de la cintura sea al menos aproximadamente normal? Explique su razonamiento. Si su respuesta es negativa haga una conjetura de la forma de la distribución de la población.

b. Supongamos que la media poblacional del diámetro de la cintura es de 85 cm y que la desviación estándar de la población es de 15 cm. ¿Qué tan probable es que una muestra aleatoria de 277 individuos resulte en una media muestral del diámetro de la cintura de al menos 86.3 cm?

c. Volviendo al inciso b), supongamos ahora que la media poblacional del diámetro de la cintura es de 82 cm. Ahora, ¿cuál es la probabilidad (aproximada) de que la media de la muestra sea de al menos 86.3 cm? A la luz de este cálculo, ¿cree usted que 82 cm es un valor razonable para μ?

49. Hay 40 estudiantes en una clase de estadística elemental. Basado en años de experiencia, el instructor sabe que el tiempo requerido para calificar un primer examen, seleccionado al azar, es una variable aleatoria con un valor esperado de 6 min y una desviación estándar de 6 min.

a. Si los tiempos de calificación son independientes y el instructor comienza a calificar a las 6:50 p.m. y lo hace en forma continua, ¿cuál es la probabilidad (aproximada) de que termine de calificar antes de que se inicie el programa de noticias de las 11:00 p.m.?

b. Si el reporte de deportes se inicia a la 11:10, ¿cuál es la probabilidad de que se pierda una parte del reporte, si espera hasta que termine de calificar para prender la televisión?

50. Sea X el tiempo de cortejo de una pareja de moscas escorpión hembra-macho seleccionada al azar (tiempo desde el comienzo de la interacción hasta la cópula). Suponga que la media de X es de 120 minutos y la desviación estándar de 110 min (estos datos se sugieren en el artículo **"Should I Stay or Should I Go? Condition- and Status-Dependent Courtship Decisions in the Scorpion Fly *Panorpa Cognate*" (Animal Behavior, 2009: 491-497)**).

a. ¿Es aceptable que X esté distribuido de manera normal?

b. A partir de una muestra aleatoria de 50 pares, cuál es la probabilidad (aproximada) de que la media de la muestra del tiempo de cortejo esté entre 100 min y 125 min?

c. A partir de una muestra aleatoria de 50 pares, ¿cuál es la probabilidad (aproximada) de que el tiempo de cortejo total exceda 150 h?

d. ¿Podría la probabilidad que se pide en b) ser calculada a partir de la información dada, si el tamaño de la muestra fuera 15 en vez de 50? Explique.

51. El tiempo requerido para llenar un formulario por el solicitante de una hipoteca seleccionado al azar tiene una distribución normal con media de 10 minutos y desviación estándar de 2 minutos. Si en un día cinco individuos llenan un formulario y al otro día lo hacen seis, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo promedio muestral requerido cada día sea cuando mucho de 11 minutos?

52. La vida útil de un tipo de batería normalmente está distribuida con media de 10 horas y desviación estándar de 1 hora. Hay cuatro baterías en un paquete. ¿Qué valor de vida útil es tal que la vida útil total de todas las baterías contenidas en un paquete excede ese valor en sólo 5% de todos los paquetes?

53. Se sabe que la dureza Rockwell de pernos de un cierto tipo tiene una media de 50 y una desviación estándar de 1.2.

a. Si la distribución es normal, ¿cuál es la probabilidad de que la dureza media de una muestra aleatoria de 9 pernos sea al de 51?

b. Sin suponer una población normal, ¿cuál es la probabilidad (aproximada) de que la dureza media de una muestra aleatoria de 40 pernos sea al menos de 51?

54. Suponga que la densidad del sedimento (g/cm) de un espécimen de cierta región, seleccionado al azar, está normalmente distribuida con media de 2.65 y desviación estándar de .85 (sugeridas en **"Modeling Sediment and Water Column Interactions for Hydrophobic Pollutants", Water Research, 1984: 1169–1174**).

a. Si se selecciona una muestra aleatoria de 25 especímenes, ¿cuál es la probabilidad de que la densidad del sedimento promedio muestral sea cuando mucho de 3.00? ¿Y de entre 2.65 y 3.00?

b. ¿Qué tan grande debe ser un tamaño de muestra para garantizar que la primera probabilidad en el inciso a) sea al menos de .99?

55. El número de boletos de estacionamiento expedidos en cierta ciudad en cualquier día dado de la semana tiene una distribución de Poisson con parámetro $\mu = 50$.

a. ¿Cuál es la probabilidad aproximada de que sean expedidos entre 35 y 70 boletos en un día particular?

b. ¿Cuál es la probabilidad aproximada de que el número total de boletos expedidos durante una semana de 5 días sea de entre 225 y 275?

c. Utilice software para obtener las probabilidades exactas en a) y b) y comparar con sus aproximaciones.

56. Un canal de comunicación binaria transmite una secuencia de "bits" (ceros y unos). Suponga que para cualquier bit particular transmitido, existe 10% de probabilidades de que ocurra un

error en la transmisión (un 0 se convierte en 1 o un 1 se convierte en 0). Suponga que los errores en los bits ocurren independientemente uno de otro.

a. Considere transmitir 1000 bits. ¿Cuál es la probabilidad aproximada de que cuando mucho ocurran 125 errores de transmisión?

b. Suponga que el mismo mensaje de 1000 bits es enviado en dos momentos diferentes, independientemente uno de otro. ¿Cuál es la probabilidad aproximada de que el número de errores en la primera transmisión esté dentro de 50% del número de errores en la segunda?

57. Suponga que la distribución del tiempo X (en horas) utilizado por los estudiantes de cierta universidad en un proyecto particular es gamma con parámetros $\alpha = 50$ y $\beta = 2$. Puesto que α es grande se puede demostrar que X tiene aproximadamente una distribución normal. Use este hecho para calcular la probabilidad aproximada de que un estudiante seleccionado al azar invierta cuando mucho 125 horas en el proyecto.

5.5 Distribución de una combinación lineal

La media muestral $\overline{X}$ y el total muestral T_o son casos especiales de un tipo de variable aleatoria que surgen con frecuencia en aplicaciones estadísticas.

DEFINICIÓN

Dado un conjunto de n variables aleatorias $X_1, \ldots, X_n$ y con n constantes numéricas $a_1, \ldots, a_n$, a la variable aleatoria

$$Y = a_1X_1 + \cdots + a_nX_n = \sum_{i=1}^{n} a_iX_i \qquad \textbf{(5.7)}$$

Se le llama **combinación lineal** de las X_i.

Por ejemplo, considere a alguien que posee 100 acciones A, 200 acciones B y 500 acciones C. Denote los precios compartidos de estas tres acciones en un tiempo en particular como X_1, X_2 y X_3, respectivamente. Así, el valor individual de las acciones es la combinación lineal $Y = 100X_1 + 200X_2 + 500X_3$

Tomando $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$ da como resultado $Y = X_1 + \cdots + X_n = T_o$ y $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1/n$ resulta en

$$Y = \frac{1}{n}X_1 + \cdots + \frac{1}{n}X_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n}T_o = \overline{X}$$

Observe que no se requiere que las X_i sean independientes o estén idénticamente distribuidas. Todas las X_i podrían tener distribuciones diferentes y, por consiguiente, medias y varianzas diferentes. Primero se considera el valor esperado y la varianza de una combinación lineal.

PROPOSICIÓN

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ con medias $\mu_1, \ldots, \mu_n$, respectivamente, y varianzas $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2$, respectivamente.

1. Si las X_i son independientes o no

$$\begin{aligned} E(a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n) &= a_1E(X_1) + a_2E(X_2) + \cdots + a_nE(X_n) \\ &= a_1\mu_1 + \cdots + a_n\mu_n \end{aligned} \qquad \textbf{(5.8)}$$

2. Si $X_1, \ldots, X_n$ son independientes,

$$V(a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n) = a_1^2V(X_1) + a_2^2V(X_2) + \cdots + a_n^2V(X_n)$$
$$= a_1^2\sigma_1^2 + \cdots + a_n^2\sigma_n^2 \qquad \textbf{(5.9)}$$

y

$$\sigma_{a_1X_1 + \cdots + a_nX_n} = \sqrt{a_1^2\sigma_1^2 + \cdots + a_n^2\sigma_n^2} \qquad \textbf{(5.10)}$$

3. Para cualquier $X_1, \ldots, X_n$,

$$V(a_1X_1 + \cdots + a_nX_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_ia_j\text{Cov}(X_i, X_j) \qquad \textbf{(5.11)}$$

Las comprobaciones se dan al final de la sección. Un parafraseo de (5.8) es que el valor esperado de una combinación lineal es la misma combinación lineal de los valores esperados; por ejemplo, $E(2X_1 + 5X_2) = 2\mu_1 + 5\mu_2$. El resultado (5.9) en la proposición 2 es un caso especial de (5.11) en la proposición 3; cuando las X_i son independientes, $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$ para $i \neq j$ y $= V(X_i)$ para $i = j$ (esta simplificación en realidad ocurre cuando las X_i no están correlacionadas, una condición más débil que la de independencia). Especializando al caso de una muestra aleatoria (X_i independientes e idénticamente distribuidas) con $a_i = 1/n$ para cada i da $E(\overline{X}) = \mu$ y $V(\overline{X}) = \sigma^2/n$ como se abordó en la sección 5.4. Una observación similar se aplica a las reglas para T_o.

EJEMPLO 5.30 Una gasolinera vende tres grados de gasolina; regular, extra y súper. Estas se venden a \$3.00, \$3.20 y \$3.40 por galón, respectivamente. Sean X_1, X_2 y X_3 las cantidades (galones) de estas gasolinas que se vendieron un día en particular. Suponga que las X_i son independientes con $\mu_1 = 1000$, $\mu_2 = 500$, $\mu_3 = 300$, $\sigma_1 = 100$, $\sigma_2 = 80$ y $\sigma_3 = 50$. El ingreso por las ventas es $Y = 3.0X_1 + 3.2X_2 + 3.4X_3$ y

$$E(Y) = 3.0\mu_1 + 3.2\mu_2 + 3.4\mu_3 = \$5620$$
$$V(Y) = (3.0)^2\sigma_1^2 + (3.2)^2\sigma_2^2 + (3.4)^2\sigma_3^2 = 184{,}436$$
$$\sigma_Y = \sqrt{184\,436} = \$429.46$$

■

Diferencia entre dos variables aleatorias

Un importante caso especial de una combinación lineal se presenta con $n = 2$, $a_1 = 1$ y $a_2 = -1$:

$$Y = a_1X_1 + a_2X_2 = X_1 - X_2$$

Entonces se tiene el siguiente corolario de la proposición.

COROLARIO

$E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2)$ para dos variables aleatorias cualesquiera X_1 y X_2.

$V(X_1 - X_2) = V(X_1) + V(X_2)$ si X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes.

El valor esperado de una diferencia es la diferencia de los dos valores esperados, pero la varianza de una diferencia entre dos variables independientes es la *suma*, *no* la diferencia, de las dos varianzas. Existe tanta variabilidad en $X_1 - X_2$ como en $X_1 + X_2$ [escribiendo $X_1 - X_2 = X_1 + (-1)X_2$; $(-1)X_2$ tiene la misma cantidad de variabilidad que X_2].

EJEMPLO 5.31 Una compañía automotriz equipa un modelo particular con un motor de seis cilindros o un motor de cuatro cilindros. Sean X_1 y X_2 eficiencias de combustible de automóviles de seis y cuatro cilindros seleccionados en forma independiente al azar, respectivamente. Con $\mu_1 = 22$, $\mu_2 = 26$, $\sigma_1 = 1.2$ y $\sigma_2 = 1.5$,

$$E(X_1 - X_2) = \mu_1 - \mu_2 = 22 - 26 = -4$$
$$V(X_1 - X_2) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = (1.2)^2 + (1.5)^2 = 3.69$$
$$\sigma_{X_1 - X_2} = \sqrt{3.69} = 1.92$$

Si se cambia la notación de modo que X_1 se refiera al automóvil de cuatro cilindros, entonces $E(X_1 - X_2) = 4$, pero la varianza de la diferencia sigue siendo de 3.69. ■

El caso de variables aleatorias normales

Cuando las X_i forman una muestra aleatoria de una distribución normal, $\overline{X}$ y T_o están normalmente distribuidas. He aquí un resultado más general respecto a las combinaciones lineales.

PROPOSICIÓN

> Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes normalmente distribuidas (con quizá diferentes medias o varianzas), entonces cualquier combinación lineal de las X_i también tiene una distribución normal. En particular, la diferencia $X_1 - X_2$ entre dos variables independientes normalmente distribuidas también está distribuida en forma normal.

EJEMPLO 3.32 (Continuación del ejemplo 5.30) El ingreso total por la venta de los tres grados de gasolina en un día particular fue $Y = 3.0X_1 + 3.2X_2 + 3.4X_3$ y se calculó $\mu_Y = 5620$ y (suponiendo independencia) $\sigma_Y = 429.46$. Si las X_i están normalmente distribuidas, la probabilidad de que el ingreso sea de más de 4500 es

$$P(Y > 4500) = P\left(Z > \frac{4500 - 5620}{429.46}\right)$$
$$= P(Z > -2.61) = 1 - \Phi(-2.61) = .9955$$

■

El teorema del límite central también puede ser generalizado para aplicarlo a ciertas combinaciones lineales. En general, si n es grande y no es probable que algún término individual contribuya demasiado al valor total, entonces Y tiene aproximadamente una distribución normal.

Comprobaciones en el caso $n = 2$

En cuanto al resultado por lo concerniente a los valores esperados, suponga que X_1 y X_2 son continuas con función de densidad de probabilidad conjunta $f(x_1, x_2)$. Entonces

$$E(a_1X_1 + a_2X_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (a_1x_1 + a_2x_2)f(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2$$
$$= a_1\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 f(x_1, x_2)\,dx_2\,dx_1$$
$$+ a_2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_2 f(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2$$
$$= a_1\int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_{X_1}(x_1)\,dx_1 + a_2\int_{-\infty}^{\infty} x_2 f_{X_2}(x_2)\,dx_2$$
$$= a_1E(X_1) + a_2E(X_2)$$

La sumatoria reemplaza a la integración en el caso discreto. El argumento en cuanto a la varianza resultante no requiere especificar si la variable es discreta o continua. Al recordar que $V(Y) = E[(Y - \mu_Y)^2]$,

$$\begin{aligned} V(a_1X_1 + a_2X_2) &= E\{[a_1X_1 + a_2X_2 - (a_1\mu_1 + a_2\mu_2)]^2\} \\ &= E\{a_1^2(X_1 - \mu_1)^2 + a_2^2(X_2 - \mu_2)^2 + 2a_1a_2(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)\} \end{aligned}$$

La expresión dentro de los paréntesis rectangulares es una combinación lineal de las variables $Y_1 = (X_1 - \mu_1)^2$, $Y_2 = (X_2 - \mu_2)^2$ y $Y_3 = (X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)$, así que si se acarrea la operación E a través de los tres términos se obtiene $a_1^2\, V(X_1) + a_2^2\, V(X_2) + 2a_1a_2\, \text{Cov}(X_1, X_2)$ como se requiere. ■

EJERCICIOS Sección 5.5 (58-74)

58. Una compañía naviera maneja contenedores en tres diferentes tamaños: 1) 27 pies^3 ($3 \times 3 \times 3$), 2) 125 pies^3 y 3) 512 pies^3. Sea X_i ($i = 1, 2, 3$) el número de contenedores de tipo i embarcados durante una semana dada. Con $\mu_i = E(X_i)$ y $\sigma_i^2 = V(X_i)$, suponga que las medias y las desviaciones estándar son como sigue.

$\mu_1 = 200$ $\quad \mu_2 = 250$ $\quad \mu_3 = 100$

$\sigma_1 = 10$ $\quad \sigma_2 = 12$ $\quad \sigma_3 = 8$

a. Suponiendo que X_1, X_2, X_3 son independientes, calcule el valor esperado y la varianza del volumen total embarcado. [*Sugerencia*: Volumen $= 27X_1 + 125X_2 + 512X_3$.]

b. ¿Serían sus cálculos necesariamente correctos si las X_i no fueran independientes? Explique.

59. Sea que X_1, X_2 y X_3 representan los tiempos necesarios para realizar tres tareas de reparación sucesivas en cierto taller de servicio. Suponga que son variables aleatorias normales independientes con valores esperados μ_1, μ_2 y μ_3 y varianzas σ_1^2, σ_2^2 y σ_3^2, respectivamente.

a. Si $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 60$ y $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 15$ calcule $P(T_o \leq 200)$ y $P(150 \leq T_o \leq 200)$.

b. Con las μ_i y σ_i dadas en el inciso a), calcule $P(55 \leq \overline{X})$ y $P(58 \leq \overline{X} \leq 62)$.

c. Con las μ_i y σ_i dadas en el inciso a), calcule e interprete $P(-10 \leq X_1 - .5X_2 - .5X_3 \leq 5)$.

d. Si $\mu_1 = 40$, $\mu_2 = 50$, $\mu_3 = 60$, $\sigma_1^2 = 10$, $\sigma_2^2 = 12$ y $\sigma_3^2 = 14$, calcule $P(X_1 + X_2 + X_3 \leq 160)$ y $P(X_1 + X_2 \geq 2X_3)$.

60. Refiérase al ejercicio 5.31. Dos automóviles con motores de seis cilindros serán conducidos en un trayecto de 300 millas. Sean $X_1,\ldots X_5$ el número de eficiencias de gasolina resultantes (mpg). Considere la combinación lineal

$$Y = (X_1 + X_2)/_2 - (X_3 + X_4 + X_5)/3$$

la cual es la medida de la diferencia entre los vehículos de cuatro y seis cilindros. Calcule $P(0 \leq Y)$ y $P(Y > -2)$. [*Sugerencia*: $Y = a_1X_1 + \cdots + a_5X_5$. con $a_1 = 1/2, \ldots, a_5 = -1/3$].

61. El ejercicio 26 introdujo variables aleatorias X y Y, el número de auomóviles y autobuses, respectivamente, que son trasladados por un transbordador en un solo viaje. La función de masa de probabilidad conjunta de X y Y se da en la tabla del ejercicio 7. Es fácil verificar que X y Y son independientes.

a. Calcule el valor esperado, la varianza y la desviación estándar del número total de vehículos en un solo viaje.

b. Si a cada carro se le cobran \$3 y a cada autobús \$10 calcule el valor esperado, la varianza y la desviación estándar del ingreso resultante de un solo viaje.

62. Un fabricante de cierto componente requiere tres diferentes operaciones de maquinado. El tiempo de maquinado de cada operación tiene una distribución normal, y los tres tiempos son independientes entre sí. Las medias son 15, 30 y 20 minutos, respectivamente, y las desviaciones estándar son 1, 2 y 1.5 minutos, respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que se requiera cuando mucho 1 hora de tiempo de maquinado para producir un componente seleccionado al azar?

63. Remítase al ejercicio 3.

a. Calcule la covarianza entre X_1 = el número de clientes en la caja rápida y X_2 = el número de clientes en la caja extrarrápida.

b. Calcule $V(X_1 + X_2)$. ¿Cómo se compara con $V(X_1) + V(X_2)$?

64. Suponga que por la mañana el tiempo de espera para la llegada de un autobús está uniformemente distribuido en [0, 8], mientras que el tiempo de espera en la noche está uniformemente distribuido en [0, 10] independiente del tiempo de espera en la mañana.

a. Si aborda el autobús en la mañana y en la noche durante una semana, ¿cuál es su tiempo de espera total? [*Sugerencia*: Defina las variables aleatorias $X_1, \ldots, X_{10}$ y use una regla de valor esperado.]

b. ¿Cuál es la varianza de su tiempo de espera total?

c. ¿Cuáles son el valor esperado y la varianza de la diferencia entre los tiempos de espera en la mañana y en la noche en un día dado?

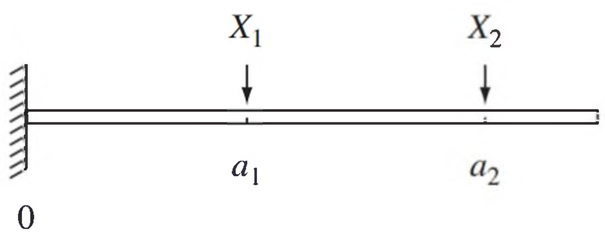
d. ¿Cuáles son el valor esperado y la varianza de la diferencia entre el tiempo de espera total en la mañana y el tiempo de espera total en la noche, durante una semana particular?

65. Suponga que cuando el pH de cierto compuesto químico es 5.00, el pH medido por un estudiante de química de primer año, seleccionado al azar, es una variable aleatoria con media de 5.00 y desviación estándar de .2. Se subdivide un gran lote del compuesto y a cada estudiante en un laboratorio matutino se le entrega una muestra y a cada estudiante en un laboratorio vespertino se le entrega también una muestra. Sea $\overline{X}$ = el pH promedio determinado por los estudiantes matutinos y $\overline{Y}$ = el pH promedio determinado por los estudiantes vespertinos.

a. Si el pH es una variable normal y hay 25 estudiantes en cada laboratorio, calcule $P(-.1 \le \overline{X} - \overline{Y} \le .1)$. [*Sugerencia*: $\overline{X} - \overline{Y}$ es una combinación lineal de variables normales, así que está normalmente distribuida. Calcule $\mu_{\overline{X}-\overline{Y}}$ y $\sigma_{\overline{X}-\overline{Y}}$.]

b. Si hay 36 estudiantes en cada laboratorio pero las determinaciones del pH no se suponen normales, calcule (aproximadamente) $P(-.1 \le \overline{X} - \overline{Y} \le .1)$.

66. Si se aplican dos cargas a una viga en voladizo, como se muestra en la siguiente figura, el momento de flexión en 0 debido a las cargas es $a_1X_1 + a_2X_2$.



a. Suponga que X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes con medias de 2 y 4 kips (1 kip = 4448.2216 N), respectivamente, y desviaciones estándar de .5 y 1.0 kips, respectivamente. Si $a_1 = 5$ pies y $a_2 = 10$ pies, ¿cuál es el momento de flexión esperado y cuál es la desviación estándar del momento de flexión?

b. Si X_1 y X_2 están normalmente distribuidas, ¿cuál es la probabilidad de que el momento de flexión sea de más de 75 kips-pie?

c. Suponga que las posiciones de las dos cargas son variables aleatorias. Denótelas por A_1 y A_2 y suponga que estas variables tienen medias de 5 y 10 pies, respectivamente; que cada una tiene una desviación estándar de .5 y que todas las A_i y X_i son independientes entre sí. ¿Cuál es el momento esperado ahora?

d. En la situación del inciso c), ¿cuál es la varianza del momento de flexión?

e. Si la situación es como se describe en el inciso a) excepto que $\text{Corr}(X_1, X_2) = .5$ (de modo que las dos cargas no sean independientes), ¿cuál es la varianza del momento de flexión?

67. Un tramo de tubería de PVC tiene que ser insertado en otro tramo. La longitud del primer tramo está normalmente distribuida con media de 20 pulg y desviación estándar de .5 pulg. La longitud del segundo tramo es una variable aleatoria normal con media y desviación estándar de 15 y .4 pulg, respectivamente. La cantidad de traslape está normalmente distribuida con media de 1 pulg y desviación estándar de .1 pulgadas. Suponiendo que los tramos y la cantidad de traslapes son independientes entre sí, ¿cuál es la probabilidad de que la longitud total después de la inserción sea de entre 34.5 y 35 pulgadas?

68. Dos aviones vuelan en la misma dirección en dos corredores paralelos adyacentes. En el instante $t = 0$, el primer avión está a 10 km adelante del segundo. Suponga que la velocidad del primer avión (km/h) está normalmente distribuida con media de 520 y desviación estándar de 10, y que la velocidad del segundo también está normalmente distribuida con media y desviación estándar de 500 y 10, respectivamente.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que después de 2 horas de vuelo el segundo avión no haya alcanzado al primer avión?

b. Determine la probabilidad de que los aviones estén separados cuando mucho 10 km después de 2 horas.

69. Tres carreteras diferentes entroncan en la entrada de una autopista particular. Suponga que durante un tiempo fijo el número de vehículos que llegan por cada carretera a la autopista es una variable aleatoria con valor esperado y desviación estándar como se dan en la tabla

	Carretera 1	Carretera 2	Carretera 3
Valor esperado	800	1000	600
Desviación estándar	16	25	18

a. ¿Cuál es el número total esperado de vehículos que entran a la autopista en este punto durante el periodo? [*Sugerencia*: Sea X_i = el número de vehículos de la carretera i.]

b. ¿Cuál es la varianza del número total de vehículos que entran? ¿Ha hecho suposiciones sobre la relación entre los números de vehículos en las diferentes carreteras?

c. Con X_i denotando el número de vehículos que entran por la carretera i durante el periodo, suponga que $\text{Cov}(X_1, X_2) = 80$, $\text{Cov}(X_1, X_3) = 90$, y $\text{Cov}(X_2, X_3) = 100$ (de modo que las tres corrientes de tráfico no son independientes). Calcule el número total esperado de los vehículos que entran y la desviación estándar del total.

70. Considere una muestra aleatoria de tamaño n tomada de una distribución continua con mediana 0 de modo que la probabilidad de que cualquier observación sea positiva es de .5. Haciendo caso omiso de los signos de las observaciones, clasifíquelas desde la más pequeña a la más grande en valor absoluto y sea W = la suma de los renglones de las observaciones con signos positivos. Por ejemplo, si las observaciones son $-.3$, $+.7$, $+2.1$ y -2.5, entonces los renglones de observaciones positivas son 2 y 3, de modo que $W = 5$. En el capítulo 15 W se llamará *estadístico de rangos con signo de Wilcoxon*. W puede representarse como sigue:

$$W = 1 \cdot Y_1 + 2 \cdot Y_2 + 3 \cdot Y_3 + \cdots + n \cdot Y_n = \sum_{i=1}^{n} i \cdot Y_i$$

donde las Y_i son variables aleatorias independientes de Bernoulli, cada una con $p = .5$ ($Y_i = 1$ corresponde a la observación con rango i positivo).

a. Determine $E(Y_i)$ y luego $E(W)$ utilizando la ecuación para W. [*Sugerencia*: los primeros n enteros positivos se suman a $n(n + 1)/2$.]

b. Determine $V(Y_i)$ y luego $V(W)$. [*Sugerencia*: La suma de los cuadrados de los primeros n enteros positivos puede expresarse como $n(n + 1)(2n + 1)/6$.]

71. En el ejercicio 66 el peso de la viga contribuye al momento de flexión. Suponga que la viga es de espesor y densidad uniformes, de modo que la carga resultante esté uniformemente distribuida en la viga. Si el peso de ésta es aleatorio, la carga resultante a consecuencia del peso también es aleatoria; denote esta carga por W (kips-pies).

a. Si la viga tiene 12 pies de largo, W tiene una media de 1.5 y una desviación estándar de .25 y las cargas fijas son como se describen en el inciso a) del ejercicio 66, ¿cuáles son el valor esperado y la varianza del momento de flexión? [*Sugerencia*: Si la carga originada por la viga fuera w kips-pies, la contribución al momento de flexión sería $w\int_0^{12} x\,dx$.

b. Si las tres variables (X_1, X_2 y W) están normalmente distribuidas, ¿cuál es la probabilidad de que el momento de flexión sea cuando mucho de 200 kips-pies?

72. Tengo tres encargos que atender en el Edificio de Administración. Sea X_i = el tiempo que requiere el encargo i-ésimo ($i = 1, 2, 3$) y sea X_4 = el tiempo total en minutos que me paso caminando hasta el edificio, de regreso y entre cada encargo. Suponga que las X_i son independientes y normalmente distribuidas con las siguientes medias y desviaciones estándar: $\mu_1 = 15$, $\sigma_1 = 4$, $\mu_2 = 5$, $\sigma_2 = 1$, $\mu_3 = 8$, $\sigma_3 = 2$, $\mu_4 = 12$, $\sigma_4 = 3$. Pienso salir de mi oficina a las 10:00 a.m. en punto y deseo pegar una nota en la puerta que diga "Regreso alrededor de las t a.m.". ¿Qué hora debo escribir si deseo que la probabilidad de mi llegada después de t sea de .01?

73. Suponga que la resistencia a la tensión esperada del acero tipo A es de 105 klb/pulg^2 y que la desviación estándar de la resistencia a la tensión es de 8 klb/pulg^2. Para el acero tipo B suponga que la resistencia a la tensión esperada y la desviación estándar de la resistencia a la tensión son de 100klb/pulg^2 y 6klb/pulg^2, respectivamente. Sea $\overline{X}$ = la resistencia a la tensión promedio de una muestra aleatoria de 40 especímenes tipo A, y sea $\overline{Y}$ = la resistencia a la tensión promedio de una muestra aleatoria de 35 especímenes tipo B.

a. ¿Cuál es la distribución aproximada de $\overline{X}$? ¿Y de $\overline{Y}$?

b. ¿Cuál es la distribución aproximada de $\overline{X} - \overline{Y}$? Justifique su respuesta.

c. Calcule (aproximadamente) $P(-1 \le \overline{X} - \overline{Y} \le 1)$.

d. Calcule $P(\overline{X} - \overline{Y} \ge 10)$. Si realmente observa que $\overline{X} - \overline{Y} \ge 10$, ¿le cabe duda de que $\mu_1 - \mu_2 = 5$?

74. En un área de suelo arenoso se plantaron 50 árboles pequeños de un cierto tipo, y otros 50 se plantaron en un área de suelo arcilloso. Sea X = el número de árboles plantados en suelo arenoso que sobreviven 1 año y Y = el número de árboles plantados en suelo arcilloso que sobreviven 1 año. Si la probabilidad de que un árbol plantado en suelo arenoso sobreviva 1 año es de .7 y la probabilidad de sobrevivencia de 1 año en suelo arcilloso es de .6, calcule una aproximación a $P(-5 \le X - Y \le 5)$ (no se moleste con la corrección de continuidad).

EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS (75-98)

75. Un restaurante sirve tres comidas que cuestan \$12, \$15 y \$20. Para una pareja seleccionada al azar que está comiendo en este restaurante, sea X = el costo de la comida del hombre y Y = el costo de la comida de la mujer. La función de masa de probabilidad conjunta de X y Y se da en la siguiente tabla:

$p(x, y)$		y = 12	15	20
	12	.05	.05	.10
x	15	.05	.10	.35
	20	0	.20	.10

a. Calcule las funciones de masa de probabilidad marginal de X y Y.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que las comidas del hombre y la mujer cuesten a lo más \$15 cada una?

c. ¿Son X y Y independientes? Justifique su respuesta.

d. ¿Cuál es el costo total esperado de la comida de los dos?

e. Suponga que cuando una pareja abre las galletas de la fortuna al final de la comida, encuentran el mensaje: "Recibirá como reembolso la diferencia entre el costo de la comida más cara y la menos cara que haya elegido". ¿Cuánto espera reembolsar el restaurante?

76. En una estimación de costos, el costo total de un proyecto es la suma de los costos de las tareas componentes. Cada uno de estos costos es una variable aleatoria con una distribución de probabilidad. Se acostumbra obtener información sobre la distribución de costos total sumando las características de las distribuciones de costo de componente individuales; esto se conoce como procedimiento de "despliegue". Por ejemplo, $E(X_1 + \cdots + X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n)$, así que el procedimiento de despliegue es válido para un costo medio. Suponga que hay dos tareas componentes y que X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes normalmente distribuidas. ¿Es válido el procedimiento de despliegue para el 75º percentil? Es decir, ¿Es el percentil 75 de la distribución de $X_1 + X_2$ el mismo que la suma de los 75º percentiles de las dos distribuciones individuales? Si no, ¿cuál es la relación entre el percentil de la suma y la suma de los percentiles? ¿Con qué percentiles es válido el procedimiento de despliegue en este caso?

77. Una tienda de comida saludable vende dos marcas diferentes de un tipo de grano. Sea X = la cantidad (lb) de la marca A disponible y Y = la cantidad de la marca B disponible. Suponga que la función de densidad de probabilidad conjunta de X y Y es

$$f(x, y) = \begin{cases} kxy & x \geq 0,\ y \geq 0,\ 20 \leq x + y \leq 30 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

a. Trace la región de densidad positiva y determine el valor de k.

b. ¿Son X y Y independientes? Responda obteniendo primero la función de densidad de probabilidad marginal de cada variable.

c. Calcule $P(X + Y \leq 25)$.

d. ¿Cuál es la cantidad total esperada de este grano disponible?

e. Calcule $\text{Cov}(X, Y)$ y $\text{Corr}(X, Y)$.

f. ¿Cuál es la varianza de la cantidad total de grano disponible?

78. De acuerdo con el artículo **"Reliability Evaluation of Hard Disk Drive Failures Base don Counting Processes (*Reliability Engr. And System Safety*, 2013:110-118)** las partículas que se acumulan en un disco duro provienen de dos fuentes, una externa y una interna. El artículo propone un modelo en el que la fuente interna contiene un número de partículas sueltas W que tienen una distribución de Poisson con una media de μ; Cuando una partícula suelta se libera inmediatamente entra al disco y los tiempos de liberación son independientes y se distribuyen de manera idéntica con la función de distribución acumulativa $G(t)$. Sea X el número de partículas sueltas que no se han liberado en un tiempo particular t. Muestre que X tiene una distribución de Poisson con un parámetro $\mu[1 - G(t)]$. [*Sugerencia*: Sea Y el número de partículas acumuladas en el disco provenientes de una fuente interna al tiempo t de tal manera que $X + Y = W$. Obtenga una expresión para $P(X = x, Y = y)$ y después sume sobre y.]

79. Suponga que para un individuo la ingesta de calorías en el desayuno es una variable aleatoria con valor esperado de 500 y desviación estándar de 50, la ingesta de calorías en el almuerzo es aleatoria con valor esperado de 900 y desviación estándar de 100 y la ingesta de calorías en la comida es una variable aleatoria con valor esperado de 2000 y desviación estándar de 180. Suponiendo que las ingestas en las diferentes comidas son independientes entre sí, ¿cuál es la probabilidad de que la ingesta de calorías promedio por día durante el siguiente año (365 días) sea cuando mucho de 3500? [*Sugerencia*: Sean X_i, Y_i y Z_i las tres ingestas de calorías en el día i. Entonces la ingesta total es $\Sigma(X_i + Y_i + Z_i)$.]

80. El peso medio del equipaje documentado por un pasajero de clase turista seleccionado al azar que vuela entre dos ciudades en cierta aerolínea es de 40 lb y la desviación estándar es de 10 lb. La media y la desviación estándar de un pasajero de clase de negocios son 30 lb y 6 lb, respectivamente.

a. Si hay 12 pasajeros de clase de negocios y 50 de clase turista en un vuelo particular, ¿cuáles son el valor esperado y la desviación estándar del peso total del equipaje?

b. Si los pesos individuales de los equipajes son variables aleatorias independientes normalmente distribuidas, ¿cuál es la probabilidad de que el peso total del equipaje sea cuando mucho de 2500 lb?

81. Se ha visto que si $E(X_1) = E(X_2) = \cdots = E(X_n) = \mu$, entonces $E(X_1 + \cdots + X_n) = n\mu$. En algunas aplicaciones el número de X_i consideradas no es un número fijo n sino una variable aleatoria N. Por ejemplo, sea N = el número de componentes que son entregados a un taller de reparación en un día particular, y sea X_i el tiempo de reparación del componente i-ésimo. Entonces el tiempo de reparación total es $X_1 + X_2 + \cdots + X_N$, la suma de un número *aleatorio* de variables aleatorias. Cuando N es independiente de las X_i se puede demostrar que

$$E(X_1 + \cdots + X_N) = E(N) \cdot \mu$$

a. Si el número esperado de componentes entregados en un día particular es 10 y el tiempo de reparación esperado de un componente seleccionado al azar es de 40 min, ¿cuál es el tiempo de reparación total esperado de componentes entregados en cualquier día particular?

b. Suponga que los componentes de un tipo llegan para ser reparados de acuerdo con un proceso de Poisson a razón de 5 por hora. El número esperado de defectos por componente es de 3.5. ¿Cuál es el valor esperado del número total de defectos en componentes entregados para reparación durante un periodo de 4 horas? Asegúrese de indicar cómo su respuesta se deriva del resultado general que se acaba de obtener.

82. Suponga que la proporción de votantes rurales en un estado que favorecen a un candidato a gobernador en particular es de .45, y que la proporción de votantes suburbanos y urbanos que favorecen al candidato es de .60. Si se obtiene una muestra de 200 votantes rurales y 300 votantes suburbanos y urbanos, ¿cuál es la probabilidad aproximada de que al menos 250 de estos votantes favorezcan a este candidato?

83. Sea μ el pH verdadero de un compuesto químico. Se realizará una secuencia de n determinaciones de pH muestrales independientes. Suponga que cada muestra de pH es una variable aleatoria con valor esperado μ y desviación estándar de .1. ¿Cuántas determinaciones se requieren si se desea que la probabilidad de que el promedio muestral esté dentro de .02 del pH verdadero, al menos de .95? ¿Qué teorema justifica su cálculo de probabilidad?

84. Si la cantidad de refresco que consumo en cualquier día dado es independiente del consumo en cualquier otro día y está normalmente distribuido con $\mu = 13$ oz y $\sigma = 2$, y si en este momento tengo dos paquetes de seis botellas de 16 oz, ¿cuál es la probabilidad de que todavía tenga algo de refresco al cabo de 2 semanas (14 días)?

85. Remítase al ejercicio 58 y suponga que las X_i son independientes entre sí y que cada una tiene una distribución normal. ¿Cuál es la probabilidad de que el volumen total embarcado sea cuando mucho de 100 000 pies^3?

86. Un estudiante tiene una clase que supuestamente termina a las 9:00 a.m. y otra que se supone que comienza a las 9:10 a.m.

Suponga que el tiempo real de terminación de la clase de las 9:00 a.m. es una variable aleatoria normalmente distribuida X_1 con media de 9:02 y desviación estándar de 1.5 min y que la hora de inicio de la siguiente clase también es una variable aleatoria normalmente distribuida X_2 con media de 9:10 y desviación estándar de 1 min. Suponga que el tiempo necesario para ir de un salón de clases al otro es una variable aleatoria normalmente distribuida X_3 con media de 6 min y desviación estándar de 1 min. ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante llegue a la segunda clase antes de que esta comience? (Suponga independencia de X_1, X_2 y X_3, lo cual es razonable si el estudiante no presta atención a la hora de terminación de la primera clase.)

87. Los camiones de basura que entran a una planta de tratamiento de desechos particular deben pesarse pesan antes de descargar. Sea X = el tiempo total de procesamiento para un camión seleccionado al azar en esta planta (esperar, pesar y descargar). El artículo **"Estimating Waste Transfer Station Delays Using GPS". (*Waste mgmt.*, 2008:1742-1750)** sugiere la posibilidad de una distribución normal con una media de 13 minutos y una desviación estándar de 4 minutos para X. Asuma que esto es, de hecho, la distribución correcta.

- **a.** ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de procesamiento de un solo camión esté entre 12 y 15 minutos?
- **b.** Considere una muestra aleatoria de 16 camiones. ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral del tiempo de procesamiento esté entre 12 y 15 minutos?
- **c.** ¿Por qué la probabilidad en b) es mucho más grande que la probabilidad en a)?
- **d.** Cuál es la probabilidad de que la media de la muestra del tiempo de procesamiento de una muestra aleatoria de 16 camiones sea de al menos 20 minutos?

88. Cada cliente que hace una compra en particular en internet debe pagar con uno de tres tipos de tarjetas de crédito (piense en Visa, MasterCard, AmEx). Sea A_i (i = 1, 2, 3) el evento de que un tipo i de tarjeta de crédito se utilice, con $P(A_1) = .5$, $P(A_2) = .3$ y $P(A_3) = .2$. Suponga que el número de clientes que hacen una compra en un día determinado está dado por una variación aleatoria de Poisson con parámetro λ. Defina las variables aleatorias X_1, X_2, X_3 como X_i = el número de N clientes que utiliza un tipo i de tarjeta (i = 1, 2, 3). Muestre que estas tres variables aleatorias son independientes y tienen distribuciones de Poisson con parámetros $.5\lambda$, $.3\lambda$, $.2\lambda$ respectivamente [*Sugerencia*: Para los enteros no negativos x_1, x_2, x_3, sean $n = x_1 + x_2 + x_3$. Entonces $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3, N = n)$ [¿por qué sucede esto?]. Ahora, tenga en cuenta la condición de que $N = n$, en cuyo caso las tres X_i tienen una distribución trinomial (multinomial con tres categorías) con las probabilidades para cada categoría de .5, .3 y .2]

89.

- **a.** Use la fórmula general para la varianza de una combinación lineal para escribir la expresión $V(aX + Y)$. Entonces esa $a = \sigma_Y / \sigma_X$ y muestre que $\rho \geq -1$. [*Sugerencia*: La varianza es siempre ≥ 0 y la $\text{Cov}(X, Y) = \sigma_X \cdot \sigma_Y \cdot \rho$.]
- **b.** Considerando $V(aX - Y)$, concluya que $\rho \leq 1$.
- **c.** Utilice el hecho de que $V(W) = 0$ solo si W es una constante para mostrar que $\rho = 1$ sólo si $Y = aX + b$.

90. Suponga que una calificación oral X y una calificación cuantitativa Y en un examen de aptitud administrado nacionalmente de un individuo seleccionado al azar tienen una función de densidad de probabilidad conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x + 3y) & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Se le pide que haga una predicción t de la calificación total $X + Y$ del individuo. El error de predicción es la media del error al cuadrado $E[(X + Y - t)^2]$. ¿Qué valor de t reduce al mínimo el error de predicción?

91.

- **a.** Sea X_i que tiene una distribución ji-cuadrada con parámetro ν_1 (véase la sección 4.4) y sea X_2 independiente de X_1 que tiene una distribución ji-cuadrada con parámetro ν_2. Use la técnica del ejemplo 5.21 para demostrar que $X_1 + X_2$ tiene una distribución chi cuadrada con parámetro $\nu_1 + \nu_2$.
- **b.** En el ejercicio 71 del capítulo 4 se le pidió que demostrara que si Z es una variable aleatoria normal estándar, entonces Z^2 tiene una distribución ji-cuadrada con $\nu = 1$. Sean Z_1, $Z_2, \ldots, Z_n$ n variables aleatorias normales estándar independientes. ¿Cuál es la distribución de $Z_1^2 + \cdots + Z_n^2$? Justifique su respuesta.
- **c.** Sean $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución normal con media μ y varianza σ^2. ¿Cuál es la distribución normal con media μ y varianza σ^2. ¿Cuál es la distribución de la suma $Y = \Sigma_{i=1}^{n}[(X_i - \mu)/\sigma]^2$? Justifique su respuesta.

92.

- **a.** Demuestre que $\text{Cov}(X, Y + Z) = \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(X, Z)$.
- **b.** Sean X_1 y X_2 calificaciones cuantitativas y orales en un examen de aptitud, y sean Y_1 y Y_2 las calificaciones correspondientes en otro examen. Si $\text{Cov}(X_1,Y_1) = 5$, $\text{Cov}(X_1, Y_2) = 1$, $\text{Cov}(X_2,Y_1) = 2$ y $\text{Cov}(X_2, Y_2) = 8$, ¿cuál es la covarianza entre las dos calificaciones totales $X_1 + X_2$ y $Y_1 + Y_2$?

93. Se selecciona al azar un espécimen de roca de un área particular y se pesa dos veces. Sean W el peso real y X_1 y X_2 los dos pesos medidos. Entonces $X_1 = W + E_1$ y $X_2 = W + E_2$, donde E_1 y E_2 son los dos errores de medición. Suponga que los E_i son independientes entre sí y de W, y que $V(E_1) = V(E_2) = \sigma_E^2$

- **a.** Exprese ρ, el coeficiente de correlación entre los dos pesos medidos X_1 y X_2 en función de σ_W^2, la varianza del peso real y σ_X^2, la varianza del peso medido.
- **b.** Calcule ρ cuando $\sigma_W = 1$ kg y $\sigma_E = .01$ kg.

94. Sea A el porcentaje de un elemento en un espécimen de roca seleccionado al azar y sea B el porcentaje de un segundo elemento en ese mismo espécimen. Suponga que D y E son errores de medición al determinar los valores de A y B de modo que los valores medidos sean $X = A + D$ y $Y = B + E$, respectivamente. Suponga que los errores de medición son independientes entre sí y de los valores reales.

- **a.** Demuestre que

$$\text{Corr}(X, Y) = \text{Corr}(A, B) \cdot \sqrt{\text{Corr}(X_1, X_2)} \cdot \sqrt{\text{Corr}(Y_1, Y_2)}$$

donde X_1 y X_2 son mediciones replicadas del valor de A y Y_1 y Y_2 se definen análogamente respecto a B. ¿Qué efecto tiene la presencia del error de medición en la correlación?

b. ¿Cuál es valor máximo de Corr(X, Y) cuando Corr(X_1, X_2) = .8100 y Corr(Y_1, Y_2) = .9025? ¿Es esto perturbador?

95. Sean $X_1,\ldots, X_n$ variables aleatorias independientes con medias $\mu_1,\ldots, \mu_n$ y varianzas $\sigma_1^2,\ldots, \sigma_n^2$. Considere una función $h(x_1,\ldots, x_n)$ y úsela para definir una nueva variable aleatoria $Y = h(X_1,\ldots, X_n)$. En condiciones un tanto generales en cuanto a la función h, si las σ_i son pequeñas respecto a las μ_i correspondientes se puede demostrar que $E(Y) \approx h(\mu_1,\ldots, \mu_n)$ y

$$V(Y) \approx \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)^2 \cdot \sigma_1^2 + \cdots + \left(\frac{\partial h}{\partial x_n}\right)^2 \cdot \sigma_n^2$$

donde cada derivada parcial se evalúa en $(x_1,\ldots, x_n) = (\mu_1,\ldots, \mu_n)$. Suponga tres resistores con resistencias X_1, X_2, X_3 conectados en paralelo a través de una batería con voltaje X_4. Luego, según la ley de Ohm, la corriente es

$$Y = X_4\left[\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \frac{1}{X_3}\right]$$

Sean μ_1 = 10 ohms, σ_1 = 1.0 ohm, μ_2 = 15 ohms, σ_2 = 1.0 ohm, μ_3 = 20 ohms, σ_3 = 1.5 ohms, μ_4 = 120 V, σ_4 = 4.0 V. Calcule el valor esperado aproximado y la desviación estándar de la corriente (que se sugiere en **"Random Samplings", *CHEMTECH*, 1984: 696–697**).

96. Una aproximación más precisa a $E[h(X_1,\ldots, X_n)]$ en el ejercicio 93 es

$$h(\mu_1,\ldots,\mu_n) + \frac{1}{2}\sigma_1^2\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}\right) + \cdots + \frac{1}{2}\sigma_n^2\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x_n^2}\right)$$

Calcule esto con $Y = h(X_1, X_2, X_3, X_4)$ dada en el ejercicio 93 y compárela con el primer término $h(\mu_1,\ldots, \mu_n)$.

97. Sean X y Y variables aleatorias normales estándar independientes y defina una nueva variable aleatoria como $U = .6X + .8Y$.

a. Determine Corr(X, U).

b. ¿Cómo modificaría U para obtener Corr(X, U) = ρ con un valor especificado de ρ?

98. Sean $X_1, X_2,\ldots, X_n$ variables aleatorias que denotan n ofertas independientes para un artículo que está a la venta. Suponga-mos que cada X_i se distribuye uniformemente en el intervalo [100, 200]. Si el vendedor vende al mejor postor, ¿cuánto puede esperar ganar en la venta? [*Sugerencia*: Sean $Y = \max(X_1, X_2,\ldots, X_n)$. En primer lugar encuentre $F_Y(y)$ al notar que $Y \le y$ si y sólo si cada X_i es $\le y$. Luego obtenga la función de densidad de probabilidad y $E(Y)$.]

BIBLIOGRAFÍA

Carlton, Matthew y Jay Devore, *Probability with Applications in Engineering, Science, and Technology, Springer,* Nueva York, 2015. Un tratado un poco más sofisticado y extenso sobre temas de probabilidad que el presente libro.

Olkin, Ingram, Cyrus Derman y Leon Gleser, *Probability Models and Applications* (2a. ed.), Macmillan, Nueva York, 1994. Contiene una cuidadosa y amplia exposición de distribuciones conjuntas, reglas de probabilidad y teoremas de límites.

Estimación puntual

6

INTRODUCCIÓN

Dado un parámetro de interés, tal como la media μ o la proporción p de una población, el objetivo de la estimación puntual es utilizar una muestra para calcular un número que represente en cierto sentido una buena suposición del valor verdadero del parámetro. El número resultante se llama *estimación puntual*. En la sección 6.1 se presentan algunos conceptos generales de estimación puntual. En la sección 6.2 se describen e ilustran dos métodos importantes para obtener estimaciones puntuales: el método de momentos y el método de máxima probabilidad.

6.1 Algunos conceptos generales de la estimación puntual

El objetivo de la inferencia estadística casi siempre es sacar algún tipo de conclusión sobre uno o más parámetros (características de la población). Para hacer eso un investigador tiene que obtener datos muestrales de cada una de las poblaciones estudiadas. Las conclusiones pueden entonces basarse en los valores calculados de varias cantidades muestrales. Por ejemplo, sea μ (un parámetro) la resistencia a la ruptura promedio verdadera de conexiones alámbricas utilizadas en la unión de láminas semiconductoras. Se podría tomar una muestra aleatoria de $n = 10$ conexiones y determinar la resistencia a la ruptura de cada una y se tendrían las resistencias observadas $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$. La resistencia a la ruptura media muestral $\bar{x}$ se utilizaría entonces para sacar una conclusión respecto al valor de μ. Asimismo, si σ^2 es la varianza de la distribución de la resistencia a la ruptura (varianza de la población, otro parámetro), el valor de la varianza muestral s^2 se utiliza para inferir algo sobre σ^2.

Cuando se discuten los métodos y conceptos generales de inferencia, es conveniente disponer de un símbolo genérico para el parámetro de interés. Se utilizará la letra griega θ para este propósito. En muchas investigaciones, θ será una población con media μ, una diferencia $\mu_1 - \mu_2$, entre dos medias de población, o una proporción de la población de "éxitos" p. El objetivo de la estimación puntual es seleccionar un solo número, con base en los datos muestrales, que represente un valor sensible de θ. Suponga, por ejemplo, que el parámetro de interés es μ, la vida útil promedio verdadera de las baterías de un cierto tipo. Una muestra aleatoria de $n = 3$ baterías podría dar las vidas útiles (horas) observadas $x_1 = 5.0$, $x_2 = 6.4$, $x_3 = 5.9$. El valor calculado de la media muestral de la vida útil es $\bar{x} = 5.77$ y es razonable considerar 5.77 como un valor muy factible de μ, la "mejor suposición" del valor de μ basado en la información muestral disponible.

Suponga que se desea estimar un parámetro de una sola población (p. ej., μ o σ) con una muestra aleatoria de tamaño n. Recuerde por el capítulo previo que antes de que los datos estén disponibles, las observaciones muestrales deben ser consideradas variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Se deduce que cualquier función de las X_i, es decir, cualquier estadístico, tal como la media muestral $\bar{X}$ o la desviación estándar muestral S también es una variable aleatoria. Puede decirse lo mismo si los datos disponibles se componen de más de una muestra. Por ejemplo, se pueden representar las resistencias a la tensión de m especímenes de tipo 1 y de n especímenes de tipo 2 por $X_1, \ldots, X_m$ y $Y_1, \ldots, Y_n$, respectivamente. La diferencia entre las dos medias muestrales de las resistencias es $\bar{X} - \bar{Y}$; este es el estadístico natural para inferir sobre $\mu_1 - \mu_2$, la diferencia entre las resistencias medias de la población.

DEFINICIÓN

> La **estimación puntual** de un parámetro θ es un número único que puede ser considerado un valor sensible de θ. Se obtiene una estimación puntual al seleccionar un estadístico apropiado y calcular su valor con los datos muestrales dados. El estadístico seleccionado se llama **estimador puntual** de θ.

En el ejemplo de las baterías que hemos visto el estimador utilizado para obtener la estimación puntual de μ fue $\bar{X}$, y la estimación puntual de μ fue 5.77. Si las tres vidas útiles hubieran sido $x_1 = 5.6$, $x_2 = 4.5$ y $x_3 = 6.1$, el uso del estimador $\bar{X}$ habría dado por resultado la estimación $\bar{x} = (5.6 + 4.5 + 6.1)/3 = 5.40$. El símbolo $\hat{\theta}$ ("teta testada") se utiliza comúnmente para denotar tanto la estimación de θ como la estimación puntual que resulta de una muestra dada.* Por tanto, $\hat{\mu} = \bar{X}$ se lee como "el estimador puntual de μ

*Siguiendo la primera notación, se podría utilizar $\hat{\Theta}$ (una teta mayúscula) para el estimador, pero es difícil de escribir.

es la media muestral $\overline{X}$". El enunciado "la estimación puntual de μ es 5.77" se escribe concisamente como $\hat{\mu} = 5.77$. Observe que cuando se escribe $\hat{\theta} = 72.5$, no hay ninguna indicación de cómo se obtuvo esta estimación puntual (qué estadístico se utilizó). Se recomienda reportar tanto el estimador como la estimación resultante.

EJEMPLO 6.1 Un fabricante automotriz ha producido un nuevo tipo de parachoques, del cual se dice que absorbe impactos con menos daño que diseños anteriores. El fabricante lo ha utilizado en una secuencia de 25 choques controlados contra un muro, cada uno a 10 mph, utilizando uno de sus modelos de automóvil compacto. Sea X = el número de choques que no provocaron daños visibles al automóvil. El parámetro que deberá ser estimado es p = la proporción de todos los choques que no provocaron daños [alternativamente, p = P(ningún daño en un choque)]. Si se observa que X es $x = 15$, el estimador y la estimación más razonables son

$$\text{estimador } \hat{p} = \frac{X}{n} \qquad \text{estimación} = \frac{x}{n} = \frac{15}{25} = .60$$ ■

Si cada parámetro de interés tuviera sólo un estimador puntual razonable, no tendría mucho caso la estimación puntual. En la mayoría de los problemas, sin embargo, habrá más de un estimador razonable.

EJEMPLO 6.2 Considere las 20 observaciones adjuntas de voltaje de ruptura dieléctrica de piezas de resina epóxica introducidas por primera vez en el ejemplo 4.89.

24.46	25.61	26.25	26.42	26.66	27.15	27.31	27.54	27.74	27.94
27.98	28.04	28.28	28.49	28.50	28.87	29.11	29.13	29.50	30.88

El patrón en la gráfica de probabilidad normal dado ahí es bastante recto, así que ahora se supone que la distribución de voltaje de ruptura es normal con valor de la media μ. Puesto que las distribuciones normales son simétricas, μ también es la vida útil mediana de la distribución. Se supone entonces que las observaciones dadas son el resultado de una muestra aleatoria $X_1, X_2, \ldots, X_{20}$ de esta distribución normal. Considere los siguientes estimadores y las estimaciones resultantes para μ:

a. Estimador = $\overline{X}$, estimación = $\bar{x} = \Sigma x_i/n = 555.86/20 = 27.793$

b. Estimador = $\widetilde{X}$, estimación = $\tilde{x} = (27.94 + 27.98)/2 = 27.960$

c. Estimador = $[\text{mín}(X_i) + \text{máx}(X_i)]/2$ = el promedio de las dos vidas útiles extremas, estimación = $[\text{mín}(x_i) + \text{máx}(x_i)]/2 = (24.46 + 30.88)/2 = 27.670$

d. Estimador = $\overline{X}_{\text{rec}(10)}$, la media recortada 10% (desechar el más pequeño 10% y el más grande de la muestra y luego promediar),

$$\begin{aligned}\text{estimación} &= \bar{x}_{\text{tr}(10)} \\ &= \frac{555.86 - 24.46 - 25.61 - 29.50 - 30.88}{16} \\ &= 27.838\end{aligned}$$

Cada uno de los estimadores (a)–(d) utiliza una medición diferente del centro de la muestra para estimar μ. ¿Cuál de las estimaciones se acerca más al valor verdadero? No se puede responder esta pregunta sin conocer el valor verdadero. Una pregunta que puede responderse es: "¿Cuándo se utiliza en otras muestras de X_i, cuál estimador tiende a producir estimaciones cercanas al valor verdadero? Más adelante se considerará este tipo de pregunta. ■

EJEMPLO 6.3 El artículo **"Is a Normal Distribution the Most Appropriate Statistical Distribution for Volumetric Properties in Asphalt Mixtures?"** ya citado en el ejemplo 4.26, informa de las siguientes observaciones sobre X = *vacíos llenos de asfalto* (%) de 52 muestras de un cierto tipo de mezcla caliente de asfalto:

74.33	71.07	73.82	77.42	79.35	82.27	77.75	78.65	77.19
74.69	77.25	74.84	60.90	60.75	74.09	65.36	67.84	69.97
68.83	75.09	62.54	67.47	72.00	66.51	68.21	64.46	64.34
64.93	67.33	66.08	67.31	74.87	69.40	70.83	81.73	82.50
79.87	81.96	79.51	84.12	80.61	79.89	79.70	78.74	77.28
79.97	75.09	74.38	77.67	83.73	80.39	76.90		

Estimemos la varianza σ^2 de la distribución de la población. Un estimador natural es la varianza de la muestra:

$$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n - 1}$$

Minitab arroja el siguiente resultado a una petición para mostrar los estadísticos descriptivos:

Variable	Count	Mean	SE Mean	StDev	Variance	Q1	Median	Q3
VFA(B)	52	73.880	0.889	6.413	41.126	67.933	74.855	79.470

Por tanto, la estimación puntual de la varianza de la población es

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{52 - 1} = 41.126$$

[de forma alternativa, la fórmula de cálculo para el numerador de s^2 da

$$S_{xx} = \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2/n = 285\,929.5964 - (3841.78)^2/52 = 2097.4124].$$

Una estimación puntual de la desviación estándar de la población es entonces $\hat{\sigma} = s = \sqrt{41.126} = 6.413$.

Un estimador alternativo resulta de usar el divisor n en lugar de $n - 1$:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n}, \qquad \text{estimación} = \frac{2097.4124}{52} = 40.335$$

En breve se indicará por qué muchos estadísticos prefieren S^2 en lugar de este último estimador.

El citado artículo considera ajustar cuatro distribuciones diferentes a los datos: normal, lognormal, de dos parámetros de Weibull y de tres parámetros de Weibull. Se utilizaron diferentes técnicas para concluir que los dos parámetros de Weibull proporcionan el mejor ajuste (el gráfico de probabilidad normal de los datos muestra alguna desviación de un patrón lineal). De la sección 4.5 la varianza de una variable aleatoria de Weibull es

$$\sigma^2 = \beta^2\{\Gamma(1 + 2/\alpha) - [\Gamma(1 + 1/\alpha)]^2\}$$

donde α y β son los parámetros de forma y escala de la distribución. Los autores del artículo utilizaron el método de máxima verosimilitud (probabilidad) (véase la sección 6.2) para estimar estos parámetros. Las estimaciones resultantes son $\hat{\alpha} = 11.9731$, $\hat{\beta} = 77.0153$. Una estimación razonable de la varianza de la población ahora se puede obtener al sustituir las estimaciones de los dos parámetros en la expresión para σ^2; el resultado es $\hat{\sigma}^2 = 56.035$. Esta última estimación es obviamente muy diferente de la varianza de la muestra. Su validez depende de que la distribución de la población sea Weibull, mientras que la varianza de la muestra es una manera sensata para estimar σ^2 cuando hay incertidumbre en cuanto a la forma específica de la distribución de la población. ■

En el mejor de todos los mundos posibles, se podría hallar un estimador $\hat{\theta}$ con el cual siempre $\hat{\theta} = \theta$. Sin embargo, $\hat{\theta}$ es una función de las X_i muestrales, así que es una variable aleatoria. Con algunas muestras, $\hat{\theta}$ dará un valor más grande que θ, mientras que con otras muestras $\hat{\theta}$ subestimará θ. Si escribimos

$$\hat{\theta} = \theta + \text{error de estimación}$$

entonces un estimador preciso sería uno que produjera errores de estimación pequeños, de manera que los valores estimados estén cerca del valor verdadero.

Una forma sensible de cuantificar la idea de $\hat{\theta}$ cercano a θ es considerar el error cuadrático $(\hat{\theta} - \theta)^2$. Con algunas muestras, $\hat{\theta}$ se acercará bastante a θ y el error cuadrático resultante se aproximará a 0. Otras muestras pueden dar valores de $\hat{\theta}$ alejados de θ, correspondientes a errores cuadráticos muy grandes. Una medida general de precisión es la esperanza o *error cuadrático medio* (MSE por sus siglas en inglés) MSE $= E[(\hat{\theta} - \theta)^2]$. Si un primer estimador tiene una MSE más pequeña que un segundo, es natural decir que el primer estimador es el mejor. Sin embargo, la MSE en general dependerá del valor de θ. Lo que a menudo sucede es que un estimador tiene un MSE más pequeño con algunos valores de θ y un MSE más grande con otros valores. En general no es posible determinar un estimador con el MSE más pequeño.

Una forma de librarse de este dilema es limitar la atención sólo en estimadores que tengan una propiedad deseable específica y luego determinar el mejor estimador en este grupo limitado. Una propiedad popular de esta clase en la comunidad estadística es la *ausencia de sesgo*.

Estimadores insesgados

Suponga que se tienen dos instrumentos de medición: uno ha sido calibrado con precisión, pero el otro sistemáticamente da lecturas más pequeñas que las reales de lo que se está midiendo. Cuando cada uno de los instrumentos se utiliza repetidamente en el mismo objeto, debido al error de medición, las mediciones observadas no serán idénticas. Sin embargo, las mediciones producidas por el primer instrumento se distribuirán en torno al valor verdadero, de tal modo que en promedio este instrumento medirá lo que se proponga medir, por lo que se le conoce como instrumento insesgado. El segundo instrumento proporciona observaciones que tienen un componente de error o sesgo sistemático.

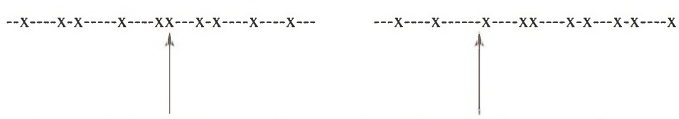


Figura 6.1 Medidas de (a) un estimador sesgado y (b) un estimador insesgado

DEFINICIÓN

Se dice que un estimador puntual $\hat{\theta}$ es un **estimador insesgado** de θ si $E(\hat{\theta}) = \theta$ para todo valor posible de θ. Si $\hat{\theta}$ es insesgado, la diferencia $E(\hat{\theta}) - \theta$ se conoce como el **sesgo** de $\hat{\theta}$.

Es decir, $\hat{\theta}$ es sesgado si su distribución de probabilidad (es decir, su muestreo) siempre está "centrada" en el valor verdadero del parámetro. Suponga que $\hat{\theta}$ es un estimador insesgado; entonces si $\theta = 100$ la distribución muestral $\hat{\theta}$ está centrada en 100; si $\theta = 27.5$ la distribución muestral $\hat{\theta}$ está centrada en 27.5, y así sucesivamente. La figura 6.2 ilustra la distribución de varios estimadores sesgados e insesgados. Observe que "centrada" en este caso significa que el valor esperado, no la mediana, de la distribución de $\hat{\theta}$ es igual a θ.

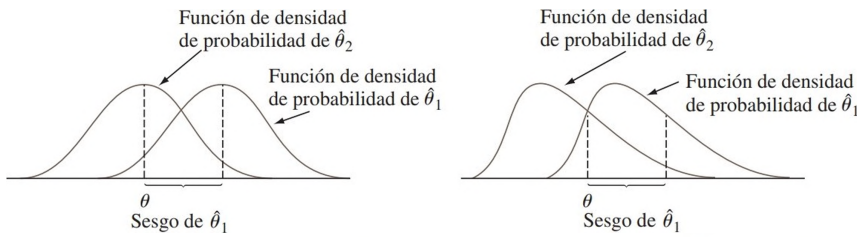


Figura 6.2 Funciones de densidad de probabilidad de un estimador sesgado $\hat{\theta}_1$ y un estimador insesgado $\hat{\theta}_2$, de un parámetro θ

Parece como si fuera necesario conocer el valor de θ (en cuyo caso la estimación es innecesaria) para ver si $\hat{\theta}$ es insesgado. Este no suele ser el caso, sin embargo, porque la ausencia de sesgo es una propiedad general de la distribución muestral donde el muestreo del estimador está centrado lo que por lo general no depende de ningún valor de parámetro en particular.

En el ejemplo 6.1 se utilizó la proporción muestral X/n como estimador de p, donde X, el número de éxitos muestrales, tenía una distribución binomial con parámetros n y p. Por tanto,

$$E(\hat{p}) = E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n}E(X) = \frac{1}{n}(np) = p$$

PROPOSICIÓN

Cuando X es una variable aleatoria binomial con parámetros n y p, la proporción muestral $\hat{p} = X/n$ es un estimador sesgado de p.

No importa cuál sea el valor verdadero de p, la distribución del estimador $\hat{p}$ estará centrada en el valor verdadero.

EJEMPLO 6.4 Suponga que X, el tiempo de reacción a un estímulo, tiene una distribución uniforme en el intervalo desde 0 hasta un límite superior desconocido θ (por tanto, la función de densidad de X es de forma rectangular con una altura de $1/\theta$ en el intervalo $0 \le x \le \theta$). Se desea estimar θ con base en una muestra aleatoria $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de los tiempos de reacción. Como θ es el mayor tiempo posible en toda la población de tiempos de reacción, considere como un primer estimador el mayor tiempo de reacción muestral $\hat{\theta}_1 = \text{máx}(X_1, \ldots, X_n)$. Si $n = 5$ y $x_1 = 4.2$, $x_2 = 1.7$, $x_3 = 2.4$, $x_4 = 3.9$, y $x_5 = 1.3$, la estimación puntual de θ es $\hat{\theta}_1 = \text{máx}(4.2, 1.7, 2.4, 3.9, 1.3) = 4.2$.

La ausencia de sesgo implica que algunas muestras arrojarán estimaciones que exceden θ y otras que darán estimaciones más pequeñas que θ, de lo contrario posiblemente θ no podría ser el centro (punto de equilibrio) de la distribución de $\hat{\theta}_1$. Sin embargo, el estimador propuesto nunca sobreestimará θ (el valor muestral más grande no puede exceder el valor de la población más grande) y subestimará θ a menos que el valor muestral más grande sea igual a θ. Este argumento intuitivo demuestra que $\hat{\theta}_1$ es un estimador insesgado. Más precisamente (véase el ejercicio 32) se puede demostrar que

$$E(\hat{\theta}_1) = \frac{n}{n+1} \cdot \theta < \theta \qquad \left(\text{puesto que } \frac{n}{n+1} < 1\right)$$

El sesgo de $\hat{\theta}$ está dado por $n\theta/(n+1) - \theta = -\theta/(n+1)$, el cual tiende a cero a medida que n se hace grande.

Es fácil modificar $\hat{\theta}_1$ para obtener un estimador insesgado de θ. Considere el estimador

$$\hat{\theta}_2 = \frac{n+1}{n} \cdot \text{máx}\,(X_1, \ldots, X_n)$$

Si se utiliza este estimador en los datos se obtiene la estimación $(6/5)(4.2) = 5.04$. El hecho de que $(n+1)/n > 1$ implica que $\hat{\theta}_2$ sobreestimará θ para algunas muestras y la subestimará en otras. La media de este estimador es

$$E(\hat{\theta}_2) = E\left[\frac{n+1}{n}\,\text{máx}(X_1, \ldots, X_n)\right] = \frac{n+1}{n} \cdot E\,[\text{máx}(X_1, \ldots, X_n)]$$
$$= \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1}\,\theta = \theta$$

Si $\hat{\theta}_2$ se utiliza repetidamente en diferentes muestras para estimar θ, algunas estimaciones serán demasiado grandes y otras demasiado pequeñas, pero a la larga no habrá ninguna tendencia simétrica para subestimar o sobreestimar θ. ■

Principio de estimación insesgada

Cuando se elige entre varios estimadores diferentes de θ, se elige uno insesgado.

De acuerdo con este principio, el estimador insesgado $\hat{\theta}_2$ en el ejemplo 6.4 deberá ser preferido al estimador sesgado $\hat{\theta}_1$. Considere ahora el problema de estimar σ^2.

PROPOSICIÓN

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución con media μ y varianza σ^2. Entonces el estimador

$$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

es un estimador insesgado de σ^2.

Demostración Para cualquier variable aleatoria Y, $V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$, por tanto, $E(Y^2) = V(Y) - [E(Y)]^2$. Aplicando esto a

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum X_i^2 - \frac{\left(\sum X_i\right)^2}{n}\right]$$

se obtiene

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left\{\sum E(X_i^2) - \frac{1}{n}E\left[\left(\sum X_i\right)^2\right]\right\}$$
$$= \frac{1}{n-1}\left\{\sum(\sigma^2 + \mu^2) - \frac{1}{n}\left\{V\left(\sum X_i\right) + \left[E\left(\sum X_i\right)\right]^2\right\}\right\}$$
$$= \frac{1}{n-1}\left\{n\sigma^2 + n\mu^2 - \frac{1}{n}n\sigma^2 - \frac{1}{n}(n\mu)^2\right\}$$
$$= \frac{1}{n-1}\{n\sigma^2 - \sigma^2\} = \sigma^2 \quad \text{(como se desea)}$$

■

El estimador que utiliza el divisor n se expresa como $(n-1)S^2/n$, por tanto,

$$E\left[\frac{(n-1)S^2}{n}\right] = \frac{n-1}{n}E(S^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

Este estimador es, por consiguiente, sesgado. El sesgo es $(n-1)\sigma^2/n - \sigma^2 = -\sigma^2/n$. Debido a que el sesgo es negativo, el estimador con divisor n tiende a subestimar σ^2 y por eso muchos estadísticos prefieren el divisor $n-1$ (aunque cuando n es grande, el sesgo es pequeño y hay poca diferencia entre ambos).

Lamentablemente, el hecho de que S^2 sea insesgado para la estimación de σ^2 no implica que S sea insesgado para la estimación de σ. Sacar la raíz cuadrada estropea la propiedad de ausencia de sesgo (el valor esperado de la raíz cuadrada no es la raíz cuadrada del valor esperado). Afortunadamente, el sesgo de S es pequeño a menos que n sea muy pequeño. Hay otras buenas razones para utilizar S como estimador, especialmente cuando la distribución de la población es normal. Esto se volverá más aparente cuando se aborden los intervalos de confianza y la prueba de hipótesis en los siguientes capítulos.

En el ejemplo 6.2 se propusieron varios estimadores diferentes de la media μ de una distribución normal. Si hubiera un estimador insesgado único para μ, el problema de la estimación se resolvería utilizando dicho estimador. Lamentablemente, este no es el caso.

PROPOSICIÓN

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son una muestra aleatoria tomada de una distribución con media μ, entonces $\overline{X}$ es un estimador sesgado de μ. Si además la distribución es continua y simétrica, entonces $\widetilde{X}$ y cualquier media recortada también son estimadores insesgados de μ.

El hecho de que $\overline{X}$ sea insesgado es simplemente el replanteamiento de una de las reglas de valor esperado: $E(\overline{X}) = \mu$ para cada valor posible de μ (para distribuciones discretas y continuas). La ausencia de sesgo de los demás estimadores es más difícil de verificar.

El siguiente ejemplo introduce otra situación en la cual existen varios estimadores insesgados para un parámetro particular.

EJEMPLO 6.5 En ciertas circunstancias los contaminantes orgánicos se adhieren con facilidad a la superficie de las láminas y deterioran los dispositivos de fabricación de los semiconductores. El artículo **"Ceramic Chemical Filter for Removal of Organic Contaminants" (*J. of the Institute of Environmental Sciences and Technology*, 2003: 59–65)** menciona una alternativa, recientemente desarrollada, de filtros de carbón convencionales para eliminar la contaminación molecular del aire en aplicaciones de salas limpias. Un aspecto de la investigación del desempeño de los filtros implicó estudiar cómo se relaciona la concentración de contaminantes en el aire con la concentración en la superficie de una lámina luego de una exposición prolongada. Considere los siguientes datos representativos de x = concentración de DBP en el aire y y = concentración de DBP en la superficie de las láminas luego de 4 horas de exposición (ambas en $\mu g/m^3$, donde DBP = ftalato de dibutilo).

Láminas	i:	1	2	3	4	5	6
	x:	.8	1.3	1.5	3.0	11.6	26.6
	y:	.6	1.1	4.5	3.5	14.4	29.1

Los autores argumentan que la "adhesión de DBP en la superficie de láminas fue aproximadamente proporcional a la concentración de DBP en el aire". La figura 6.3 muestra una gráfica de y contra x, es decir, de pares (x, y).

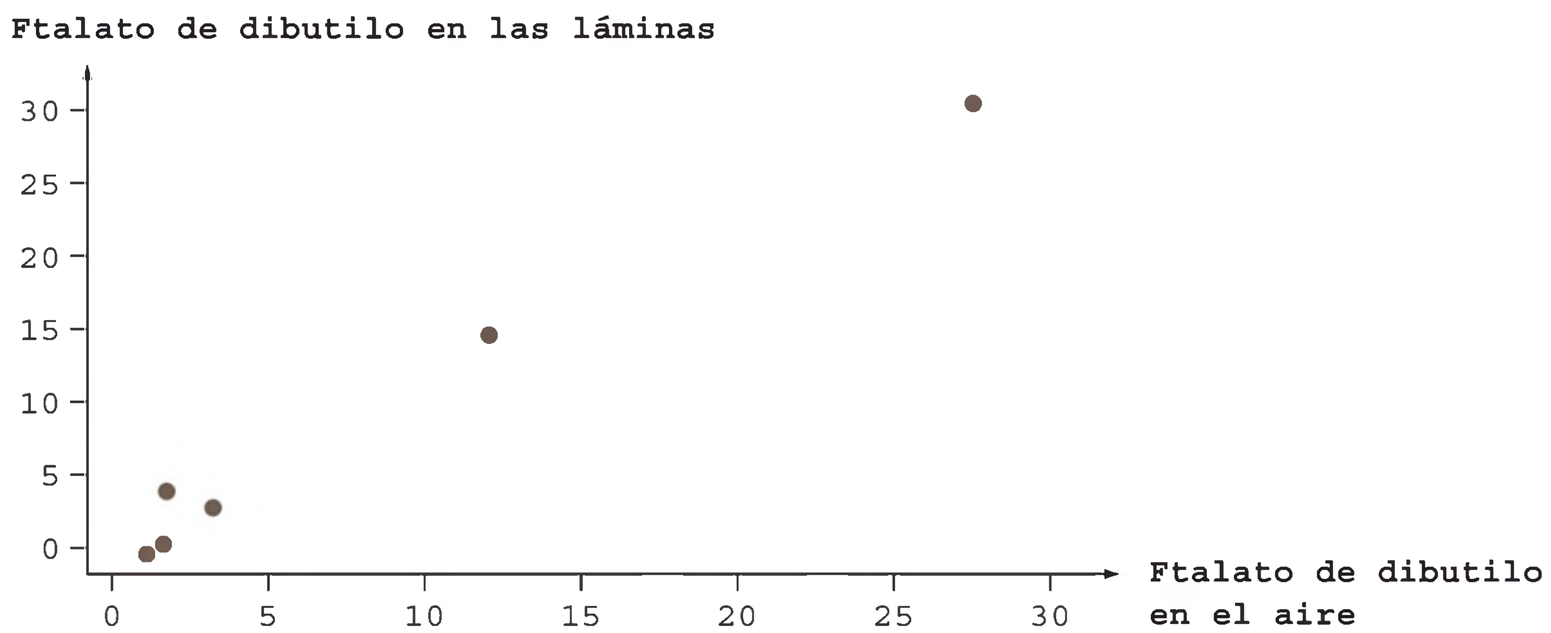


Figura 6.3 Gráfica de los datos de ftalato de dibutilo del ejemplo 6.5

Si y fuera exactamente proporcional a x, se tendría $y = \beta x$ para algún valor β lo cual expresa que los puntos (x, y) en la gráfica quedarían exactamente sobre una línea recta con pendiente β que pasa por (0, 0). Pero esto sólo es aproximadamente el caso. Así que a continuación se supone que para cualquier x fija la concentración de DBP en las láminas es una variable aleatoria Y con media βx. Es decir, se postula que la *media* de Y está relacionada con x mediante una recta que pasa por (0, 0) pero que el valor observado de Y en general se desviará de esta recta (esto se conoce en la literatura estadística como "regresión a través del origen").

Considere los siguientes tres estimadores para el parámetro de la pendiente β:

$$\#1: \hat{\beta} = \frac{1}{n}\sum\frac{Y_i}{x_i} \quad \#2: \hat{\beta} = \frac{\sum Y_i}{\sum x_i} \quad \#3: \hat{\beta} = \frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2}$$

Las estimaciones resultantes basadas en los datos dados son 1.3497, 1.1875 y 1.1222, respectivamente. Así que de manera definitiva la estimación depende de qué estimador se utilice. Si uno de estos tres estimadores fuera insesgado y los otros dos fueran sesgados habría un buen motivo para utilizar el insesgado. Pero los tres son insesgados; el argumento se apoya en el hecho de que cada uno es una función lineal de las Y_i (aquí se supone que las x_i son fijas, no aleatorias):

$$E\left(\frac{1}{n}\sum\frac{Y_i}{x_i}\right) = \frac{1}{n}\sum\frac{E(Y_i)}{x_i} = \frac{1}{n}\sum\frac{\beta x_i}{x_i} = \frac{1}{n}\sum\beta = \frac{n\beta}{n} = \beta$$

$$E\left(\frac{\sum Y_i}{\sum x_i}\right) = \frac{1}{\sum x_i}E\left(\sum Y_i\right) = \frac{1}{\sum x_i}\left(\sum \beta x_i\right) = \frac{1}{\sum x_i}\beta\left(\sum x_i\right) = \beta$$

$$E\left(\frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2}\right) = \frac{1}{\sum x_i^2}E\left(\sum x_i Y_i\right) = \frac{1}{\sum x_i^2}\left(\sum x_i \beta x_i\right) = \frac{1}{\sum x_i^2}\beta\left(\sum x_i^2\right) = \beta$$

■

Tanto en el ejemplo anterior como en la situación que implica estimar una media de población normal, no puede ser invocado el principio de ausencia de sesgo (preferir un estimador insesgado a uno sesgado) para seleccionar un estimador. Lo que ahora se requiere es un criterio para elegir entre estimadores sesgados.

Estimadores con varianza mínima

Suponga que $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ son dos estimadores de θ insesgados. Entonces, aunque la distribución de cada estimador esté centrada en el valor verdadero de θ, las dispersiones de las distribuciones en torno al valor verdadero pueden ser diferentes.

Principio de estimación insesgada con varianza mínima

Entre todos los estimadores de θ insesgados se selecciona el de varianza mínima. El $\hat{\theta}$ resultante se llama **estimador insesgado con varianza mínima** (**MVUE** por sus siglas en inglés) de θ.

La figura 6.4(a) muestra las distribuciones de dos diferentes estimadores insesgados. Es más probable el uso del estimador con la distribución más concentrada en lugar de otros para producir una estimación más cercana a θ. La figura 6.4(b) muestra las estimaciones de dos estimadores basados en 10 muestras diferentes. El MVUE es, en cierto sentido, el que tiene más probabilidades entre todos los estimadores insesgados para producir una estimación cercana al θ verdadero.

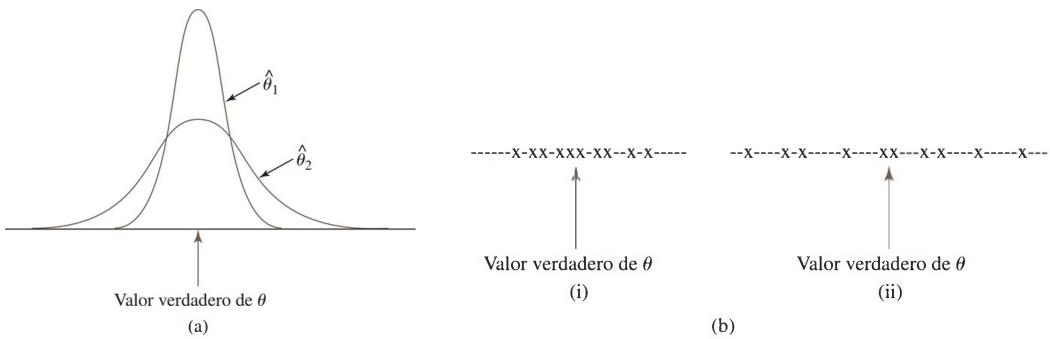


Figura 6.4 (a) Distribuciones de dos estimadores insesgados diferentes (b) Estimaciones basadas en 10 muestras diferentes.

En el ejemplo 6.5, Suponga que cada Y_i está normalmente distribuida con media βx_i y varianza σ^2 (se asume una varianza constante). Entonces se puede demostrar que el tercer estimador $\hat{\beta} = \Sigma x_i Y_i / \Sigma x_i^2$ no sólo tiene una varianza más pequeña que cualquiera de los otros dos estimadores insesgados, sino que de hecho es el estimador insesgado con varianza mínima; tiene una varianza más pequeña que *cualquier* otro estimador insesgado de β.

EJEMPLO 6.6 En el ejemplo 6.4 se argumentó que cuando $X_1, X_2, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria tomada de una distribución uniforme en el intervalo $[0, \theta]$, el estimador

$$\hat{\theta}_1 = \frac{n+1}{n} \cdot \text{máx}\,(X_1, \ldots, X_n)$$

es insesgado para θ (previamente este estimador se denotó con $\hat{\theta}_2$). Este no es el único estimador insesgado de θ. El valor esperado de una variable aleatoria uniformemente distribuida es simplemente el punto medio del intervalo de densidad positiva, por tanto, $E(X_i) = \theta/2$. Esto implica que $E(\overline{X}) = \theta/2$, a partir de la cual $E(2\overline{X}) = \theta$. Es decir, el estimador $\hat{\theta}_2 = 2\overline{X}$ es insesgado para θ.

Si X está uniformemente distribuida en el intervalo de A a B, entonces $V(X) = \sigma^2 = (B - A)^2/12$. Así pues, en esta situación, $V(X_i) = \theta^2/12$, $V(\overline{X}) = \sigma^2/n = \theta^2/(12n)$ y $V(\hat{\theta}_2) = V(2\overline{X}) = 4V(\overline{X}) = \theta^2/(3n)$. Se pueden utilizar los resultados del ejercicio 32 para demostrar que $V(\hat{\theta}_1) = \theta^2/[n(n+2)]$. El estimador $\hat{\theta}_1$ tiene una varianza más pequeña que $\hat{\theta}_2$ si $3n < n(n+2)$; es decir, si $0 < n^2 - n = n(n-1)$. Mientras que $n > 1$, $V(\hat{\theta}_1) < V(\hat{\theta}_2)$, así que $\hat{\theta}_1$ es mejor estimador que $\hat{\theta}_2$. Se pueden utilizar métodos más avanzados para demostrar que $\hat{\theta}_1$ es el estimador insesgado con varianza mínima de θ; cualquier otro estimador insesgado de θ tiene una varianza que excede a $\theta^2/[n(n+2)]$. ■

Uno de los triunfos de la estadística matemática ha sido el desarrollo de una metodología para identificar el estimador insesgado con varianza mínima en una amplia variedad de situaciones. Para nuestros propósitos el resultado más importante de este tipo tiene que ver con la estimación de la media μ de una distribución normal.

TEOREMA

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria tomada de una distribución normal con parámetros μ y σ. Entonces el estimador $\hat{\mu} = \overline{X}$ es el estimador insesgado con varianza mínima para μ.

Siempre que exista la seguridad de que la población que se está muestreando es normal, el teorema dice que debe usarse $\overline{x}$ para estimar μ. Entonces, en el ejemplo 6.2 la estimación sería $\overline{x} = 27.793$.

En algunas situaciones es posible obtener un estimador con sesgo pequeño que se preferirá al mejor estimador insesgado. Esto se ilustra en la figura 6.5. Sin embargo, los estimadores insesgados con varianza mínima a menudo son más fáciles de obtener que el tipo de estimador sesgado cuya distribución se ilustra.

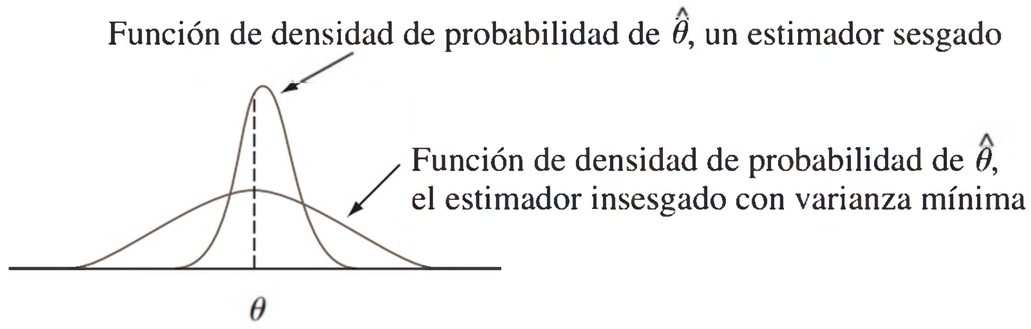


Figura 6.5 Un estimador sesgado que es preferible al estimador insesgado con varianza mínima

Algunas complicaciones

El último teorema no dice que al estimar la media μ de una población se debe utilizar el estimador $\overline{X}$, independientemente de la distribución que se está muestreando.

EJEMPLO 6.7 Suponga que se desea estimar la conductividad térmica μ de un material. Con técnicas de medición estándar se obtendrá una muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$ de n mediciones de conductividad térmica. Suponga que la distribución de la población es miembro de una de las siguientes tres familias:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \quad -\infty < x < \infty \tag{6.1}$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi\beta[1 + ((x-\mu)/\beta)^2]} \quad -\infty < x < \infty \tag{6.2}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2c} & \mu - c \le x \le \mu + c \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases} \tag{6.3}$$

La función de densidad de probabilidad (6.1) es la distribución normal, a (6.2) se le llama distribución de Cauchy y (6.3) es una distribución uniforme. Las tres distribuciones son simétricas respecto a μ y, de hecho, la distribución de Cauchy tiene forma de campana pero con colas mucho más gruesas (más probabilidad hacia fuera) que la curva normal. La distribución uniforme no tiene colas. Los cuatro estimadores de μ considerados con anterioridad son $\overline{X}$, $\widetilde{X}$, $\overline{X}_e$ (el promedio de las dos observaciones extremas) y $\overline{X}_{\text{rec(10)}}$, una media recortada.

La muy importante moraleja en este caso es que el mejor estimador de μ depende crucialmente de qué distribución está siendo muestreada. En particular,

1. Si la muestra aleatoria proviene de una distribución normal, $\overline{X}$ es el mejor de los cuatro estimadores, puesto que tiene una varianza mínima entre todos los estimadores insesgados.
2. Si la muestra aleatoria proviene de una distribución de Cauchy, entonces $\overline{X}$ y $\overline{X}_e$ son estimadores terribles de μ, en tanto que $\widetilde{X}$ es bastante bueno (el estimador insesgado con varianza mínima no es conocido); $\overline{X}$ es malo porque es muy sensible a las observaciones subyacentes y las colas gruesas de la distribución de Cauchy hacen que sea improbable que aparezcan tales observaciones en cualquier muestra.
3. Si la distribución subyacente es uniforme, el mejor estimador es $\overline{X}_e$; este estimador está influido en gran medida por las observaciones subyacentes, pero la carencia de colas hace que tales observaciones sean imposibles.
4. *En ninguna de estas tres situaciones es mejor la media recortada pero funciona razonablemente bien en las tres*. Es decir, $\overline{X}_{\text{rec}(10)}$ no sufre demasiado en comparación con el mejor procedimiento en cualquiera de las tres situaciones. ■

Más generalmente, investigaciones recientes en estadística han establecido que cuando se estima un punto de simetría μ de una distribución de probabilidad continua, una media recortada con proporción de recorte de 10 o 20% (para cada extremo de la muestra) produce estimaciones razonablemente comportadas dentro de un rango muy amplio de posibles modelos. Por esta razón se dice que una media recortada con poco porcentaje de recorte es un **estimador robusto**.

En algunas situaciones, la selección no es entre dos estimadores diferentes construidos con la misma muestra, sino entre estimadores basados en dos experimentos distintos.

EJEMPLO 6.8 Suponga que cierto tipo de componente tiene una distribución de vida útil exponencial con parámetro λ, de modo que la vida útil esperada es $\mu = 1/\lambda$. Se selecciona una muestra n de esos componentes y cada uno es puesto en operación. Si el experimento continúa hasta que todas las n vidas útiles $X_1, \ldots, X_n$ han sido observadas, $\overline{X}$ es un estimador insesgado de μ.

En algunos experimentos, sin embargo, los componentes se dejan en operación sólo hasta el tiempo de la r-ésima falla donde $r < n$. Este procedimiento se conoce como **censura**. Sea Y_1 el tiempo de la primera falla (la vida útil mínima entre los n componentes) y Y_2 el tiempo en el cual ocurre la segunda falla (la segunda vida útil más pequeña) y así sucesivamente. Puesto que el experimento termina en el tiempo Y_r, la vida útil acumulada al final es

$$T_r = \sum_{i=1}^{r} Y_i + (n - r)Y_r$$

A continuación se demuestra que $\hat{\mu} = T_r/r$ es un estimador insesgado de μ. Para hacerlo se requieren dos propiedades de las variables exponenciales:

1. La propiedad de no memoria (véase la sección 4.4), la cual dice que en cualquier punto de tiempo, la vida útil restante tiene la misma distribución exponencial que la vida útil original.
2. Si $X_1, \ldots, X_k$ son independientes, cada mín$(X_1, \ldots, X_k)$ exponencialmente distribuida con parámetro λ, es exponencial con parámetro $k\lambda$.

A partir de que los n componentes duran hasta Y_1, $n - 1$ duran una cantidad de tiempo $Y_2 - Y_1$, $n - 2$ adicional duran una cantidad de tiempo $Y_3 - Y_2$ adicional, y así sucesivamente, otra expresión para T_r es

$$\begin{aligned} T_r = {} & nY_1 + (n - 1)(Y_2 - Y_1) + (n - 2)(Y_3 - Y_2) + \cdots \\ & + (n - r + 1)(Y_r - Y_{r-1}) \end{aligned}$$

Pero Y_1 es la mínima de n variables exponenciales, por tanto $E(Y_1) = 1/(n\lambda)$. Asimismo, $Y_2 - Y_1$ es la más pequeña de las $n - 1$ vidas útiles restantes, cada una exponencial

con parámetro λ (por la propiedad de no memoria), así que $E(Y_2 - Y_1) = 1/[(n-1)\lambda]$. Continuando, $E(Y_{i+1} - Y_i) = 1/[(n-i)\lambda]$ por lo que

$$\begin{aligned} E(T_r) &= nE(Y_1) + (n-1)E(Y_2 - Y_1) + \cdots + (n-r+1)E(Y_r - Y_{r-1}) \\ &= n \cdot \frac{1}{n\lambda} + (n-1) \cdot \frac{1}{(n-1)\lambda} + \cdots + (n-r+1) \cdot \frac{1}{(n-r+1)\lambda} \\ &= \frac{r}{\lambda} \end{aligned}$$

Por consiguiente, $E(T_r/r) = (1/r)E(T_r) = (1/r) \cdot (r/\lambda) = 1/\lambda = \mu$ como se proponía.

Por ejemplo, suponga que se prueban 20 componentes y $r = 10$. Si los primeros diez tiempos de falla son 11, 15, 29, 33, 35, 40, 47, 55, 58 y 72 la estimación de μ es

$$\hat{\mu} = \frac{11 + 15 + \cdots + 72 + (10)(72)}{10} = 111.5$$

La ventaja del experimento con censura es que termina más rápido que el experimento sin censura. Sin embargo, se puede demostrar que $V(T_r/r) = 1/(\lambda^2 r)$, que es más grande que $1/(\lambda^2 n)$, la varianza de $\overline{X}$ en el experimento sin censura. ■

Reporte de una estimación puntual: El error estándar

Además de reportar el valor de una estimación puntual se debe dar alguna indicación de su precisión. La medición usual de precisión es el error estándar del estimador usado.

DEFINICIÓN

El **error estándar** de un estimador $\hat{\theta}$ es su desviación estándar $\sigma_{\hat{\theta}} = \sqrt{V(\hat{\theta})}$. Esta es la magnitud de una desviación típica o representativa entre una estimación y el valor de θ. Si el error estándar implica parámetros desconocidos cuyos valores pueden ser estimados, la sustitución de estas estimaciones en $\sigma_{\hat{\theta}}$ da el **error estándar estimado** (desviación estándar estimada) del estimador. El error estándar estimado puede ser denotado por $\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}$ (el ^ sobre σ recalca que $\sigma_{\hat{\theta}}$ está siendo estimada) o por $s_{\hat{\theta}}$.

EJEMPLO 6.9 (Continuación del ejemplo 6.2)

Suponiendo que el voltaje de ruptura está normalmente distribuido, $\hat{\mu} = \overline{X}$ es la mejor estimación de μ. Si se sabe que el valor de σ es 1.5, el error estándar de $\overline{X}$ es $\sigma_{\overline{X}} = \sigma/\sqrt{n} = 1.5/\sqrt{20} = .335$. Si, como casi siempre es el caso, el valor de σ es desconocido, la estimación $\hat{\sigma} = s = 1.462$ se sustituye en $\sigma_{\overline{X}}$ para obtener el error estándar estimado $\hat{\sigma}_{\overline{X}} = s_{\overline{X}} = s/\sqrt{n} = 1.462/\sqrt{20} = .327$. ■

EJEMPLO 6.10 (Continuación del ejemplo 6.1)

El error estándar de $\hat{p} = X/n$ es

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{V(X/n)} = \sqrt{\frac{V(X)}{n^2}} = \sqrt{\frac{npq}{n^2}} = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

A partir de que p y $q = 1 - p$ son desconocidas (¿qué otra razón para estimarlas?), se sustituyen $\hat{p} = x/n$ y $\hat{q} = 1 - x/n$ en $\sigma_{\hat{p}}$, para obtener el error estándar estimado $\hat{\sigma}_{\hat{p}} = \sqrt{\hat{p}\hat{q}/n} = \sqrt{(.6)(.4)/25} = .098$. Alternativamente, puesto que el valor más grande de pq se obtiene cuando $p = q = .5$, un límite superior en el error estándar es $\sqrt{1/(4n)} = .10$. ■

Cuando la distribución del estimador puntual $\hat{\theta}$ es aproximadamente normal, lo cual será frecuente cuando n sea grande, entonces se puede confiar de manera razonable en que

el valor verdadero de θ queda dentro de aproximadamente 2 errores estándar (desviaciones estándar) de $\hat{\theta}$. De este modo, si una muestra de $n = 36$ vidas útiles de componentes da $\hat{\mu} = \bar{x} = 28.50$ y $s = 3.60$, entonces $s/\sqrt{n} = .60$, por tanto, dentro de dos errores estándar estimados, $\hat{\mu}$ se traslada al intervalo $28.50 \pm (2)(.60) = (27.30, 29.70)$

Si $\hat{\theta}$ no necesariamente es aproximadamente normal, pero es insesgado, entonces se puede demostrar que la estimación se desviará de θ hasta por 4 errores estándar cuando mucho 6% del tiempo. Se esperaría entonces que el valor verdadero quedara dentro de 4 errores estándar de $\hat{\theta}$ (y esta es una afirmación muy conservadora, puesto que se aplica a cualquier $\hat{\theta}$ insesgado). En resumen, el error estándar indica aproximadamente a qué distancia de $\hat{\theta}$ se puede esperar que quede el valor verdadero de θ.

La forma del estimador $\hat{\theta}$ puede ser suficientemente complicada, de modo que la teoría estadística estándar no pueda aplicarse para obtener una expresión para $\sigma_{\hat{\theta}}$. Esto es así, por ejemplo, en el caso $\theta = \sigma$, $\hat{\theta} = S$; la desviación estándar del estadístico S, σ_S, en general no puede ser determinada. No hace mucho se introdujo un método de computadora intensivo llamado **bootstrap** para abordar este problema. Suponga que la función de densidad de probabilidad de la población es $f(x; \theta)$, un miembro de una familia paramétrica particular, y que los datos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dan $\hat{\theta} = 21.7$. Ahora se utiliza la computadora para obtener "muestras *bootstrap*" tomadas de la función de densidad de probabilidad $f(x; 21.7)$, y por cada muestra se calcula una "estimación *bootstrap*" $\hat{\theta}^*$:

Primera muestra "*bootstrap*": $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$; estimación $= \hat{\theta}_1^*$
Segunda muestra "*bootstrap*": $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$; estimación $= \hat{\theta}_2^*$
$\vdots$
B-ésima muestra *bootstrap*: $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$; estimación $= \hat{\theta}_B^*$

A menudo se utiliza $B = 100$ o 200. Ahora sea $\bar{\theta}^* = \Sigma\hat{\theta}_i^*/B$, la media muestral de las estimaciones *bootstrap*. La **estimación *bootstrap*** del error estándar de $\hat{\theta}$ ahora es simplemente la desviación estándar muestral de los $\hat{\theta}_i^*$:

$$s_{\hat{\theta}} = \sqrt{\frac{1}{B-1}\sum(\hat{\theta}_i^* - \bar{\theta}^*)^2}$$

(En la literatura sobre *bootstrap* a menudo se utiliza B en lugar de $B - 1$; para valores típicos de B casi siempre hay poca diferencia entre las estimaciones resultantes.)

EJEMPLO 6.11 Un modelo teórico sugiere que X, el tiempo para la ruptura de un fluido aislante entre electrodos a un voltaje particular, tiene $f(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$, una distribución exponencial. Una muestra aleatoria de $n = 10$ tiempos de ruptura (minutos) da los datos siguientes:

41.53 18.73 2.99 30.34 12.33 117.52 73.02 223.63 4.00 26.78

Puesto que $E(X) = 1/\lambda$, $E(\bar{X}) = 1/\lambda$, una estimación razonable de λ es $\hat{\lambda} = 1/\bar{x} = 1/55.087 = .018153$. Se utiliza entonces un paquete informático de estadística para obtener $B = 100$ muestras *bootstrap*, cada una de tamaño 10, provenientes de $f(x; .018153)$. La primera muestra fue 41.00, 109.70, 16.78, 6.31, 6.76, 5.62, 60.96, 78.81, 192.25, 27.61, con la cual $\Sigma x_i^* = 545.8$ y $\hat{\lambda}_1^* = 1/54.58 = .01832$. El promedio de las 100 estimaciones *bootstrap* es $\bar{\lambda}^* = .02153$, y la desviación estándar muestral de estas 100 estimaciones es $s_{\hat{\lambda}} = .0091$, la estimación *bootstrap* del error estándar de $\hat{\lambda}$. Un histograma de los $100\hat{\lambda}_i^*$ resultó un tanto positivamente asimétrico, lo que sugiere que la distribución muestral de $\hat{\lambda}$ también tiene esta propiedad. ■

En ocasiones un investigador desea estimar una característica poblacional sin suponer que la distribución de la población pertenece a una familia paramétrica particular. Una instancia de esto ocurrió en el ejemplo 6.7, cuando una media recortada 10% fue propuesta

para estimar el centro θ de una distribución de población simétrica. Los datos del ejemplo 6.2 dieron $\hat{\theta} = \bar{x}_{\text{rec}(10)} = 27.838$, pero ahora no hay ninguna $f(x; \theta)$ supuesta, por consiguiente, ¿cómo se puede obtener una muestra *bootstrap*? La respuesta es considerar que la muestra constituye la población (las $n = 20$ observaciones en el ejemplo 6.2) y tome B muestras diferentes, cada una de tamaño n, *con* reemplazo, de esta población. Varios de los libros listados en la bibliografía de este capítulo proporcionan más información acerca del *bootstrap*.

EJERCICIOS **Sección 6.1 (1–19)**

1. Los siguientes datos sobre resistencia a la flexión (MPa) de un tipo de vigas de concreto se mencionan en el ejemplo 1.2.

5.9	7.2	7.3	6.3	8.1	6.8	7.0
7.6	6.8	6.5	7.0	6.3	7.9	9.0
8.2	8.7	7.8	9.7	7.4	7.7	9.7
7.8	7.7	11.6	11.3	11.8	10.7	

a. Calcule una estimación puntual de la media de resistencia de la población conceptual de todas las vigas fabricadas de esta manera y mencione qué estimador utilizó. [*Sugerencia*: $\Sigma x_i = 219.8$.]

b. Calcule una estimación puntual del valor de resistencia que separa el 50% más débil de dichas vigas del 50% más resistente, y diga qué estimador utilizó.

c. Calcule e interprete una estimación puntual de la desviación estándar de la población σ. ¿Qué estimador utilizó? [*Sugerencia*: $\Sigma x_i^2 = 1860.94$.]

d. Calcule una estimación puntual de la proporción de las vigas cuya resistencia a la flexión exceda de 10 MPa. [*Sugerencia*: Considere una observación como "éxito" si excede de 10.]

e. Calcule una estimación puntual del coeficiente de variación de la población σ/μ y mencione qué estimador utilizó.

2. El **National Health and Nutrition Examination Survey (NHANES)** recopila información demográfica, socioeconómica, dietética y relacionada con la salud sobre una base anual. Aquí tenemos una muestra de 20 observaciones en el nivel de colesterol HDL (mg/dl) obtenidos de la encuesta 2009-2010 (HDL es el colesterol "bueno"; cuanto mayor sea su valor menor es el riesgo de enfermedad cardiaca):

35	49	52	54	65	51	51
47	86	36	46	33	39	45
39	63	95	35	30	48	

a. Calcule un punto de estimación de la media poblacional del colesterol HDL.

b. Sin hacer suposiciones acerca la forma de la distribución de la población, calcule un punto de estimación de punto del valor que separa el 50% más grande de los niveles de HDL en el 50% más pequeño.

c. Calcule un punto de estimación de la desviación estándar de la población.

d. Un nivel de HDL de menos de 60 se considera deseable ya que corresponde a un menor riesgo de enfermedad cardiaca. Sin hacer ninguna hipótesis acerca de la forma de la distribución de la población, estime la proporción p de la población que tiene un nivel de HDL de menos de 60.

3. Considere la siguiente muestra de observaciones sobre el espesor del recubrimiento de pintura de baja viscosidad (**"Achieving a Target Value for a Manufacturing Process: A Case Study", *J. of Quality Technology*, 1992: 22–26**):

.83	.88	.88	1.04	1.09	1.12	1.29	1.31
1.48	1.49	1.59	1.62	1.65	1.71	1.76	1.83

Suponga que la distribución del espesor del recubrimiento es normal (una gráfica de probabilidad normal avala firmemente esta suposición).

a. Calcule la estimación puntual de la media del espesor de recubrimiento y diga qué estimador utilizó.

b. Calcule una estimación puntual de la mediana de la distribución del espesor de recubrimiento y diga qué estimador utilizó.

c. Calcule la estimación puntual del valor que separa el 10% más grande de todos los valores de la distribución del espesor del restante 90% y diga qué estimador utilizó. [*Sugerencia*: Exprese lo que está tratando de estimar en función de μ y σ.]

d. Estime $P(X < 1.5)$; es decir, la proporción de todos los valores de espesor menor de 1.5. [*Sugerencia*: Si conociera los valores de μ y σ podría calcular esta probabilidad. Estos valores no están disponibles, pero pueden ser estimados.]

e. ¿Cuál es el error estándar estimado del estimador que utilizó en el inciso b)?

4. El artículo del cual se tomaron los datos en el ejercicio 1 también dio las siguientes observaciones de las resistencias de los cilindros:

6.1	5.8	7.8	7.1	7.2	9.2	6.6	8.3	7.0	8.3
7.8	8.1	7.4	8.5	8.9	9.8	9.7	14.1	12.6	11.2

Antes de obtener los datos denote las resistencias de las vigas mediante $X_1, \ldots, X_m$ y las resistencias de los cilindros $Y_1, \ldots, Y_m$. Suponga que las X_i constituyen una muestra

aleatoria de una distribución con media μ_1 y desviación estándar σ_1 y que las Y_i forman una muestra aleatoria (independiente de las X_i) de otra distribución con media μ_2 y desviación estándar σ_2.

a. Use las reglas de valor esperado para demostrar que $\overline{X} - \overline{Y}$ es un estimador insesgado de $\mu_1 - \mu_2$. Calcule el estimador para los datos dados.

b. Use las reglas de varianza del capítulo 5 para obtener una expresión para la varianza y la desviación estándar (error estándar) del estimador del inciso a) y luego calcule el error estándar estimado.

c. Calcule una estimación puntual de la razón σ_1/σ_2 de las dos desviaciones estándar.

d. Suponga que se seleccionan al azar una sola viga y un solo cilindro. Calcule una estimación puntual de la varianza de la diferencia $\overline{X} - \overline{Y}$ entre la resistencia de las vigas y la resistencia de los cilindros.

5. Como ejemplo de una situación en la que distintos estadísticos podrían ser razonablemente utilizados para calcular una estimación puntual considere una población de N facturas. Asociado a cada factura se encuentra su "valor en libros", el importe registrado de dicha factura. Sea T el valor total en libros, una cantidad conocida. Algunos de estos valores en libros son erróneos. Se realizará una auditoría, se seleccionarán al azar n facturas y se determinará el valor auditado (correcto) para cada una. Suponga que la muestra aporta los siguientes resultados (en dólares).

	Factura				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
Valor en libros	300	720	526	200	127
Valor auditado	300	520	526	200	157
Error	0	200	0	0	−30

Sea

$\overline{Y}$ = media muestral de libros

$\overline{X}$ = media muestral auditada

$\overline{D}$ = error medio muestral

Proponga tres estadísticos diferentes para estimar el valor total (correcto) auditado: uno que implique exactamente N y $\overline{X}$, otro que implique T, N y $\overline{D}$ y el último que implique T y $\overline{X}/\overline{Y}$. Si $N = 5000$ y $T = 1\ 761\ 300$, calcule las tres estimaciones puntuales correspondientes. (El artículo **"Statistical Models and Analysis in Auditing", *Statistical Science*, 1989: 2-33**, aborda las propiedades de estos tres estimadores.)

6. El nivel urinario angiotensinógeno (AGT) es un indicador cuantitativo de la función renal. El artículo **"Urinary Angiotensinogen as a Potential Biomarker of Chronic Kidney Diseases" (*J. of the Amer. Society of Hypertension*, 2008: 349–354)** describe un estudio en el que se determinó el nivel urinario AGT (μg) para una muestra de adultos con enfermedad renal crónica. Aquí le damos datos representativos (coherentes con las cantidades y las descripciones resumidas en el citado artículo):

2.6	6.2	7.4	9.6	11.5	13.5	14.5	17.0
20.0	28.8	29.5	29.5	41.7	45.7	56.2	56.2
66.1	66.1	67.6	74.1	97.7	141.3	147.9	177.8
186.2	186.2	190.6	208.9	229.1	229.1	288.4	288.4
346.7	407.4	426.6	575.4	616.6	724.4	812.8	1122.0

Una gráfica de probabilidad adecuada apoya el uso de la distribución lognormal (véase la sección 4.5) como un modelo razonable del nivel urinario AGT (esto es lo que hicieron los investigadores).

a. Estime los parámetros de la distribución. [*Sugerencia*: Recuerde que X tiene una distribución lognormal con parámetros μ y σ^2 si $\ln(X)$ se distribuye normalmente con media μ y varianza σ^2.]

b. Utilice las estimaciones del inciso a) para calcular una estimación del valor esperado del nivel AGT. [*Sugerencia*: ¿Qué es $E(X)$?]

7. a. Se selecciona una muestra aleatoria de 10 casas en un área particular, cada una de las cuales se calienta con gas natural, y se determina la cantidad de gas (*therms*) que utiliza cada casa durante el mes de enero. Las observaciones que resultan son: 103, 156, 118, 89, 125, 147, 122, 109, 138, 99. Sea μ el consumo promedio de gas de todas las casas del área durante enero. Calcule una estimación puntual de μ.

b. Suponga que 10 000 casas en esta área utilizan gas natural para calefacción. Sea τ la cantidad total del gas que cosumieron todas estas casas durante enero. Calcule τ con los datos del inciso a). ¿Qué estimador utilizó para calcular su estimación?

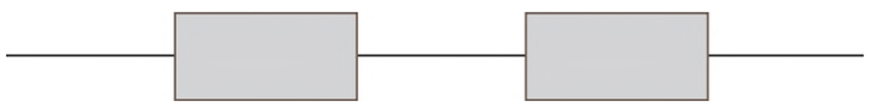
c. Use los datos del inciso a) para estimar p, la proporción de todas las casas que usaron al menos 100 *terms*.

d. Proporcione una estimación puntual de la mediana de la población usada (el valor intermedio en la población de todas las casas) con base en la muestra del inciso a). ¿Qué estimador utilizó?

8. En una muestra aleatoria de 80 componentes de un tipo se encontraron 12 defectuosos.

a. Dé una estimación puntual de la proporción de todos los componentes que *no* están defectuosos.

b. Se tiene que construir un sistema mediante la selección al azar dos de estos componentes y para luego conectarlos en serie, como se muestra a continuación.



La conexión en serie implica que el sistema funcionará si y sólo si ningún componente esta defectuoso (es decir, que ambos componentes funcionen apropiadamente). Estime la proporción de todos los sistemas que funcionan adecuadamente. [*Sugerencia:* Si p denota la probabilidad de que el componente funcione de manera apropiada, ¿cómo puede expresarse P(el sistema funciona) en función de p?]

9. Se examina cada uno de 150 artículos recién fabricados y se anota el número de rayones por artículo (se supone que los

artículos están libres de rayones) y se obtienen los siguientes datos:

Número de rayones por artículo	0	1	2	3	4	5	6	7
Frecuencia observada	18	37	42	30	13	7	2	1

Sea X = el número de rayones en un artículo seleccionado al azar y suponga que X tiene una distribución de Poisson con parámetro μ.

a. Determine un estimador insesgado de μ y calcule la estimación de los datos. [*Sugerencia*: $E(X) = \mu$ para una distribución de Poisson de X, por tanto, $E(\overline{X}) = ?$]

b. ¿Cuál es la desviación estándar (error estándar) de su estimador? Calcule el error estándar estimado. [*Sugerencia*: $\sigma_X^2 = \mu$ con distribución de Poisson X.]

10. Con una larga varilla de longitud μ se va a trazar una gráfica cuadrada en la cual la longitud de cada lado será μ. Por consiguiente, el área de la curva será μ^2. Sin embargo, se desconoce el valor de μ por lo cual decide hacer n mediciones independientes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de la longitud. Suponga que cada X_i tiene una media μ (mediciones insesgadas) y varianza σ^2.

a. Demuestre que $\overline{X}^2$ no es un estimador insesgado de μ^2. [*Sugerencia*: Con cualquier variable aleatoria Y, $E(Y^2) = V(Y) + [E(Y)]^2$. Aplique esta con $Y = \overline{X}$.]

b. ¿Para qué valor de k el estimador $\overline{X}^2 - kS^2$ es insesgado para μ^2? [*Sugerencia*: Calcule $E(\overline{X}^2 - kS^2)$.]

11. De n_1 varones fumadores seleccionados al azar, X_1 fuman cigarrillos con filtro, mientras que de n_2 fumadoras seleccionadas fuman cigarrillos con filtro. Sean p_1 y p_2 las probabilidades de que un varón y una mujer seleccionados al azar fumen, ambos, cigarrillos con filtro.

a. Demuestre que $(X_1/n_1) - (X_2/n_2)$ es un estimador insesgado de $p_1 - p_2$. [*Sugerencia*: $E(X_i) = n_i p_i$ con $i = 1, 2$.]

b. ¿Cuál es el error estándar del estimador en el inciso a)?

c. ¿Cómo utilizaría los valores observados x_1 y x_2 para estimar el error estándar de su estimador?

d. Si $n_1 = n_2 = 200$, $x_1 = 127$ y $x_2 = 176$, use el estimador del inciso a) para obtener una estimación de $p_1 - p_2$.

e. Use el resultado del inciso c) y los datos del inciso d) para estimar el error estándar del estimador.

12. Suponga que un tipo de fertilizante rinde por acre μ_1 con varianza σ^2, mientras que el rendimiento esperado de un segundo tipo de fertilizante es μ_2, con la misma varianza σ^2. Sean S_1^2 y S_2^2 las varianzas muestrales de los rendimientos basadas en tamaños muestrales n_1 y n_2, respectivamente, de los dos fertilizantes. Demuestre que el estimador combinado

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

es un estimador insesgado de σ^2.

13. Considere una muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$ de la función de densidad de probabilidad

$$f(x; \theta) = .5(1 + \theta x) \quad -1 \le x \le 1$$

donde $-1 \le \theta \le 1$ (esta distribución se presenta en la física de partículas). Demuestre que es un estimador insesgado de θ. [*Sugerencia*: Primero determine $\mu = E(X) = E(\overline{X})$.]

14. Una muestra de n aviones de combate *Pandemonium* capturados tienen los números de serie $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. La Agencia Central de Inteligencia (CIA) sabe que los aviones fueron numerados consecutivamente en la fábrica comenzando con α y terminando con β, por lo que el número total de aviones fabricados es $\beta - \alpha + 1$ (p. ej., si $\alpha = 17$ y $\beta = 29$, entonces fueron fabricados $29 - 17 + 1 = 13$ aviones con números de serie 17, 18, 19, . . . , 28, 29). Sin embargo, la CIA no conoce los valores de α ni β. Un estadístico de la CIA sugiere utilizar el estimador máx(X_i) − mín$(X_i) + 1$ para estimar el número total de aviones fabricados.

a. Si $n = 5$, $x_1 = 237$, $x_2 = 375$, $x_3 = 202$, $x_4 = 525$ y $x_5 = 418$, ¿cuál es la estimación correspondiente?

b. ¿En qué condiciones de la muestra será el valor de la estimación exactamente igual al número total verdadero de aviones? ¿Alguna vez será más grande la estimación que el total verdadero? ¿Piensa que el estimador es insesgado para estimar $\beta - \alpha + 1$? Explique en uno o dos renglones.

15. Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ representan una muestra aleatoria tomada de una distribución de Rayleigh con función de densidad de probabilidad

$$f(x; \theta) = \frac{x}{\theta} e^{-x^2/(2\theta)} \quad x > 0$$

a. Se puede demostrar que $E(X^2) = 2\theta$. Use este hecho para construir un estimador insesgado de θ basado en ΣX_i^2 (y use reglas de valor esperado para demostrar que es insesgado).

b. Calcule θ a partir de las siguientes $n = 10$ observaciones de esfuerzo vibratorio del aspa de una turbina en condiciones específicas:

16.88	10.23	4.59	6.66	13.68
14.23	19.87	9.40	6.51	10.95

16. Suponga que el crecimiento promedio verdadero μ de un tipo de planta durante un periodo de 1 año es idéntico al de un segundo tipo, aunque la varianza del crecimiento del primer tipo es σ^2, en tanto que para el segundo tipo la varianza es $4\sigma^2$. Sean $X_1, \ldots, X_m$, m observaciones de crecimiento independientes del primer tipo [por consiguiente $E(X_i) = \mu$, $V(X_i) = \sigma^2$], y sean $Y_1, \ldots, Y_n$, n observaciones de crecimiento independientes del segundo tipo [$E(Y_i) = \mu$, $V(Y_i) = 4\sigma^2$].

a. Demuestre que el estimador $\hat{\mu} = \delta\overline{X} = (1 - \delta)\overline{Y}$ es insesgado para μ (para $0 < \delta < 1$ el estimador es un promedio pesado de dos medias muestrales simples).

b. Con m y n fijas calcule $V(\hat{\mu})$y luego determine el valor de δ que reduzca al mínimo $V(\hat{\mu})$. [*Sugerencia*: Derive $V(\hat{\mu})$ respecto a δ.]

17. En el capítulo 3 se definió una variable aleatoria binomial negativa como el número de fallas que ocurren antes del r–ésimo éxito en una secuencia de ensayos con éxitos y fallas

independientes e idénticos. La función de masa de probabilidad (pmf) de X es

$$nb(x; r, p) = \binom{x + r - 1}{x} p^r(1 - p)^x \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

a. Suponga que $r \geq 2$. Demuestre que

$$\hat{p} = (r - 1)/(X + r - 1)$$

es un estimador insesgado de p. [*Sugerencia*: Escriba $E(\hat{p})$ y elimine $x + r - 1$ dentro de la suma.]

b. Un reportero desea entrevistar a cinco individuos que apoyan a un candidato y comienza preguntándoles si apoyan (S) o si no apoyan (F) al candidato. Si la secuencia de respuestas es *SFFSFFFSSS*, estime p = la proporción verdadera que apoya al candidato.

18. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una función de densidad de probabilidad $f(x)$ que es simétrica respecto a μ, de modo que $\widetilde{X}$ es un estimador insesgado de μ. Si n es grande se puede demostrar que $V(\widetilde{X}) \approx 1/(4n[f(\mu)]^2)$.

a. Compare $V(\widetilde{X})$ con $V(\overline{X})$ cuando la distribución subyacente es normal.

b. Cuando la función de densidad de probabilidad subyacente es de Cauchy (véase el ejemplo 6.7), $V(\overline{X}) = \infty$, por tanto, $\overline{X}$ es un estimador terrible. Cuando n es grande ¿cuál es $V(\widetilde{X})$ en este caso?

19. Una investigadora desea estimar la proporción de estudiantes en una universidad que han violado el código de honor. Habiendo obtenido una muestra aleatoria de n estudiantes, se da cuenta de que si a cada uno le pregunta "¿Has violado el código de honor?". probablemente reciba algunas respuestas poco veraces. Considere el siguiente esquema, conocido como técnica de **respuesta aleatorizada**. La investigadora forma un mazo de 100 cartas de las cuales 50 son de tipo I y 50 de tipo II.

Tipo I: ¿Has violado el código de honor (sí o no)?

Tipo II: ¿El último dígito de su número telefónico es un 0, 1 o 2 (sí o no)?

A cada estudiante en la muestra aleatoria se le pide que baraje el mazo, que saque una carta y que responda la pregunta con sinceridad. Debido a lo irrelevante de la pregunta en las cartas de tipo II, una respuesta afirmativa ya no estigmatiza al que responde, por tanto, se supone que es una respuesta sincera. Sea p la proporción de quienes violan el código de honor (es decir, la probabilidad de que un estudiante seleccionado al azar sea un infractor) y sea $\lambda = P(\text{respuesta afirmativa})$. Entonces λ y p están relacionados por $\lambda = .5p + (.5)(.3)$.

a. Sea Y el número de respuestas afirmativas, por consiguiente $Y \sim \text{Bin}(n, \lambda)$. Por tanto, Y/n es un estimador insesgado de λ. Deduzca un estimador de p basado en Y. Si $n = 80$ y $y = 20$, ¿cuál es su estimación? [*Sugerencia*: Despeje p de $\lambda = .5p + .15$ y luego sustituya Y/n en lugar de λ.]

b. Use el hecho de que $E(Y/n) = \lambda$ para demostrar que su estimador es insesgado.

c. Si hubiera 70 cartas de tipo I y 30 de tipo II, ¿cuál sería su estimador para p?

6.2 Métodos de estimación puntual

A continuación se discuten dos métodos "constructivos" para obtener estimadores puntuales: el método de momentos y el método de máxima probabilidad. Por *constructivo* se quiere dar a entender que la definición general de cada tipo de estimador sugiere explícitamente cómo obtener el estimador en cualquier problema específico. Aun cuando se prefieren los estimadores de máxima probabilidad a los estimadores de momento, debido a ciertas propiedades de eficiencia, a menudo requieren significativamente más cálculo que estos últimos. En ocasiones es el caso que estos métodos dan estimadores insesgados.

Método de momentos

La idea básica de este método es poder igualar ciertas características muestrales, tales como la media, a los valores esperados de la población correspondiente. Luego, al resolver estas ecuaciones para valores de parámetros desconocidos se obtienen los estimadores.

DEFINICIÓN

Sean $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria proveniente de una función de masa de probabilidad o de una función de densidad de probabilidad $f(x)$. Con $k = 1, 2, 3, \ldots$, el **momento k-ésimo de la población** o el **momento k-ésimo de la distribución $f(x)$**, es $E(X^k)$. El **momento muestral k-ésimo** es $(1/n)\sum_{i=1}^{n} X_i^k$.

Por consiguiente, el primer momento de la población es $E(X) = \mu$ y el primer momento muestral es $\Sigma X_i/n = \overline{X}$. Los segundos momentos de la población y muestral son $E(X^2)$ y $\Sigma X_i^2/n$, respectivamente. Los momentos de la población serán funciones de cualesquiera parámetros desconocidos θ_1, θ_2, ….

DEFINICIÓN

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución con función de masa de probabilidad o función de densidad de probabilidad $f(x; \theta_1, \ldots, \theta_m)$, donde $\theta_1, \ldots, \theta_m$ son parámetros cuyos valores son desconocidos. Entonces los **estimadores de momento** $\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_m$ se obtienen igualando los primeros m momentos muestrales con los primeros m momentos de la población correspondientes y resolviendo para $\theta_1, \ldots, \theta_m$.

Si, por ejemplo, $m = 2$, $E(X)$ y $E(X^2)$ serán funciones de θ_1 y θ_2. Con $E(X) = (1/n)\,\Sigma X_i$ $(= \overline{X})$ y $E(X^2) = (1/n)\,\Sigma X_i^2$ se obtienen dos ecuaciones con θ_1 y θ_2. La solución define entonces los estimadores.

EJEMPLO 6.12 Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ la representación de una muestra aleatoria de tiempos de servicio de n clientes en una instalación, donde la distribución subyacente se supone exponencial con el parámetro λ. Como sólo hay un parámetro que tiene que ser estimado, el estimador se obtiene igualando $E(X)$ a $\overline{X}$. Puesto que $E(X) = 1/\lambda$ con una distribución exponencial, esta da $1/\lambda = \overline{X}$ o $\lambda = 1/\overline{X}$. El estimador de momento de λ es entonces $\hat{\lambda} = 1/\overline{X}$. ■

EJEMPLO 6.13 Sean $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución gamma con parámetros α y β. De acuerdo con la sección 4.4, $E(X) = \alpha\beta$ y $E(X^2) = \beta^2\,\Gamma(\alpha + 2)/\Gamma(\alpha) = \beta^2(\alpha + 1)\alpha$. Los estimadores de momento de α y β se obtienen resolviendo

$$\overline{X} = \alpha\beta \qquad \frac{1}{n}\sum X_i^2 = \alpha(\alpha + 1)\beta^2$$

Puesto que $\alpha(\alpha + 1)\beta^2 = \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^2$ y la primera ecuación implica que $\alpha\beta^2 = \overline{X}^2$, la segunda ecuación se vuelve

$$\frac{1}{n}\sum X_i^2 = \overline{X}^2 + \alpha\beta^2$$

Ahora si se divide cada miembro de esta segunda ecuación entre el miembro correspondiente de la primera ecuación y se sustituye otra vez, se obtienen los estimadores

$$\hat{\alpha} = \frac{\overline{X}^2}{(1/n)\sum X_i^2 - \overline{X}^2} \qquad \hat{\beta} = \frac{(1/n)\sum X_i^2 - \overline{X}^2}{\overline{X}}$$

Para ilustrar, los datos de tiempo de sobrevivencia mencionados en el ejemplo 4.24 son

152	115	109	94	88	137	152	77	160	165
125	40	128	123	136	101	62	153	83	69

con $\overline{x} = 113.5$ y $(1/20)\Sigma x_i^2 = 14\,087.8$. Los estimadores son

$$\hat{\alpha} = \frac{(113.5)^2}{14\,087.8 - (113.5)^2} = 10.7 \qquad \hat{\beta} = \frac{14\,087.8 - (113.5)^2}{113.5} = 10.6$$

Estas estimaciones de α y β difieren de los valores sugeridos por Gross y Clark porque ellos utilizaron una técnica de estimación diferente. ■

EJEMPLO 6.14 Sean $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución binomial negativa generalizada con parámetros r y p (véase la sección 3.5). Puesto que $E(X) = r(1-p)/p$ y $V(X) = r(1-p)/p^2$, $E(X^2) = V(X) + [E(X)]^2 = r(1-p)(r-rp+1)/p^2$. Si se iguala $E(X)$ a $\bar{X}$ y $E(X^2)$ a $(1/n)\Sigma X_i^2$ a la larga se obtiene

$$\hat{p} = \frac{\bar{X}}{(1/n)\sum X_i^2 - \bar{X}^2} \qquad \hat{r} = \frac{\bar{X}^2}{(1/n)\sum X_i^2 - \bar{X}^2 - \bar{X}}$$

A modo de ilustración, Reep, Pollard y Benjamin (**"Skill and Chance in Ball Games", *J. of Royal Stat. Soc.*, 1971: 623–629**) consideran la distribución binomial negativa como modelo del número de goles por juego anotados por los equipos de la Liga Nacional de Jockey. Los datos de 1966–1967 son los siguientes (420 juegos):

Goles	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	29	71	82	89	65	45	24	7	4	1	3

Por tanto,

$$\bar{x} = \sum x_i/420 = [(0)(29) + (1)(71) + \cdots + (10)(3)]/420 = 2.98$$

y

$$\sum x_i^2/420 = [(0)^2(29) + (1)^2(71) + \cdots + (10)^2(3)]/420 = 12.40$$

Por consiguiente,

$$\hat{p} = \frac{2.98}{12.40 - (2.98)^2} = .85 \qquad \hat{r} = \frac{(2.98)^2}{12.40 - (2.98)^2 - 2.98} = 16.5$$

Aunque por definición r debe ser positivo, el denominador de $\hat{r}$ podría ser negativo, lo que indica que la distribución binomial negativa no es apropiada (o que el estimador de momento es defectuoso). ■

Estimación de máxima probabilidad

El método de máxima probabilidad lo introdujo por primera vez R. A. Fisher, genetista y estadístico en la década de 1920. La mayoría de los estadísticos recomiendan este método, al menos cuando el tamaño de muestra es grande, puesto que los estimadores resultantes tienen ciertas propiedades de eficiencia deseables (véase la proposición en la página 271).

EJEMPLO 6.15 La mejor protección contra la piratería en una cuenta en línea es utilizar una contraseña que tenga al menos 8 caracteres que consisten en mayúsculas, minúsculas, números y caracteres especiales. [*Nota*: La edición de enero de 2012 de ***Consumer Reports*** informa que sólo 25% de las personas encuestadas utilizan una contraseña fuerte.] Supongamos que se seleccionan 10 personas con cuentas de correo electrónico con un determinado proveedor. Se encontró que el primer, tercer y décimo individuos tienen dicha protección fuerte, mientras que los otros no. Sea $p = P(\text{protección fuerte})$, es decir, p es la proporción de todos esos titulares de cuenta con protección fuerte. Definir las variables aleatorias (Bernoulli) $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ mediante

$$X_1 = \begin{cases} 1 \text{ si la primer persona tiene protección fuerte} \\ 0 \text{ si la primer persona no tiene protección fuerte} \end{cases} \quad \ldots X_2 = \begin{cases} 1 \text{ si la décima persona tiene protección fuerte} \\ 0 \text{ si la décima persona no tiene protección fuerte} \end{cases}$$

Entonces, para la muestra obtenida, $X_1 = X_3 = X_{10} = 1$ y las otras siete X_i son cero. La función de masa de probabilidad de cualquier X_i particular es $p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$, que se convierte en p si $x_i = 1$ y $1-p$ cuando $x_i = 0$. Suponga ahora que las condiciones de las contraseñas diferentes son independientes una de la otra. Esto implica que las X_i son independientes,

por lo que su función de masa de probabilidad conjunta es el producto de las funciones de masa de probabilidad individuales. Así que la función de masa de probabilidad conjunta de las X_i observadas es

$$f(x_1,\ldots,x_{10};p) = p(1-p)p\cdots p = p^3(1-p)^7 \tag{6.4}$$

Suponga que $p = .25$. Entonces la probabilidad de observar la muestra que en realidad se obtiene es $(.25)^3(.75)^7 = .002086$. Si, en cambio, $p = .50$, entonces esta probabilidad es $(.50)^3(.50)^7 = .000977$. ¿Para qué valor de p es más probable que la muestra observada haya ocurrido? Es decir, ¿para qué valor de p es la función de masa de probabilidad conjunta (6.4) tan grande como puede ser? ¿Qué valor de p maximiza (6.4)? La figura 6.6(a) muestra un gráfico de la *probabilidad* (6.4) en función de p. Parece que la gráfica alcanza su pico por encima de $p = .3$ = la proporción de contraseñas fuertes en la muestra. La figura 6.6(b) muestra una gráfica del logaritmo natural de (6.4) ya que ln[g(*u*)] es una función estrictamente creciente de $g(u)$; encontrar u para maximizar la función $g(u)$ es lo mismo que encontrar u para maximizar $\ln[g(u)]$.

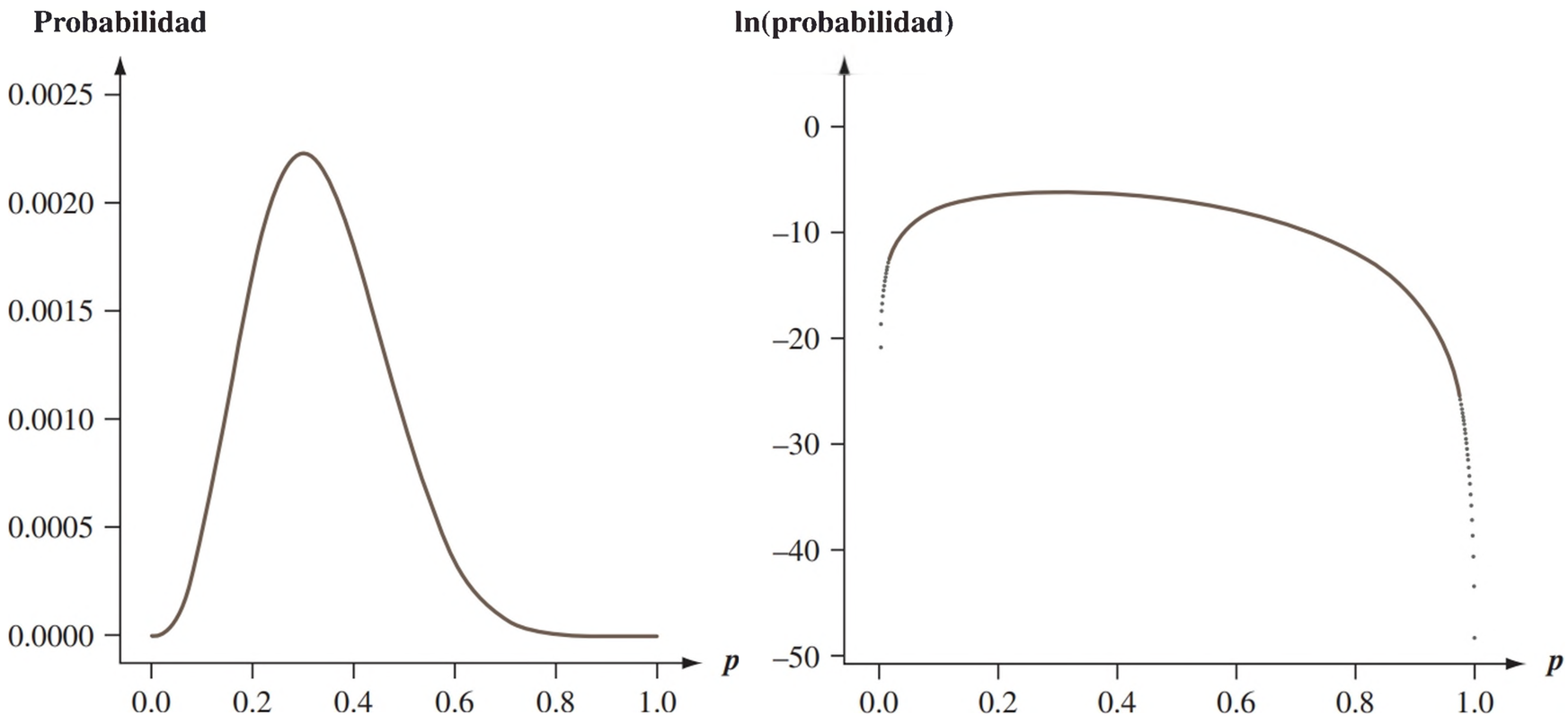


Figura 6.6 (a) Gráfica de la probabilidad (función de masa de probabilidad conjunta) (6.4) del ejemplo 6.15; (b) Gráfica del logaritmo natural de la probabilidad

Podemos comprobar nuestra impresión visual mediante el cálculo para hallar el valor de p que maximiza (6.4). Trabajar con el logaritmo natural de la función de masa de probabilidad conjunta suele ser más fácil que trabajar con la función de masa de probabilidad conjunta; puesto que esta última es típicamente un producto, su logaritmo será una suma. Aquí

$$\ln[f(x_1,\ldots,x_{10};p)] = \ln[p^3(1-p)^7] = 3\ln(p) + 7\ln(1-p) \tag{6.5}$$

Por tanto

$$\frac{d}{dp}\{\ln[f(x_1,\ldots,x_{10};p)]\} = \frac{d}{dp}\{3\ln(p) + 7\ln(1-p)\} = \frac{3}{p} + \frac{7}{1-p}(-1)$$
$$= \frac{3}{p} - \frac{7}{1-p}$$

[el (-1) viene de la regla de la cadena en cálculo]. Igualando esta derivada a 0 y despejando p da $3(1-p) = 7p$, de lo cual $3 = 10p$ y así $p = 3/10 = .30$ como hemos deducido. Es decir, nuestra estimación puntual es $\hat{p} = .30$. Se llama *estimación de máxima verosimilitud (probabilidad)*, ya que es el valor del parámetro que maximiza la probabilidad (pmf conjunta) de la muestra observada. En general, la segunda derivada debe ser examinada para asegurarse de que se ha obtenido un máximo, pero aquí esto es obvio en la figura 6.5.

Supongamos que en vez de conocer la condición de cada contraseña, sólo sabemos que tres de diez eran fuertes. Entonces tendríamos el valor observado de una variable aleatoria binomial X = el número de contraseñas fuertes. La función de masa de probabilidad de X es $\binom{10}{x}p^x(1-p)^{10-x}$. Para $x = 3$, esto se convierte en $\binom{10}{3}p^3(1-p)^7$. El coeficiente binomial $\binom{10}{3}$ es irrelevante para la maximización, así que nuevamente $\hat{p} = .30$. ■

DEFINICIÓN

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ que tienen una función de masa de probabilidad o una función de densidad de probabilidad

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta_1, \ldots, \theta_m) \tag{6.6}$$

donde los parámetros $\theta_1, \ldots, \theta_m$ tienen valores desconocidos. Cuando $X_1, \ldots, X_n$ son los valores muestrales observados y (6.6) se considera una función de $\theta_1, \ldots, \theta_m$, esto se conoce como **función de probabilidad**. Las estimaciones de máxima probabilidad $\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_m$ son aquellos valores de las θ_i que incrementan al máximo la función de probabilidad, de modo que

$$f(x_1,\ldots, x_n; \hat{\theta}_1,\ldots, \hat{\theta}_m) \geq f(x_1,\ldots, x_n; \theta_1,\ldots, \theta_m) \text{ para todas las } \theta_1,\ldots, \theta_m$$

Cuando se sustituyen las X_i en lugar de las x_i se obtienen los **estimadores de máxima probabilidad**.

La función de probabilidad dice qué tan probable es que la muestra observada sea una función de los posibles valores de parámetro. Al incrementarse al máximo la probabilidad, se obtienen los valores de parámetro con los que es más probable que la muestra observada haya sido generada; es decir, los valores de parámetro que "más concuerdan" con los datos observados.

EJEMPLO 6.16 Suponga que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de una distribución exponencial con parámetro λ. Debido a la independencia, la función de probabilidad es un producto de las funciones de densidad de probabilidad individuales:

$$f(x_1,\ldots, x_n; \lambda) = (\lambda e^{-\lambda x_1}) \cdot \cdots \cdot (\lambda e^{-\lambda x_n}) = \lambda^n e^{-\lambda \Sigma x_i}$$

El logaritmo natural de la función de probabilidad es

$$\ln[f(x_1,\ldots, x_n; \lambda)] = n \ln(\lambda) - \lambda \sum x_i$$

Si se iguala $(d/d\lambda)[\ln(\text{probabilidad})]$ a cero se obtiene $n/\lambda - \Sigma x_i = 0$, o $\lambda = n/\Sigma x_i = 1/\bar{x}$. Por consiguiente, el estimador de máxima probabilidad es $\hat{\lambda} = 1/\bar{X}$; es idéntico al método de estimador de momentos [pero no es un estimador insesgado, puesto que $E(1/\bar{X}) \neq 1/E(\bar{X})$]. ■

EJEMPLO 6.17 Sean $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución normal. La función de probabilidad es

$$f(x_1,\ldots, x_n; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x_1-\mu)^2/(2\sigma^2)} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x_n-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$
$$= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} e^{-\Sigma(x_i-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

por consiguiente

$$\ln[f(x_1,\ldots, x_n; \mu, \sigma^2)] = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum (x_i - \mu)^2$$

Para determinar los valores maximizantes de μ y σ^2 se deben sacar las derivadas parciales de $\ln(f)$ respecto a μ y σ^2, igualarlas a cero y resolver las dos ecuaciones resultantes. Omitiendo los detalles, los estimadores de máxima probabilidad resultantes son

$$\hat{\mu} = \bar{X} \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n}$$

El estimador de máxima probabilidad de σ^2 no es el estimador insesgado, por consiguiente dos principios diferentes de estimación (ausencia de sesgo y máxima probabilidad) dan dos estimadores diferentes. ■

EJEMPLO 6.18 En el capítulo 3 se mencionó el uso de la distribución de Poisson para modelar el número de "eventos" que ocurren en una región bidimensional. Suponga que cuando la región R se está muestreando tiene área $a(R)$, el número X de eventos que ocurren en R tiene una distribución de Poisson con parámetro $\lambda a(R)$ (donde λ es el número esperado de eventos por unidad de área) y que las regiones no traslapantes dan X independientes.

Suponga que un ecólogo selecciona n regiones no traslapantes $R_1, \ldots, R_n$ y cuenta el número de plantas de una especie en cada región. La función de masa de probabilidad (verosimilitud) conjunta es entonces

$$\begin{aligned} p(x_1, \ldots, x_n; \lambda) &= \frac{[\lambda \cdot a(R_1)]^{x_1} e^{-\lambda \cdot a(R_1)}}{x_1!} \cdot \cdots \cdot \frac{[\lambda \cdot a(R_n)]^{x_n} e^{-\lambda \cdot a(R_n)}}{x_n!} \\ &= \frac{[a(R_1)]^{x_1} \cdot \cdots \cdot [a(R_n)]^{x_n} \cdot \lambda^{\sum x_i} \cdot e^{-\lambda \sum a(R_i)}}{x_1! \cdot \cdots \cdot x_n!} \end{aligned}$$

El ln(probabilidad) es

$$\ln[p(x_1, \ldots, x_n; \lambda)] = \sum x_i \cdot \ln[a(R_i)] + \ln(\lambda) \cdot \sum x_i - \lambda \sum a(R_i) - \sum \ln(x_i!)$$

Tomando $d/d\lambda \ln(p)$ e igualándola a cero da

$$\frac{\sum x_i}{\lambda} - \sum a(R_i) = 0$$

de lo cual

$$\lambda = \frac{\sum x_i}{\sum a(R_i)}$$

El estimador de máxima probabilidad es entonces $\hat{\lambda}\ \Sigma X_i / \Sigma a(R_i)$. Esta es razonablemente intituitiva porque λ es la densidad verdadera (plantas por unidad de área), mientras que $\hat{\lambda}$ es la densidad muestral puesto que $\Sigma a(R_i)$ es tan sólo el área total muestreada. Debido a que $E(X_i) = \lambda \cdot a(R_i)$, el estimador es insesgado.

En ocasiones se utiliza un procedimiento de muestreo alternativo. En lugar de fijar las regiones que serán muestreadas, el ecólogo seleccionará n puntos en toda la región de interés, y sea y_i = la distancia del punto i-ésimo a la planta más cercana. La función de distribución acumulada de Y = distancia a la planta más cercana es

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = 1 - P(Y > y) = 1 - P\left(\begin{array}{c}\text{ninguna planta en} \\ \text{un círculo de radio } y\end{array}\right)$$

$$= 1 - \frac{e^{-\lambda \pi y^2}(\lambda \pi y^2)^0}{0!} = 1 - e^{-\lambda \cdot \pi y^2}$$

Al sacar la derivada de $F_Y(y)$ respecto a y resulta

$$f_Y(y; \lambda) = \begin{cases} 2\pi\lambda y e^{-\lambda \pi y^2} & y \ge 0 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Si ahora formamos la probabilidad $f_Y(y_1; \lambda) \cdot \ldots \cdot f_Y(y_n; \lambda)$, derivamos ln(probabilidad), etcétera, el estimador de máxima probabilidad resultante es

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\pi \sum Y_i^2} = \frac{\text{número de plantas observadas}}{\text{área total muestreada}}$$

la cual también es una densidad muestral. Se puede demostrar que un ambiente escaso (pequeño λ), el método de distancia es mejor en cierto sentido, en tanto que en un ambiente denso, el primer método de muestreo es mejor. ■

EJEMPLO 6.19 Sean $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una función de densidad de probabilidad de Weibull

$$f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\beta^\alpha} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-(x/\beta)^\alpha} & x \geq 0 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Si se escribe la probabilidad y el ln(probabilidad) y luego $(\partial/\partial\alpha)[\ln(f)] = 0$ y $(\partial/\partial\beta)[\ln(f)] = 0$ se obtienen las ecuaciones

$$\alpha = \left[\frac{\sum x_i^\alpha \cdot \ln(x_i)}{\sum x_i^\alpha} - \frac{\sum \ln(x_i)}{n} \right]^{-1} \qquad \beta = \left(\frac{\sum x_i^\alpha}{n} \right)^{1/\alpha}$$

Estas dos ecuaciones no pueden ser resueltas explícitamente para obtener fórmulas generales de los estimadores de máxima probabilidad $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$. En su lugar por cada muestra $x_1, \ldots, x_n$, las ecuaciones deben ser resueltas con un procedimiento numérico iterativo. Incluso los estimadores de momento de α y β son un tanto complicados (véase el ejercicio 21). ■

Estimación de funciones de parámetros

Una vez que está disponible el estimador de máxima probabilidad para un parámetro θ, el estimador de máxima probabilidad para cualquier función de θ, tal como $1/\theta$ o $\sqrt{\theta}$, es fácil de obtener.

PROPOSICIÓN

Principio de invarianza

Sean $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_m$ los estimadores de máxima probabilidad de los parámetros $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$. Entonces el estimador de máxima probabilidad de cualquier función $h(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m)$ de estos parámetros es la función $h(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_m)$ de los estimadores de máxima probabilidad.

EJEMPLO 6.20 (Continuación del ejemplo 6.17) En el caso normal los estimadores de máxima probabilidad de μ y σ^2 son $\hat{\mu} = \overline{X}$ y $\hat{\sigma}^2 = \Sigma(X_i - X)^2/n$. Para obtener el estimador de máxima probabilidad de la función $h(\mu, \sigma^2) = \sqrt{\sigma^2}\ \sigma$, sustituya los estimadores de máxima probabilidad en la función:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2} = \left[\frac{1}{n} \sum (X_i - \overline{X})^2 \right]^{1/2}$$

El estimador de máxima probabilidad de σ no es la desviación estándar muestral S, aunque se aproximan bastante a menos que n sea bastante pequeño. ■

EJEMPLO 6.21 (Continuación del ejemplo 6.19) La media de una variable aleatoria X que tiene una distribución de Weibull es

$$\mu = \beta \cdot \Gamma(1 + 1/\alpha)$$

El estimador de máxima probabilidad de μ es, por consiguiente, $\hat{\mu} = \hat{\beta}\Gamma(1 + 1/\hat{\alpha})$ donde $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son los estimadores de máxima probabilidad de α y β. En particular, $\overline{X}$ no es el estimador de máxima probabilidad de μ, aunque es un estimador insesgado. Por lo menos para n grande, $\hat{\mu}$ es un mejor estimador que $\overline{X}$.

Para los datos que figuran en el ejemplo 6.3, los estimadores de máxima probabilidad de los parámetros de Weibull son $\hat{\alpha} = 11.9731$ y $\hat{\beta} = 77.0153$, de los cuales $\hat{\mu} = 73.80$. Esta estimación está muy cerca de la media de la muestra 73.88. ■

Comportamiento del estimador de máxima probabilidad con muestra grande

Aunque el principio de la estimación de máxima probabilidad tiene un considerable atractivo intuitivo, la siguiente proposición brinda razones adicionales fundamentales para el uso de estimadores de máxima probabilidad.

PROPOSICIÓN

En condiciones muy generales en relación con la distribución conjunta de la muestra, cuando el tamaño n de la muestra es grande, el estimador de máxima probabilidad de cualquier parámetro θ es aproximadamente insesgado $[E(\hat{\theta}) \approx \theta]$ y su varianza es casi tan pequeña como la que puede ser lograda por cualquier estimador. Expresado de otra manera, el estimador de máxima probabilidad $\hat{\theta}$ es aproximadamente el estimador insesgado con varianza mínima de θ.

Debido a este resultado y al hecho de que las técnicas basadas en el cálculo casi siempre pueden ser utilizadas para obtener los estimadores de máxima probabilidad (aunque a veces se requieren métodos numéricos, tales como el método de Newton), la estimación de máxima probabilidad es la técnica de estimación más ampliamente utilizada entre los estadísticos. Muchos de los estimadores que se emplean en lo que resta del libro son estimadores de máxima probabilidad. Sin embargo, la obtención de un estimador de máxima probabilidad requiere que se especifique la distribución subyacente.

Algunas complicaciones

En ocasiones no se puede utilizar el cálculo para obtener estimadores de máxima probabilidad.

EJEMPLO 6.22

Suponga que mi tiempo de espera del autobús está uniformemente distribuido en $[0, \theta]$ y que se observaron los resultados $x_1, \ldots, x_n$ de una muestra aleatoria tomada de esta distribución. Puesto que $f(x; \theta) = 1/\theta$ con $0 \le x \le \theta$ y de lo contrario 0,

$$f(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta^n} & 0 \le x_1 \le \theta, \ldots, 0 \le x_n \le \theta \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

En tanto máx$(x_i) \le \theta$, la probabilidad es $1/\theta^n$ la cual es positiva, pero en cuanto $\theta <$ máx(x_i), la probabilidad se reduce a 0. Esto se ilustra en la figura 6.7. El cálculo no funciona porque el máximo de la probabilidad ocurre en un punto de discontinuidad, pero la figura indica que $\hat{\theta} =$ máx(X_i). Por consiguiente, si mis tiempos de espera son 2.3, 3.7, 1.5, .4 y 3.2, entonces el estimador de máxima probabilidad es $\hat{\theta} = 3.7$. De acuerdo con el ejemplo 6.4 el estimador de máxima probabilidad no es insesgado.

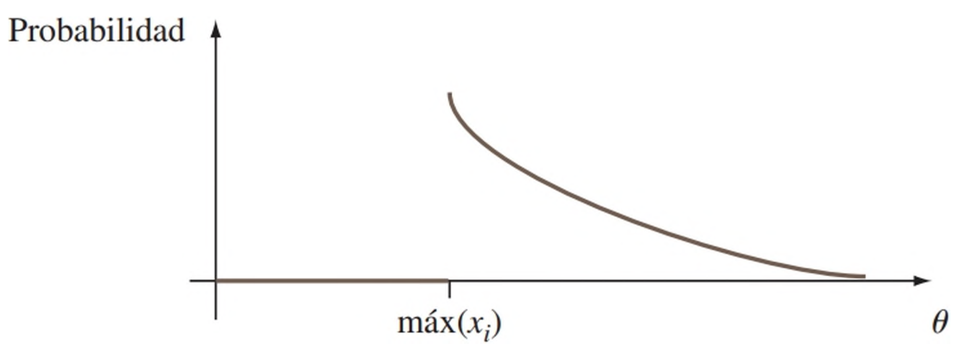


Figura 6.7 Función de probabilidad para el ejemplo 6.22 ■

EJEMPLO 6.23 Un método que a menudo se utiliza para estimar el tamaño de una población de vida silvestre implica realizar un experimento de captura-recaptura. En este experimento se captura una muestra inicial de M animales; cada uno los cuales se etiqueta y se regresa a la población. Luego de un tiempo suficiente para que los individuos etiquetados se mezclen con la población, se captura otra muestra de tamaño n. Con X = el número de animales etiquetados en la segunda muestra, el objetivo es utilizar las x observadas para estimar la población de tamaño N.

El parámetro de interés es $\theta = N$ el cual puede asumir sólo valores enteros así que, incluso después de determinar la función de probabilidad (función de masa de probabilidad de X en este caso), el uso del cálculo para obtener N presentaría dificultades. Si se considera un éxito la recaptura de un animal previamente etiquetado, entonces el muestreo es sin reemplazo de una población que contiene M éxitos y $N = M$ fallas, de modo que X es una variable aleatoria hipergeométrica y la función de probabilidad es

$$p(x; N) = h(x; n, M, N) = \frac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

No obstante, la naturaleza de valor entero de N, sería difícil evaluar la derivada de $p(x; N)$. Sin embargo, si se considera la razón de $p(x; N)$ y $p(x; N-1)$, se tiene

$$\frac{p(x; N)}{p(x; N-1)} = \frac{(N-M) \cdot (N-n)}{N(N-M-n+x)}$$

Esta razón es más grande que 1 si y sólo si $N < Mn/x$. El valor de N con el cual $p(x; N)$ se incrementa al máximo es, por consiguiente, el entero más grande menor que Mn/x. Si se utiliza la notación matemática estándar $[r]$ para el entero más grande menor o igual a r, el estimador de máxima probabilidad de N es $\hat{N} = [Mn/x]$. A manera de ilustración, si $M = 200$ peces se sacan de un lago y se etiquetan, posteriormente $n = 100$ son recapturados y entre los 100 hay $x = 11$ etiquetados; en ese caso $\hat{N} = [(200)(100)/11]\ [1818.18] = 1818$. La estimación es en realidad un tanto intuitiva; x/n es la proporción de la muestra recapturada etiquetada, mientras que M/N es la proporción de toda la población etiquetada. La estimación se obtiene igualando estas dos proporciones (estimando una proporción poblacional mediante una proporción muestral). ■

Suponga que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de una función de densidad de probabilidad $f(x; \theta)$ simétrica respecto a θ, aunque el investigador no está seguro de la forma de la función f. Es entonces deseable utilizar un estimador $\hat{\theta}$ *robusto*; es decir, uno que funcione bien con una amplia variedad de funciones de densidad de probabilidad subyacentes. Un estimador como ese es una media recortada. En años recientes los estadísticos han propuesto otro tipo de estimador llamado *estimador M*, basado en una generalización de la estimación de máxima probabilidad. En lugar de incrementar al máximo el logaritmo de la probabilidad $\Sigma \ln[f(x; \theta)]$ para una f específica, se incrementa al máximo $\Sigma \rho(x_i; \theta)$. Se selecciona la "función objetivo" ρ para que dé un estimador con buenas propiedades de robustez. El libro de David Hoaglin y colaboradores (véase la bibliografía) contiene una buena exposición de esta materia.

EJERCICIOS Sección 6.2 (20–30)

20. Se aplica una prueba de diagnóstico para una enfermedad determinada a n individuos de quienes se sabe que no tienen la enfermedad. Sea X el número uno de los n resultados de prueba que son positivos (lo que indica la presencia de la enfermedad, por lo que X es el número de falsos positivos) y p = probabilidad de que el resultado de un individuo de prueba libre de la enfermedad sea positivo (es decir, p es la verdadera proporción de resultados de las pruebas de individuos libres de enfermedades que son positivos). Supongamos que sólo X está disponible en lugar de la secuencia real de los resultados de la prueba.

a. Deduzca el estimador de máxima probabilidad de p. Si $n = 20$ y $x = 3$, ¿cuál es la estimación?

b. ¿Es insesgado el estimador del inciso a)?

c. Si $n = 20$ y $x = 3$, ¿cuál es el estimador de máxima probabilidad $(1 - p)^5$ de que ninguna de las próximas cinco pruebas realizadas en los individuos libres de la enfermedad sea positiva?

21. Si X tiene una distribución de Weibull con parámetros α y β, entonces

$$E(X) = \beta \cdot \Gamma(1 + 1/\alpha)$$
$$V(X) = \beta^2\{\Gamma(1 + 2/\alpha) - [\Gamma(1 + 1/\alpha)]^2\}$$

a. Con base en una muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$, escriba ecuaciones para el método de estimadores de momentos de β y α. Demuestre que una vez que se obtiene la estimación de α, la estimación de β se puede hallar en una tabla de la función gamma, y que la estimación de α es la solución de una ecuación complicada que implica la función gamma.

b. Si $n = 20$, $\bar{x} = 28.0$ y $\Sigma x_i^2 = 16\,500$, calcule las estimaciones. [*Sugerencia*: $[\Gamma(1.2)]^2/\Gamma(1.4) = .95$.]

22. Sea X la proporción de tiempo asignado que un estudiante seleccionado al azar pasa resolviendo cierta prueba de aptitud. Suponga que la función de densidad de probabilidad de X es

$$f(x; \theta) = \begin{cases} (\theta + 1)x^\theta & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

donde $-1 < \theta$. Una muestra aleatoria de diez estudiantes produce los datos $x_1 = .92$, $x_2 = .79$, $x_3 = .90$, $x_4 = .65$, $x_5 = .86$, $x_6 = .47$, $x_7 = .73$, $x_8 = .97$, $x_9 = .94$, $x_{10} = .77$.

a. Use el método de momentos para obtener un estimador de θ y luego calcule la estimación para estos datos.

b. Obtenga el estimador de máxima probabilidad de θ y luego calcule la estimación para los datos dados.

23. Sea que X represente el error al hacer una medición de una característica o propiedad física (por ejemplo, el punto de ebullición de un líquido especial). A menudo es lógico suponer que $E(X) = 0$ y que X tiene una distribución normal. Así, la función de probabilidad de cualquier error de medición particular es

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-x^2/2\theta} \qquad -\infty < x < \infty$$

(donde hemos usado θ en lugar de σ^2). Ahora, suponga que se realizan n mediciones independientes, dando como resultado errores de medida $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n$. Obtenga el estimador de máxima probabilidad de θ.

24. Un vehículo con un defecto particular en su sistema de control de emisiones es llevado a una serie de mecánicos seleccionados al azar hasta que $r = 3$ de ellos han diagnosticado correctamente el problema. Supongamos que esto requiere los diagnósticos de 20 mecánicos diferentes (por lo que hubo 17 diagnósticos incorrectos). Sea $p = P$(diagnóstico correcto), por tanto, el estimador de máxima probabilidad es la proporción de todos los mecánicos que bien podrían diagnosticar el problema. ¿Cuál el estimador de máxima probabilidad de p? ¿Es el mismo estimador de máxima probabilidad si una muestra aleatoria de 20 mecánicos resulta en tres diagnósticos correctos? Explique. ¿Cómo funciona el estimador de máxima probabilidad en comparación con la estimación resultante de utilizar el estimador imparcial dada en el ejercicio 17?

25. Se determina la resistencia al esfuerzo cortante de las soldaduras de 10 puntos de prueba y se obtienen los siguientes datos (lb/pulg^2):

392 376 401 367 389 362 409 415 358 375

a. Suponiendo que la resistencia al esfuerzo cortante está normalmente distribuida, estime la resistencia al esfuerzo cortante promedio verdadera y la desviación estándar de la resistencia al esfuerzo cortante mediante el método de máxima probabilidad.

b. De nuevo, suponiendo una distribución normal, calcule el valor de resistencia por debajo del cual estará 95% de las resistencias de todas las soldaduras. [*Sugerencia*: ¿Cuál es el 95° percentil en función de μ y σ? Utilice ahora el principio de invarianza.]

c. Suponga que decidimos examinar otro punto de soldadura de prueba. Sea X = resistencia al corte de la soldadura. Utilice los datos para obtener el estimador de máxima probabilidad de $P(X \le 400)$. [*Sugerencia*: $P(X \le 400) = \Phi((400 - \mu)/\sigma)$.]

26. Considere seleccionar aleatoriamente n segmentos de tubo y determinar la pérdida por corrosión (mm) en el espesor de pared de cada uno. Denote estas pérdidas de corrosión por $Y_1, \ldots, Y_n$. El artículo **"A Probabilistic Model for a Gas Explosion Due to Leakages in the Grey Cast Iron Gas Mains" (*Reliability Engr. and System Safety*, 2013: 270–279)** propone un modelo lineal de la corrosión: $Y_i = t_i R$, donde t_i es la edad de la tubería y R la velocidad de corrosión, se distribuye exponencialmente con parámetro λ. Obtenga el estimador de máxima probabilidad del parámetro exponencial (el estimador de máxima probabilidad resultante aparece en el artículo citado). [*Sugerencia*: Si $c > 0$ y X tiene una distribución exponencial, también cX la tiene.]

27. Sean $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución gamma con parámetros α y β.

a. Deduzca las ecuaciones cuyas soluciones dan los estimadores de máxima probabilidad de α y β. ¿Piensa que pueden ser resueltos explícitamente?

b. Demuestre que el estimador de máxima probabilidad de $\mu = \alpha\beta$ es $\hat{\mu} = \overline{X}$.

28. Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ representan una muestra aleatoria de la distribución de Rayleigh con función de densidad dada en el ejercicio 15, determine:

a. El estimador de máxima probabilidad de θ y luego calcule la estimación para los datos de esfuerzo de vibración dados en ese ejercicio. ¿Es este estimador el mismo estimador insesgado que se sugiere en el ejercicio 15?

b. El estimador de máxima probabilidad de la mediana de la distribución del esfuerzo de vibración. [*Sugerencia*: Exprese primero la mediana en función de θ.]

29. Considere la muestra aleatoria $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de la función de densidad de probabilidad exponencial desplazada

$$f(x; \lambda, \theta) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-\theta)} & x \geq \theta \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Con $\theta = 0$ da la función de densidad de probabilidad de la distribución exponencial que se consideró previamente (con densidad positiva a la derecha de cero). Un ejemplo de la distribución exponencial desplazada apareció en el ejemplo 4.5, en el cual la variable de interés fue el tiempo entre vehículos en el flujo de tránsito y $\theta = .5$ fue el tiempo entre vehículos mínimo posible.

a. Obtenga los estimadores de máxima probabilidad de θ y λ.

b. Si se realizan entre vehículos $n = 10$ observaciones de tiempo y se obtienen los siguientes resultados 3.11, .64, 2.55, 2.20, 5.44, 3.42, 10.39, 8.93, 17.82 y 1.30, calcule las estimaciones de θ y λ.

30. En el instante $t = 0$ son puestos a prueba 20 componentes idénticos. La distribución de la vida útil de cada uno es exponencial con parámetro λ. El experimentador deja la instalación de prueba sin supervisar. A su regreso, 24 horas más tarde, el experimentador termina de inmediato la prueba después de notar que $y = 15$ de los 20 componentes aún están en operación (así que 5 han fallado). Obtenga el estimador de máxima provbabilidad de l. [*Sugerencia*: Sea $Y =$ el número que sobrevive 24 horas. En ese caso $Y \sim \text{Bin}(n, p)$. ¿Cuál es el estimador de máxima probabilidad de p? Observe ahora que $p = P(X_i \geq 24)$ donde X_i está exponencialmente distribuida. Esto relaciona a λ con p, de modo que el primero puede ser estimado una vez que lo ha sido el segundo.]

EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS (31–38)

31. Se dice que un estimador $\hat{\theta}$ es **consistente** si con cualquier $\epsilon > 0$, $P(|\hat{\theta} - \theta| \geq \epsilon) \to 0$ a medida que $n \to \infty$. Es decir, $\hat{\theta}$ es consistente si, a medida que el tamaño de la muestra se hace más grande, es menos y menos probable que $\hat{\theta}$ se aleje más que ϵ del valor verdadero de θ. Demuestre que $\overline{X}$ es un estimador consistente de μ cuando $\sigma^2 < \infty$ mediante la desigualdad de Chebyshev del ejercicio 44 del capítulo 3. [*Sugerencia*: La desigualdad puede ser reescrita en la forma

$$P(|Y - \mu_Y| \geq \epsilon) \leq \sigma_Y^2/\epsilon$$

Ahora identifique Y con $\overline{X}$.]

32. **a.** Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución uniforme en $[0, \theta]$. Entonces el estimador de máxima probabilidad de θ es $\hat{\theta} = Y = \text{máx}(X_i)$. Use el hecho de que $Y \leq y$ si y sólo si cada $X_i \leq y$ para deducir la función de distribución acumulada de Y. Luego demuestre que la función de densidad de probabilidad de $Y = \text{máx}(X_i)$ es

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{ny^{n-1}}{\theta^n} & 0 \leq y \leq \theta \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

b. Use el resultado del inciso a) para demostrar que el estimador de máxima probabilidad es sesgado, pero que $(n + 1)$ $\text{máx}(X_i)/n$ es insesgado.

33. En el instante $t = 0$ hay un individuo vivo en una población. Un **proceso de nacimientos puro** se desarrolla como sigue. El tiempo que transcurre hasta que se da el primer nacimiento está exponencialmente distribuido con parámetro λ. Después del primer nacimiento hay dos individuos vivos. El tiempo que transcurre hasta que el primer individuo da a luz otra vez es exponencial con parámetro λ, y del mismo modo para el segundo individuo. Por consiguiente, el tiempo que pasa hasta el siguiente nacimiento es el mínimo de dos variables (λ) exponenciales, el cual es exponencial con parámetro 2λ. Asimismo, una vez que el segundo nacimiento ha ocurrido, hay tres individuos vivos, de modo que el tiempo que transcurre hasta el siguiente nacimiento es una variable aleatoria exponencial con parámetro 3λ, y así sucesivamente (aquí se está utilizando la propiedad de no memoria de la distribución exponencial). Suponga que se observa el proceso hasta que ha ocurrido el sexto nacimiento y los tiempos hasta los nacimientos sucesivos son 25.2, 41.7, 51.2, 55.5, 59.5, 61.8 (con los cuales deberá calcular los tiempos entre nacimientos sucesivos). Obtenga el estimador de máxima probabilidad de λ. [*Sugerencia*: La probabilidad es un producto de términos exponenciales.]

34. El **error cuadrático medio** de un estimador $\hat{\theta}$ es $\text{MSE}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}^2 - \theta^2)$. Si $\hat{\theta}$ es insesgado, entonces $\text{MSE}(\hat{\theta}) = V(\hat{\theta})$pero en general $\text{MSE}(\hat{\theta}) = V(\hat{\theta}) + (\text{sesgo})^2$. Considere el estimador $\hat{\sigma}^2 = KS^2$, donde $S^2 =$ varianza muestral. ¿Qué valor de K reduce al mínimo el error cuadrático medio de este estimador cuando la distribución de la población es normal? [*Sugerencia*: Se puede demostrar que

$$E[(S^2)^2] = (n + 1)\sigma^4/(n - 1)$$

En general, es difícil determinar $\hat{\theta}$ para reducir al mínimo el $\text{MSE}(\hat{\theta})$ por lo cual se buscan sólo estimadores insesgados y se reduce al mínimo $V(\hat{\theta})$.]

35. Sean $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una función de densidad de probabilidad simétrica respecto a μ. Un estimador de μ que evidentemente funciona bien con una amplia variedad de distribuciones subyacentes es el *estimador de Hodges-Lehmann*. Para definir esto primero calcule para cada $i \leq j$ y cada $j = 1, 2, \ldots, n$ el promedio por pares $\overline{X}_{ij} = (X_i + X_j)/2$. Entonces el estimador es $\hat{\mu}$ = la mediana de las $\overline{X}_{ij}$. Calcule el valor de esta estimación con los datos del ejercicio 44 del capítulo 1. [*Sugerencia*: Construya una tabla cuadrada con las x_i en el margen izquierdo y en la parte superior. Luego calcule los promedios en la diagonal y encima de ella.]

36. Cuando la distribución de la población es normal se puede utilizar la mediana estadística $\{|X_1 - \tilde{X}|, \ldots, |X_n - \tilde{X}|\}/.6745$ para estimar σ. Este estimador es más resistente a los efectos de los valores apartados (observaciones alejadas del grueso de los datos) que la desviación estándar muestral. Calcule tanto la estimación puntual correspondiente como s para los datos del ejemplo 6.2.

37. Cuando la desviación estándar muestral S está basada en una muestra aleatoria de una distribución de población normal se puede demostrar que

$$E(S) = \sqrt{2/(n-1)}\Gamma(n/2)\sigma/\Gamma((n-1)/2)$$

Use esto para obtener un estimador insesgado de σ de la forma cS. ¿Cuál es c cuando $n = 20$?

38. Cada uno de los n especímenes tiene que ser pesado dos veces en la misma báscula. Sean X_i y Y_i los dos pesos observados del i-ésimo espécimen. Suponga que X_i y Y_i son independientes uno de otro, cada uno normalmente distribuido con media μ_i (el peso verdadero del espécimen i) y varianza σ^2.

a. Demuestre que el estimador de probabilidad máxima de σ^2 es $\hat{\sigma}^2 = \Sigma(X_i - Y_i)^2/(4n)$. [*Sugerencia*: Si $\overline{z} = (z_1 - z_2)/2$, entonces $\Sigma(z_i - \overline{z})^2 = (z_1 - z_2)^2/2$.]

b. ¿Es el estimador de máxima probabilidad $\hat{\sigma}^2$ un estimador de σ^2? Determine un estimador insesgado de σ^2. [*Sugerencia*: Para cualquier variable aleatoria Z, $E(Z^2) = V(Z) - [E(Z)]^2$. Aplique esto a $Z = X_i - Y_i$.]

BIBLIOGRAFÍA

DeGroot, Morris y Mark Schervish, *Probability and Statistics* (4a. ed.), Addison-Wesley, Boston, MA, 2012. Incluye un excelente análisis tanto de propiedades generales como de métodos de estimación puntual; de particular interés son los ejemplos que muestran cómo los principios y métodos generales pueden dar estimadores insatisfactorios en situaciones particulares.

Devore, Jay y Kenneth Berk, *Modern Mathematical Statistics with Applications* (2ª ed.) Springer, Nueva York, 2012. La exposición es un poco más completa y compleja que la de este libro.

Efron, Bradley y Robert Tibshirani, *An Introduction to the Bootstrap*, Chapman and Hall, Nueva York, 1993. La Biblia del *bootstrap*.

Hoaglin, David, Frederick Mosteller y John Tukey, *Understanding Robust and Exploratory Data Analysis*, Wiley, Nueva York, 1983. Contiene varios buenos capítulos sobre estimación puntual robusta, incluido uno sobre estimación *M*.

Rice, John, *Mathematical Statistics and Data Analysis* (3ª ed.), Thomson-Brooks/Cole, Belmont, CA, 2007. Una agradable combinación de teoría y datos estadísticos.

7 Intervalos estadísticos basados en una sola muestra

INTRODUCCIÓN

Una estimación puntual, por el hecho de ser un solo número, no proporciona información sobre la precisión y confiabilidad de la estimación. Considere, por ejemplo, utilizar el estadístico $\overline{X}$ para calcular una estimación puntual de la resistencia a la ruptura promedio verdadera (g) de las toallas de papel de cierta marca, y suponga que $\overline{x} = 9322.7$. Debido a la variabilidad del muestreo, virtualmente nunca es el caso de que $\overline{x} = \mu$. La estimación puntual no dice nada sobre qué tan cerca pudiera estar de μ. Una alternativa para reportar un solo valor sensible del parámetro que se está estimando es calcular y reportar un intervalo completo de valores factibles: *una estimación de intervalo* o un *intervalo de confianza* (IC). Un intervalo de confianza siempre se calcula al seleccionar primero un nivel de confianza, el cual mide el grado de confiabilidad del intervalo. Un intervalo de confianza con 95% de nivel de confianza de la resistencia a la ruptura promedio verdadera podría tener un límite inferior de 9162.5 y un límite superior de 9482.9. Entonces al nivel de confianza de 95%, cualquier valor de μ entre 9162.5 y 9482.5 es factible. Un nivel de confianza de 95% implica que 95% de todas las muestras daría un intervalo que incluye μ o cualquier otro parámetro que se esté estimando, y sólo 5% de las muestras daría un intervalo erróneo. Los niveles de confianza más frecuentemente utilizados son 95, 99 y 90%. Mientras más alto es el nivel de confianza, más fuerte es la creencia de que el valor del parámetro que se está estimando queda dentro del intervalo (en breve se dará una interpretación de cualquier nivel de confianza particular).

El ancho del intervalo proporciona información sobre la precisión de una estimación de intervalo. Si el nivel de confianza es alto y el intervalo resultante es bastante angosto, el conocimiento del valor del parámetro es razonablemente preciso. Un muy amplio intervalo de confianza, sin embargo, transmite el mensaje de que existe gran cantidad de incertidumbre sobre el

valor de lo que se está estimando. La figura 7.1 muestra intervalos de confianza de 95% para las resistencias a la ruptura promedio verdaderas de dos marcas diferentes de toallas de papel. Uno de estos intervalos sugiere un conocimiento preciso de μ, mientras que el otro sugiere un rango muy amplio de valores factibles.

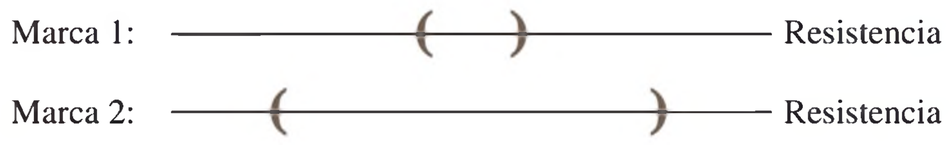


Figura 7.1 Intervalos de confianza que indican información precisa (marca 1) e imprecisa (marca 2) sobre μ

7.1 Propiedades básicas de los intervalos de confianza

Los conceptos y propiedades básicos de los intervalos de confianza son más fáciles de introducir si primero se presta atención a un problema simple, aunque un tanto irreal. Suponga que el parámetro de interés es una media poblacional μ y que

1. La distribución de la población es normal

2. El valor de la desviación estándar σ de la población es conocido

Con frecuencia es razonable suponer que la distribución de la población es normal. Sin embargo, si el valor de μ es desconocido, no es factible que el valor de σ esté disponible (el conocimiento del centro de una población en general precede a la información respecto a la dispersión). En las secciones 7.2 y 7.3 se desarrollarán métodos basados en suposiciones menos restrictivas.

EJEMPLO 7.1 Ingenieros industriales especialistas en ergonomía se ocupan del diseño de los espacios de trabajo y de los dispositivos operados por trabajadores con objeto de alcanzar una alta productividad y comodidad. El artículo **"Studies on Ergonomically Designed Alphanumeric Keyboards" (*Human Factors*, 1985: 175–187)** reporta sobre un estudio de la altura preferida de un teclado experimental con un gran soporte para el antebrazo y la muñeca. Se seleccionó una muestra de $n = 31$ mecanógrafos entrenados y se determinó la altura preferida del teclado de cada mecanógrafo. La altura preferida promedio muestral resultante fue de $\bar{x} = 80.0$ cm. Suponiendo que la altura preferida está normalmente distribuida con $\sigma = 2.0$ cm (un valor sugerido por los datos que aparecen en el artículo), obtenga un intervalo de confianza para μ, la altura promedio verdadera preferida por la población de todos los mecanógrafos experimentados. ■

Se supone que las observaciones muestrales reales $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son el resultado de una muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$ tomada de una distribución normal con media μ y desviación estándar σ. Los resultados del capítulo 5 implican entonces que independientemente del tamaño de muestra n, la media muestral $\bar{X}$ está normalmente distribuida con valor esperado μ y desviación estándar $\sigma/\sqrt{n}$. Si se estandariza $\bar{X}$ al restar primero su valor esperado y luego dividir entre su desviación estándar se obtiene la variable normal estándar

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \tag{7.1}$$

Debido a que el área bajo la curva normal estándar entre −1.96 y 1.96 es .95,

$$P\left(-1.96 < \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < 1.96\right) = .95 \tag{7.2}$$

A continuación manipule las desigualdades que están adentro del paréntesis en (7.2) de modo que aparezcan en la forma equivalente $l < \mu < u$, donde los puntos extremos l y u implican $\overline{X}$ y $\sigma/\sqrt{n}$. Esto se logra mediante la siguiente secuencia de operaciones, cada una de las cuales da desigualdades equivalentes a las originales.

1. Multiplíquese por $\sigma/\sqrt{n}$

$$-1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \overline{X} - \mu < 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

2. Réstese $\overline{X}$ de cada término:

$$-\overline{X} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < -\mu < -\overline{X} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

3. Multiplique por −1 para eliminar el signo menos enfrente de u (el cual invierte la dirección de cada desigualdad):

$$\overline{X} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} > \mu > \overline{X} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

es decir,

$$\overline{X} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

La equivalencia de cada conjunto de desigualdades con el conjunto original implica que

$$P\left(\overline{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = .95 \tag{7.3}$$

El evento en el interior del paréntesis en (7.3) tiene una apariencia poco común; previamente, la cantidad aleatoria aparecía a la mitad con constantes en ambos extremos, como en $a \le Y \le b$. En (7.3) la cantidad aleatoria aparece en los dos extremos, mientras que la constante desconocida μ aparece a la mitad. Para interpretar (7.3), considere un **intervalo aleatorio** con el punto extremo izquierdo $\overline{X} - 1.96 \cdot \sigma/\sqrt{n}$ y punto extremo derecho $\overline{X} + 1.96 \cdot \sigma/\sqrt{n}$. En notación de intervalo, esto se transforma en

$$\left(\overline{X} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\quad \overline{X} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \tag{7.4}$$

El intervalo (7.4) es aleatorio porque sus dos puntos extremos implican una variable aleatoria. Está centrada en la media muestral $\overline{X}$ y se extiende $1.96\sigma/\sqrt{n}$ a cada lado de $\overline{X}$. Por consiguiente, el ancho del intervalo es $2 \cdot (1.96) \cdot \sigma/\sqrt{n}$, el cual no es aleatorio; sólo la localización del intervalo (su punto medio $\overline{X}$) lo es (figura 7.2). Ahora (7.3) se parafrasea como "*la probabilidad es .95 de que el intervalo aleatorio* (7.4) *incluya o abarque el valor verdadero de* μ". Antes de realizar cualquier experimento y de recolectar cualquier dato, es bastante probable que μ esté dentro del intervalo (7.4).

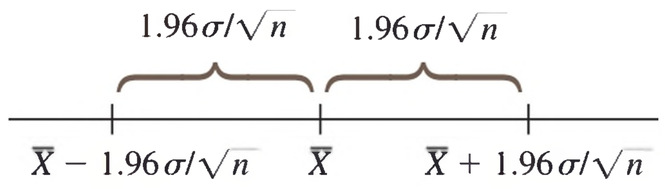


Figura 7.2 Intervalo aleatorio (7.4) con su centro en $\overline{X}$

DEFINICIÓN

Si después de observar $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n$, se calcula la media muestral observada $\bar{x}$ y luego se sustituye $\bar{x}$ en (7.4) en lugar de $\bar{X}$, al intervalo fijo resultante se le llama **intervalo de 95% de confianza para** μ. Este intervalo de confianza se expresa como

$$\left(\bar{x} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \text{ es un intervalo de confianza de 95\% para } \mu$$

o como

$$\bar{x} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ con 95\% de confianza}$$

Una expresión concisa para el intervalo es $\bar{x} \pm 1.96 \cdot \sigma/\sqrt{n}$, donde $-$ da el punto extremo izquierdo (límite inferior) y $+$ da el punto extremo derecho (límite superior).

EJEMPLO 7.2 (Continuación del ejemplo 7.1)

Las cantidades requeridas para calcular el intervalo de confianza de 95% para la altura preferida promedio verdadera son $\sigma = 2.0$, $n = 31$ y $\bar{x} = 80.0$. El intervalo resultante es

$$\bar{x} \pm 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 80.0 \pm (1.96)\frac{2.0}{\sqrt{31}} = 80.0 \pm .7 = (79.3, 80.7)$$

Es decir, se puede estar totalmente confiado, en el nivel de confianza de 95%, de que $79.3 < \mu < 80.7$. Este intervalo es relativamente angosto, lo que indica que μ ha sido estimada con bastante precisión. ■

Interpretación de un intervalo de confianza

El nivel de confianza de 95% para el intervalo que se acaba de definir fue heredado del .95 de probabilidad para el intervalo aleatorio (7.4). Los intervalos con otros niveles de confianza serán introducidos más adelante. Por ahora, más bien, considere cómo se puede interpretar 95% de confianza.

Se inició con un evento cuya probabilidad era de .95 —que el intervalo aleatorio (7.4) capturaría el valor verdadero de μ— y luego se utilizaron los datos del ejemplo 7.1 para calcular el intervalo de confianza (79.3, 80.7). Es tentador concluir que μ está dentro de este intervalo fijo con probabilidad de .95. Pero al sustituir $\bar{x} = 80.0$ por $\bar{X}$, toda la aleatoriedad desaparece; el intervalo (79.3, 80.7) no es un intervalo aleatorio y μ es una constante (desafortunadamente desconocida). Por tanto, es *incorrecto* escribir la proposición $P(\mu \text{ queda en } (79.3, 80.7)) = .95$.

Una interpretación correcta de "95% de confianza" se basa en la interpretación de probabilidad de frecuencia relativa a largo plazo: decir que un evento A tiene una probabilidad de .95 es decir que si el experimento en el cual se definió A se realiza una y otra vez, a la larga A ocurrirá 95% del tiempo. Suponga que se obtiene otra muestra de alturas preferidas por los mecanógrafos y se calcula otro intervalo de 95%. Luego se considera repetir esto con una tercera muestra, una cuarta, una quinta, y así sucesivamente. Sea A el evento en que $\bar{X} - 1.96 \cdot \sigma/\sqrt{n} < \mu < \bar{X} + 1.96 \cdot \sigma/\sqrt{n}$. Ya que $P(A) = .95$, a la larga 95% de los intervalos de confianza calculados contendrán a μ. Esto se ilustra en la figura 7.3, donde la línea vertical corta el eje de medición en el valor verdadero (pero desconocido) de μ. Observe que 7 de los 100 intervalos mostrados fallan al contener a μ. A la larga, sólo 5% de los intervalos construidos así no contendrán a μ.

De acuerdo con esta interpretación, el nivel de confianza de 95% no es en sí una proposición sobre cualquier intervalo particular tal como (79.3, 80.7). En su lugar pertenece a lo que sucedería si se construyera un número muy grande de intervalos parecidos por medio de la misma fórmula de intervalo de confianza. Aunque esto puede parecer no satisfactorio, el origen de la dificultad yace en la interpretación de probabilidad, es válida

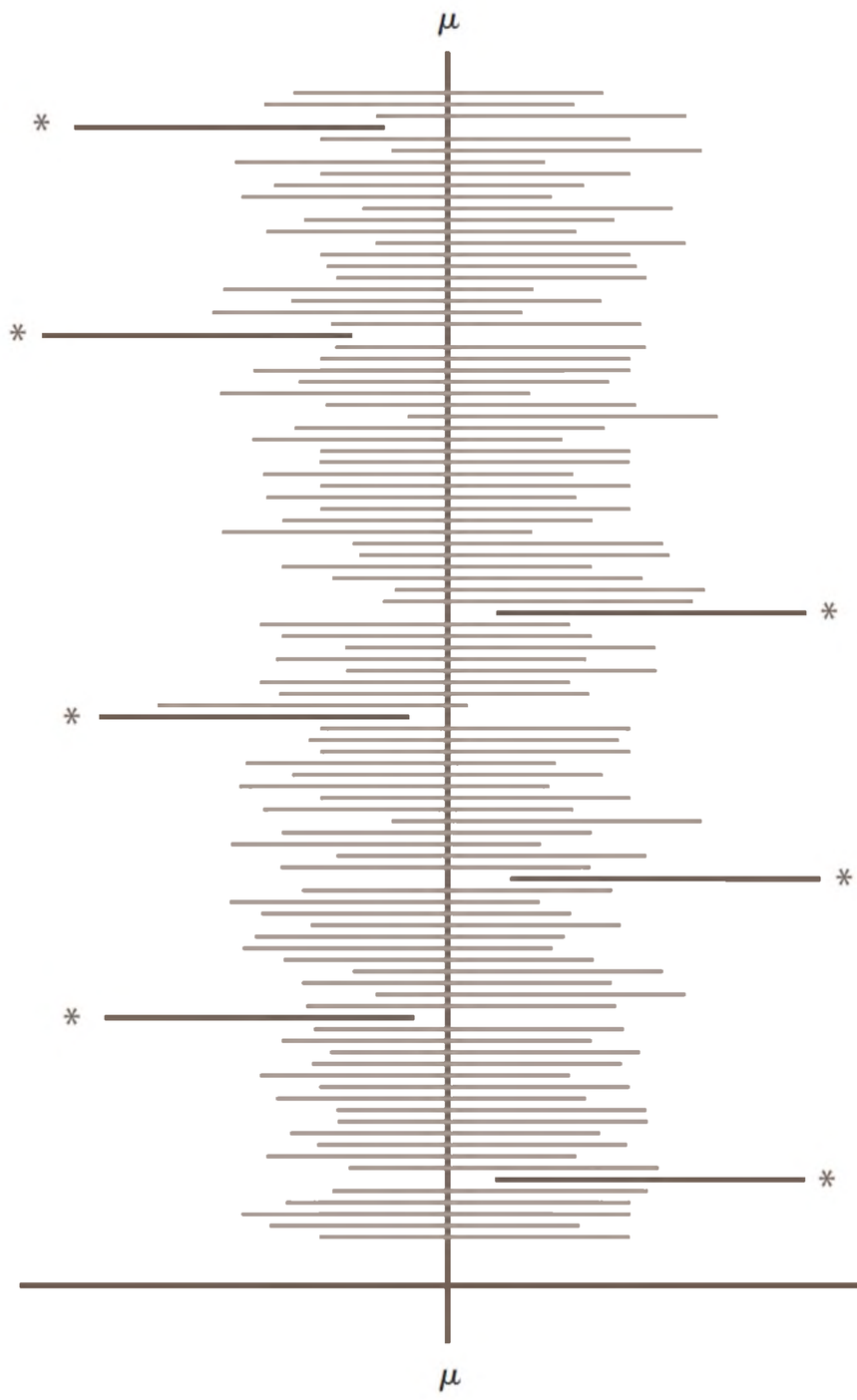


Figura 7.3 Cien niveles de confianza de 95% (los asteriscos identifican intervalos que no incluyen a μ).

para una larga secuencia de réplicas de un experimento en lugar de sólo para una. Existe otro método para abordar la construcción y la interpretación de intervalos de confianza que utiliza la noción de probabilidad subjetiva y el teorema de probabilidad de Bayes, aunque los detalles técnicos se salen del alcance de este libro; el libro de DeGroot y colaboradores (véase la bibliografía del capítulo 6) es una buena fuente. El intervalo presentado aquí (así como también cada intervalo presentado subsecuentemente) se llama intervalo de confianza "clásico" porque su interpretación se apoya en la noción clásica de probabilidad.

Otros niveles de confianza

El nivel de confianza de 95% fue heredado de la probabilidad de .95 de las desigualdades iniciales que aparecen en (7.2). Si se desea un nivel de confianza de 99% la probabilidad inicial de .95 debe ser reemplazada por .99, lo que implica cambiar el valor crítico z de 1.96 a 2.58. Un intervalo de confianza de 99% resulta entonces de utilizar 2.58 en lugar de 1.96 en la fórmula para el intervalo de confianza de 95%.

De hecho, cualquier nivel de confianza deseado se obtiene reemplazando 1.96 o 2.58 con el valor crítico normal estándar apropiado. Recuerde que en capítulo 4 se menciona la notación para un valor crítico z: valor crítico z_α es el número en la escala horizontal z que captura el área de la cola superior. Tal como lo muestra la figura 7.4, utilizando $z_{\alpha/2}$ en lugar de 1.96 se logra una probabilidad (es decir, el área central de la curva z) de $1 - \alpha$.

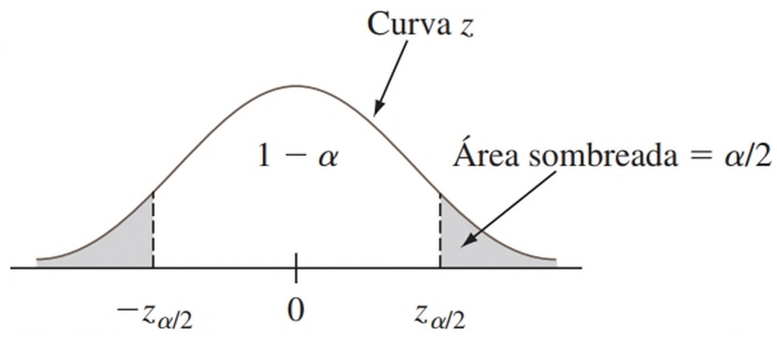


Figura 7.4 $P(-z_{\alpha/2} < Z, z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$

DEFINICIÓN

La siguiente expresión da un **intervalo de confianza de 100(1 − α)%** para la media μ de una población normal cuando se conoce el valor de σ

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \qquad \textbf{(7.5.)}$$

o, de forma equivalente, por $\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}$.

La fórmula (7.5) para el intervalo de confianza también se puede expresar en palabras como

estimación puntual de $\mu \pm$ (valor crítico z) (error estándar de la media).

EJEMPLO 7.3 No hace mucho tiempo que el proceso de producción de una caja de control de un tipo particular para un motor fue modificado. Antes de esta modificación, los datos históricos sugirieron que la distribución de los diámetros de agujeros para bujes en las cajas era normal con desviación estándar de .100 mm. Se cree que la modificación no ha afectado la forma de la distribución o la desviación estándar, pero que el valor del diámetro medio pudo cambiar. Se selecciona una muestra de 40 cajas y se determina el diámetro de agujero para cada una, y el resultado es un diámetro medio muestral de 5.426 mm. Calcule un intervalo de confianza para el diámetro de agujero promedio verdadero utilizando un nivel de confianza de 90%. Esto requiere que $100(1 - \alpha) = 90$, de donde $\alpha = .10$ y $z_{\alpha/2} = z_{.05} = 1.645$ (correspondiente a un área de curva z acumulada de .9500). El intervalo deseado es entonces

$$5.426 \pm (1.645)\frac{.100}{\sqrt{40}} = 5.426 \pm .026 = (5.400, 5.452)$$

Con un razonable alto grado de confianza se puede decir que $5.400 < \mu < 5.452$. Este intervalo es algo angosto debido a la pequeña cantidad de variabilidad del diámetro del agujero ($\sigma = .100$). ■

Nivel de confianza, precisión y tamaño de la muestra

¿Por qué decidirse por un nivel de confianza de 95% cuando un nivel de 99% es alcanzable? Porque el precio pagado por el nivel de confianza más alto es un intervalo más ancho. Ya que el intervalo de 95% se extiende $1.96 \cdot \sigma/\sqrt{n}$ a cada lado de $\bar{x}$, el ancho del intervalo es $2(1.96) \cdot \sigma/\sqrt{n} = 3.92 \cdot \sigma/\sqrt{n}$. Asimismo, el ancho del intervalo de 99% es $2(2.58) \cdot \sigma/\sqrt{n} = 5.16 \cdot \sigma/\sqrt{n}$. Es decir, se tiene más confianza en el intervalo de 99% precisamente porque es más ancho. Mientras más alto es el grado de confianza deseado, más ancho es el intervalo resultante.

Si se considera que el ancho del intervalo especifica su precisión o exactitud, entonces el nivel de confianza (o confiabilidad) del intervalo está relacionado de manera inversa con su precisión. La estimación de un intervalo altamente confiable puede ser imprecisa por el hecho de que los puntos extremos del intervalo pueden estar muy alejados, mientras que un intervalo preciso puede acarrear una confiabilidad relativamente baja. Por consiguiente,

no se puede decir de modo inequívoco que se tiene que preferir un intervalo de 99% a uno de 95%; la ganancia de confiabilidad acarrea una pérdida de precisión.

Una estrategia atractiva es especificar tanto el nivel de confianza deseado como el ancho del intervalo y luego determinar el tamaño de muestra necesario.

EJEMPLO 7.4 Un monitoreo exhaustivo de un sistema de tiempo compartido de computadoras sugiere que el tiempo de respuesta a un comando de edición particular está normalmente distribuido con desviación estándar de 25 milisegundos. Se instaló un nuevo sistema operativo y se desea estimar el tiempo de respuesta promedio verdadero μ en el nuevo entorno. Suponiendo que los tiempos de respuesta siguen estando normalmente distribuidos con $\sigma = 25$, ¿qué tamaño de muestra es necesario para asegurarse de que el intervalo de confianza de 95% resultante tiene un ancho (a lo más) de 10? El tamaño de muestra n debe satisfacer

$$10 = 2 \cdot (1.96)(25/\sqrt{n})$$

Reordenando esta ecuación se obtiene

$$\sqrt{n} = 2 \cdot (1.96)(25)/10 = 9.80$$

por consiguiente

$$n = (9.80)^2 = 96.04$$

En vista de que n debe ser un entero, se requiere un tamaño de muestra de 97. ■

Una fórmula general para el tamaño de muestra n necesario para garantizar un ancho de intervalo w se obtiene igualando w a $2 \cdot z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}$ y despejando n.

El tamaño de muestra necesario para que el intervalo de confianza (7.5) dé un ancho w es

$$n = \left(2z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{w}\right)^2$$

Mientras más pequeño es el ancho deseado w, más grande debe ser n. Además, n es una función creciente de σ (más variabilidad de la población requiere un tamaño de muestra más grande) y del nivel de confianza $100(1 - \alpha)$ (conforme α decrece, $z_{\alpha/2}$ se incrementa).

A la mitad del ancho $1.96/\sqrt{n}$ del intervalo de confianza de 95% en ocasiones se le llama **límite en el error de estimación** asociado con un nivel de confianza de 95%. Es decir, con 95% de confianza la estimación puntual x no estará a más de esta distancia de μ. Antes de obtener datos, es posible que un investigador desee determinar un tamaño de muestra con el cual se logre un valor particular del límite. Por ejemplo, si μ representa la eficiencia de combustible promedio (mpg) de todos los vehículos de cierto tipo, el objetivo de una investigación puede ser estimar μ dentro de 1 mpg con 95% de confianza. Más generalmente, si se desea estimar μ dentro de una cantidad β (el límite especificado en el error de estimación) con confianza de $100(1 - \alpha)\%$, el tamaño de muestra necesario se obtiene al reemplazar $2/w$ por $1/\beta$ en el recuadro precedente.

Deducción de un intervalo de confianza

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ la muestra en la cual se tiene que basar el intervalo de confianza para un parámetro θ. Suponga que se puede determinar una variable aleatoria que satisfaga las siguientes dos propiedades:

1. La variable depende funcionalmente tanto de $X_1, \ldots, X_n$ como de θ.
2. La distribución de probabilidad de la variable no depende de θ ni de cualesquiera otros parámetros desconocidos.

Sea $h(X_1, X_2, \ldots, X_n; \theta)$ esta variable aleatoria. Por ejemplo, si la distribución de la población es normal con σ y $\theta = \mu$ conocidos, la variable $h(X_2, \ldots, X_n; \mu) = (\overline{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ satisface ambas propiedades; claramente depende funcionalmente de μ, no obstante su distribución de probabilidad normal estándar, la cual no depende de μ. En general, la forma de la función h casi siempre se pone de manifiesto al examinar la distribución de un estimador apropiado $\hat{\theta}$.

Con cualquier α entre 0 y 1, se ve que las constantes a y b satisfacen

$$P(\alpha < h(X_1,\ldots, X_n; \theta) < b) = 1 - \alpha \tag{7.6}$$

A causa de la segunda propiedad, a y b no dependen de θ. En el ejemplo normal, $a = -z_{\alpha/2}$ y $b = z_{\alpha/2}$. Ahora suponga que las desigualdades en (7.6) pueden ser manipuladas para aislar θ, y así obtener la proposición de probabilidad equivalente

$$P(l(X_1, X_2,\ldots, X_n) < \theta < u(X_1, X_2,\ldots, X_n)) = 1 - \alpha$$

Entonces $l(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $u(x_1, \ldots, x_n)$ son los límites de confianza inferior y superior, respectivamente, para un intervalo de confianza de $100(1 - \alpha)\%$. En el ejemplo normal, se vio que $l(X_1,\ldots, X_n) = \overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}$ y $u(X_1,\ldots, X_n) = \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}$.

EJEMPLO 7.5 Un modelo teórico sugiere que el tiempo hasta la ruptura de un fluido aislante entre electrodos a un voltaje particular tiene una distribución exponencial con parámetro λ (véase la sección 4.4). Una muestra aleatoria de $n = 10$ tiempos de ruptura proporciona los siguientes datos muestrales (en min): $x_1 = 41.53$, $x_2 = 18.73$, $x_3 = 2.99$, $x_4 = 30.34$, $x_5 = 12.33$, $x_6 = 117.52$, $x_7 = 73.02$, $x_8 = 223.63$, $x_9 = 4.00$, $x_{10} = 26.78$. Se desea un intervalo de confianza de 95% para λ y para el tiempo de ruptura promedio verdadero.

Sea $h(X_1, X_2, \ldots, X_n; \lambda) = 2\lambda\Sigma X_i$. Se puede demostrar que esta variable aleatoria tiene una distribución de probabilidad llamada distribución ji-cuadrada con $2n$ grados de libertad (gl) ($\nu = 2n$, donde ν es el parámetro de una distribución ji-cuadrada como se menciona en la sección 4.4). La tabla A.7 del apéndice ilustra una curva de densidad ji-cuadrada típica y tabula valores críticos que capturan áreas de colas específicas. El número pertinente de grados de libertad en este caso es 2(10)=20. La fila $\nu = 20$ de la tabla muestra que 34.170 captura un área de cola superior de .025, y que 9.591 captura un área de cola inferior de .025 (área de cola superior de .975). Por consiguiente, con $n = 10$,

$$P\left(9.591 < 2\lambda\sum X_i < 34.170\right) = .95$$

La división entre $2\Sigma X_i$ aísla λ y se obtiene

$$P\left(9.591/\left(2\sum X_i\right) < \lambda < \left(34.170/\left(2\sum X_i\right)\right)\right) = .95$$

El límite inferior del intervalo de confianza de 95% para λ es $9.591/(2\Sigma x_i)$, y el límite superior es $34.170/(2\Sigma x_i)$. Con los datos dados $\Sigma x_i = 550.87$ proporciona el intervalo (.00871, .03101).

El valor esperado de una variable aleatoria exponencial es $\mu = 1/\lambda$. Puesto que

$$P\left(2\sum X_i/34.170 < 1/\lambda < 2\sum X_i/9.591\right) = .95$$

el intervalo de confianza de 95% para el tiempo de ruptura promedio verdadero es $(2\Sigma x_i/34.170, 2\Sigma x_i/9.591) = (32.24, 114.87)$. Obviamente este intervalo es bastante ancho, lo que refleja una variabilidad sustancial de los tiempos de ruptura y un pequeño tamaño de muestra. ■

En general, los límites de confianza superior e inferior resultan de reemplazar cada $<$ en (7.6) por $=$ y al resolver para θ. En el ejemplo del fluido aislante que se acaba de considerar, $2\lambda\Sigma x_i = 34.170$ da $\lambda = 34.170/(2\Sigma x_i)$ como límite de confianza superior y el

límite inferior se obtiene con la otra ecuación. Observe que los dos límites de intervalo no están equidistantes de la estimación puntual, en vista de que el intervalo no es de la forma $\hat{\theta} \pm c$.

Intervalos de confianza *bootstrap*

La técnica *bootstrap* se introdujo en el capítulo 6 como una forma de estimar $\sigma_{\hat{\theta}}$. También puede ser aplicada para obtener un intervalo de confianza para θ. Considere de nuevo la estimación de la media μ de una distribución normal cuando se conoce σ. Reemplace μ con θ y use $\hat{\theta} = \overline{X}$ como estimador puntual. Observe que $1.96\sigma/\sqrt{n}$ es el 97.5o percentil de la distribución de $\hat{\theta} - \theta$ [esto es, $P(\overline{X} - \mu < 1.96\sigma/\sqrt{n}) = P(Z < 1.96) = .9750$]. Del mismo modo, $-1.96\sigma/\sqrt{n}$ es el 2.5° percentil, por consiguiente

$$\begin{aligned} .95 &= P(2.5^{\circ} \text{ percentil} < \hat{\theta} = \theta < 97.5^{\circ} \text{ percentil}) \\ &= P(\hat{\theta} - 2.5^{\circ} \text{ percentil} > \theta > \hat{\theta} - 97.5^{\circ} \text{ percentil}) \end{aligned}$$

Es decir, con

$$\begin{aligned} l &= \hat{\theta} - 97.5^{\circ} \text{ percentil de } \hat{\theta} = \theta \\ u &= \hat{\theta} - 2.5^{\circ} \text{ percentil de } \hat{\theta} = \theta \end{aligned} \tag{7.7}$$

el intervalo de confianza para θ es (l, u). En muchos casos, los percentiles en (7.7) no pueden ser calculados, pero sí *pueden* ser estimados con muestras *bootstrap*. Suponga que se obtienen $B = 1000$ muestras *bootstrap* y se calculan $\hat{\theta}^*_1, \ldots, \hat{\theta}^*_{1000}$ y $\overline{\theta}^*$ seguidos por las 1000 diferencias $\hat{\theta}^*_1 - \hat{\theta}^*, \ldots, \hat{\theta}^*_{1000} - \hat{\theta}^*$. La 25ª más grande y la 25ª más pequeña de estas diferencias son estimaciones de los percentiles desconocidos en (7.7). Para más información consulte los libros de Devore y Berk o el de Efron citados en el capítulo 6.

EJERCICIOS Sección 7.1 (1–11)

1. Considere una distribución de población normal con el valor de σ conocido.
- **a.** ¿Cuál es el nivel de confianza para el $\overline{x} \pm 2.81\sigma/\sqrt{n}$?
- **b.** ¿Cuál es el nivel de confianza para el intervalo $\overline{x} \pm 1.44\sigma/\sqrt{n}$?
- **c.** ¿Qué valor de $z_{\alpha/2}$ en la fórmula de intervalo de confianza (7.5) da un nivel de confianza de 99.7%?
- **d.** Responda la pregunta del inciso c) para un nivel de confianza de 75%.

2. Cada uno de los siguientes es un intervalo de confianza para μ = frecuencia verdadera (es decir, media de la población) de resonancia promedio (Hz) para todas las raquetas de tenis de un tipo:

(114.4, 115.6) (114.1, 115.9)
- **a.** ¿Cuál es el valor de la frecuencia de resonancia media muestral?
- **b.** Ambos intervalos se calcularon con los mismos datos muestrales. El nivel de confianza para uno de estos intervalos es de 90% y para el otro es de 99%. ¿Cuál de los intervalos tiene el nivel de confianza de 90% y por qué?

3. Suponga que se selecciona una muestra aleatoria de 50 botellas de una marca particular de jarabe para la tos y se determina el contenido de alcohol de cada una. Sea μ el contenido promedio de alcohol de la población de todas las botellas de la marca estudiada. Suponga que el intervalo de confianza de 95% resultante es (7.8, 9.4).
- **a.** Un intervalo de confianza de 90%, calculado con esta muestra, ¿habría resultado más angosto o más ancho que el intervalo dado? Explique su razonamiento.
- **b.** Considere la siguiente proposición: existe 95% de probabilidades de que μ esté entre 7.8 y 9.4. ¿Es correcta esta proposición? ¿Por qué sí o por qué no?
- **c.** Considere la siguiente proposición: se puede tener la total confianza de que 95% de todas las botellas de este tipo de jarabe para la tos tienen un contenido de alcohol de entre 7.8 y 9.4. ¿Es correcta esta proposición? ¿Por qué sí o por qué no?
- **d.** Considere la siguiente proposición: si el proceso de selección de una muestra de tamaño 50 y el cálculo del intervalo de 95% correspondiente se repite 100 veces, 95 de los intervalos resultantes incluirán μ. ¿Es correcta esta proposición? ¿Por qué sí o por qué no?

4. Se desea un intervalo de confianza para la pérdida por carga parásita promedio verdadera μ (watts) de cierto tipo de motor de inducción cuando la corriente a través de la línea se mantiene en 10 amps a una velocidad de 1500 rpm. Suponga que la pérdida por carga parásita está normalmente distribuida con $\sigma = 3.0$.

- **a.** Calcule un intervalo de confianza de 95% para μ cuando $n = 25$ y $\bar{x} = 58.3$.
- **b.** Calcule un intervalo de confianza de 95% para μ cuando $n = 100$ y $\bar{x} = 58.3$.
- **c.** Calcule un intervalo de confianza de 99% para μ cuando $n = 100$ y $\bar{x} = 58.3$.
- **d.** Calcule un intervalo de confianza de 82% para μ cuando $n = 100$ y $\bar{x} = 58.3$.
- **e.** ¿Qué tan grande debe ser n si el ancho del intervalo de 99% para μ tiene que ser 1.0?

5. Suponga que la porosidad al helio (en porcentaje) de muestras de carbón tomadas de cualquier costura particular está normalmente distribuida con desviación estándar verdadera de .75.

- **a.** Calcule un intervalo de confianza de 95% para la porosidad promedio verdadera de una costura, si la porosidad promedio en 20 especímenes de la costura fue de 4.85.
- **b.** Calcule un intervalo de confianza de 98% para la porosidad promedio verdadera de otra costura basada en 16 especímenes con porosidad promedio muestral de 4.56.
- **c.** ¿Qué tan grande debe ser un tamaño de muestra si el ancho del intervalo de 95% tiene que ser de .40?
- **d.** ¿Qué tamaño de muestra se necesita para estimar la porosidad promedio verdadera dentro de .2 con confianza de 99%?

6. Con base en pruebas extensas se sabe que el límite de elasticidad de un tipo particular de varilla de refuerzo de acero suave está normalmente distribuido con $\sigma = 100$. La composición de la varilla se modificó un poco, pero no se cree que la alteración haya afectado la normalidad o el valor de σ.

- **a.** Suponiendo que es este el caso si una muestra de 25 varillas modificadas dio por resultado un límite de elasticidad promedio muestral de 8439 lb, calcule un intervalo de confianza de 90% para el punto de elasticidad promedio verdadero de la varilla modificada.
- **b.** ¿Cómo modificaría el intervalo del inciso a) para obtener un nivel de confianza de 92%?

7. ¿En cuánto se debe incrementar el tamaño de muestra n si el ancho del intervalo de confianza (7.5) tiene que ser reducido a la mitad? Si el tamaño de muestra se incrementa por un factor de 25, ¿qué efecto tendrá esto en el ancho del intervalo? Justifique sus aseveraciones.

8. Sea $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, con $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$. Entonces

$$P\left(-z_{\alpha_1} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha_2}\right) = 1 - \alpha$$

- **a.** Use esta ecuación para obtener una expresión más general para un intervalo de confianza $100(1 - \alpha)\%$ para μ del cual el intervalo (7.5) es un caso especial.
- **b.** Sea $\alpha = .05$ y $\alpha_1 = \alpha/4$, $\alpha_2 = 3\alpha/4$. ¿Resulta esto en un intervalo más angosto o más ancho que el intervalo (7.5)?

9. **a.** En las mismas condiciones que aquellas que conducen al intervalo (7.5), $P[(\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) < 1.645] = .95$. Use esta expresión para deducir un intervalo unilateral para μ de ancho infinito y que proporcione un límite de confianza inferior para μ. ¿Cuál es el intervalo para los datos del ejercicio 5(a)?

- **b.** Generalice el resultado del inciso a) para obtener un límite inferior con nivel de confianza de $100(1 - \alpha)\%$.
- **c.** ¿Cuál es un intervalo análogo al del inciso b) que proporcione un límite superior para μ? Calcule este intervalo de 99% para los datos del ejercicio 4(a).

10. Una muestra aleatoria de $n = 15$ bombas térmicas de cierto tipo produjo las siguientes observaciones de vida útil (en años):

2.0	1.3	6.0	1.9	5.1	.4	1.0	5.3
15.7	.7	4.8	.9	12.2	5.3	.6	

- **a.** Suponga que la distribución de la vida útil es exponencial y use un argumento paralelo al del ejemplo 7.5 para obtener un intervalo de confianza de 95% para la vida útil esperada (promedio verdadero).
- **b.** ¿Cómo debería modificarse el intervalo del inciso a) para obtener un nivel de confianza de 99%?
- **c.** ¿Cuál es un intervalo de confianza de 95% para la desviación estándar de la distribución de la vida útil? [*Sugerencia:* ¿Cuál es la desviación estándar de una variable aleatoria exponencial?]

11. Considere los siguientes 1000 intervalos de confianza de 95% para μ que un consultor estadístico obtendrá para varios clientes. Suponga que los conjuntos de datos en los cuales están basados los intervalos se seleccionan independientemente uno de otro. ¿Cuántos de estos 1000 intervalos espera que capturen el valor correspondiente de μ? ¿Cuál es la probabilidad de que entre 940 y 960 de estos intervalos contengan el valor correspondiente de μ? [*Sugerencia*: Sea $Y =$ el número entre los 1000 intervalos que contienen a μ. ¿Qué clase de variable aleatoria es Y?]

7.2 Intervalos de confianza de muestra grande para una media y para una proporción de población

En el intervalo de confianza para μ, dado en la sección previa, se supuso que la distribución de la población es normal con el valor de σ conocido. A continuación se presenta un intervalo de confianza de muestra grande cuya validez no requiere estas suposiciones. Después de demostrar cómo el argumento que lleva a este intervalo se aplica en forma extensa para producir otros intervalos de muestra grande, habrá que enfocarse en un intervalo para una proporción de población p.

Intervalo de muestra grande para μ

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población con media μ y desviación estándar σ. Siempre que n es grande, el teorema del límite central implica que $\overline{X}$ tiene de manera aproximada una distribución normal, cualquiera que sea la naturaleza de la distribución de la población. Se deduce entonces que $Z = (\overline{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ tiene aproximadamente una distribución estándar normal, de modo que

$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha$$

Un argumento paralelo al dado en la sección 7.1 da $\overline{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}$ como intervalo de confianza de muestra grande para μ con un nivel de confianza de *aproximadamente* $100(1 - \alpha)\%$. Es decir, cuando n es grande el intervalo de confianza para μ dado antes permanece válido, cualquiera que sea la distribución de la población, siempre que el calificador esté insertado "aproximadamente" enfrente del nivel de confianza.

Una dificultad práctica con este desarrollo es que el cálculo del intervalo de confianza requiere el valor de σ, el cual rara vez es conocido. Considere reemplazar la desviación estándar de la población σ en Z por la desviación estándar de la muestra para obtener la variable estandarizada

$$\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

Previamente hubo aleatoriedad sólo en el numerador de Z gracias a $\overline{X}$. En la nueva variable estandarizada, tanto $\overline{X}$ *como* S cambian de valor de una muestra a otra. Así que aparentemente la distribución de la nueva variable deberá estar más dispersa que la curva z para reflejar la variación extra en el denominador. Esto en realidad es cierto cuando n es pequeño. Sin embargo, con n grande la sustitución de S en lugar de σ agrega un poco de variabilidad extra, así que esta variable también tiene aproximadamente una distribución normal estándar. La manipulación de la variable en la proposición de probabilidad, como en el caso de la σ conocida, da un intervalo de confianza de muestra grande general para μ.

PROPOSICIÓN

Si n es suficientemente grande, la variable estandarizada

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

tiene aproximadamente una distribución normal estándar. Esto implica que

$$\overline{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \tag{7.8}$$

es un **intervalo de confianza de muestra grande para μ** con nivel de confianza aproximadamente de $100(1 - \alpha)\%$. Esta fórmula es válida sin importar la forma de la distribución de la población.

Es decir, el intervalo de confianza (7.8) es

la estimación puntual de $\mu \pm$ (z valor crítico) (error estándar estimado de la media).

En general, $n > 40$ será suficiente para justificar el uso de este intervalo. Esto es algo más conservador que la regla empírica del teorema del límite central, debido a la variabilidad adicional introducida por el uso de S en lugar de σ.

EJEMPLO 7.6 ¿Nunca ha deseado tener un Porsche? El autor piensa que tal vez podía permitirse un Boxster, el modelo más barato. Así que entró a www.cars.com el 18 de noviembre de 2009 y encontró un total de 1113 automóviles de este tipo en la lista. Los precios iban de $3499 a

$130 000 (el precio de este último fue uno de los dos que excedían los $70 000). Los precios lo deprimieron, por lo que mejor se centró en las lecturas del odómetro (millas). Aquí se presentan las lecturas de una muestra de 50 de estos Boxster:

2948	2996	7197	8338	8500	8759	12710	12925
15767	20000	23247	24863	26000	26210	30552	30600
35700	36466	40316	40596	41021	41234	43000	44607
45000	45027	45442	46963	47978	49518	52000	53334
54208	56062	57000	57365	60020	60265	60803	62851
64404	72140	74594	79308	79500	80000	80000	84000
113000	118634						

Una gráfica de caja de los datos (figura 7.5) muestra que a excepción de los dos valores límite en el extremo superior la distribución de valores es bastante simétrica (de hecho, una gráfica de probabilidad normal muestra un patrón bastante lineal, aunque los puntos correspondientes a las dos observaciones más pequeñas y a las dos mayores están un tanto alejadas de un ajuste lineal a través de los puntos restantes).

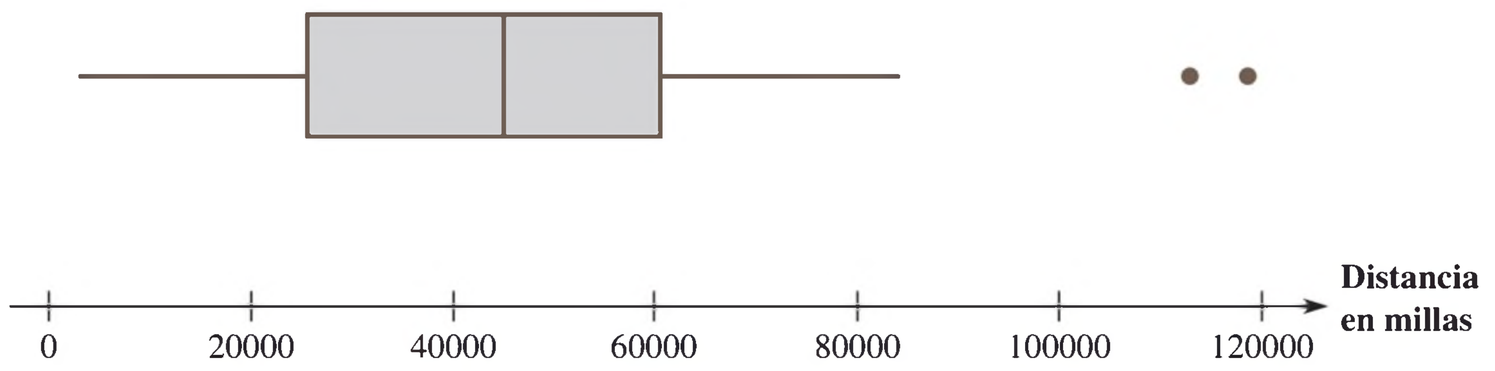


Figura 7.5 Gráfica de caja para las lecturas del odómetro del ejemplo 7.6

Las cantidades resumidas incluyen $n = 50$, $\tilde{x} = 45\ 679.4$, $\bar{x} = 45\ 013.5$, $s = 26\ 641.675$, $f_s = 34\ 265$. La media y la mediana están relativamente cerca (si los dos valores mayores fueran reducidos por 30 000, la media bajaría a 44 479.4, mientras que la mediana no se vería afectada). La gráfica de caja y las magnitudes de s y f_s respecto a la media y la mediana de ambos indican una cantidad considerable de variabilidad. El intervalo de confianza de 95% requiere que $z_{.025} = 1.96$, y el intervalo es entonces

$$45\ 679.4 \pm (1.96)\left(\frac{26\ 641.675}{\sqrt{50}}\right) = 45\ 679.4 \pm 7384.7$$
$$= (38\ 294.7,\ 53\ 064.1)$$

Es decir, $38\ 294.7 < \mu < 53\ 064.1$ con un nivel de confianza de aproximadamente 95%. Este intervalo es bastante amplio debido a un tamaño de muestra de 50, que aunque es grande por nuestra regla general, no es lo suficientemente grande como para superar la variabilidad en la muestra. No tenemos una estimación muy precisa de la población media de la lectura del odómetro.

¿El intervalo que hemos calculado es uno de este 95% que en el largo plazo incluye el parámetro calculado o es uno de los "malos" del 5% que no lo hace? Sin saber el valor de μ no podemos contestar. Recuerde que el nivel de confianza se refiere al porcentaje de captura a largo plazo cuando la fórmula se utiliza repetidamente en varias muestras; no se puede interpretar para una sola muestra y el intervalo resultante. ■

Desafortunadamente, la selección del tamaño de muestra para que dé un ancho de intervalo deseado no es simple en este caso, como lo fue en el caso de la σ conocida. Por eso el ancho de (7.8) es $2z_{\alpha/2}s/\sqrt{n}$. Ya que el valor de s no está disponible antes de que los datos hayan sido recopilados, el ancho del intervalo no puede ser determinado tan sólo con

la selección de n. La única opción para un investigador que desea especificar un ancho deseado es hacer una suposición fundamentada de cuál podría ser el valor de s. Siendo conservadores y suponiendo un valor más grande de s, será seleccionado un n más grande de lo necesario. El investigador puede ser capaz de especificar un valor razonablemente preciso del rango de población (la diferencia entre los valores más grande y más pequeño). Entonces si la distribución de la población no es demasiado asimétrica y si se divide el rango entre 4 se obtiene un valor aproximado de lo que s podría ser.

EJEMPLO 7.7 El tiempo de carga (minutos) para el acero de carbono en un tipo de horno de hogar abierto se determinará para cada calor en una muestra de tamaño n. Si el investigador cree que casi todos los tiempos en la distribución están entre 320 y 440, ¿qué tamaño de la muestra sería apropiado para estimar el tiempo promedio real a cuando mucho 5 minutos con un nivel de confianza de 95%?

Un valor razonable para s es $(440 - 320)/4 = 30$. Por tanto

$$n = \left[\frac{(1.96)(30)}{5}\right]^2 = 138.3$$

Dado que el tamaño de la muestra debe ser un número entero, $n = 139$ debe ser utilizado. Tenga en cuenta que la estimación está dentro de 5 minutos con el nivel de confianza especificado que es equivalente a un ancho de intervalo de confianza de 10 minutos. ■

Un intervalo de confianza de muestra grande general

Los intervalos de muestra grande $\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}$ y $x \pm z_{\alpha/2} \cdot s/\sqrt{n}$ son casos especiales de un intervalo de confianza de muestra grande general para un parámetro θ. Suponga que $\hat{\theta}$ es un estimador que satisface las siguientes propiedades: 1) Tiene aproximadamente una distribución normal; 2) es insesgado (al menos aproximadamente); y 3) una expresión para $\sigma_{\hat{\theta}}$, la desviación estándar de $\hat{\theta}$, está disponible. Por ejemplo, en el caso de $\theta = \mu$, $\hat{\mu} = \bar{X}$ es un estimador insesgado cuya distribución es aproximadamente normal cuando n es grande y $\sigma_{\hat{\mu}} = \sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{n}$. Estandarizando $\hat{\theta}$ se obtiene la variable aleatoria $Z = (\hat{\theta} - \theta)/\sigma_{\hat{\theta}}$, la cual tiene aproximadamente una distribución normal estándar. Esto justifica la proposición de probabilidad

$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sigma_{\hat{\theta}}} < z_{\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha \tag{7.9}$$

Suponga primero que $\sigma_{\hat{\theta}}$ no involucra ningún parámetro desconocido (p. ej., σ conocida en el caso de $\theta = \mu$). Entonces si se reemplaza cada $<$ en (7.9) por $=$ se obtiene $\theta = \hat{\theta} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\hat{\theta}}$, por consiguiente, los límites de confianza inferior y superior son $\hat{\theta} - z_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\hat{\theta}}$ y $\hat{\theta} + z_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\hat{\theta}}$, respectivamente. Suponga ahora que $\sigma_{\hat{\theta}}$ no implica a θ pero sí implica al menos otro parámetro desconocido. Sea $s_{\hat{\theta}}$ la estimación de $\sigma_{\hat{\theta}}$ obtenida utilizando estimaciones en lugar de los parámetros desconocidos (p. ej., $s/\sqrt{n}$ estima $\sigma/\sqrt{n}$). En condiciones generales (esencialmente que $s_{\hat{\theta}}$ se aproxime a $\sigma_{\hat{\theta}}$ con la mayoría de las muestras), un intervalo de confianza válido es $\hat{\theta} \pm z_{\alpha/2} \cdot s_{\hat{\theta}}$. El intervalo muestral grande $\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot s/\sqrt{n}$ es un ejemplo.

Por último, suponga que $\sigma_{\hat{\theta}}$ implica el θ desconocido. Este es el caso, por ejemplo, cuando $\theta = p$, una proporción de la población. Entonces $(\hat{\theta} - \theta)/\sigma_{\hat{\theta}} = z_{\alpha/2}$ puede ser difícil de resolver. Con frecuencia se puede obtener una solución aproximada reemplazando θ en $\sigma_{\hat{\theta}}$ por su estimación $\hat{\theta}$. Esto da una desviación estándar estimada $s_{\hat{\theta}}$ y el intervalo correspondiente es de nuevo $\hat{\theta} \pm z_{\alpha/2} \cdot s_{\hat{\theta}}$.

Es decir, este intervalo de confianza

es una estimación puntual de $\theta \pm$ (valor crítico z) (error estándar estimado del estimador).

Un intervalo de confianza para una proporción de población

Sea p la proporción de "éxitos" en una población, donde *éxito* identifica a un individuo u objeto que tiene una propiedad específica (p. ej., individuos que se graduaron en una universidad, computadoras que no requieren servicio de garantía, etc.). Una muestra aleatoria de n individuos tiene que ser seleccionada y X es el número de éxitos en la muestra. Siempre que n sea pequeño comparado con el tamaño de la población, X puede ser considerada una variable aleatoria binomial con $E(X) = np$ y $\sigma_X = \sqrt{np(1-p)}$. Además, si tanto $np \geq 10$ como $nq \geq 10$, $(q = 1 - p)$, X tiene una distribución normal.

El estimador natural de p es $\hat{p} = X/n$, la fracción muestral de éxitos. Puesto que $\hat{p}$ es simplemente X multiplicada por la constante $1/n$, $\hat{p}$ también tiene aproximadamente una distribución normal. Tal como se muestra en la sección 6.1, $E(\hat{p}) = p$ (insesgado) y $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{p(1-p)}$. La desviación estándar $\sigma_{\hat{p}}$ implica el parámetro desconocido p. Si se estandariza $\hat{p}$ restando p y dividiendo entre $\sigma_{\hat{p}}$ entonces se tiene

$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} < z_{\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha$$

Procediendo como se sugiere en la subsección "Deducción de un intervalo de confianza" (sección 7.1), los límites de confianza se obtienen al reemplazar cada $<$ por $=$ y resolver la ecuación cuadrática resultante para p. Pero mientras las ecuaciones $(\bar{x} - \mu)/(s/\sqrt{n}) = \pm z_{\alpha/2}$ utilizadas para derivar el intervalo de confianza de una muestra grande para μ son lineares en μ, las ecuaciones aquí son cuadráticas (p^2 aparece en el numerador cuando ambos lados de cada ecuación se elevan al cuadrado para eliminar la raíz cuadrada). Esto da las dos raíces

$$p = \frac{\hat{p} + z^2_{\alpha/2}/2n}{1 + z^2_{\alpha/2}/n} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n + z^2_{\alpha/2}/4n^2}}{1 + z^2_{\alpha/2}/n}$$

$$= \tilde{p} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n + z^2_{\alpha/2}/4n^2}}{1 + z^2_{\alpha/2}/n}$$

PROPOSICIÓN

Sea $\tilde{p} = [\hat{p} + z^2_{\alpha/2}/2n]/[1 + z^2_{\alpha/2}/n]$. Entonces, un **intervalo de confianza para una proporción de población** p con nivel de confianza aproximadamente de $100(1-\alpha)\%$ es

$$\tilde{p} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{\hat{p}\hat{q}/n + z^2_{\alpha/2}/4n^2}}{1 + z^2_{\alpha/2}/n} \qquad \textbf{(7.10)}$$

donde $\hat{q} = 1 - \hat{p}$ y, tal como antes, el signo $-$ en la ecuación 7.10 corresponde al límite de confianza inferior y el signo $+$ al límite de confianza superior.

Esto a menudo se denomina como la *puntuación del intervalo de confianza* para p.

Si el tamaño n de la muestra es bastante grande, entonces $z^2/2n$ suele ser insignificante (pequeño) comparado con $\hat{p}$ y z^2/n es insignificante comparado con 1, partiendo de que $\tilde{p} \approx \hat{p}$. En este caso $z^2/4n^2$ también es despreciable comparado con pq/n (n^2 es un divisor mucho más grande que n); como resultado, el término dominante en la expresión $\pm$ es $z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}\hat{q}/n}$ y el intervalo de puntuación es aproximadamente

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}\hat{q}/n} \qquad \textbf{(7.11)}$$

Este último intervalo tiene la forma general $\hat{\theta} \pm z_{\alpha/2}\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}$ de un amplio intervalo de la muestra sugerido en la última subsección. La aproximación del intervalo de confianza (7.11) es la que durante décadas ha aparecido en los libros de texto de introducción a la estadística. Está claro que tiene una forma mucho más simple y más atractiva que la puntuación del intervalo de confianza. Así que, ¿por qué molestarse con este último?

Primero, suponga que se utiliza $z_{.025} = 1.96$ en la fórmula tradicional (7.11). Así, nuestro nivel de confianza *nominal* (el que se cree que va a comprar utilizando este valor crítico z) es de aproximadamente 95%. Así que antes de seleccionar una muestra la probabilidad de que el intervalo aleatorio incluya el valor real de p (es decir, la *probabilidad de cobertura*) debe ser de .95. Pero, como lo muestra la figura 7.6 para el caso $n = 100$, la probabilidad de cobertura real de este intervalo puede variar considerablemente de la probabilidad nominal de .95, en particular cuando p no está cerca de .5 (la gráfica de probabilidad de cobertura frente a p es muy irregular debido a que la distribución subyacente de probabilidad binomial es discreta y no continua). Esto es en general una deficiencia del intervalo tradicional; el nivel de confianza real puede ser bastante diferente del nivel nominal, incluso para tamaños de muestra razonablemente grandes. Investigaciones recientes han demostrado que el intervalo de la puntuación rectifica este comportamiento; para prácticamente todos los tamaños de las muestras y los valores de p su nivel de confianza real será bastante cercano al nivel nominal especificado por la elección de $z_{\alpha/2}$. Esto se debe en gran parte al hecho de que el intervalo de la puntuación se desplaza un poco hacia el .5 en comparación con los intervalos tradicionales. En particular, el punto medio $\tilde{p}$ del intervalo de la puntuación es siempre un poco más cercano a .5 que el punto medio $\hat{p}$ del intervalo tradicional. Esto es especialmente importante cuando p está cerca de 0 o 1.

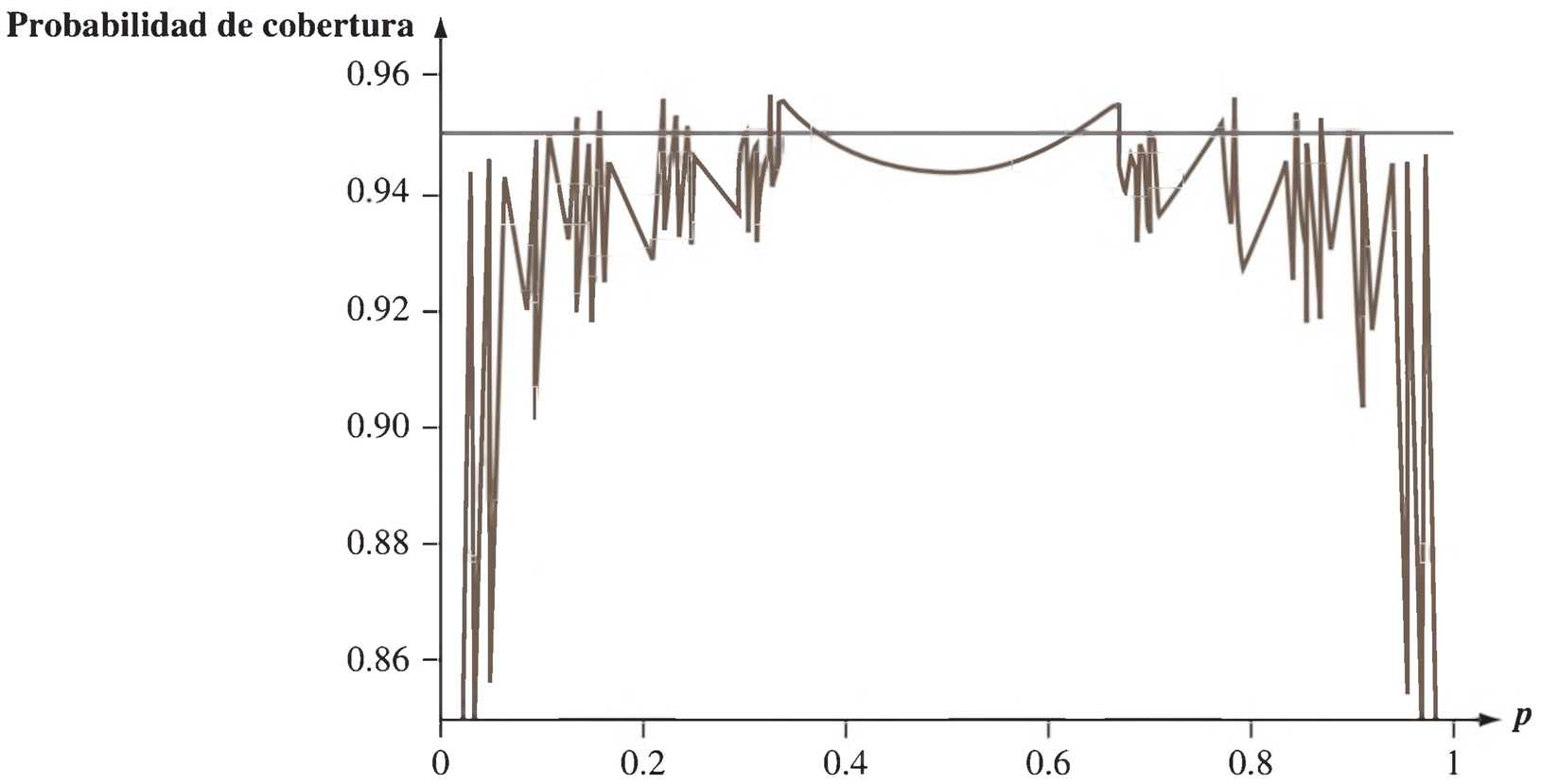


Figura 7.6 Probabilidad de cobertura real para el intervalo (7.11) para variaciones en los valores de p cuando $n = 100$

Además, el intervalo de la puntuación se puede utilizar con casi todos los tamaños de muestra y valores de los parámetros. No es necesario controlar las condiciones $n\hat{p} \geq 10$ y $n(1 - \hat{p}) \geq 10$ que se requerirían al emplear intervalos tradicionales. Así que en lugar de preguntar cuándo n es suficientemente grande para (7.11) para obtener una buena aproximación a (7.10), nuestra recomendación es que *siempre* debe usarse la puntuación del intervalo de confianza. El leve aburrimiento adicional de los cálculos se ve compensado por las propiedades deseables del intervalo.

EJEMPLO 7.8 El artículo **"Repeatability and Reproducibility for Pass/Fail Data" (*J. of Testing and Eval.*, 1997: 151–153)** reporta que en $n = 48$ ensayos en un laboratorio particular, 16 dieron como resultado la ignición de un tipo particular de sustrato por un cigarrillo encendido.

Sea p la proporción a largo plazo de todos los ensayos que producirían ignición. Una estimación puntual de p es $\hat{p} = 16/48 = .333$. Un intervalo de confianza para p con un nivel de confianza de aproximadamente 95% es

$$\frac{.333 + (1.96)^2/96}{1 + (1.96)^2/48} \pm (1.96)\frac{\sqrt{(.333)(.667)/48 + (1.96)^2/9216}}{1 + (1.96)^2/48}$$
$$= .345 \pm .129 = (.216, .474)$$

Este intervalo es bastante amplio ya que un tamaño de muestra de 48 no es tan grande al estimar una proporción.

El intervalo tradicional es

$$.333 \pm 1.96\sqrt{(.333)(.667)/48} = .333 \pm .133 = (.200, .466)$$

Estos dos intervalos concordarían mucho más si el tamaño de muestra fuera sustancialmente más grande. ■

Si se iguala el ancho del intervalo de confianza para p con el ancho preespecificado w se obtiene una ecuación cuadrática para el tamaño de muestra n necesario para dar un intervalo con un grado de precisión deseado. Si se suprime el subíndice en $z_{\alpha/2}$, la solución es

$$n = \frac{2z^2\hat{p}\hat{q} - z^2w^2 \pm \sqrt{4z^4\hat{p}\hat{q}(\hat{p}\hat{q} - w^2) + w^2z^4}}{w^2} \tag{7.12}$$

Al omitir los términos en el numerador que implican w^2 se obtiene

$$n \approx \frac{4z^2\hat{p}\hat{q}}{w^2}$$

Esta última expresión es lo que resulta de igualar el ancho del intervalo tradicional con w.

Estas fórmulas desafortunadamente implican a la $\hat{p}$ desconocida. El método más conservador es aprovechar el hecho de que $\hat{p}\hat{q}[= \hat{p}(1 - \hat{p}]$ es un máximo cuando $\hat{p} = 5$. Por consiguiente, si se utiliza $\hat{p} = \hat{q} = .5$ en (7.12), el ancho será cuando mucho w haciendo caso omiso de qué valor de $\hat{p}$ resulte de la muestra. De manera alternativa, si el investigador cree firmemente, basado en información previa, que $p \le p_0 \le .5$, entonces se utiliza p_0 en lugar de $\hat{p}$. Una observación similar es válida cuando $p \ge p_0 \ge .5$.

EJEMPLO 7.9 El ancho del intervalo de confianza de 95% en el ejemplo 7.8 es .258. El valor de n necesario para garantizar un ancho de .10 independientemente del valor de $\hat{p}$ es

$$n = \frac{2(1.96)^2(.25) - (1.96)^2(.01) \pm \sqrt{4(1.96)^4(.25)(.25 - .01) + (.01)(1.96)^4}}{.01} = 380.3$$

Por consiguiente, se deberá utilizar un tamaño de muestra de 381. La expresión para n basada en el intervalo de confianza tradicional da un valor un poco más grande que 385. ■

Intervalos de confianza unilaterales (límites de confianza)

Los intervalos de confianza que se han abordado hasta ahora dan un límite de confianza inferior *así como* uno superior para el parámetro que se está estimando. En algunas circunstancias es posible que un investigador desee sólo uno de estos dos tipos de límites. Por ejemplo, es posible que un psicólogo desee calcular un límite de confianza superior de 95% para el tiempo de reacción promedio verdadero a un estímulo particular, o es posible que un ingeniero de seguridad desee sólo un límite de confianza inferior para la vida útil promedio

real de los componentes de un tipo. Debido a que el área acumulada bajo la curva normal estándar a la izquierda de 1.645 es de .95,

$$P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < 1.645\right) \approx .95$$

Si se manipula la desigualdad entre paréntesis para aislar μ en un lado y se reemplazan las variables aleatorias con valores calculados, se obtiene la desigualdad $\mu > \bar{x} - 1.645s/\sqrt{n}$; la expresión a la derecha es el límite de confianza inferior deseado. Comenzando con $P(-1.645 < Z) \approx .95$ y manipulando la desigualdad se obtiene el límite de confianza superior. Un argumento similar proporciona un límite unilateral asociado con cualquier otro nivel de confianza.

PROPOSICIÓN

Un **límite de confianza superior muestral grande para μ** es

$$\mu < \bar{x} + z_\alpha \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

y un **límite de confianza inferior muestral grande para μ** es

$$\mu > \bar{x} - z_\alpha \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Se obtiene un **límite de confianza unilateral para p** reemplazando $z_{\alpha/2}$ en lugar de z_α y $\pm$ en lugar de $+$ o $-$ en la fórmula para el intervalo de confianza (7.10) para p. En todos los casos, el nivel de confianza es aproximadamente de $100(1-\alpha)\%$.

EJEMPLO 7.10

El titanio y sus aleaciones se utilizan cada vez con mayor frecuencia para aplicaciones automotrices y aeroespaciales, debido a su durabilidad y a su elevada relación fuerza/peso. Sin embargo, el mecanizado puede ser difícil debido a la baja conductividad térmica. El artículo **"Modeling and Multi-Objective Optimization of Process Parameters of Wire Electrical Discharge Machining Using Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm-II (*J. of Engr. Manuf.*, 2012: 1186–2001)** describe una investigación sobre los diferentes parámetros que afectan el mecanizado por descarga eléctrica del titanio 6-2-4-2. Una característica de interés era la rugosidad superficial (μg) del metal después del mecanizado. Una muestra de 54 observaciones de la rugosidad superficial dio como resultado una media de rugosidad de 1.9042 y una desviación estándar de la muestra de .1455. El límite de confianza superior para la rugosidad promedio verdadera μ con un nivel de confianza de 95% requiere $z_{.05} = 1.645$ (no el valor $z_{.025} = 1.96$ necesario para un intervalo de confianza de dos extremos). El límite es

$$1.9042 + (1.645) \cdot \frac{(.1455)}{\sqrt{54}} = 1.9042 + .0326 = 1.9368$$

Esto es, con un nivel de confianza de 95%, se puede decir que $\mu < 1.9368$. ■

EJERCICIOS Sección 7.2 (12-27)

12. Las siguientes observaciones representan el tiempo de vida (días) para individuos que han sido diagnosticados con cáncer de sangre (**"A Goodness of Fit Approach to the Class of Life Distributions with Unknown Age", *Quality and Reliability Engr. Intl.*, 2012: 761–766):**

115	181	255	418	441	461	516	739	743	789	807
865	924	983	1025	1062	1063	1165	1191	1222	1222	1251
1277	1290	1357	1369	1408	1455	1478	1519	1578	1578	1599
1603	1605	1696	1735	1799	1815	1852	1899	1925	1965	

a. ¿Se puede calcular un intervalo de confianza para el tiempo de vida real sin asumir nada sobre la naturaleza de la

distribución del tiempo de vida? Explique su razonamiento. [*Nota*: Una gráfica de probabilidad normal de los datos exhibe un patrón lineal razonable.]

b. Calcule e interprete un intervalo de confianza con un nivel de confianza de 99% para el tiempo de vida verdadero. [*Sugerencia*: $\bar{x} = 1191.6$ y $s = 506.6$.]

13. El artículo **"Gas Cooking, Kitchen Ventilation, and Exposure to Combustion Products" (*Indoor Air*, 2006: 65–73)** reporta que para una muestra de 50 cocinas con estufas de gas, monitoreadas durante una semana, el nivel de CO_2 medio muestral (ppm) fue de 654.16 y la desviación estándar muestral fue de 164.43.

a. Calcule e interprete un intervalo de confianza de 95% (bilateral) para un nivel de CO_2 promedio verdadero en la población de todas las casas de la cual se seleccionó la muestra.

b. Suponga que el investigador había hecho una suposición preliminar de 175 para el valor de s antes de recopilar los datos. ¿Qué tamaño de muestra sería necesario para obtener un ancho de intervalo de 50 ppm para un nivel de confianza de 95%?

14. Se han estudiado bastante bien los efectos negativos sobre los pulmones de los niños de la contaminación atmosférica, pero se ha estudiado menos el impacto de la contaminación del aire en interiores. Los autores de **"Indoor Air Pollution and Lung Function Growth Among Children in Four Chinese Cities" (*Indoor Air*, 2012: 3–11)** investigaron la relación entre la medición de la contaminación del aire en interiores y el crecimiento de la función pulmonar en niños de entre 6 y 13 años que viven en cuatro ciudades chinas. Los autores midieron para cada sujeto del estudio un importante índice de capacidad pulmonar conocido como FEV_1, el volumen forzado de aire (en ml) que es exhalado en un segundo. Los valores de FEV_1 más altos están asociados a una capacidad pulmonar mayor. De los niños en el estudio 514 pertenecen a hogares que utilizan carbón para cocinar o calentarse, o ambos. Su FEV_1 medio fue de 1427 con una desviación estándar de 325. (Para demostrar que quemar carbón tenía un claro efecto negativo en los niveles medios de FEV_1 se utilizó un complejo procedimiento estadístico.)

a. Calcule e interprete un intervalo de confianza (bilateral) a 95% para el valor promedio verdadero del nivel de FEV_1 en la población de todos los niños a partir de la cuales se seleccionó la muestra. ¿Parece que el parámetro de interés fue estimado correctamente?

b. Suponga que los investigadores tienen un estimado grueso de que 320 es el valor de s antes de recolectar los datos. ¿Cuál es el tamaño de muestra que se necesitaría para obtener un intervalo de confianza al 95% de 50 ml?

15. Determine el nivel de confianza de cada uno de los siguientes límites de confianza unilaterales de muestras grandes:

a. Límite superior: $\bar{x} + .84s/\sqrt{n}$

b. Límite inferior: $\bar{x} - 2.05s/\sqrt{n}$

c. Límite superior: $\bar{x} + .67s/\sqrt{n}$

16. El voltaje de ruptura de corriente alterna (AC) de un líquido aislante indica su rigidez dieléctrica. El artículo **"Testing Practices for the AC Breakdown Voltage Testing of Insulation Liquids" (*IEEE Electrical Insulation Magazine*, 1995: 21-26)** dio las siguientes observaciones muestrales de voltaje de ruptura (kV) de un circuito particular, en ciertas condiciones.

62	50	53	57	41	53	55	61	59	64	50	53	64	62	50	68
54	55	57	50	55	50	56	55	46	55	53	54	52	47	47	55
57	48	63	57	57	55	53	59	53	52	50	55	60	50	56	58

a. Construya un diagrama de caja de los datos y comente sobre las características interesantes.

b. Calcule e interprete un intervalo de confianza de 95% para el promedio real del voltaje de ruptura μ. ¿Parece que μ ha sido estimada con precisión? Explique.

c. Supongamos que el investigador piensa que prácticamente todos los valores de voltaje de ruptura están entre 40 y 70. ¿Qué tamaño de la muestra sería conveniente para que el intervalo de confianza de 95% tuviera una anchura de 2 kV (de modo que μ se estime dentro de 1 kV con 95% de confianza)?

17. El ejercicio 1.13 dio una muestra de observaciones de resistencia última a la tensión ($kg/pulg^2$). Use los datos de salida estadísticos descriptivos adjuntos de Minitab para calcular un límite de confianza inferior de 99% para la resistencia a la tensión última promedio verdadera e interprete el resultado.

N	Mean	Median	TrMean	StDev	SE Mean
153	135.39	135.40	135.41	4.59	0.37

Minimum	Maximum	Q1	Q3
122.20	147.70	132.95	138.25

18. La armada de los Estados Unidos comisionó un estudio para evaluar qué tan profundamente penetra una bala en una armadura de cerámica **("Testing Body Armor Materials for Use by the U.S. Army–Phase III", 2012)**. En la prueba estándar, debajo del chaleco de la armadura se coloca un modelo cilíndrico de arcilla en capas. Después se dispara un proyectil, y provoca una muesca en la arcilla. La impresión en la arcilla más profunda se mide como un indicador de sobrevivencia de cualquiera que use la armadura. Aquí se muestran los datos de una de las pruebas bajo ciertas condiciones experimentales; las mediciones (en mm) se hicieron utilizando un calibrador digital controlado manualmente:

22.4	23.6	24.0	24.9	25.5	25.6
25.8	26.1	26.4	26.7	27.4	27.6
28.3	29.0	29.1	29.6	29.7	29.8
29.9	30.0	30.4	30.5	30.7	30.7
31.0	31.0	31.4	31.6	31.7	31.9
31.9	32.0	32.1	32.4	32.5	32.5
32.6	32.9	33.1	33.3	33.5	33.5
33.5	33.5	33.6	33.6	33.8	33.9
34.1	34.2	34.6	34.6	35.0	35.2
35.2	35.4	35.4	35.4	35.5	35.7
35.8	36.0	36.0	36.0	36.1	36.1
36.2	36.4	36.6	37.0	37.4	37.5
37.5	38.0	38.7	38.8	39.8	41.0
42.0	42.1	44.6	48.3	55.0	

a. Construya una gráfica de caja para los datos y comente sobre algunas características interesantes de la misma.

b. Construya una gráfica de probabilidad normal. ¿Es posible que la profundidad de impresión tenga una distribución normal? ¿Será necesario asumir una distribución normal con el fin de calcular un intervalo de confianza o uno obligado

por la profundidad promedio verdadera μ utilizando los datos anteriores? Explique.

c. Utilice los datos de Minitab que acompañan este texto como base para calcular e interpretar un límite de confianza superior para μ con un nivel de confianza de 99%.

```
Variable   Count    Mean    SE Mean    StDev
Depth         83  33.370      0.578    5.268

Q1       Median       Q3     IQR
30.400   33.500   36.000   5.600
```

19. El artículo **"Limited Yield Estimation for Visual Defect Sources" (*IEEE Trans. on Semiconductor Manuf.*, 1997: 17–23)** reportó que, en un estudio de un proceso particular de inspección de láminas, 356 troqueles fueron examinados por una sonda de inspección y 201 de éstos pasaron la prueba. Suponiendo un proceso estable, calcule un intervalo de confianza (bilateral) de 95% para la proporción de todos los troqueles que pasan la prueba.

20. Las agencias de publicidad para televisión se enfrentan a retos cada vez mayores para alcanzar a la audiencia, debido a que ver programas de televisión mediante descarga digital cada vez es más popular. La **encuesta Harris** reportó el de 13 de noviembre de 2012 que 53% de los 2343 adultos estadounidenses encuestados declararon haber visto programas de televisión descargados de manera digital en algún tipo de dispositivo.

a. Calcule e interprete un intervalo de confianza al 99% para la proporción de todos los adultos estadounidenses que vieron un programa descargado de manera digital hasta ese momento.

b. ¿Cuál es el tamaño de la muestra que se necesitaría para que un intervalo de confianza al 99% tuviera una amplitud de 0.5 sin tomar en cuenta el valor de $\hat{p}$?

21. En una muestra de 1000 consumidores seleccionados al azar que tuvieron la oportunidad de enviar un formulario de solicitud de reembolso después de comprar un producto, 250 negaron haberlo hecho **("Rebates: Get What You Deserve", *Consumer Reports*, mayo de 2009: 7)**. Las razones que citaron para ese tipo de comportamiento incluyen demasiados pasos en el proceso, cantidad muy pequeña, vencimiento del plazo, el temor de ser incluido en una lista de correo, pérdida de la nota de compra y las dudas en torno a recibir el dinero. Calcule un límite de confianza superior al nivel de confianza del 95% para la verdadera proporción de estos consumidores que nunca solicitaron un reembolso. Con base en este límite, ¿hay pruebas convincentes de que la verdadera proporción de estos consumidores es menor que 1/3? Explique su razonamiento.

22. La tecnología subyacente de reemplazo de cadera ha cambiado, ya que estas cirugías se han vuelto más populares (más de 250 000 en los Estados Unidos en el año 2008). A partir de 2003 se comercializan las caderas de cerámica de alta duración. Desafortunadamente, para muchos pacientes la mayor durabilidad ha sido compensada por un aumento en la incidencia de rechinidos. La edición del 11 de mayo de 2008 del *New York Times* informó que en un estudio de 143 individuos que recibieron las caderas de cerámica, entre 2003 y 2005, 10 reportaron que las caderas rechinaban.

a. Calcule un límite de confianza inferior en el nivel de confianza del 95% para la verdadera proporción de las caderas que rechinaban.

b. Interprete el nivel de confianza del 95% utilizado en el inciso a).

23. El **Pew Forum on Religion and Public Life** reportó el 9 de diciembre de 2009 que en una encuesta de 2003 adultos estadounidenses, 25% dijo que creía en la astrología.

a. Calcule e interprete un intervalo de confianza al nivel de confianza del 99% para la proporción de todos los adultos estadounidenses que creen en la astrología.

b. ¿Qué tamaño de muestra se requiere para que el ancho de un intervalo de confianza de 99% tenga un máximo de .05, independientemente del valor de $\hat{p}$?

24. Una muestra de 56 muestras de algodón produjo un porcentaje de alargamiento promedio muestral de 8.17 y una desviación estándar de 1.42 **("An Apparent Relation Between the Spiral Angle ϕ, the Percent Elongation E_1, and the Dimensions of the Cotton Fiber", *Textile Research J.*, 1978: 407–410)**. Calcule un intervalo de confianza de 95% de una muestra grande para el porcentaje de alargamiento promedio verdadero μ. ¿Qué suposiciones está haciendo sobre la distribución del porcentaje de alargamiento?

25. Una legisladora estatal desea encuestar a los residentes de su distrito para ver qué proporción del electorado está consciente de su posición sobre la utilización de fondos estatales para solventar abortos.

a. ¿Qué tamaño de la muestra es necesario si el intervalo de confianza de 95% para p debe tener un ancho de a lo más .10 independientemente de p?

b. Si la legisladora está firmemente convencida de que al menos 2/3 del electorado conoce su posición, ¿qué tamaño de muestra recomendaría?

26. El superintendente de un gran distrito escolar, que alguna vez tomó un curso de probabilidad y estadística, cree que el número de maestros ausentes en cualquier día dado tiene una distribución de Poisson con parámetro μ. Use los siguientes datos sobre ausencias durante 50 días para obtener un intervalo de confianza muestral grande para μ. [*Sugerencia*: La media y la varianza de una variable de Poisson son iguales a μ, por consiguiente,

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\mu/n}}$$

tiene aproximadamente una distribución normal estándar. Ahora prosiga, tal y como en la deducción del intervalo para p, haciendo una proposición de probabilidad (con probabilidad de $1 - \alpha$) y resuelva las desigualdades resultantes para μ (véase el argumento exactamente después de (7.10).]

Número de ausencias	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	1	4	8	10	8	7	5	3	2	1	1

27. Reconsidere el intervalo de confianza (7.10) para p y enfóquese en un nivel de confianza de 95%. Demuestre que los límites de confianza concuerdan bastante bien con los del intervalo tradicional (7.11) una vez que dos éxitos y dos fallas se han anexado a la muestra [es decir, (7.11) basado en $x + 2$ S en $n = 4$ ensayos]. [*Sugerencia*: $1.96 \approx 2$. *Nota*: Agresti y Coull demostraron que este ajuste del intervalo tradicional también tiene un nivel de confianza próximo al nivel nominal.]

7.3 Intervalos basados en una distribución de población normal

El intervalo de confianza para μ en la sección 7.2 es válido siempre que n es grande. El intervalo resultante puede ser utilizado cualquiera que sea la naturaleza de la distribución de la población. Sin embargo, el teorema del límite central no puede ser invocado cuando n es pequeña. En este caso, una forma de proceder es hacer una suposición específica sobre la forma de la distribución de la población y luego deducir un intervalo de confianza adecuado a esa suposición. Por ejemplo, se podría desarrollar un intervalo de confianza para μ cuando una distribución gamma describe la población, otro para el caso de una población de Weibull, etcétera. Los estadísticos en realidad han realizado este programa para varias familias distribucionales diferentes. Puesto que frecuentemente la distribución normal es más apropiada como modelo de población que cualquier otro tipo de distribución, aquí nos concentraremos en un intervalo de confianza para esta situación.

SUPOSICIÓN

La población de interés es normal, de modo que $X_1, \ldots, X_n$ constituyen una muestra aleatoria tomada de una distribución normal con μ y σ desconocidas.

El resultado clave que subyace en el intervalo de la sección 7.2 fue que con un n grande, la variable aleatoria $Z = (\overline{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$ tiene aproximadamente una distribución normal estándar. Cuando n es pequeño, no es probable que S se aproxime a σ, de modo que la variabilidad de la distribución de Z surge de la aleatoriedad tanto en el numerador como en el denominador. Esto implica que la distribución de probabilidad de $(\overline{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$ se dispersará más que la distribución normal estándar. El resultado en el cual están basadas las inferencias introduce una nueva familia de distribuciones de probabilidad llamada *distribuciones t*.

TEOREMA

Cuando $\overline{X}$ es la media de una muestra aleatoria de tamaño n tomada de una distribución normal con media μ, la variable aleatoria

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \tag{7.13}$$

tiene una distribución de probabilidad llamada distribución t con $n - 1$ grados de libertad (gl).

Propiedades de distribuciones *t*

Antes de aplicar este teorema se impone un análisis de las propiedades de distribuciones t. Aunque la variable de interés sigue siendo $(\overline{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$, ahora se denota por T para recalcar que no tiene una distribución normal estándar cuando n es pequeña. Recuerde que una distribución normal está regida por dos parámetros, cada elección diferente de μ en combinación con σ resulta en una distribución normal particular. Cualquier distribución t particular resulta de especificar el valor de sólo un parámetro, llamado **número de grados de libertad**, abreviado como gl. Este parámetro se denota con la letra griega ν. Los posibles valores de ν son los enteros positivos 1, 2, 3,… . Por lo que hay una distribución t con 1 gl, otra con 2 gl, aún otra con 3 gl y así sucesivamente.

Para cualquier valor fijo del parámetro ν, la función de densidad que especifica la curva t asociada es incluso más complicada que la función de densidad normal. Afortunadamente, sólo hay que ocuparse de algunas de las más importantes características de estas curvas.

Propiedades de distribuciones t

Sea que t_ν denote la distribución t con ν gl.

1. Cada curva t_ν tiene forma de campana y centrada en 0.
2. Cada curva t_ν está más extendida que la curva (z) normal estándar.
3. Conforme ν se incrementa, la extensión de la curva t_ν correspondiente disminuye.
4. A medida que $\nu \to \infty$, la secuencia de curvas t_ν tiende a la curva normal estándar (así que la curva z a menudo se llama curva t con grados de libertad $= \infty$).

La figura 7.7 ilustra varias de estas propiedades para valores seleccionados de ν.

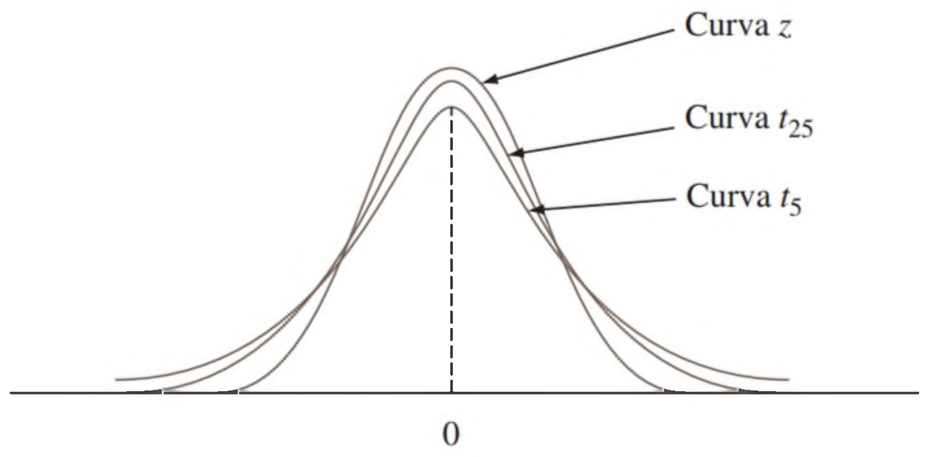


Figura 7.7 Curvas t_ν y z

El número de grados de libertad para T en (7.13) es $n - 1$ porque, aunque S está basada en las n desviaciones $X_1 - \overline{X}, \ldots, X_n - \overline{X}$, $\Sigma(X_1 - \overline{X}) = 0$ implica que sólo $n - 1$ de estas están "libremente determinadas". El número de grados de libertad para una variable t es el número de desviaciones libremente determinadas en las cuales está basada la desviación estándar estimada en el denominador de T.

El uso de la distribución t al hacer inferencias requiere notación para capturar áreas de cola de la curva t análogas a z_α de la curva z. Se podría pensar que t_α haría el truco. Sin embargo, el valor deseado depende no sólo del área de la cola capturada, sino también de gl.

NOTACIÓN

Sea $t_{\alpha,\nu}$ = el número sobre el eje de medición con el cual el área bajo la curva t con n grados de libertad a la derecha de $t_{\alpha,\nu}$ es α; $t_{\alpha,\nu}$ se llama **valor crítico** t.

Por ejemplo, $t_{.05,6}$ es el valor crítico t que captura un área de cola superior de .05 bajo la curva t con 6 gl. La notación general se ilustra en la figura 7.8. Debido a que las curvas t son simétricas alrededor de cero, $-t_{\alpha,\nu}$ captura el área α de la cola inferior. La tabla A.5 del apéndice proporciona $t_{\alpha,\nu}$ para valores seleccionados de α y ν. Esta tabla también aparece al final del libro. Las columnas de la tabla corresponden a diferentes valores de α. Para obtener $t_{.05,15}$ vaya a la columna $\alpha = .05$, mire hacia abajo al renglón $\nu = 15$, y lea $t_{.05,15} = 1.753$. Del mismo modo, $t_{.05,22} = 1.717$ (columna .05, renglón $\nu = 22$) y $t_{.01,22} = 2.508$.

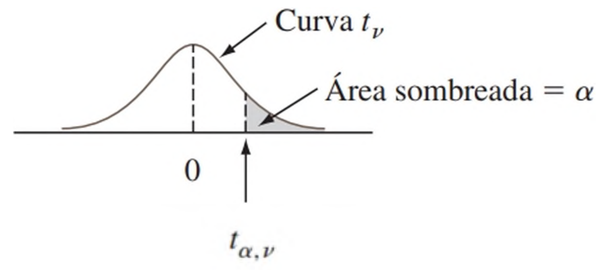


Figura 7.8 Ilustración de un valor crítico t

Los valores de $t_{\alpha,\nu}$ exhiben un comportamiento regular al recorrer una fila o al descender por una columna. Con ν fijo, $t_{\alpha,\nu}$ se incrementa a medida que α disminuye, puesto que hay que moverse más a la derecha de cero para capturar el área α en la cola. Con α fija, a medida que ν se incrementa (es decir, cuando cualquier columna particular de la tabla t se recorre hacia abajo) el valor de $t_{\alpha,\nu}$ disminuye. Esto es porque un valor más grande de ν implica una distribución t con extensión más pequeña, de modo que no es necesario ir más lejos de cero para capturar el área de cola α. Además, $t_{\alpha,\nu}$ disminuye más lentamente a medida que ν se incrementa. Por consiguiente, los valores que aparecen en la tabla se muestran en incrementos de 2 entre 30 y 40 grados de libertad y luego saltan a $\nu = 50$, 60, 120 y, por último, ∞. Puesto que t_∞ es la curva normal estándar, los valores z_α conocidos aparecen en la última fila de la tabla. La regla empírica sugería con anterioridad que el uso del intervalo de confianza muestral grande (si $n > 40$) proviene de la igualdad aproximada de las distribuciones normales estándar y t para $\nu \geq 40$.

Intervalo de confianza t para una muestra

La variable estandarizada T tiene una distribución t con $n - 1$ grados de libertad y el área bajo la curva de densidad t correspondiente entre $-t_{\alpha/2,n-1}$ y $t_{\alpha/2,n-1}$ es $1 - \alpha$ (el área $\alpha/2$ queda en cada cola), por consiguiente,

$$P\left(-t_{\alpha/2,\,n-1} < T < t_{\alpha/2,\,n-1}\right) = 1 - \alpha \tag{7.14}$$

La expresión (7.14) difiere de las expresiones que aparecen en secciones previas en las que T y $t_{\alpha/2,n-1}$ se utilizan en lugar de Z y $z_{\alpha/2}$, aunque pueden ser manipuladas de la misma manera para obtener un intervalo de confianza para μ.

PROPOSICIÓN

Sean $\bar{x}$ y s la media y la desviación estándar muestrales calculadas con los resultados de una muestra aleatoria tomada de una población normal con media μ. Entonces un **intervalo de confianza de $100(1 - \alpha)\%$ para μ** es

$$\left(\bar{x} - t_{\alpha/2,\,n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + t_{\alpha/2,\,n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right) \tag{7.15}$$

o, más compactamente, $\bar{x} \pm t_{\alpha/2,\,n-1} \cdot s/\sqrt{n}$.

Un **límite de confianza superior para μ** es

$$\bar{x} + t_{\alpha,\,n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

y reemplazando $+$ por $-$ en la última expresión se obtiene un **límite de confianza inferior para μ**, ambos con nivel de confianza de $100(1 - \alpha)\%$.

EJEMPLO 7.11 A pesar de que los mercados tradicionales de madera de ocozol han disminuido, las maderas sólidas de gran sección que usualmente se utiliza para la construcción de puentes y duelas se han vuelto cada vez más escasas. El artículo **"Development of Novel Industrial Laminated Planks from Sweetgum Lumber" (*J. of Bridge Engr.*, 2008: 64–66)** describe la fabricación y el ensayo de las vigas compuestas, concebida para agregar valor a la

madera de ocozol de bajo grado. Estos son los datos sobre el módulo de ruptura (lb/pulg^2; el artículo contenía un resumen de los datos, expresados en MPa):

6807.99	7637.06	6663.28	6165.03	6991.41	6992.23
6981.46	7569.75	7437.88	6872.39	7663.18	6032.28
6906.04	6617.17	6984.12	7093.71	7659.50	7378.61
7295.54	6702.76	7440.17	8053.26	8284.75	7347.95
7422.69	7886.87	6316.67	7713.65	7503.33	7674.99

La figura 7.9 muestra un diagrama de probabilidad normal obtenido con el software R. Lo recto del patrón en el diagrama apoya fuertemente la suposición de que la distribución de la población del módulo de ruptura es al menos aproximadamente normal.

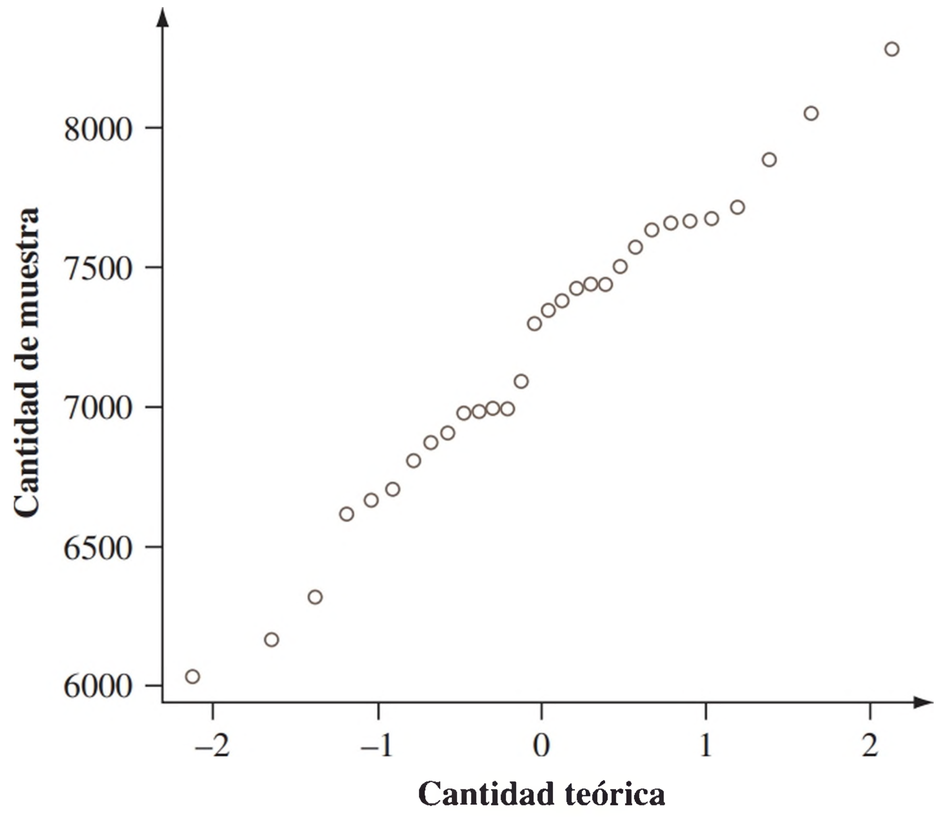


Figura 7.9 Diagrama de probabilidad normal de los datos del módulo de ruptura

La media muestral y la desviación estándar de la muestra son 7203.191 y 543.5400, respectivamente (para abatir cualquier realización de cálculos a mano, la carga de cálculos se alivia un poco al restar 6000 a cada valor de x para obtener $y_i = x_i - 6000$, entonces $\Sigma y_i = 36\ 095.72$ y $\Sigma y_i^2 = 51\ 997{,}668.77$, de la cual $\bar{y} = 1203.191$ y $s_y = s_x$ tal como se indica).

Ahora se calcula un intervalo de confianza para el promedio real del módulo de ruptura con un nivel de confianza de 95%. El intervalo de confianza se basa en $n - 1 = 29$ grados de libertad, por lo que el valor de t crítico necesario es $t_{.025,29} = 2.045$. La estimación por intervalo es ahora

$$\bar{x} \pm t_{.025,29} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 7203.191 \pm (2.045) \cdot \frac{543.5400}{\sqrt{30}}$$
$$= 7203.191 \pm 202.938 = (7000.253, 7406.129)$$

Se estima que $7000.253 < \mu < 7406.129$ con un 95% de confianza. Si se utiliza la misma fórmula muestra tras muestra, en el largo plazo 95% de los intervalos calculados contendrá a μ. Dado que el valor de μ no está disponible, no sabemos si el intervalo calculado es uno de los "buenos" del 95% o el "malo" del 5%. Incluso con el tamaño de la muestra moderadamente grande, el intervalo es bastante amplio. Esto es una consecuencia de la cantidad sustancial de variabilidad de la muestra en los valores del módulo de ruptura.

De conservar únicamente el límite de confianza inferior (el que tiene el signo (−)) y al reemplazar 2.045 con $t_{.05,29} = 1.699$ resultaría un límite de confianza inferior a 95%. ■

Por desgracia no es fácil seleccionar n para controlar el ancho del intervalo t. Esto es porque el ancho implica la s desconocida (antes de recopilar los datos) y porque n se ingresa no sólo a través de $1/\sqrt{n}$, sino también a través de $t_{\alpha/2,n-1}$. Por consiguiente, se puede obtener una n apropiada sólo mediante ensayo y error.

En el capítulo 15 se analizará un intervalo de confianza de muestra pequeña para μ, que será válido siempre que la distribución de la población sea simétrica, una suposición más débil que la de normalidad. No obstante, cuando la distribución de la población es normal el intervalo t tiende a acortarse más de lo que lo haría *cualquier otro* intervalo con el mismo nivel de confianza.

Un intervalo de predicción para un solo valor futuro

En muchas aplicaciones el objetivo es *predecir* un solo valor de una variable que tiene que ser observada en un tiempo futuro, en lugar de *estimar* la media de dicha variable.

EJEMPLO 7.12 Considere la siguiente muestra de contenido de grasa (en porcentaje) de $n = 10$ *hot dogs* seleccionados al azar (**"Sensory and Mechanical Assessment of the Quality of Frankfurters", *J. of Texture Studies*, 1990: 395–409**):

25.2 21.3 22.8 17.0 29.8 21.0 25.5 16.0 20.9 19.5

Suponiendo que estas observaciones se seleccionaron de una distribución de población normal, un intervalo de confianza de 95% para (estimación del intervalo de) el contenido de grasa medio de la población es

$$\bar{x} \pm t_{.025,9} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 21.90 \pm 2.262 \cdot \frac{4.134}{\sqrt{10}} = 21.90 \pm 2.96$$
$$= (18.94, 24.86)$$

Suponga, sin embargo, que se va a comer un solo *hot dog* de este tipo y desea *predecir* el contenido de grasa resultante. Una predicción *puntual*, análoga a una estimación *puntual*, es simplemente $\bar{x} = 21.90$. Esta predicción desafortunadamente no da información sobre confiabilidad o precisión. ■

El escenario general es como sigue: se dispone de una muestra aleatoria $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tomada de una distribución de población normal y se desea predecir el valor de X_{n+1}, una sola observación futura (por ejemplo, la vida útil de un foco sencillo que se compra o la eficiencia del combustible de un automóvil rentado). Un predictor puntual es $\bar{X}$ y el error de predicción resultante es $\bar{X} - X_{n+1}$. El valor esperado del error de predicción es

$$E(\bar{X} - X_{n+1}) = E(\bar{X}) - E(X_{n+1}) = \mu - \mu = 0$$

Siendo que X_{n+1} es independiente de $X_1, \ldots, X_n$, también es independiente de $\bar{X}$, así que la varianza del error de predicción es

$$V(\bar{X} - X_{n+1}) = V(\bar{X}) + V(X_{n+1}) = \frac{\sigma^2}{n} + \sigma^2 = \sigma^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

El error de predicción se distribuye normalmente, ya que es una combinación lineal de variables aleatorias independientes con distribución normal. Por consiguiente,

$$Z = \frac{(\bar{X} - X_{n+1}) - 0}{\sqrt{\sigma^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)}} = \frac{\bar{X} - X_{n+1}}{\sqrt{\sigma^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)}}$$

tiene una distribución normal estándar. Se puede demostrar que si se reemplaza σ con la desviación estándar muestral S (de $X_1, \ldots, X_n$) se obtiene

$$T = \frac{\overline{X} - X_{n+1}}{S\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \sim \text{distribución } t \text{ con } n - 1 \text{ grados de libertad}$$

Si se manipula esta variable T como se manipuló $T = (\overline{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$ en el desarrollo de un intervalo de confianza se obtiene el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN

Un **intervalo de predicción** (**IP**) para una sola observación que tiene que ser seleccionado de una distribución de población normal es

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2,n-1} \cdot s\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \qquad \textbf{(7.16)}$$

El *nivel de predicción* es $100(1 - \alpha)\%$. Una predicción del límite inferior resulta de la sustitución de $t_{\alpha/2}$ por t_α y desechar la parte + de (7.16), una modificación similar da una predicción del límite superior.

La interpretación de un nivel de predicción de 95% es similar a la de un nivel de confianza de 95%. Si se calcula el intervalo (7.16) muestra tras muestra, y si luego de cada cálculo se observa X_{n+1}, a la larga 95% de estos intervalos incluirá los valores futuros correspondientes.

EJEMPLO 7.13 (Continuación del ejemplo 7.12)

Con $n = 10$, $\bar{x} = 21.90$, $s = 4.134$ y $t_{.025,9} = 2.262$, un intervalo de predicción de 95% para el contenido de grasa de un solo *hot dog* es

$$21.90 \pm (2.262)(4.134)\sqrt{1 + \frac{1}{10}} = 21.90 \pm 9.81$$
$$= (12.09, 31.71)$$

El intervalo es bastante ancho, lo que indica una incertidumbre sustancial en cuanto al contenido de grasa. Observe que el ancho del intervalo de predicción es más de tres veces el del intervalo de confianza. ■

El error de predicción es $\overline{X} - X_{n+1}$, la diferencia entre dos variables aleatorias, en tanto que el error de estimación es $\overline{X} - \mu$, la diferencia entre una variable aleatoria y un valor fijo (aunque desconocido). El intervalo de predicción es más ancho que el intervalo de confianza porque hay más variabilidad en el error de predicción (debido a X_{n+1}) que en el error de estimación. De hecho, a medida que n se hace arbitrariamente grande, el intervalo de confianza se contrae a un solo valor μ y el intervalo de predicción tiende a $\mu \pm z_{\alpha/2} \cdot \sigma$. Existe incertidumbre respecto a un solo valor X incluso cuando no hay necesidad de estimarlo.

Intervalos de tolerancia

Considere una población de automóviles de cierto tipo y suponga que en condiciones específicas, la eficiencia de combustible (mpg) tiene una distribución normal con $\mu = 30$ y $\sigma = 2$. Entonces como el intervalo de -1.645 a 1.645 captura 90% del área bajo la curva z, 90% de todos estos automóviles tendrán valores de eficiencia de combustible entre $\mu - 1.645s = 26.71$ y $\mu + 1.645\sigma = 33.29$. Pero, ¿qué sucederá si los valores de μ y σ no son conocidos? Se puede tomar una muestra de tamaño n, determinar las eficiencias de combustible,

$\bar{x}$ y s, y formar el intervalo cuyo límite inferior es $\bar{x} - 1.645s$ y cuyo límite superior es $\bar{x} + 1.645s$. Sin embargo, debido a la variabilidad de muestreo en las estimaciones de μ y σ existe una buena probabilidad de que el intervalo resultante incluya menos de 90% de los valores de la población. Intuitivamente, para tener *a priori* una probabilidad de que 95% del intervalo resultante incluya al menos 90% de los valores de la población, cuando $\bar{x}$ y s se utilizan en lugar de μ y σ también se deberá reemplazar 1.645 con un número más grande. Por ejemplo, cuando $n = 20$, el valor 2.310 es tal que se puede estar 95% confiado en que el intervalo $\bar{x} \pm 2.310s$ incluirá al menos 90% de los valores de eficiencia de combustible en la población.

Sea k un número entre 0 y 100. Un **intervalo de tolerancia** para capturar al menos k% de los valores en una distribución de población normal con nivel de confianza de 95% tiene la forma

$$\bar{x} \pm (\text{valor crítico de tolerancia}) \cdot s$$

En la tabla A.6 del apéndice aparecen valores críticos de tolerancia para $k = 90$, 95 y 99 en combinación con varios tamaños de muestra. Esta tabla también incluye valores críticos para un nivel de confianza de 99% (estos valores son más grandes que los valores correspondientes a 95%). Si se reemplaza $\pm$ con $+$ se obtiene un límite de tolerancia superior, y si se utiliza $-$ en lugar de $\pm$ se obtiene un límite de tolerancia inferior. En la tabla A.6 también aparecen valores críticos para obtener estos límites unilaterales.

EJEMPLO 7.14 Como parte de un proyecto más amplio para estudiar el comportamiento de los paneles de corteza comprimida, un componente estructural que se utiliza ampliamente en América del Norte, el artículo **"Time-Dependent Bending Properties of Lumber" (*J. of Testing and Eval.*, 1996: 187-193)** informa sobre varias propiedades mecánicas de muestras de madera de pino escocés. Considere las siguientes observaciones sobre el módulo de elasticidad (MPa) obtenido un minuto después de la carga en una cierta configuración:

10 490	16 620	17 300	15 480	12 970	17 260	13 400	13 900
13 630	13 260	14 370	11 700	15 470	17 840	14 070	14 760

Hay un patrón lineal pronunciado en el gráfico de probabilidad normal de los datos. Un resumen de las cantidades importantes es $n = 16$, $\bar{x} = 14\,532.5$, $s = 2055.67$. Para un nivel de confianza de 95%, un intervalo de tolerancia bilateral para la captura de al menos 95% de los valores de los módulos de elasticidad de las muestras de madera en la población de la muestra, utiliza el valor de tolerancia crítica de 2.903. El intervalo resultante es

$$14\,532.5 \pm (2.903)(2055.67) = 14\,532.5 \pm 5967.6 = (8\,564.9, 20\,500.1)$$

Se puede confiar totalmente en que al menos 95% de todos los especímenes de madera tienen valores de módulo de elasticidad de entre 8564.9 y 20 500.1.

El intervalo de confianza de 95% para μ fue (13 437.3, 15 627.7) y el intervalo de predicción de 95% para el módulo de elasticidad de un solo espécimen de madera es (10 017.0, 19 048.0). Tanto el intervalo de predicción como el intervalo de tolerancia son sustancialmente más anchos que el intervalo de confianza. ■

Intervalos basados en distribuciones de población no normales

El intervalo de confianza t para una muestra de μ es robusto en cuanto a alejamientos pequeños o incluso moderados de la normalidad a menos que n sea bastante pequeño. Con esto se quiere decir que si se utiliza un valor crítico para confianza de 95%, por ejemplo, al calcular el intervalo el nivel de confianza real se aproximará de manera razonable al

nivel nominal de 95%. Sin embargo, si n es pequeño y la distribución de la población es altamente no normal, entonces el nivel de confianza real puede ser diferente de forma considerable del que se utiliza cuando se obtiene un valor crítico particular de la tabla t. Ciertamente, ¡sería penoso creer que el nivel de confianza es de más o menos 95% cuando en realidad es como de 88%! Se ha visto que la técnica *bootstrap*, que se presentó en la sección 7.1 es bastante exitosa al estimar parámetros en una amplia variedad de situaciones no normales.

En contraste con el intervalo de confianza la validez de los intervalos de predicción y tolerancia descritos en esta sección está estrechamente vinculada a la suposición de normalidad. Estos últimos intervalos no deberán ser utilizados sin evidencia apremiante de normalidad. La excelente referencia *Statistical Intervals*, que se cita en la bibliografía al final de este capítulo, analiza procedimientos alternativos de esta clase en varias otras situaciones.

EJERCICIOS Sección 7.3 (28–41)

28. Determine los valores de las siguientes cantidades:

a. $t_{.1,15}$ **b.** $t_{.05,15}$ **c.** $t_{.05,25}$ **d.** $t_{.05,40}$ **e.** $t_{.005,40}$

29. Determine el valor o los valores críticos t que capturará el área deseada de la curva t en cada uno de los siguientes casos:

a. Área central = .95, gl = 10

b. Área central = .95, gl = 20

c. Área central = .99, gl = 20

d. Área central = .99, gl = 50

e. Área de cola superior = .01, gl = 25

f. Área de cola inferior = .025, gl = 5

30. Determine el valor crítico t de un intervalo de confianza bilateral en cada una de las siguientes situaciones:

a. Nivel de confianza = 95%, gl = 10

b. Nivel de confianza = 95%, gl = 15

c. Nivel de confianza = 99%, gl = 15

d. Nivel de confianza = 99%, n = 5

e. Nivel de confianza = 98%, gl = 24

f. Nivel de confianza = 99%, n = 38

31. Determine el valor crítico t para un límite de confianza inferior o superior en cada una de las situaciones descritas en el ejercicio 30.

32. De acuerdo con el artículo **"Fatigue Testing of Condoms" (2009: 567-571)**, "las pruebas que se utilizan actualmente para los condones emulan los desafíos que enfrentan al ser utilizados", incluyendo perforaciones, inflado, se prueba el sello del paquete, las dimensiones del condón, incluso la calidad del lubricante (¡todo un territorio fértil para el uso de la metodología estadística!). Los investigadores desarrollaron una nueva prueba que agrega tensión cíclica a un nivel muy por debajo de la rotura y determina el número de ciclos hasta llegar a la ruptura. Una muestra de 20 condones de un tipo particular resultó en una media muestral de 1584 y una desviación estándar muestral de 607. Calcule e interprete un intervalo de confianza al nivel de confianza de 99% para el verdadero número promedio de ciclos de ruptura. [*Nota*: El artículo presenta los resultados de las pruebas de hipótesis basadas en la distribución t, la validez de éstas depende de suponer la distribución normal de la población.]

33. El artículo **"Measuring and Understanding the Aging of Kraft Insulating Paper in Power Transformers" (*IEEE Electrical Insul. Mag.*, 1996: 28–34)** contiene las siguientes observaciones del grado de polimerización de especímenes de papel para los cuales la concentración de tiempos de viscosidad cayeron en un rango medio:

418 421 421 422 425 427 431
434 437 439 446 447 448 453
454 463 465

a. Construya una gráfica de caja de los datos y comente sobre cualquier característica interesante.

b. ¿Es aceptable que las observaciones muestrales dadas se hayan seleccionado de una distribución normal?

c. Calcule un intervalo de confianza de 95% bilateral para un grado de polimerización promedio verdadero (como lo hicieron los autores del artículo). ¿Sugiere este intervalo que 440 es un valor factible del grado de polimerización promedio verdadero? ¿Qué hay en cuanto a 450?

34. Una muestra de 14 especímenes de juntas de un tipo particular produjo un esfuerzo límite proporcional medio muestral de 8.48 MPa y una desviación estándar muestral de .79 MPa (**"Characterization of Bearing Strength Factors in Pegged Timber Connections", *J. of Structural Engr.*, 1997: 326–332**).

a. Calcule e interprete un límite de confianza inferior de 95% para el esfuerzo límite proporcional promedio verdadero de todas las juntas. ¿Cuáles fueron sus suposiciones, si las hubo, sobre la distribución del esfuerzo límite proporcional?

b. Calcule e interprete un límite de predicción inferior de 95% para el esfuerzo límite proporcional de una sola unión de este tipo.

35. Para corregir deformidades nasales congénitas se utiliza rinoplastia de aumento mediante un implante de silicón. El éxito del procedimiento depende de varias propiedades biomecánicas del periostio y fascia nasales humanas. El artículo **"Biomechanics in Augmentation Rhinoplasty"** (***J. of Med. Engr. and Tech.*, 2005: 14-17**) reporta que para una muestra de 15 adultos (recién fallecidos) la deformación por falla media (en porcentaje) fue de 25.0 y la desviación estándar fue de 3.5.

a. Suponiendo una distribución normal para la deformación por falla, estime la deformación promedio verdadera de modo que transmita información acerca de la precisión y la confiabilidad.

b. Pronostique la deformación para un solo adulto de forma que transmita información sobre precisión y confiabilidad. ¿Cómo se compara la predicción con la estimación calculada en el inciso a)?

36. Las $n = 26$ observaciones de tiempo de escape dadas en el ejercicio 36 del capítulo 1 proporcionan una media y desviación estándar muestrales de 370.69 y 24.36, respectivamente.

a. Calcule un límite de confianza superior para el tiempo de escape medio de la población utilizando un nivel de confianza de 95%.

b. Calcule un límite de predicción superior para el tiempo de escape de un solo trabajador adicional utilizando un nivel de predicción de 95%. ¿Cómo se compara este límite con el límite de confianza del inciso a)?

c. Suponga que se escogerán dos trabajadores más para participar en el ejercicio de escape simulado. Denote sus tiempos de escape por X_{27} y X_{28} y sea $\overline{X}_{\text{nuevo}}$ el promedio de estos dos valores. Modifique la fórmula para un intervalo de predicción con un solo valor de x para obtener un intervalo de predicción para $\overline{X}_{\text{nuevo}}$ y calcule un intervalo bilateral de 95% basado en los datos de escape dados.

37. Un estudio de la capacidad de los individuos para caminar en línea recta (**"Can We Really Walk Straight?"** ***Amer. J. of Physical Anthro.*, 1992: 19-27**) reportó los siguientes datos sobre la cadencia (pasos por segundo) con una muestra de $n = 20$ hombres saludables seleccionados al azar.

.95	.85	.92	.95	.93	.86	1.00	.92	.85	.81
.78	.93	.93	1.05	.93	1.06	1.06	.96	.81	.96

Un diagrama de probabilidad normal apoya de manera sustancial la suposición de que la distribución de la población de cadencia es aproximadamente normal. A continuación se da un resumen descriptivo de los datos obtenidos con Minitab:

```
Variable N   Mean   Median  TrMean   StDev SEMean
cadence 20 0.9255 0.9300  0.9261  0.0809 0.0181

Variable     Min     Max      Q1      Q3
cadence    0.7800 1.0600  0.8525  0.9600
```

a. Calcule e interprete un intervalo de confianza de 95% para la cadencia media de la población.

b. Calcule e interprete un intervalo de predicción de 95% para la cadencia de un solo individuo seleccionado al azar de esta población.

c. Calcule un intervalo que incluya al menos 99% de las cadencias en la distribución de la población utilizando un nivel de confianza de 95%.

38. El concreto de ultraalto desempeño (UHPC, por sus siglas en inglés) es un material de construcción relativamente nuevo que se caracteriza por sus fuertes propiedades adhesivas con otros materiales. El artículo **"Adhesive Power of Ultra High Performance Concrete from a Thermodynamic Point of View"** (***J. of Materials in Civil Engr.*, 2012: 1050–1058**) describe una investigación de las fuerzas intermoleculares del UHPC unido a varios sutratos. En el artículo se presenta el siguiente trabajo de mediciones de adhesión (en mJ/m^2) para las especies de UHPC adheridas al acero:

107.1 109.5 107.4 106.8 108.1

a. ¿Es aceptable que las observaciones en la muestra dada se seleccionaran de una distribución normal?

b. Calcule un intervalo de confianza a 95% (bilateral) para el promedio verdadero del trabajo de adhesión para el UHPC adherido al acero. ¿Sugiere el intervalo que 107 es un valor posible para el trabajo de adhesión promedio verdadero para el UHPC adherido al acero? ¿Qué tal 110?

c. Prediga el valor del trabajo de adhesión resultante a partir de una sola réplica futura del experimento calculando una predicción del intervalo a 95% y compare la amplitud de este intervalo con la amplitud del intervalo de confianza en b).

d. Calcule un intervalo con el cual se puede tener un alto grado de confianza de que al menos 95% de que todas las muestras de UHPC adheridas al acero tienen valores de trabajo de adhesión entre los límites del intervalo.

39. El ejercicio 72 del capítulo 1 aportó las siguientes observaciones en una medición de afinidad de receptor (volumen de distribución ajustado) con una muestra de 13 individuos sanos: 23, 39, 40, 41, 43, 47, 51, 58, 63, 66, 67, 69, 72.

a. ¿Es aceptable que la distribución de la población de la cual se seleccionó esta muestra es normal?

b. Calcule un intervalo con el cual pueda tener 95% de confianza de que al menos 95% de todos los individuos saludables en la población tienen volúmenes de distribución ajustados que quedan entre los límites del intervalo.

c. Pronostique el volumen de distribución ajustado de un solo individuo saludable calculando un intervalo de predicción de 95%. ¿Cómo se compara el ancho de este intervalo con el ancho del intervalo calculado en el inciso b)?

40. El ejercicio 13 del capítulo 1 presenta una muestra de $n = 153$ observaciones de resistencia última a la tensión y el ejercicio 17 de la sección previa dio cantidades resumidas y solicitó un intervalo de confianza muestral grande. Puesto que el tamaño de la muestra es grande, no se requieren suposiciones sobre la distribución de la población en cuanto a la validez del intervalo de confianza.

a. ¿Se requiere alguna suposición sobre la distribución de la resistencia a la tensión, antes de calcular un límite de predicción inferior para la resistencia a la tensión del nuevo

espécimen seleccionado por medio del método descrito en esta sección? Explique.

b. Use un paquete de software estadístico para investigar la factibilidad de una distribución de población normal.

c. Calcule un límite de predicción inferior con un nivel de predicción de 95% para la resistencia última a la tensión del siguiente espécimen seleccionado.

41. Una tabulación más extensa de valores críticos t que la que aparece en este libro muestra que para la distribución t con 20 grados de libertad, las áreas a la derecha de los valores .687, .860 y 1.064 son .25, .20 y .15, respectivamente. ¿Cuál es el nivel de confianza de cada uno de los siguientes tres intervalos de confianza para la media μ de una distribución de población normal? ¿Cuál de los tres intervalos recomendaría utilizar y por qué?

a. $(\bar{x} - .687s/\sqrt{21}, \bar{x} + 1.725s/\sqrt{21})$

b. $(\bar{x} - .860s/\sqrt{21}, \bar{x} + 1.325s/\sqrt{21})$

c. $(\bar{x} - 1.064s/\sqrt{21}, \bar{x} + 1.064s/\sqrt{21})$

7.4 Intervalos de confianza para la varianza y desviación estándar de una población normal

Aun cuando las inferencias en lo que se refiere a la varianza σ^2 o a la desviación estándar de una población en general son de menor interés que aquellas respecto a una media o proporción, hay ocasiones en las que se requieren tales procedimientos. En el caso de una distribución de población normal, las inferencias están basadas en el siguiente resultado por lo que se refiere a la varianza muestral S^2.

TEOREMA

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución normal con parámetros μ y σ^2. Entonces la variable aleatoria

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\Sigma(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2}$$

tiene una distribución de probabilidad ji-cuadrada (χ^2) con $n - 1$ grados de libertad.

Tal como se analizó en las secciones 4.4 y 7.1, la distribución ji-cuadrada es una distribución de probabilidad continua con un solo parámetro ν, llamado número de grados de libertad, con posibles valores de 1, 2, 3, . . . En la figura 7.10 se ilustran las gráficas de varias funciones de densidad de probabilidad χ^2. Cada función de densidad de probabilidad $f(x; \nu)$ es positiva sólo para $x > 0$, y cada una tiene asimetría positiva (una larga cola superior), aunque la distribución se mueve hacia la derecha y se vuelve más simétrica a medida que se incrementa ν. Para especificar procedimientos inferenciales que utilizan la distribución ji-cuadrada, se requiere una notación análoga a aquella para un valor t crítico $t_{\alpha,\nu}$.

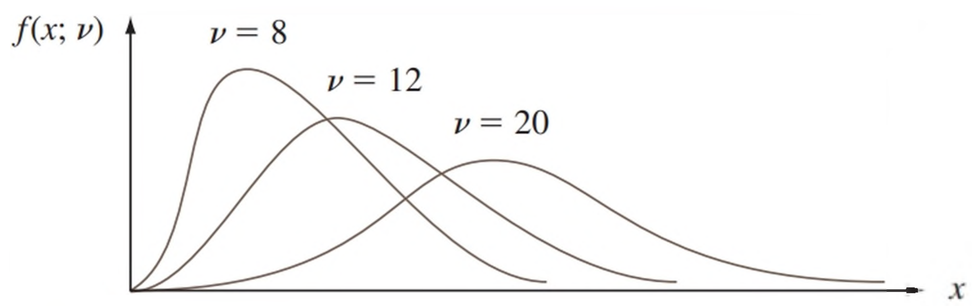


Figura 7.10 Gráficas de funciones de densidad ji-cuadrada

NOTACIÓN

Sea $\chi^2_{\alpha,\nu}$, llamado **valor crítico ji-cuadrada,** el número sobre el eje horizontal de modo que α del área bajo la curva ji-cuadrada con ν grados de libertad quede a la derecha de $X^2_{\alpha,\nu}$.

La simetría de las distribuciones t hizo que fuera necesario tabular sólo valores críticos t de cola superior ($t_{\alpha,\nu}$ con valores pequeños de α). La distribución ji-cuadrada no es simétrica, por lo que la tabla A.7 del apéndice contiene valores de $\chi^2_{\alpha,\nu}$ tanto para α cerca de 0 como cerca de 1, como se ilustra en la figura 7.11(b). Por ejemplo, $\chi^2_{.025,14} = 26.119$, y $\chi^2_{.95,20}$ (el 5° percentil) $= 10.851$.

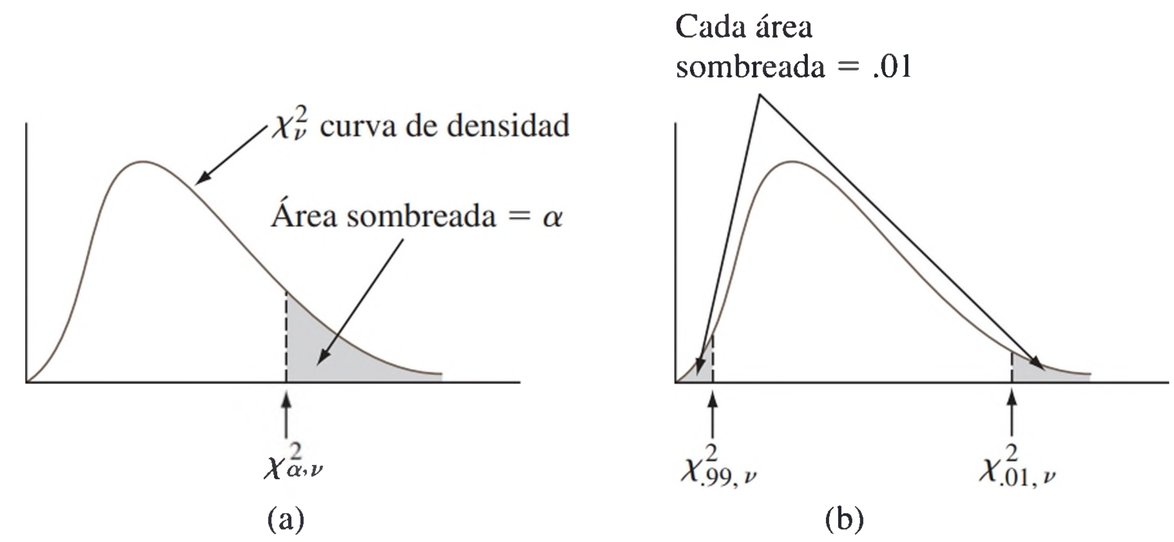


Figura 7.11 $\chi^2_{\alpha,\nu}$ Notación ilustrada

La variable aleatoria $(n-1)S^2/\sigma^2$ satisface las dos propiedades en las cuales está basado el método general para obtener un intervalo de confianza: es una función del parámetro de interés σ^2; no obstante, su distribución de probabilidad (ji-cuadrada) no depende de este parámetro. El área bajo una curva ji-cuadrada con n grados de libertad a la derecha de $\chi^2_{\alpha/2,\nu}$. es $\alpha/2$, lo mismo que a la izquierda de $\chi^2_{1-\alpha/2,\nu}$. De este modo el área capturada entre estos dos valores críticos es $1-\alpha$. Como una consecuencia de esto y del teorema que hemos formulado,

$$P\left(\chi^2_{1-\alpha/2,n-1} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2,n-1}\right) = 1-\alpha \tag{7.17}$$

Las desigualdades en (7.17) equivalen a

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}$$

Al sustituir el valor calculado s^2 en los límites se obtiene un intervalo de confianza para σ^2, y sacar las raíces cuadradas se obtiene un intervalo para σ.

TEOREMA

Un **intervalo de confianza de $100(1-\alpha)\%$ para la varianza σ^2 de una población normal** tiene un límite inferior

$$(n-1)s^2/\chi^2_{\alpha/2,n-1}$$

y el límite superior

$$(n-1)s^2/\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$$

Un **intervalo de confianza para σ** tiene límites superior e inferior que son las raíces cuadradas de los límites correspondientes en el intervalo para σ^2. Un límite de confianza superior o inferior resulta de la sustitución de $\alpha/2$ con α en el límite correspondiente del intervalo de confianza.

EJEMPLO 7.15 Los datos adjuntos sobre voltaje de ruptura de circuitos eléctricamente sobrecargados se tomaron de un diagrama de probabilidad normal que aparece en el artículo **"Damage of Flexible Printed Wiring Boards Associated with Lightning-Induced Voltage Surges"**

(***IEEE Transactions on Components, Hybrids, and Manuf. Tech.*, 1985: 214-220**). Lo recto del diagrama apoyó de manera firme la suposición de que el voltaje de ruptura está aproximadamente distribuido en forma normal.

1470	1510	1690	1740	1900	2000	2030	2100	2190
2200	2290	2380	2390	2480	2500	2580	2700	

Sea σ^2 la varianza de la distribución del voltaje de ruptura. El valor calculado de la varianza muestral es $s^2 = 137\ 324.3$, la estimación puntual de σ^2. Con grados de libertad $= n - 1 = 16$, un intervalo de confianza de 95% requiere $\chi^2_{.975,16} = 6.908$ y $\chi^2_{.025,16} = 28.845$. El intervalo es

$$\left(\frac{16(137\ 324.3)}{28.845}, \quad \frac{16(137\ 324.3)}{6.908}\right) = (76\ 172.3, 318\ 064.4)$$

Al sacar la raíz cuadrada de cada punto extremo se obtiene (276.0, 564.0) como el intervalo de confianza de 95% para σ. Estos intervalos son bastante anchos, lo que refleja la variabilidad sustancial del voltaje de ruptura en combinación con un tamaño de muestra pequeño. ■

Los intervalos de confianza para σ^2 y σ cuando la distribución de la población no es normal pueden ser difíciles de obtener. En esos casos, consulte a un estadístico conocedor.

EJERCICIOS Sección 7.4 (42–46)

42. Determine los valores de las siguientes cantidades:

a. $\chi^2_{.1,15}$ **b.** $\chi^2_{.1,25}$

c. $\chi^2_{.01,25}$ **d.** $\chi^2_{.005,25}$

e. $\chi^2_{.99,25}$ **f.** $\chi^2_{.995,25}$

43. Determine lo siguiente:

a. El 95° percentil de la distribución ji-cuadrada con $\nu = 10$

b. El 5° percentil de la distribución ji-cuadrada con $\nu = 10$.

c. $P(10.98 \le \chi^2 \le 36.78)$, donde χ^2 es una variable aleatoria ji-cuadrada con $\nu = 22$

d. $P(\chi^2 < 14.611$ o $\chi^2 > 37.652)$, donde χ^2 es una variable aleatoria ji-cuadrada con $\nu = 25$

44. Se determinó la cantidad de expansión lateral (mils) para una muestra de $n = 9$ soldaduras de arco de gas metálico de energía pulsante utilizadas en tanques de almacenamiento de buques LNG. La desviación estándar muestral resultante fue $s = 2.81$ mils. Suponiendo normalidad, obtenga un intervalo de confianza de 95% para σ^2 y para σ.

45. El mecanizado por descarga eléctrica (WEDM) es un proceso que se utiliza para la fabricación de componentes conductores de metales duros. Utiliza un alambre que se mueve continuamente y que sirve como electrodo. La cobertura del electrodo de alambre permite que el núcleo del electrodo de alambre se enfríe y proporciona un desempeño de corte mejorado. El artículo **"High- Performance Wire Electrodes for Wire Electrical- Discharge Machining—A Review"** (***J. of Engr. Manuf.*, 2012: 1757–1773**) menciona las siguientes observaciones sobre el grosor total de la cobertura del electrodo (en μm) de ocho electrodos utilizados para WEDM:

21	16	29	35	42	24	24	25

Calcule el intervalo de confianza a 99% para la desviación estándar de la distribución del grosor de la cobertura del electrodo. ¿Es válido este intervalo sin importar cuál es la naturaleza de la distribución? Explique.

46. El artículo **"Concrete Pressure on Formwork"** (***Mag. of Concrete Res.*, 2009: 407-417**) proporciona las siguientes observaciones sobre la presión máxima del concreto (kN/m^2):

33.2	41.8	37.3	40.2	36.7	39.1	36.2	41.8
36.0	35.2	36.7	38.9	35.8	35.2	40.1	

a. ¿Es factible que esta muestra haya sido seleccionada de una distribución de población normal?

b. Calcule un límite de confianza superior con nivel de confianza de 95% para la desviación estándar de la población de presión máxima.

EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS (47–62)

47. El ejemplo 1.11 introdujo las siguientes observaciones sobre la fuerza de adhesión.

11.5	12.1	9.9	9.3	7.8	6.2	6.6	7.0
13.4	17.1	9.3	5.6	5.7	5.4	5.2	5.1
4.9	10.7	15.2	8.5	4.2	4.0	3.9	3.8
3.6	3.4	20.6	25.5	13.8	12.6	13.1	8.9
8.2	10.7	14.2	7.6	5.2	5.5	5.1	5.0
5.2	4.8	4.1	3.8	3.7	3.6	3.6	3.6

a. Calcule la fuerza de adhesión promedio verdadera de una manera que proporcione información sobre precisión y confiabilidad. [*Sugerencia*: $\Sigma x_i = 387.8$ y $\Sigma x_i^2 = 4247.08$.]

b. Calcule un intervalo de confianza de 95% para la proporción de todas las adhesiones cuyos valores de fuerza excederían de 10.

48. El artículo **"Distributions of Compressive Strength Obtained from Various Diameter Cores" (*ACI Materials J.*, 2012: 597–606)** describe un estudio en el que se determinaron las fuerzas de compresión en muestras de concreto de diferentes tipos, con diferentes diámetros de núcleo y con diferentes relaciones longitud-diámetro. Para un tipo, diámetro y relación l/d, en particular las 18 muestras probadas resultaron en una media muestral de fuerza de compresión de 64.41 MPa y una desviación estándar de muestra de 10.32 MPa. El comportamiento normal de la distribución de la fuerza de compresión se consideró bastante posible.

a. Calcule el intervalo de confianza con un nivel de confianza de 98% para el promedio de la fuerza de compresión real bajo estas circunstancias.

b. Calcule un límite inferior de predicción de 98% para la fuerza de compresión de una sola especie futura probada en las circunstancias dadas. [*Sugerencia*: $t_{.02,17} = 2.224$.]

49. Para aquellos que no lo saben, las regatas Dragon Boat son un deporte acuático de competencia que involucra a 20 remeros que reman a lo largo de diversas distancias durante la carrera. Se ha hecho bastante popular en los últimos años. El artículo **"Physiological and Physical Characteristics of Elite Dragon Boat Paddlers" (*J. of Strength and Conditioning*, 2013: 137–145)** resume un extenso análisis estadístico de los datos obtenidos a partir de una muestra de 11 remeros. Reporta que un intervalo de confianza a 95% para la fuerza promedio real (N) durante una carrera simulada de 200 m fue (60.2, 70.6). Obtenga una predicción del intervalo de confianza a 95% para la fuerza de un solo remero, seleccionado al azar, que participa en la carrera simulada.

50. Un artículo publicado en un periódico reporta que se utilizó una muestra de tamaño 5 como base para calcular un intervalo de confianza de 95% para la frecuencia natural (Hz) promedio verdadera de vigas deslaminadas de cierto tipo. El intervalo resultante fue (229.764, 233.504). Usted decide que un nivel de confianza de 99% es más apropiado que el de 95% utilizado. ¿Cuáles son los límites del intervalo de 99%? [*Sugerencia*: Use el centro del intervalo y su ancho para determinar $\bar{x}$ y s.]

51. Los síntomas respiratorios inexplicables reportados por los atletas suelen ser considerados asma secundaria inducida por ejercicio. El artículo **"High Prevalence of Exercise-Induced Laryngeal Obstruction in Athletes" (*Medicine and Science in Sports and Exercise*, 2013: 2030–2035)** sugiere que muchos de esos casos podrían explicarse mejor por la obstrucción de la laringe. De una muestra de 88 atletas que ingresaron para realizarse un estudio de asma, 31 mostraron un asma secundaria inducida por ejercicio.

a. Calcule e interprete el intervalo de confianza utilizando un nivel de confianza a 95% para la proporción real de todos los atletas que presentaron asma secundaria inducida por ejercicio en estas circunstancias.

b. ¿Qué tamaño de muestra se requiere si se desea que el ancho del intervalo de confianza a 95% sea cuando más de .04, sin importar los resultados de la muestra?

c. ¿El límite superior del intervalo en el inciso a) especifica una fiabilidad de 95% en el límite superior para la proporción calculada? Explique.

52. La alta concentración del elemento tóxico arsénico es demasiado común en el agua subterránea. El artículo **"Evaluation of Treatment Systems for the Removal of Arsenic from Groundwater" (*Practice Periodical of Hazardous, Toxic, and Radioactive Waste Mgmt.*, 2005: 152–157)** reporta que para una muestra de $n = 5$ especímenes de agua seleccionada para tratamiento por coagulación, la concentración de arsénico media muestral fue de 24.3 μg/L y la desviación estándar muestral fue de 4.1. Los autores del artículo citado utilizaron métodos basados en t para analizar sus datos, así que venturosamente tuvieron razón al creer que la distribución de la concentración de arsénico era normal.

a. Calcule e interprete un intervalo de confianza de 95% para la concentración de arsénico promedio verdadera en todos los especímenes de agua.

b. Calcule un límite de confianza superior de 90% para la desviación estándar de la distribución de la concentración de arsénico.

c. Pronostique la concentración de arsénico de un solo espécimen de agua de modo que proporcione información sobre precisión y confiabilidad.

53. La infestación con pulgones de árboles frutales puede ser controlada rociando un pesticida o mediante el tratamiento con mariquitas. En un área particular se seleccionan cuatro diferentes huertas de árboles frutales para experimentación. Las primeras tres arboledas se rocían con los pesticidas 1, 2 y 3,

respectivamente, y la cuarta se trata con mariquitas con los siguientes resultados de cosecha:

Tratamiento	n_i = número de árboles	$\bar{x}_i$ arbustos/árbol	s_i
1	100	10.5	1.5
2	90	10.0	1.3
3	100	10.1	1.8
4	120	10.7	1.6

Sea μ_i = la cosecha promedio verdadera (arbustos/árbol) después de recibir el i-ésimo tratamiento. Entonces

$$\theta = \frac{1}{3}(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) - \mu_4$$

mide la diferencia de las cosechas promedio verdaderas entre el tratamiento con pesticidas y el tratamiento con mariquitas. Cuando n_1, n_2, n_3 y n_4 son grandes, el estimador $\hat{\theta}$ obtenido al reemplazar cada μ_i con $\overline{X}_i$ es aproximadamente normal. Use esto para deducir un intervalo de confianza muestral grande de $100(1 - \alpha)\%$ para θ y calcule el intervalo de 95% para los datos dados.

54. Es importante que las máscaras que utilizan los bomberos sean efectivas para soportar altas temperaturas porque los bomberos comúnmente trabajan a temperaturas de 200–500° F. En una prueba de un tipo de máscara, a 11 de 55 máscaras se les desprendió la mica a 250°. Construya un intervalo de confianza de 90% para la verdadera proporción de máscaras de este tipo cuya mica se desprendería a 250°.

55. Un fabricante de libros de texto universitarios está interesado en investigar la resistencia de las encuadernaciones producidas por una encuadernadora particular. La resistencia puede ser medida registrando la fuerza que se requiere para arrancar las páginas de un libro. Si esta fuerza se mide en libras, ¿cuántos libros deberán ser probados para calcular la fuerza promedio requerida para romper la encuadernación dentro de .1 lb con 95% de confianza? Suponga que se sabe que σ es de .8.

56. Los siguientes datos sobre la profundidad a la que inician las grietas (μm) fueron tomados a partir de una gráfica de probabilidad lognormal que aparece en el artículo **"Incorporating Small Fatigue Crack Growth in Probabilistic Life Prediction: Effect of Stress Ratio in Ti-6Al-2Sn-6Mo"** (***Intl. J. of Fatigue,* 2013: 83–95**). Aunque el patrón en la gráfica es bastante recto, una gráfica de probabilidad normal de los datos también muestra un patrón razonablemente lineal. Una gráfica de caja indica que la distribución es bastante simétrica cerca del 50% central de los datos y sólo ligeramente sesgada de manera global. Es, por tanto, razonable estimar y predecir utilizando intervalos t.

4.7	5.1	5.2	5.3	5.6	5.8	6.3	6.7
7.2	7.4	7.7	8.5	8.9	9.3	10.1	11.2

a. Estime el valor promedio real de la profundidad a la que inicia la grieta con un intervalo de confianza a 99% e interprete el intervalo resultante.

b. Prediga el valor de una sola medición de la profundidad a la que inicia la grieta construyendo un intervalo de predicción de 99%.

c. En este contexto interprete el significado de 99% en el inciso b).

57. En el ejemplo 6.8 se introdujo el concepto de experimento censurado en el cual se prueban n componentes y el experimento termina en cuanto fallan r de los componentes. Suponga que las vidas útiles de los componentes son independientes, cada una con distribución exponencial y parámetro λ. Sea Y_1 el tiempo en el cual ocurre la primera falla, Y_2 el tiempo en el cual ocurre la segunda falla, y así sucesivamente, de modo que $T_r = Y_1 + \cdots + Y_r + (n - r)Y_r$, es la vida útil total acumulada. En este caso se puede demostrar que $2\lambda T_r$ tiene una distribución ji-cuadrada con $2r$ grados de libertad. Use esto para desarrollar una fórmula para un intervalo de confianza $100(1 - \alpha)\%$ para una vida útil promedio verdadera $1/\lambda$. Calcule un intervalo de confianza de 95% con los datos del ejemplo 6.8.

58. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución de probabilidad continua con mediana $\tilde{\mu}$ (de modo que $P(X_i \le \tilde{\mu}) = P(X_i \ge \tilde{\mu}) = .5$).

a. Demuestre que

$$P(\text{mín}\,(X_i) < \tilde{\mu} < \text{máx}\,(X_i)) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

de modo que (mín(x_i), máx(x_i)) es un intervalo de confianza de $100(1 - \alpha)\%$ para $\tilde{\mu}$ con $\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. [*Sugerencia*: El complemento del evento $\{\text{mín}\,(X_i) < \tilde{\mu} < \text{máx}\,(X_i)\}$ es $\{\text{máx}\,(X_i) \le \tilde{\mu}\} \cup \{\text{mín}\,(X_i) \ge \tilde{\mu}\}$. Pero $(X_i) \le \tilde{\mu}$ si y sólo si $X_i \le \tilde{\mu}$ para todas las i.]

b. Para cada uno de seis infantes normales varones, se determinó la cantidad de alanina aminoácida (mg/100 ml) mientras los infantes llevaban una dieta libre de isoleucina y se obtuvieron los siguientes resultados:

2.84 3.54 2.80 1.44 2.94 2.70

Calcule un intervalo de confianza de 97% para la cantidad mediana verdadera de alanina para infantes que llevaban dicha dieta (**"The Essential Amino Acid Requirements of Infants", *Amer. J. of Nutrition*, 1964: 322–330**).

c. Sea $x_{(2)}$ la segunda más pequeña de las x_i y $x_{(n-1)}$ la segunda más grande de las x_i. ¿Cuál es el coeficiente de confianza del intervalo $(x_{(2)}, x_{(n-1)})$ para $\tilde{\mu}$?

59. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución uniforme en el intervalo $[0, \theta]$, de modo que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & 0 \le x \le \theta \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Entonces si $Y = \text{máx}(X_i)$, se puede demostrar que la variable aleatoria $U = Y/\theta$ tiene una función de densidad

$$f_U(u) = \begin{cases} nu^{n-1} & 0 \le u \le 1 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

a. Use $f_U(u)$ para verificar que

$$P\left((\alpha/2)^{1/n} < \frac{Y}{\theta} \le (1 - \alpha/2)^{1/n}\right) = 1 - \alpha$$

y use esto para obtener un intervalo de confianza $100(1 - \alpha)\%$ para θ.

b. Verifique que $P(\alpha^{1/n} \le Y/\theta \le 1) = 1 - \alpha$ y obtenga un intervalo de confianza de $100(1 - \alpha)\%$ para θ con base en esta posición de probabilidad.

c. ¿Cuál de los dos intervalos obtenidos previamente es más corto? Si mi tiempo de espera de un camión en la mañana está uniformemente distribuido y los tiempos de espera observados son $x_1 = 4.2$, $x_2 = 3.5$, $x_3 = 1.7$, $x_4 = 1.2$ y $x_5 = 2.4$, obtenga un intervalo de confianza de 95% para θ utilizando el más corto de los dos intervalos.

60. Sea $0 \le \gamma \le \alpha$. Entonces un intervalo de confianza de $100(1 - \alpha)\%$ para μ cuando n es grande es

$$\left(\bar{x} - z_{\gamma} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha-\gamma} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

La opción $\gamma = \alpha/2$ da el intervalo usual obtenido en la sección 7.2; si $\gamma \neq \alpha/2$, este intervalo no es simétrico respecto a $\bar{x}$. El ancho de este intervalo es $w = s(z_{\gamma} + z_{\alpha-\gamma})/\sqrt{n}$. Demuestre que w se reduce al mínimo con la opción $\gamma = \alpha/2$, de modo que el intervalo simétrico sea el más corto. [*Sugerencia*: a) por definición de z_{α}, $\Phi(z_{\alpha}) = 1 - \alpha$, de modo que $z_{\alpha} = \Phi^{-1}(1 - \alpha)$; b) la relación entre la derivada de una función $y = f(x)$ y la función inversa $x = f^{-1}(y)$ es $(d/dy)f^{-1}(y) = 1/f'(x)$.]

61. Suponga que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son valores observados resultantes de una muestra aleatoria, tomada de una distribución simétrica pero posiblemente de cola gruesa. Sean $\tilde{x}$ y f_s la mediana muestral y la dispersión de los cuartos, respectivamente. El capítulo 11 de *Understanding Robust and Exploratory Data Analysis* (véase la bibliografía del capítulo 6) sugiere el siguiente intervalo de confianza de 95% robusto para la media de la población (punto de simetría):

$$\tilde{x} \pm \left(\frac{\text{valor crítico } t \text{ conservativo}}{1.075}\right) \cdot \frac{f_s}{\sqrt{n}}$$

El valor de la cantidad entre paréntesis es 2.10 con $n = 10$, 1.94 con $n = 20$ y 1.91 con $n = 30$. Calcule este intervalo de confianza con los datos del ejercicio 45 y compare con el intervalo de confianza t apropiado para una distribución de población normal.

62. **a.** Use los resultados del ejemplo 7.5 para obtener un límite de confianza inferior de 95% para el parámetro λ de una distribución exponencial y calcule el límite basado en los datos dados en el ejemplo.

b. Si la vida útil tiene una distribución exponencial, la probabilidad de que la vida útil exceda de t es $P(X > t) = e^{-\lambda t}$. Use el resultado del inciso a) para obtener un límite de confianza inferior de 95% para la probabilidad de que el tiempo de ruptura exceda los 100 min.

BIBLIOGRAFÍA

DeGroot, Morris y Mark Schervish, *Probability and Statistics* (3a. ed.), Addison-Wesley, Reading, MA, 2002. Una muy buena exposición de los principios generales de inferencia estadística.

Devore, Jay y Kenneth Berk, *Modern Mathematical Statistics with Applications*, Cengage, Belmont, CA, 2007. La exposición es un poco más completa y sofisticada que la del presente libro e incluye más material sobre *bootstrapping*.

Hahn, Gerald y William Meeker, *Statistical Intervals*, Wiley, Nueva York, 1991. Todo lo que alguna vez quiso saber sobre intervalos estadísticos (de confianza, predicción, tolerancia y otros).

8

Pruebas de hipótesis basadas en una sola muestra

INTRODUCCIÓN

Un parámetro puede ser estimado a partir de datos muestrales con un solo número (una estimación puntual) o un intervalo completo de valores factibles (un intervalo de confianza). Con frecuencia, sin embargo, el objetivo de una investigación no es estimar un parámetro sino decidir cuál de dos afirmaciones contradictorias sobre el parámetro es la correcta. Los métodos para lograr esto comprenden la parte de la inferencia estadística llamada *prueba de hipótesis*. En este capítulo primero se analizan algunos conceptos y terminología básicos en la prueba de hipótesis y luego se desarrollan procedimientos para la toma de decisiones para los problemas de realización de pruebas con base en una muestra tomada de una sola población más frecuentemente encontrados.

8.1 Hipótesis y procedimientos de prueba

Una **hipótesis estadística** o simplemente una *hipótesis* es una afirmación o aseveración sobre el valor de un solo parámetro (característica de una población o característica de una distribución de probabilidad), sobre los valores de varios parámetros o sobre la forma de una distribución de probabilidad completa. Un ejemplo de una hipótesis es la pretensión de que $\mu = .75$, donde μ es el diámetro interno promedio verdadero de un cierto tipo de tubo de PVC. Otro ejemplo es la proposición $p < .10$, donde p es la proporción de tarjetas de circuito defectuosas entre todas las tarjetas de circuito producidas por un fabricante. Si μ_1 y μ_2 denotan las verdaderas resistencias a la ruptura promedio de dos tipos diferentes de cuerdas, una hipótesis es la aseveración de que $\mu_1 - \mu_2 = 0$ y otra es que $\mu_1 - \mu_2 > 5$. No obstante, otro ejemplo de una hipótesis es la aseveración de que la distancia de frenado en condiciones particulares tiene una distribución normal. En el capítulo 14 se considerarán las hipótesis de esta última clase. En este y en los siguientes capítulos la atención se concentra en las hipótesis en relación con parámetros.

En cualquier problema de prueba de hipótesis hay dos hipótesis contradictorias en consideración. Una podría ser la pretensión de que $\mu = .75$ y la otra $\mu \neq .75$, o las dos proposiciones contradictorias podrían ser $p \geq .10$ y $p < .10$. El objetivo es decidir, con base en información muestral, cuál de las dos hipótesis es la correcta. Existe una conocida analogía de esto durante un juicio criminal. Una pretensión es la aseveración de que el individuo acusado es inocente. En el sistema judicial estadounidense esta es la pretensión que inicialmente se cree que es verdadera. Sólo de cara a una fuerte evidencia que diga lo contrario el jurado deberá rechazar esta pretensión en favor de la aseveración alternativa de que el acusado es culpable. En este sentido, la pretensión de inocencia es la hipótesis favorecida o protegida y la obligación de la comprobación recae en aquellos que creen en la pretensión alternativa.

Asimismo, al probar hipótesis estadísticas, el problema se formulará de modo que una de las pretensiones sea favorecida al inicio. Esta pretensión inicialmente favorecida no será rechazada en favor de la pretensión alternativa a menos que la evidencia de la muestra la contradiga y apoye con fuerza la aseveración alternativa.

DEFINICIÓN

La **hipótesis nula** denotada por H_0, es la pretensión que inicialmente se supone verdadera (la pretensión de "creencia previa"). La **hipótesis alternativa** denotada por H_a, es la aseveración contradictoria de H_0.

La hipótesis nula será rechazada en favor de la hipótesis alternativa sólo si la evidencia muestral sugiere que H_0 es falsa. Si la muestra no contradice fuertemente a H_0 se continuará creyendo en la factibilidad de la hipótesis nula. Las dos posibles conclusiones derivadas de un análisis de prueba de hipótesis son entonces *rechazar* H_0 o *no rechazar* H_0.

Una **prueba de hipótesis** es un método en el que se utilizan datos muestrales para decidir si la hipótesis nula debe ser rechazada. Por consiguiente, se podría probar H_0: $\mu = .75$ contra la H_a alternativa: $\mu \neq .75$. Sólo si los datos muestrales sugieren fuertemente que μ es otra diferente de .75 la hipótesis nula deberá ser rechazada. Sin semejante evidencia, H_0 no deberá ser rechazada, puesto que sigue siendo bastante factible.

En ocasiones un investigador no desea aceptar una aseveración particular a menos y hasta que los datos apoyen fuertemente la aseveración. Como ejemplo, suponga que una compañía está considerando aplicar un nuevo tipo de recubrimiento en los cojinetes que fabrica. Se sabe que la vida de desgaste promedio verdadera con el recubrimiento

actual es de 1000 horas. Si μ denota la vida promedio verdadera del nuevo recubrimiento, la compañía no desea cambiar a menos que la evidencia sugiera fuertemente que μ excede de 1000. Una formulación apropiada del problema implicaría probar H_0: $\mu = 1000$ contra H_a: $\mu > 1000$. La conclusión de que se justifica un cambio está identificada con H_a y se requeriría evidencia conclusiva para justificar el rechazo de H_0 y cambiar al nuevo recubrimiento.

La investigación científica a menudo implica tratar de decidir si una teoría actual debe ser reemplazada por una explicación más factible y satisfactoria del fenómeno investigado. Un método conservador es identificar la teoría actual con H_0 y la explicación alternativa del investigador con H_a. El rechazo de la teoría actual ocurrirá entonces sólo cuando la evidencia sea mucho más compatible con la nueva teoría. En muchas situaciones H_a se conoce como la "hipótesis del investigador", puesto que es la pretensión que al investigador en realidad le gustaría validar. La palabra *nula* significa "sin ningún valor, efecto o consecuencia", lo que sugiere que H_0 debería ser identificada con la hipótesis de ningún cambio (de la opinión actual), ninguna diferencia, ninguna mejora, y así sucesivamente. Suponga, por ejemplo, que 10% de todas las tarjetas de circuito producidas por un fabricante durante un periodo reciente están defectuosas. Un ingeniero ha sugerido un cambio en el proceso de producción en la creencia de que dará por resultado una proporción reducida de tarjetas defectuosas. Sea p la proporción verdadera de tarjetas defectuosas que resultan del cambio en el proceso. Entonces la hipótesis de investigación en la cual recae la obligación de la comprobación es la aseveración de que $p < .10$. Por consiguiente, la hipótesis alternativa es H_a: $p < .10$.

En el tratamiento de la prueba de hipótesis, H_0 generalmente será formulada como pretensión de igualdad. Si θ denota el parámetro de interés, la hipótesis nula tendrá la forma H_0: $\theta = \theta_0$ donde θ_0 es un número específico llamado **valor nulo** del parámetro (valor pretendido para θ por la hipótesis nula). Por ejemplo, considere la situación de la tarjeta de circuito que se acaba de comentar. La hipótesis alternativa sugerida fue H_a: $p < .10$, la pretensión de que la modificación del proceso reduce la proporción de tarjetas defectuosas. Una elección natural de H_0 en esta situación es la pretensión de que $p \geq .10$ de acuerdo con la cual el nuevo proceso no es mejor o peor que el actualmente utilizado. En su lugar se considerará H_0: $p = .10$ contra H_a: $p < .10$. El razonamiento para utilizar esta hipótesis nula simplificada es que cualquier procedimiento de decisión razonable para decidir entre H_0: $p = .10$ y H_a: $p < .10$ también será razonable para decidir entre la pretensión de que $p \geq .10$ y H_a. Se prefiere utilizar una H_0 simplificada porque tiene ciertos beneficios técnicos, los que en breve serán aparentes.

La alternativa a la hipótesis nula H_0: $\theta = \theta_0$ se verá como una de las siguientes tres aseveraciones:

1. H_a: $\theta > \theta_0$ (en cuyo caso la hipótesis nula implícita es $\theta \leq \theta_0$),
2. H_a: $\theta < \theta_0$ (en cuyo caso la hipótesis nula implícita es $\theta \geq \theta_0$), o
3. H_a: $\theta \neq \theta_0$

Por ejemplo, sea σ la desviación estándar de la distribución de diámetros internos (pulgadas) de cierto tipo de mango de metal. Si se decidió utilizar el mango a menos que la evidencia muestral demuestre conclusivamente que $\sigma > .001$, la hipótesis apropiada sería H_0: $\sigma = .001$ versus H_a: $\sigma > .001$. El número θ_0 que aparece tanto en H_0 como en H_a (separando la alternativa de la nula) se llama valor nulo.

Procedimientos de prueba y valores *P*

Un procedimiento de prueba es una regla basada en datos muestrales para decidir si se rechaza H_0. El punto clave será el siguiente. Supongamos que H_0 es verdadera. Entonces ¿cuál es la probabilidad de que al menos una muestra (aleatoria) contradiga esta hipótesis como lo haría nuestra muestra? Considere los siguientes dos escenarios:

1. Hay sólo .1% de posibilidad (probabilidad de .001) de obtener una muestra al menos tan contradictoria a H_0 como la que obtuvimos al suponer que H_0 es verdadera.
2. Hay 25% de posibilidades (probabilidad de .25) de obtener una muestra al menos tan contradictoria a H_0 como la que se obtiene cuando H_0 es verdadera.

En el primer escenario, algo tan extremo como nuestra muestra es muy poco probable que se produzca cuando H_0 es verdadera, a la larga sólo 1 en 1000 muestras sería al menos tan contradictoria con la hipótesis nula como la que hemos seleccionado. Por otro lado, para el segundo escenario, a largo plazo 25 de cada 100 muestras serían al menos tan contradictorias a H_0 como la que obtuvimos al suponer que la hipótesis nula es verdadera. Así, nuestra muestra es muy consistente con H_0 y no hay ninguna razón para rechazarla.

Debemos ahora profundizar en este razonamiento por ser más específicos en cuanto a lo que se entiende por "al menos tan contradictorio a H_0 como la muestra que se obtiene cuando H_0 es verdadera". Antes de hacerlo de una manera general, consideremos varios ejemplos.

EJEMPLO 8.1 La empresa que fabrica yogur estilo griego marca D desea aumentar su cuota de mercado y en particular de convencer a los que actualmente prefieren la marca C a cambiar de marca. Por tanto, el departamento de mercadeo ha ideado el siguiente experimento ciego de sabor. A cada uno de los 100 consumidores de la marca C se le pide que pruebe yogur de dos tazones, uno con la marca C y el otro con la marca D y luego se les pregunta cuál prefiere. Los tazones están marcados con un código para que los experimentadores sepan qué tazón contiene cuál yogur, pero los experimentadores no tienen esta información (Nota: Este experimento se realizó en realidad con cervezas hace varias décadas, con la ya desaparecida cerveza Schlitz representando el papel de la marca D y siendo la cerveza Michelob la marca objetivo).

Sea p la proporción de todos los consumidores de marca C que prefiere C en lugar de D en dichas circunstancias. Vamos a considerar la prueba de las hipótesis H_0: $p = .5$ contra H_a: $p < .5$. La hipótesis alternativa afirma que la mayoría de los consumidores de la marca C prefiere la marca D. Por supuesto, a la compañía de la marca D le gustaría que H_0 fuera rechazada, por tanto, considera H_a como la hipótesis más factible. Si la hipótesis nula es verdadera y un solo consumidor de la marca C, seleccionado al azar, prefiere C o D el resultado es el mismo que si hubiera lanzado una moneda al aire.

Los datos de la muestra consistirán en una secuencia de 100 preferencias, siendo cada una C o D. Sea X = el número entre los 100 individuos seleccionados que prefieren C a D. Esta variable aleatoria servirá como nuestro *estadístico de prueba*, la función de los datos de la muestra en la que basaremos nuestra conclusión. Ahora X es una variable aleatoria binomial (el número de éxitos en un experimento con un número fijo de ensayos independientes con una probabilidad de éxito constante p). Cuando H_0 es verdadera, este estadístico de prueba tiene una distribución binomial con $p = .5$, en cuyo caso $E(X) = np = 100(.5) = 50$.

Intuitivamente, un valor de X "considerablemente" menor de 50 defiende el rechazo de H_0 en favor de H_a. Suponga que el valor observado de X es $x = 37$. ¿Cómo contradice este valor a la hipótesis nula? Para responder esta pregunta, vamos a identificar primero los valores de X que son aún más contradictorios a H_0 como el mismo 37. Evidentemente 35 es un valor y 30 es otro; de hecho, cualquier número menor que 37 es un valor de X más contradictorio a la hipótesis nula que es el valor que realmente observamos. Ahora considere la probabilidad, calculada suponiendo que la hipótesis nula es verdadera, para obtener un valor de X al menos tan contradictorio a H_0 como lo es nuestro valor observado:

$$\begin{aligned} P(X \le 37 \text{ cuando } H_0 \text{ es verdadera}) &= P(X \le 37 \text{ cuando } X \sim \text{Bin}(100, .5)) \\ &= B(37; 100, .5) = .006 \end{aligned}$$

(del software). Así si la hipótesis nula es verdadera, hay menos de 1% de posibilidades de ver 37 o menos éxitos entre 100 ensayos. Esto sugiere que $x = 37$ es mucho más consistente con la hipótesis alternativa que con el valor nulo, y que el rechazo de H_0 a favor de H_a es una conclusión sensata. Además, considere que $\sigma_X = \sqrt{npq} = \sqrt{100(.5)(.5)} = 5$ cuando H_0 es verdadera. Se deduce que 37 es más de 2.5 desviaciones estándar menores de lo que esperaríamos ver si H_0 fuera verdadera.

Ahora supongamos que 45 de los 100 individuos en el experimento prefieren C (45 éxitos). Nuevamente calculamos la probabilidad, suponiendo H_0 verdadera, para conseguir un valor del estadístico de prueba menos contradictorio a H_0 como este:

$$\begin{aligned} P(X \le 45 \text{ cuando } H_0 \text{ es verdadera}) &= P(X \le 45 \text{ cuando } X \sim \text{Bin}(100, .5)) \\ &= B(45; 100, .5) = .184 \end{aligned}$$

O sea que si, de hecho, $p = .5$, no sería sorprendente ver 45 o menos éxitos. Por esta razón el valor 45 no parece muy contradictorio a H_0 (es sólo una desviación estándar más pequeña de lo que se esperaba que H_0 fuera verdadera). Rechazar H_0 en este caso no parece razonable. ■

EJEMPLO 8.2 De acuerdo con el artículo **"Freshman 15: Fact or Fiction" (*Obesity*, 2006: 1438–1443)**, "una creencia común entre el público en general es que después de entrar a la universidad se aumenta de peso corporal y la frase 'novato 15' ha sido acuñada para describir las 15 libras que presumiblemente los estudiantes aumentan durante su primer año". Sea μ la ganancia de peso promedio verdadero de la mujer en el transcurso de su primer año en la universidad. ¿La cita anterior sugiere que debemos probar las hipótesis H_0: $\mu = 15$ versus H_a: $\mu \neq 15$. Para esto, suponga que se selecciona una muestra aleatoria de n de estos individuos y se determina el aumento de peso de cada uno, obteniendo como resultado una media muestral de ganancia de peso $\bar{x}$ y una desviación estándar de la muestra s (Nota: Estos datos realmente están *pareados*, con cada aumento de peso resultante se obtiene un par de pesos (inicio, final) y después se resta para determinar la diferencia; en la sección 9.3 se comentará más acerca de estos datos). Antes de que se obtuvieran los datos la media de la ganancia de peso de la muestra es una variable aleatoria $\bar{X}$ y la desviación estándar de la muestra también es una variable aleatoria S.

Un estadístico de prueba natural (función de datos en la que se basará la decisión) es la media muestral $\bar{X}$; si H_0 es verdadera, entonces $E(\bar{X}) = \mu = 15$, mientras que si μ difiere considerablemente de 15, entonces la media muestral del aumento de peso debería ser la misma. Pero hay un estadístico de prueba más conveniente que tiene propiedades atractivas intuitivas y técnicas: la media muestral se estandarizada suponiendo que H_0 es verdadera. Recuerde que la desviación estándar (error estándar) de $\bar{X}$ es $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{n}$. Suponiendo que la distribución poblacional de las ganancias de peso es normal, se deduce que la distribución muestral de $\bar{X}$ es normal. Ahora, al estandarizar una variable normalmente distribuida se obtiene una variable que tiene una distribución normal estándar (la curva z):

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Si se conoce el valor de σ, es posible obtener un estadístico de prueba simplemente al sustituir μ por el valor nulo $\mu_0 = 15$:

$$Z = \frac{\bar{X} - 15}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Si se sustituyen $\bar{x}$, σ y n se obtiene $z = 3$, la interpretación es que el valor observado de la media muestral es más grande por tres desviaciones estándar que lo que esperaríamos si la hipótesis nula fuera verdadera. Por supuesto, en "situaciones normales" este caso es extremadamente

raro. Por otra parte, si $z = -1$, entonces la media muestral es sólo una desviación estándar menor de lo que se esperaría bajo H_0, un resultado que no es lo suficientemente sorprendente para formular una duda sustancial en H_0.

Un error práctico en el desarrollo anterior es que el valor de σ casi nunca está disponible para un investigador. Sin embargo, como comentamos en el capítulo anterior, la sustitución de S por σ en Z normalmente presenta poca variabilidad extra cuando n es grande ($n > 40$ era la regla empírica anterior). En este caso la variable resultante aún tiene *aproximadamente* una distribución normal estándar. El estadístico de prueba de muestra grande para nuestro escenario de aumento de peso es

$$Z = \frac{\overline{X} - 15}{S/\sqrt{n}}$$

Así cuando H_0 es verdadera, Z tiene aproximadamente una distribución normal estándar.

Suponga que $\overline{x} = 13.7$ y al sustituirla junto con s y n se obtiene $z = -2.80$. ¿Cuáles son los valores del estadístico de prueba al menos tan contradictorios a H_0 como -2.80 mismo? Para responder esto se determinan primero los valores de $\overline{x}$ que son al menos tan contradictorios a H_0 como 13.7. Uno de estos valores es 13.5, otro es 13.0, y de hecho *cualquier* valor menor de 13.7 es más contradictorio a H_0 que 13.7.

Pero esto no es todo. Recuerde que la hipótesis alternativa afirma que el valor de μ es uno diferente de 15. En vista de lo anterior, el valor de 16.3 es sólo tan contradictorio a H_0 como lo es 13.7; ya que se encuentra a la misma distancia arriba del valor nulo de 15 como 13.7 está por debajo de 15, y el valor de z resultante es 3.0, igual de extremo que -3.0. Y cualquier $\overline{x}$ particular que exceda a 16.3 es igual de contradictorio a H_0, ya que es un valor que está a la misma distancia por debajo de 15, por ejemplo, 16.8 y 14.2 , 17.0 y 13.0 etcétera.

Igual que los valores de $\overline{x}$ que están a más 13.7 corresponden a $z \leq -2.80$, los valores de $\overline{x}$ que están al menos a 16.3 corresponden a $z \geq 2.80$. Así, los valores del estadístico de prueba que son al menos tan contradictorios a H_0 como el valor -2.80 realmente obtenido son $\{z\colon z \leq -2.80 \text{ o } z \geq 2.80\}$. Ahora podemos calcular la probabilidad, suponiendo que H_0 es verdadera, obteniendo un valor del estadístico de prueba al menos tan contradictorio a H_0 como nuestra muestra producida:

$$\begin{aligned} &P(Z \leq -22.80 \text{ o } Z \geq 2.80 \text{ suponiendo que } H_0 \text{ es verdadera}) \\ &\quad \approx 2 \cdot (\text{área bajo la curva de } z \text{ a la derecha de } 2.80) \\ &\quad = 2[1 - \Phi(2.80)] = 2[1 - .9974] = .0052 \end{aligned}$$

Es decir, si la hipótesis nula es, en efecto, verdadera, sólo cerca de la mitad del uno por ciento de todas las muestras daría lugar a un valor del estadístico de prueba al menos tan contradictorio a la hipótesis nula como lo es nuestro valor. Es evidente que -2.80 está entre los valores posibles de los estadísticos de prueba que son más contradictorios a H_0. Por tanto, tendría sentido rechazar H_0 en favor de H_a.

Suponga que, en cambio, hubiésemos obtenido el valor del estadístico de prueba $z = .89$, el cual es menor que una desviación estándar más grande que lo que nos esperaría si H_0 fuera verdadera. La probabilidad anterior sería entonces

$$\begin{aligned} &P(Z \leq -0.89 \text{ o } Z \geq 0.89 \text{ suponiendo que } H_0 \text{ es verdadera}) \\ &\quad \approx 2 \cdot (\text{área bajo la curva } z \text{ a la derecha de } .89) \\ &\quad = 2[1 - \Phi(.89)] = 2[1 - .8133] = .3734 \end{aligned}$$

Más de $1/3$ de todas las muestras darían un valor de estadístico de prueba al menos tan contradictorio a H_0 como lo es .89 cuando H_0 es verdadera. Así los datos son bastante coherentes con la hipótesis nula; y sigue siendo aceptable que $\mu = 15$.

El artículo citado al inicio de este ejemplo informa que en una muestra de 137 estudiantes, la media del aumento de peso de la muestra era sólo de 2.42 lb con una desviación estándar de muestra de 5.72 lb (algunos alumnos pierden peso). ¡Esto da $z = (2.42 - 15)/$

$(5.72\sqrt{137}) = -25.7$! La probabilidad de observar un valor de al menos este valor en cualquier dirección es en principio 0. Los datos contradicen muy fuertemente la hipótesis nula, y hay pruebas sustanciales de que un verdadero aumento de peso promedio está mucho más cerca de 0 que de 15. ■

El tipo de probabilidad calculada en los ejemplos 8.1 y 8.2 ahora servirá de base para la obtención de procedimientos generales de prueba.

DEFINICIONES

Un **estadístico de prueba** es una función de los datos de la muestra utilizada como base para decidir si H_0 debe ser rechazada. El estadístico de prueba seleccionado debe discriminar eficazmente entre las dos hipótesis. Es decir, los valores del estadístico que tienden a producirse cuando H_0 es verdadera deben ser absolutamente diferentes de los observados generalmente cuando H_0 no es verdadera.

El **valor *P*** es la probabilidad, calculada al suponer que la hipótesis nula es verdadera, de obtener un valor del estadístico de prueba al menos tan contradictorio a H_0 como el valor calculado de los datos de la muestra disponible. En una hipótesis de un análisis de prueba se llega a una conclusión seleccionando un número α, llamado **nivel significancia** (o *nivel de significancia*) de la prueba, que está razonablemente cercano a 0. Entonces, si el valor $P \leq \alpha$ se rechazará H_0 en favor de H_a, mientras que si el valor $P > \alpha$, H_0 no se rechazará (aun considerando la posibilidad). En la práctica, los niveles de significancia utilizados con más frecuencia son (en orden) $\alpha = .05, .01, .001$ y $.10$.

Por ejemplo, si se selecciona un nivel de significancia de 0.05 y después calculamos un valor $P = .0032$, H_0 se rechazaría porque $.0032 \leq .05$. Con este mismo valor de P la hipótesis nula también se rechazaría en el menor nivel de significancia de .01, ya que $.0032 \leq .01$. Sin embargo, en un nivel de significancia de .001 no se puede rechazar a H_0 ya que $.0032 > .001$. La figura 8.1 ilustra la comparación del valor P con el nivel de significancia para obtener una conclusión.

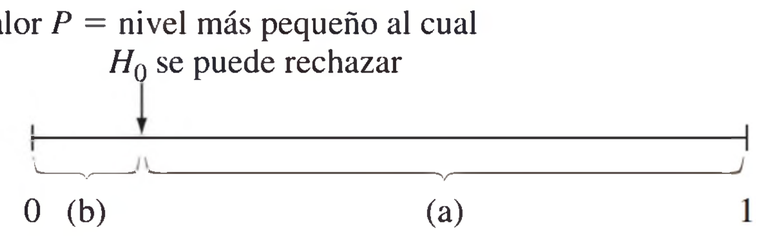


Figura 8.1 Comparación de α y el valor P: (a) H_0 se rechaza cuando α está aquí; (b) H_0 no se rechaza cuando α está aquí

Pronto se considerará en detalle las consecuencias de seleccionar un nivel de significancia más pequeño en lugar de uno más grande. Por el momento, observe que entre menor sea el nivel de significancia, más protección se le está dando a la hipótesis nula y más difícil resultará rechazar esa hipótesis.

La definición de un valor P obviamente es un poco complicada, y no se puede decir nada sin una buena dosis de práctica. De hecho, muchos usuarios de metodología estadística utilizan la regla de decisión dada repetidamente para probar la hipótesis, ¡pero les sería difícil decir lo que es un valor P! A continuación se presentan algunos puntos importantes:

- El valor P es una probabilidad.
- Esta probabilidad se calcula suponiendo que la hipótesis nula es verdadera.
- Para determinar el valor P primero se debe decidir qué valores del estadístico de prueba son al menos tan contradictorios a H_0 como el valor obtenido de nuestra muestra.

- Entre más pequeño sea el valor P, más fuerte es la evidencia contra H_0 y a favor de H_a.
- El valor P no es la probabilidad de que la hipótesis nula sea verdadera o falsa, ni la probabilidad de que se llegue a una conclusión errónea.

EJEMPLO 8.3 Las aguas pluviales urbanas pueden estar contaminadas por muchas fuentes, incluyendo las pilas desechadas. Cuando se rompen estas baterías liberan metales de importancia ambiental. El artículo **"Urban Battery Litter" (*J. Environ. Engr.*, 2009: 46–57)** presenta los datos que resumen las características de una variedad de baterías que se encuentran en las zonas urbanas de Cleveland. Una muestra aleatoria de 51 pilas Panasonic AAA dio una media muestral de masa de zinc de 2.06 g. y una desviación estándar de la muestra de .141 g. ¿Estos datos proporcionarán pruebas convincentes para concluir que la media de la población de la masa de zinc es superior a 2.0 g? Se va a emplear un nivel de significancia de.01 para obtener una conclusión.

Con μ igual a la media de la masa de zinc verdadera de estas baterías, las hipótesis importantes son

$$H_0: \mu = 2.0 \text{ versus } H_a: \mu > 2.0.$$

Debido a que el tamaño de la muestra es razonablemente grande se puede utilizar el teorema del límite central, según el cual la media muestral $\overline{X}$ tiene aproximadamente una distribución normal. Además, la variable estandarizada $Z = (\overline{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$ tiene aproximadamente una distribución estándar normal (la curva z). El estadístico de prueba resultante de la estandarización de $\overline{X}$, suponiendo que H_0 es verdadera es:

$$\text{Estadístico de prueba: } Z = \frac{\overline{X} - 2.0}{S/\sqrt{n}}$$

Al sustituir $n = 51$, $\overline{x} = 2.06$ y $s = .141$ se obtiene $z = .06/.0197 = 3.04$. Aquí la media muestral es aproximadamente tres errores estándar (estimada) más grande de lo que se esperaría si H_0 fuese verdadera (no parece ser mucho más grande de 2, pero hay sólo una pequeña variabilidad en las 51 observaciones de la muestra).

Cualquier valor de $\overline{x}$ mayor que 2.06 es más contradictorio a H_0 que 2.06 mismo, y los valores de $\overline{x}$ que superan a 2.06 corresponden a valores de z que superan a 3.04. Por lo que cualquier $z \geq 3.04$ es al menos contradictorio a H_0. Puesto que el estadístico de prueba tiene aproximadamente una distribución normal estándar, cuando H_0 es verdadera, se tiene

$$\begin{aligned}\text{valor } P &\approx P(\text{una variable aleatoria normal estándar es} \geq 3.04) = 1 - \Phi(3.04)\\ &= 1 .9988 = .0012\end{aligned}$$

Como el valor $P = .0012 \leq .01 = \alpha$, la hipótesis nula debe ser rechazada en el nivel de significancia elegido. Se tiene que la masa de zinc promedio verdadera en efecto es mayor que 2. ■

Errores en la prueba de hipótesis

La base para elegir un nivel de significancia particular α radica en considerar los errores que se podrían presentar al sacar una conclusión. Recuérdese la situación judicial en la cual la hipótesis nula es que el individuo acusado de cometer un delito es inocente. Al emitir un veredicto, el jurado debe considerar la posibilidad de cometer uno de dos tipos diferentes de errores. Uno de ellos implica condenar a un inocente, y el otro consiste en dejar libre a un culpable. Del mismo modo hay dos tipos diferentes de errores que pueden hacerse durante un análisis de prueba de hipótesis estadística.

DEFINICIÓN

Un **error de tipo I** consiste en rechazar la hipótesis nula H_0 cuando es verdadera.

Un **error de tipo II** implica no rechazar H_0 cuando es falsa.

Por ejemplo, un fabricante de cereal afirma que una porción de una de sus marcas aporta 100 calorías (contenido calórico que suele determinarse mediante un método de pruebas destructivo, pero el requisito de presentar información nutricional en los paquetes ha dado lugar a técnicas más sencillas). Por supuesto, el contenido real de calorías varía un poco de porción a porción (de tamaño específico), así que 100 se debe interpretar como un promedio. Sería molesto para los consumidores de este cereal si el contenido de calorías promedio real excediera el valor que se informa. Por tanto, una adecuada formulación de hipótesis es probar H_0: $\mu = 100$ contra H_a: $\mu > 100$. La hipótesis alternativa afirma que los consumidores ingieren en promedio mayor cantidad de calorías de lo que afirma la empresa. Aquí un error tipo I consiste en rechazar la afirmación del fabricante en el sentido de que $\mu = 100$ cuando realmente es verdadera. Un error tipo II es no rechazar la afirmación del fabricante cuando es cierto que $\mu > 100$.

Suponga que μ_1 y μ_2 representan la vida promedio verdadera de dos marcas diferentes de plumas *rollerball* en condiciones experimentales controladas (utilizando una máquina que escribe continuamente hasta que una pluma falla). Es natural probar las hipótesis H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ (es decir, $\mu_1 = \mu_2$) contra H_a: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$ (es decir, $\mu_1 \neq \mu_2$). Un error tipo I sería concluir que las vidas medias verdaderas son diferentes cuando en realidad son idénticas. Un error tipo II consiste en decidir que las vidas promedio verdaderas pueden ser iguales cuando en efecto son en realidad diferentes entre sí.

En el mejor de los mundos posibles tenemos un sistema judicial que nunca condena a un inocente y nunca deja libre a un culpable. Esta norma de oro para las decisiones judiciales ha demostrado ser extremadamente difícil. Asimismo, nos gustaría encontrar procedimientos de prueba para los cuales sea poco probable que se cometa cualquier tipo de error. Sin embargo, se puede lograr este ideal sólo si la decisión se basa en el examen de toda la población. La dificultad con la utilización de un procedimiento basado en datos muestrales es que, debido a la variabilidad del muestreo, el resultado podría ser una muestra no representativa. En la situación del contenido de calorías, incluso si la afirmación del fabricante es correcta, un valor de $\overline{X}$ inusualmente grande puede dar como resultado un valor P menor que el nivel de significancia elegido y, por consiguiente, cometer un error tipo I. Por otra parte, el contenido de calorías promedio verdadero puede superar las afirmaciones del fabricante, sin embargo, una muestra de porciones puede producir un valor P relativamente grande para el cual la hipótesis nula no se puede rechazar.

En lugar de demandar procedimientos sin errores habrá que buscar procedimientos con los cuales sea improbable que ocurra cualquier tipo de error. Es decir, un buen procedimiento es aquel en que la probabilidad de cometer un error tipo I es pequeña y la probabilidad de cometer un error tipo II es pequeña.

EJEMPLO 8.4 Se sabe que cierto tipo de automóvil no sufre daños visibles 25% del tiempo en pruebas de choque a 10 mph. Se ha propuesto un diseño de parachoques modificado en un esfuerzo por incrementar este porcentaje. Sea p la proporción de todos los choques a 10 mph con este nuevo parachoques en los que no se producen daños visibles. Las hipótesis a probar son H_0: $p = .25$ (ninguna mejora) versus H_a: $p > .25$. La prueba se basará en un experimento que implica $n = 20$ choques independientes con prototipos del nuevo diseño. Aquí el estadístico de prueba natural es $X =$ el número de choques sin daño visible. Si H_0 es verdadera, $E(X) = np_0 = (20)(.25) = 5$. La intuición sugiere que un valor observado x mucho mayor que esto proporcionaría una fuerte evidencia contra H_0 y apoyaría a H_a.

Considere utilizar un nivel de significancia de .10. El valor P es $P(X \geq x$ cuando X tiene una distribución binomial con $n = 20$ y $p = .25) = 1 - B(x - 1; 20, .25)$ para $x > 0$.

La tabla A.1 del apéndice muestra que, en este caso,

$$P(X \geq 7) = 1 - B(6; 20, .25) = 1 - .786 = .214$$

$$P(X \geq 8) = 1 - .898 = .102 \approx .10, P(X \geq 9) = 1 - .959 = .041$$

Así, rechazar H_0 cuando el valor $P \leq .10$ es equivalente a rechazar H_0 cuando $X \geq 8$. Por tanto,

$$\begin{aligned} P(\text{cometer un error tipo I}) &= P(\text{rechazar } H_0 \text{ cuando } H_0 \text{ es verdadera}) \\ &= P(\text{cuando X tiene una distribución binomial con } n = 20 \text{ y } p = .25) \\ &= .102 \\ &\approx .10 \end{aligned}$$

Es decir, *la probabilidad de un error tipo I es exactamente el nivel de significancia* α. Si la hipótesis nula es verdadera aquí y el procedimiento de prueba se utiliza una y otra vez, cada vez junto con un grupo de 20 accidentes, a largo plazo la hipótesis nula será incorrectamente rechazada en favor de la hipótesis alternativa, aproximadamente 10% de las veces. Por tanto, este procedimiento de prueba ofrece buena protección ante la posibilidad de cometer un error tipo I.

Hay solamente una probabilidad de error tipo I porque hay un solo valor del parámetro para el cual H_0 es verdadera (éste es uno de los beneficios de simplificar la hipótesis nula a una expresión de igualdad). Sea β la probabilidad de cometer un error tipo II. Lamentablemente no existe un único valor de β, ya que hay una multitud de maneras para las que H_0 podría ser falsa ya que $p = .30$, ya que $p = .37$, ya que $p = .5$ etcétera. De hecho hay un valor diferente de β para cada valor diferente de p superior a .25. En el nivel de significancia elegido .10, H_0 se rechazará si y sólo si $X \geq 8$, por lo que no se rechazará H_0 si y sólo si $X \leq 7$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \beta.(3) &= P(\text{error tipo II cuando } p = .3) \\ &= P(H_0 \text{ no se rechaza cuando } p = .3) \\ &= P[X \leq 7 \text{ cuando } X \sim \text{Bin}(20, .3)] \\ &= B(7; 20, .3) = .772 \end{aligned}$$

Cuando p es en realidad .3 y no .25 (un "pequeño" alejamiento de H_0), ¡aproximadamente 77% de todos los experimentos de este tipo daría como resultado que H_0 no sea rechazada de manera incorrecta!

La siguiente tabla muestra β para los valores seleccionados de p (cada uno calculado como lo acabamos de hacer $\beta(.3)$). Claramente, β disminuye conforme se aleja el valor de p hacia la derecha del valor nulo .25. De manera intuitiva, mientras más grande es el alejamiento de H_0, es más probable que se detecte dicho alejamiento.

p	.3	.4	.5	.6	.7	.8
$\beta(p)$	.772	.416	.132	.021	.001	.000

La probabilidad de cometer aquí un error tipo II es bastante grande cuando $p = .3$ o .4. Esto es porque esos valores están bastante cerca de lo que afirma H_0 y el tamaño de muestra 20 es demasiado pequeño para permitir la discriminación precisa entre .25 y los valores de p.

El procedimiento de prueba propuesto sigue siendo razonable para poner a prueba la hipótesis nula más realista de que $p \leq .25$. En este caso, ya no existe una sola probabilidad α de error tipo I, sino que hay una α por cada p que, cuando mucho, sea de .25: $\alpha(.25)$, $\alpha(.23)$, $\alpha(.20)$, $\alpha(.15)$ etcétera. No obstante, es fácil verificar que $\alpha(p) < \alpha(.25) = .102$ si $p < .25$. Es decir, el valor más grande de α ocurre con el valor límite .25 entre H_0 y H_a. Por consiguiente, si α es pequeña para la hipótesis nula simplificada, también será igual o más pequeña para la H_0 más realista. ■

EJEMPLO 8.5 Se sabe que el tiempo de secado de un tipo de pintura en condiciones de prueba especificadas está normalmente distribuido con una media de 75 min y desviación estándar de 9 min. Algunos químicos propusieron un nuevo aditivo para reducir el promedio del tiempo de secado. Se cree que los tiempos de secado con este aditivo permanecerán distribuidos en forma normal con $\sigma = 9$. Debido al gasto asociado con el aditivo, la evidencia deberá

sugerir fuertemente una mejora en el tiempo de secado promedio antes de que se adopte semejante conclusión. Sea μ el tiempo de secado promedio verdadero cuando se utiliza el aditivo. Las hipótesis apropiadas son H_0: $\mu = 75$ versus H_a: $\mu < 75$. Sólo si H_0 puede ser rechazada el aditivo será declarado exitoso y utilizado.

Los datos experimentales tienen que estar compuestos de tiempos de secado de $n = 25$ especímenes de prueba. Sean $X_1, \ldots, X_{25}$ los 25 tiempos de secado, una muestra aleatoria de tamaño 25 de una distribución normal con media μ y desviación estándar $\sigma = 9$ (aunque elevar en la práctica un valor conocido de σ generalmente es poco realista, ello simplifica considerablemente el cálculo de probabilidades de error tipo II). La media muestral $\overline{X}$ del tiempo de secado tiene entonces una distribución normal con valor esperado $\mu_{\overline{X}} = \mu$ y desviación estándar $\sigma_{\overline{X}} = \sigma/\sqrt{n} = 9/\sqrt{25} = 1.8$. Cuando H_0 es verdadera esperamos que $\overline{X}$ sea 75; una media muestral mucho menor contradiría fuertemente a H_0 y apoyaría a H_a.

Nuestro estadístico de prueba será $\overline{X}$ estandarizado, suponiendo que H_0 es verdadera:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\overline{X} - 75}{1.8}$$

La distribución muestral de $\overline{X}$ es normal porque la distribución de la población es normal, lo que implica que Z tiene una distribución normal estándar cuando H_0 es verdadera (en contraste con los ejemplos 8.2 y 8.3, aquí estamos suponiendo y utilizando un valor conocido de σ).

Considere realizar la prueba utilizando un nivel de significancia de .01, es decir, H_0 se rechaza si el valor $P \leq 01$. Para un valor dado $\overline{x}$ de la media muestral y el correspondiente valor calculado z, la forma de la hipótesis alternativa implica que los valores que más contradicen H_0 son valores inferiores a $\overline{x}$ y, en consecuencia, los valores del estadístico de prueba que son menores de z. Por tanto, el valor P es

$$\begin{aligned}
\text{valor } P &= P(\text{la obtención de un valor de } Z \text{ al menos tan contradictorio} \\
&\quad \text{a } H_0 \text{ como } z \text{ cuando } H_0 \text{ es verdadera}) \\
&= P(Z \leq z \text{ cuando } H_0 \text{ es verdadera}) \\
&= \text{área bajo la curva normal estándar a la izquierda de } z \\
&= \Phi(z)
\end{aligned}$$

Así, el valor P será igual a .01 cuando z captura el área de cola inferior .01 bajo la curva z. De la tabla A.3 del apéndice se tiene que esto ocurre cuando $z = -2.33$ [verificar que $\Phi(-2.33) = .01$]. Como se muestra en la figura 8.2 el valor P, por tanto, será a lo más .01 cuando $z \leq -2.33$. Esto a su vez implica que

$$\begin{aligned}
P(\text{error tipo I}) &= P(\text{se rechaza } H_0 \text{ cuando } H_0 \text{ es verdadera}) \\
&= P(\text{valor } P < .01 \text{ cuando } H_0 \text{ es verdadera}) \\
&= P(Z \leq -2.33 \text{ cuando } Z \text{ tiene una distribución estándar normal}) \\
&= .01
\end{aligned}$$

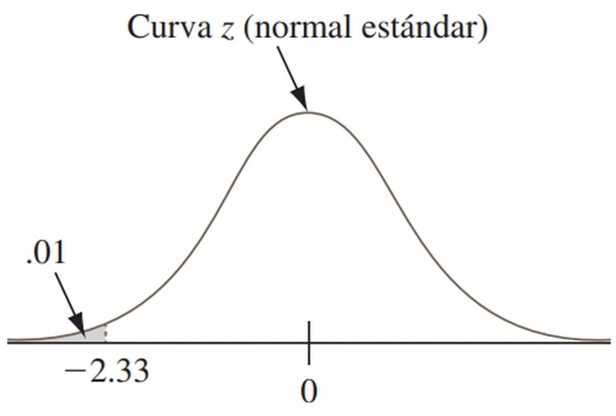


Figura 8.2 Valor $P \leq .01$ si y sólo si $z \leq -2.33$

Como en el ejemplo anterior, el nivel de significancia elegido α es, de hecho, la probabilidad de cometer un error tipo I. Si el procedimiento de prueba anterior [estadístico de prueba Z, rechaza H_0 si el valor $P \leq .01$] es utilizado en varias ocasiones, muestra tras muestra, a largo plazo la hipótesis nula será incorrectamente rechazada sólo 1% de las veces. Nuestra

propuesta de procedimiento de prueba ofrece una excelente protección ante la posibilidad de cometer un error tipo I. Observe que si se considera la hipótesis nula más realista H_0: $\mu \geq 75$, se puede demostrar que P(error tipo I) $\leq .01$; el máximo se produce en el valor nulo 75, que es el límite entre H_0 y H_a.

El cálculo de P(error tipo I) en este ejemplo se basó en el hecho de que valor $P \leq .01$ es equivalente a $Z = (\overline{X} - 75)/1.8 \leq -2.33$. Al multiplicar ambos lados de esta última desigualdad por 1.8 y luego sumarle 75 a ambos lados se obtiene $\overline{X} \leq 70.8$. Por tanto, rechazar H_0 en el nivel de significancia .01 [si el valor $P \leq .01$] es equivalente a rechazar H_0 si $\overline{X} \leq 70.8$; H_0 no se rechazará si $\overline{X} > 70.8$. La probabilidad de cometer un error tipo II cuando $\mu = 72$ es ahora

$$\begin{aligned}\beta(72) &= P(\text{no se rechaza } H_0 \text{ cuando } \mu = 72)\\ &= P(\overline{X} > 70.8 \text{ cuando } \overline{X} \sim \text{normal con } \mu_{\overline{X}} = 72, \sigma_{\overline{X}} = 1.8)\\ &= 1 - \Phi[(70.8 - 72)/1.8] = 1 - \Phi(-.67) = 1 - .2514 = .7486\end{aligned}$$

Esta es una probabilidad de error muy grande. Si la prueba con $\alpha = .01$ se utiliza repetidamente, muestra tras muestra, y el valor real de μ es 72, en casi el 75% de los casos no se rechazará la hipótesis nula. La dificultad es que 72 está demasiado cerca del valor nulo para una prueba con este tamaño de muestra y el valor α tiene una buena oportunidad de detectar este alejamiento de H_0.

Cálculos similares dan

$$\beta(70) = 1 = \Phi\,[(70.8 = 70)/1.8] = .3300,\ \beta(67) = .0174$$

Estas probabilidades de error tipo II son mucho menores que $\beta(72)$, ya que 70 y 67 están más alejados del valor nulo que 72. La figura 8.3 ilustra α y las primeras probabilidades de error tipo II.

Figura 8.3 α y β ilustradas para el ejemplo 8.5: (a) la distribución de $\overline{X}$ cuando $\mu = 75$ (H_0 verdadera); (b) la distribución de $\overline{X}$ cuando $\mu = 72$ (H_0 falsa); (c) la distribución de $\overline{X}$ cuando $\mu = 70$ (H_0 falsa)

Los investigadores podrían considerar $\mu = 72$ como un importante alejamiento de la hipótesis nula, en cuyo caso $\beta(72) = .7486$ es intolerablemente grande. Considere cambiar el nivel de significancia (probabilidad de error tipo I de .01 a .05; es decir, ahora se propone rechazar H_0 si el valor $P \leq 05$. La tabla A.3 del apéndice muestra que el valor crítico de z, -1.645 captura un área de curva z de cola inferior de 0.05. Usando el mismo razonamiento que se ha aplicado antes cuando $\alpha = .01$, rechazar a H_0 cuando el valor $P \leq .05$ equivale a rechazar cuando $Z \leq -1.645$. Esto a su vez es equivalente a rechazar cuando $\overline{X} \leq 72$ (observe que aumentó el nivel de significancia y se hizo para facilitar que la hipótesis nula sea rechazada). Procediendo como en los cálculos anteriores, encontramos que

$$\beta(72) = .5, \quad \beta\,(70) = .1335, \quad \beta(67) = .0027$$

Todas estas probabilidades de error tipo II son más pequeñas que sus contrapartes para la prueba con $\alpha = .01$. Aquí el mensaje importante es que si se puede tolerar un nivel de significancia más grande (probabilidad de error tipo I), entonces la prueba resultante tendrá mejor capacidad de detección cuando la hipótesis nula es falsa. ■

No es casualidad que en los dos ejemplos anteriores, el nivel de significancia α resulte ser la probabilidad de un error tipo I.

PROPOSICIÓN

El procedimiento de prueba rechaza H_0 si el valor $P \leq \alpha$ y en caso contrario no rechaza H_0 si $P(\text{error tipo I}) = \alpha$. Es decir, el nivel de significancia empleado en el procedimiento de prueba es la probabilidad de que se cometa un error tipo I.

Al final de la sección se esboza una prueba parcial de esta proposición.

La relación inversa entre los niveles de significancia α y las probabilidades de error tipo II en el ejemplo 8.5 se pueden generalizar de la siguiente manera:

PROPOSICIÓN

Supóngase que se selecciona un experimento o procedimiento de muestreo, se especifica un tamaño de muestra y se elige un estadístico de prueba. Luego se aumenta el nivel de significancia α; es decir, al emplear una probabilidad más grande de error tipo I se obtiene un valor menor de β para cualquier valor particular del parámetro consistente con H_a.

Este resultado es intuitivamente obvio ya que cuando se aumenta α, es más probable que se tenga el valor $P \leq \alpha$ y, por tanto, es menos probable que el valor $P > \alpha$.

La proposición implica que una vez que se ha fijado el estadístico de prueba y n, no es posible hacer que α y cualquier valor de β que podrían ser de interés fueran arbitrariamente pequeños. Decidir sobre un nivel de significancia apropiado implica tener α y β pequeños. En el ejemplo 8.5 la probabilidad de error tipo II para una prueba con $\alpha = .01$ era absolutamente grande para un valor de μ cercano al valor de H_0. Una estrategia que a veces se utiliza en la práctica (pero quizás no lo suficiente) es especificar α y β para algún valor alternativo del parámetro que es de particular importancia para el investigador. Entonces se puede determinar el tamaño de muestra n que satisfaga estas dos condiciones. Por ejemplo, el artículo **"Cognitive Treatment of Illness Perceptions in Patients with Chronic Low Back Pain: A Randomized Controlled Trial" (*Physical Therapy*, 2013: 435–438)** contiene la siguiente frase: "Una disminución entre 18 y 24 en el puntaje del PSC (cuestionario de quejas especificas del paciente) se determinó como un cambio clínicamente relevante en pacientes con dolor de espalda baja. El tamaño de muestra se calculó con un cambio mínimo de 18, una α bilateral de 0.05, un $1 - \beta$ de .90

y una desviación estándar de 26.01... El cálculo de tamaño simple obtenido en un total de 135 participantes". Considere esas determinaciones de tamaño simple para las siguientes secciones y capítulos.

En la práctica, generalmente las hipótesis de interés se pueden formular de manera que un error tipo I sea más grave que un error tipo II. El método usado por la mayoría de los estadísticos es reflexionar acerca de la gravedad relativa de un error tipo I comparado con un error tipo II y luego usar el mayor valor de α que se pueda tolerar. Esto equivale a hacer lo mejor que se puede respecto a la probabilidad de error tipo II, asegurándose de que la probabilidad de error tipo I es suficientemente pequeña. Por ejemplo, si $\alpha = .05$ es el mayor nivel de significancia que se puede tolerar, sería mejor utilizarlo en vez de utilizar $\alpha = .01$, ya que todas las β para la última α serán más pequeñas que para esta. Como se mencionó anteriormente, los niveles de significancia más frecuentemente empleados son $\alpha = 05$, .01 y .001, .10. Sin embargo, hay excepciones. Por ejemplo en física de partículas: de acuerdo con el artículo **"Discovery or Fluke: Statistics in Particle Physics" (*Physics Today*, julio de 2012: 45–50)**, "la elección habitual de alfa es 3×10^{-7}, correspondiente a 5σ de una distribución gaussiana [es decir, normal] de H_0. [...] ¿Por qué tan estrictos? Por un lado, la historia reciente ofrece muchos ejemplos que deben tratarse con precaución para las excitantes señales 3σ y 4σ que desaparecen cuando se obtienen más datos".

Si la distribución del estadístico de prueba es continua (por ejemplo, si el estadístico de prueba tiene la distribución normal estándar o una distribución particular t cuando H_0 es verdadera), entonces se puede emplear cualquier nivel de significancia α entre 0 y 1; por ejemplo, rechazar H_0 si el valor $P \leq .035$. Sin embargo, este no es necesariamente el caso si la distribución del estadístico de prueba es discreta. Como ejemplo, considere de nuevo el caso del diseño del parachoques del ejemplo 8.4 en el cual las hipótesis de interés fueron H_0: $p = .25$ versus H_a: $p > .25$. El estadístico de prueba X tenía una distribución binomial y

$$\text{valor } P = P(X \geq x \text{ cuando } n = 20 \text{ y } p = .25)$$

La tabla A.1 del apéndice muestra que en este caso $P(X \geq 8) = .102$ y $P(\mathrm{X} \geq 9) = .041$. Por tanto, si se quiere que el nivel de significancia sea .05, el nivel más cercano posible es. 041: H_0 se rechaza si el valor $P \leq .041$.

Algunos otros comentarios acerca del valor *P*

Supongamos que el valor P se calcula de .038. Entonces se debe rechazar la hipótesis nula si $.038 \leq \alpha$ y en caso contrario no se rechaza. Por tanto, H_0 será rechazada si $\alpha = .10$ o .05, pero no si $\alpha = .01$ o .001. De hecho, H_0 sería rechazada para algún nivel de significancia que fuera al menos igual a .038, pero no para cualquier nivel menor de .038. Por esta razón el valor P se refiere a menudo como el **nivel de significancia observado** (OSL, por sus siglas en inglés): es el valor mínimo de α para el cual se puede rechazar H_0.

Un aspecto muy atractivo para fundamentar una conclusión de una prueba de hipótesis es el análisis del valor P de la prueba ya que todos los paquetes de software estadístico calculan y utilizan el valor P para cualquiera de los procedimientos de prueba utilizados. Una vez que el valor P está disponible el investigador necesita comparar solamente con el nivel de significancia seleccionado para decidir si se debe rechazar a H_0. Esto explica cómo un investigador puede olvidar la definición de un valor P y ¡aún así usarlo para obtener una conclusión!

A veces se presenta una situación en la que varias personas están interesadas en el mismo par de hipótesis de prueba, pero tal vez desean utilizar niveles de significancia diferentes. Por ejemplo, supóngase que se sabe que el verdadero tiempo promedio para aliviar el dolor del analgésico de mayor venta es de 15 minutos. Se ha desarrollado una nueva fórmula que se espera que reduzca este tiempo. Las hipótesis relevantes son H_0: $\mu = 15$ versus H_a: $\mu < 15$, donde μ es el tiempo promedio de alivio verdadero usando la nueva fórmula. Puede sentirse bastante satisfecho con el producto actual y, por tanto, deseará utilizar un

nivel de significancia pequeño como .01. Por otro lado, con un error tipo I se estará menos satisfecho y, por tanto, más dispuesto a cambiar, en cuyo caso puede ser razonable a un nivel mayor tal como .10. Al usar α más grande, se le está dando menos protección a H_0 que lo que se le da. Una vez que se cuenta con el valor P cada quien puede emplear su propio nivel de significancia independientemente del que esté usando otra persona. Así cuando las revistas médicas informan de un valor P, no es obligatorio un nivel de significancia; en cambio, se deja al lector seleccionar su propio nivel y concluir en consecuencia. Además, si alguien realiza la prueba y simplemente reporta que se rechazó H_0 al nivel de significancia .05 sin revelar el valor de P, entonces cualquier persona que desee utilizar un nivel de significancia más pequeño no sabría qué conclusión es adecuada. Esta persona habría impuesto su propio nivel de significancia sobre el de las otras personas que toman decisiones. Contar con el valor P impide esta imposición.

Un punto final acerca de la utilidad del valor P es que permite distinguir entre una llamada cercana y una muy clara conclusión en cualquier nivel de significancia dado. Por ejemplo, supongamos que le dicen que se rechazó H_0 en el nivel de significancia .05. Esta conclusión es consistente con un valor P de .0498 y también con un valor P de .0003, puesto que en cada caso el valor $P \leq \alpha = .05$. Pero por supuesto con un valor P de .0498 la hipótesis nula es difícilmente rechazada, mientras que con el valor $P = .0003$, la hipótesis nula es por mucho rechazada. Así que siempre es preferible informar el valor P en lugar de simplemente indicar la conclusión en un nivel de significancia dado.

Lamentablemente la mayoría de los artículos de revistas que contienen resúmenes de los análisis de pruebas de hipótesis no reportan valores P exactos. En lugar de ello lo que usualmente se presenta es uno de los siguientes enunciados: "$P < .05$" si el valor P está entre .05 y .01, "$P < .01$" si está entre .01 y .001, y "$P < .001$" si el valor P es menor a .001. En un resumen tabular, usted verá a menudo *, **, y *** correspondientes a estos tres casos.

Prueba de la proposición iniciando con P(error tipo I) = nivel de significancia de α:

Se denota al estadístico de prueba Y y sea $F(\cdot)$ la función de distribución acumulada de Y cuando H_0 es verdadera (por ejemplo, F sería la función de distribución acumulada normal estándar Φ o la función de distribución acumulada de una variable aleatoria con una distribución t con algunos números específicos de función de distribución). Supongamos que la distribución de Y es continua en algún intervalo (a menudo infinito en magnitud), que F es una función estrictamente creciente en este intervalo. Entonces F tiene una función inversa bien definida F^{-1}. Consideremos el caso en el que sólo los valores del estadístico de prueba más pequeño que el valor calculado y son más contradictorios a H_0 que y mismo. Esto implica que

$$\text{Valor } P = P(\text{obtener un valor del estadístico de prueba al menos tan contradictorio a } H_0 \text{ cuando } H_0 \text{ es verdadera}) = F(y)$$

Ahora antes de que los datos de la muestra estén disponibles el valor del estadístico de prueba es una variable aleatoria Y, y entonces el valor P mismo es una variable aleatoria. Así

$$P(\text{error tipo I}) = P(\text{valor } P \leq \alpha \text{ cuando } H_0 \text{ es verdadera}) = P(F(Y) \leq \alpha)$$

Apliquemos ahora F^{-1} a ambos lados de la igualdad dentro del último conjunto de paréntesis:

$$P(\text{error de tipo I}) = P[F^{-1}(F(Y)) \leq F^{-1}(\alpha)] = P(Y \leq F^{-1}(\alpha)) = F(F^{-1}(\alpha)) = \alpha$$

El argumento en el caso en el que únicamente los valores de Y mayores que y son más contradictorios a H_0 que y mismo es similar a lo que hemos demostrado. El caso en el que los valores Y grandes o pequeños son más contradictorios a H_0 como a y mismo es un poco más complicado. Y cuando el estadístico de prueba tiene una distribución discreta, la función inversa F^{-1} no se define únicamente, por lo que hay que tener un cuidado adicional al hacer el argumento válido.

EJERCICIOS Sección 8.1 (1–14)

1. Por cada una de las siguientes aseveraciones exprese si es una hipótesis estadística legítima y por qué:

a. H: $\sigma > 100$ **b.** H: $\tilde{x} = 45$

c. H: $s \leq .20$ **d.** H: $\sigma_1/\sigma_2 < 1$

e. H: $\bar{X} - \bar{Y} = 5$

f. H: $\lambda \leq .01$, donde λ es el parámetro de una distribución exponencial utilizada para modelar la vida útil de un componente

2. Para los siguientes pares de aseveraciones, indique cuáles no satisfacen las reglas para establecer hipótesis y por qué (los subíndices 1 y 2 diferencian entre las cantidades para dos poblaciones o muestras diferentes).

a. H_0: $\mu = 100$, H_a: $\mu > 100$

b. H_0: $\sigma = 20$, H_a: $\sigma \leq 20$

c. H_0: $p \neq .25$, H_a: $p = .25$

d. H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 25$, H_a: $\mu_1 - \mu_2 > 100$

e. H_0: $S_1^2 = S_2^2$, H_a: $S_1^2 \neq S_2^2$

f. H_0: $\mu = 120$, H_a: $\mu = 150$

g. H_0: $\sigma_1/\sigma_2 = 1$, H_a: $\sigma_1/\sigma_2 \neq 1$

h. H_0: $p_1 - p_2 = -.1$, H_a: $p_1 - p_2 < -.1$

3. ¿Para qué valores p dados sería rechazada la hipótesis nula al realizar una prueba de nivel .05?

a. .001 **b.** .021 **c.** .078

d. .047 **e.** .148

4. Se dan pares de valores P y niveles de significancia, α. Para cada par, indique si el valor P observado llevaría al rechazo de H_0 en el nivel de significancia dado.

a. *Valor* $P = .084$, $\alpha = .05$

b. *Valor* $P = .003$, $\alpha = .001$

c. *Valor* $P = .498$, $\alpha = .05$

d. *Valor* $P = .084$, $\alpha = .10$

e. *Valor* $P = .039$, $\alpha = .01$

f. *Valor* $P = .218$, $\alpha = .10$

5. Para determinar si las soldaduras de las tuberías en una planta de energía nuclear satisfacen las especificaciones, se selecciona una muestra aleatoria de soldaduras y se realizan pruebas en cada una de ellas. La resistencia de la soldadura se mide como la fuerza requerida para romperla. Suponga que las especificaciones indican que la resistencia media de las soldaduras debe exceder de 100 lb/pulg^2; el equipo de inspección decide probar H_0: $\mu = 100$ versus H_a: $\mu > 100$. Explique por qué podría ser preferible utilizar esta H_a en lugar de $\mu < 100$.

6. Sea μ el nivel de radiactividad promedio verdadero (*picocuries* por litro). Se considera que el valor 5 pCi/L es la línea divisoria entre agua segura e insegura. ¿Recomendaría probar H_0: $\mu = 5$ versus H_a: $\mu > 5$ o probar H_0: $\mu = 5$ versus H_a: $\mu < 5$? Explique su razonamiento [*Sugerencia*: Piense en las consecuencias de un error tipo I o un error tipo II con cada posibilidad.]

7. Antes de aprobar la compra de un gran pedido de fundas de polietileno para un tipo particular de cable de energía submarino relleno de aceite a alta presión, una compañía desea contar con evidencia concluyente de que la desviación estándar verdadera del espesor de la funda es de menos de .05 mm. ¿Qué hipótesis deberán ser probadas y por qué? En este contexto, ¿cuáles son los errores tipo I y tipo II?

8. Muchas casas viejas cuentan con sistemas eléctricos que utilizan fusibles en lugar de interruptores de circuito. Un fabricante de fusibles de 40 amp desea asegurarse de que el amperaje medio al cual se queman sus fusibles es en realidad de 40. Si el amperaje medio es menor que 40 los clientes se quejarán porque los fusibles tienen que ser reemplazados con demasiada frecuencia. Si el amperaje medio es de más de 40, el fabricante podría ser responsable de los daños que sufra un sistema eléctrico a causa del funcionamiento defectuoso de los fusibles. Para verificar el amperaje de los fusibles se selecciona e inspecciona una muestra de fusibles. Si tuviera que realizarse una prueba de hipótesis con los datos resultantes, ¿qué hipótesis nula y qué hipótesis alternativa serían de interés para el fabricante? Describa los errores tipos I y tipo II en el contexto de este problema.

9. Se toman muestras de agua utilizada para enfriamiento al momento de ser descargada por una planta de energía en un río. Se ha determinado que en tanto la temperatura media del agua descargada sea cuando mucho de 150°F no habrá efectos negativos en el ecosistema del río. Para investigar si la planta cumple con los reglamentos que prohíben una temperatura media por encima de 150° del agua de descarga, se tomarán al azar 50 muestras de agua y se registrará la temperatura de cada una. Los datos resultantes se utilizarán para probar la hipótesis H_0: $\mu = 150°$ versus H_a: $\mu > 150°$. En el contexto de esta situación, describa los errores de tipo I y de tipo II. ¿Qué tipo de error consideraría de mayor importancia? Explique.

10. Un tipo regular de laminado está siendo utilizado por un fabricante de tarjetas de circuito. Un laminado especial ha sido desarrollado para reducir la combadura. El laminado regular será utilizado en una muestra de especímenes y el laminado especial en otra muestra y se determinará entonces la cantidad de combadura en cada espécimen. El fabricante cambiará entonces al laminado especial sólo si puede demostrar que la cantidad de combadura promedio verdadera de dicho laminado es menor que la del laminado regular. Formule las hipótesis pertinentes y describa los errores de tipo I y de tipo II en el contexto de esta situación.

11. Dos compañías diferentes han solicitado proporcionar el servicio de televisión por cable en una región. Sea p la proporción de todos los suscriptores potenciales que favorecen a la primera compañía sobre la segunda. Considere probar H_0: $p = .5$ contra H_a: $p \neq .5$ basado en una muestra aleatoria de 25 individuos. Sea el estadístico de la prueba X el número de suscriptores

en la muestra que favorecen a la primera compañía y x el valor observado de X.

a. En el contexto de este problema describa cuáles son los errores de tipo I y de tipo II.

b. Suponga que $x = 6$. ¿Cuáles son los valores de X al menos tan contradictorios a H_0 como este?

c. ¿Cuál es la distribución de probabilidad del estadístico de prueba X cuando H_0 es verdadera? Úsela para calcular el valor P cuando $x = 6$.

d. Si H_0 debe rechazarse cuando el valor $P \leq .044$, calcule la probabilidad de un error tipo II cuando $p = .4$, otra vez cuando $p = .3$ y también cuando $p = .6$ y $p = .7$. [*Sugerencia*: ¿A qué desigualdades que implican x es equivalente que el valor P $> .044$? (véase el ejemplo 8.4)]

e. ¿Concluiría, mediante el procedimiento de prueba del inciso d), que 6 de los 25 suscriptores contratarían a la compañía favorecida 1?

12. Una mezcla de cenizas combustibles pulverizadas y cemento Portland utilizada para rellenar con lechada deberá tener una resistencia a la compresión de más de 1300 kN/m^2. La mezcla no será utilizada a menos que la evidencia experimental indique concluyentemente que la especificación de resistencia ha sido satisfecha. Suponga que la resistencia a la compresión de especímenes de esta muestra está normalmente distribuida con $\sigma = 60$. Sea μ la resistencia a la compresión promedio verdadera.

a. ¿Cuáles son la hipótesis nula y la hipótesis alternativa apropiadas?

b. Sea $\overline{X}$ la resistencia a la compresión promedio muestral de $n = 10$ especímenes seleccionados al azar. Considere el procedimiento de prueba con el mismo estadístico de prueba $\overline{X}$ (no estandarizado). Si $\overline{x} = 1340$, ¿se debe rechazar H_0 usando un nivel de significancia de .01? [*Sugerencia*: ¿Cuál es la distribución de probabilidad del estadístico de prueba cuando H_0 es verdadera?]

c. ¿Cuál es la distribución de probabilidad del estadístico de prueba cuando $\mu = 1350$? Para una prueba con $\alpha = .01$, ¿cuál es la probabilidad de que la mezcla será juzgada insatisfactoria cuando en realidad $\mu = 1350$ (un error tipo II)?

13. La calibración de una báscula tiene que ser verificada pesando 25 veces un espécimen de prueba de 10 kg. Suponga que los resultados de diferentes pesadas son independientes entre sí y que el peso en cada ensayo está normalmente distribuido con $\sigma = .200$ kg. Sea μ la lectura de peso promedio verdadero en la báscula.

a. ¿Qué hipótesis deberá ponerse a prueba?

b. Con la media muestral μ como el estadístico de prueba, ¿cuál es el valor de P cuando $\overline{x} = 9.85$ y qué concluiría en el nivel de significancia .01?

c. Para una prueba con $\alpha = .01$, ¿cuál es la probabilidad de que la recalibración se considere innecesaria cuando en realidad $\mu = 10.1$? ¿Y cuando $\mu = 9.8$?

14. Se ha propuesto un nuevo diseño del sistema de frenos de un tipo de vehículo. Para el sistema actual, se sabe que la distancia de frenado promedio verdadera a 40 mph en condiciones específicas es de 120 pies. Se propone que el nuevo diseño sea instalado sólo si los datos muestrales indican fuertemente una reducción de la distancia de frenado promedio verdadera del nuevo diseño.

a. Defina el parámetro de interés y formule las hipótesis pertinentes.

b. Suponga que la distancia de frenado del nuevo sistema está normalmente distribuida con $\sigma = 10$. Sea $\overline{X}$ la distancia de frenado promedio de una muestra aleatoria de 36 observaciones. Cuales valores de $\overline{x}$ son más contradictorios a H_0 que 117.2, ¿cuál es el valor de P en este caso, y qué conclusión es apropiada si $\alpha = .10$?

c. Cuál es la probabilidad de que el nuevo diseño no sea implementado cuando su verdadera distancia media es en realidad 115 pies y se utiliza la prueba del inciso b)?

8.2 Pruebas de hipótesis *z* sobre una media de población

Recordemos de la sección anterior que se llegó a una conclusión en un análisis de prueba de hipótesis procediendo de la siguiente manera:

i. Calcular el valor de un estadístico de prueba apropiado.

ii. Luego determinar el valor P, la probabilidad, calculada suponiendo que la hipótesis nula H_0 es verdadera, observando un valor del estadístico de prueba al menos tan contradictorio a H_0 como el que resulta de los datos disponibles.

iii. Rechazar la hipótesis nula si el valor $P \leq \alpha$, donde α es el nivel de significancia especificado o solicitado, es decir, la probabilidad de que un error tipo I (rechazar H_0 cuando es verdadera); si el valor $P > \alpha$ no hay suficiente evidencia para justificar el rechazo de H_0 (esto todavía se considera factible).

La determinación del valor P depende de la distribución del estadístico de prueba cuando H_0 es verdadera. En esta sección describimos pruebas z para comprobación de hipótesis

sobre una media μ de población. "Prueba z", significa que el estadístico de prueba tiene al menos aproximadamente una distribución normal estándar cuando H_0 es verdadera. Entonces el valor P será un área de la curva z que depende de si la desigualdad en H_a es $>, <$ o $\neq$.

En el desarrollo de intervalos de confianza para μ en el capítulo 7, primero se considera el caso en que la distribución de la población es normal con σ conocida, después se relaja a la normalidad y con σ supuestamente conocida, cuando el tamaño de muestra n es grande y finalmente se describe el intervalo de confianza de la muestra t de la media de una población normal. En esta sección estudiamos los dos primeros casos y luego se presenta la prueba t de una muestra en la sección 8.3.

Una distribución de población normal con σ conocida

Aun cuando la suposición de que el valor de σ es conocido rara vez se cumple en la práctica; este caso proporciona un buen punto de partida debido a la facilidad con la que se pueden desarrollar los procedimientos generales y sus propiedades. La hipótesis nula en los tres casos propondrá que μ tiene un valor numérico particular, el *valor nulo*, que será denotado por μ_0. Sean $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de tamaño n de la población normal. Entonces la media muestral $\overline{X}$ tiene una distribución normal con valor esperado $\mu_{\overline{X}} = \mu$ y desviación estándar $\sigma_{\overline{X}} = \sigma/\sqrt{n}$. Cuando H_0 es verdadera $\mu_{\overline{X}} = \mu_0$. Considere ahora el estadístico Z obtenido estandarizando $\overline{X}$, dada la suposición de que H_0 es verdadera:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Al sustituir la media muestral calculada $\overline{x}$ se obtiene z, la distancia entre $\overline{x}$ y μ_0 expresada en "unidades de desviación estándar". Por ejemplo, si la hipótesis nula es H_0: $\mu = 100$, $\sigma_{\overline{X}} = \sigma/\sqrt{n} = 10/\sqrt{25} = 2.0$ y $\overline{x} = 103$, entonces el valor del estadístico de prueba es $z = (103 - 100)/2.0 = 1.5$. Es decir, el valor observado de $\overline{x}$ es 1.5 desviaciones estándar (de $\overline{X}$) más grande de lo que se espera que sea cuando H_0 es verdadera. El estadístico Z es una medida natural de la distancia entre $\overline{X}$, el estimador de μ, y su valor esperado cuando H_0 es verdadera. Si esta distancia es demasiado grande en una dirección consistente con H_a, hay pruebas sustanciales de que H_0 es falsa.

Suponga primero que la hipótesis alternativa tiene la forma H_a: $\mu > \mu_0$. Entonces un valor de $\overline{x}$ menor que μ_0 indudablemente no apoya a H_0. Tal $\overline{x}$ corresponde a un valor positivo grande de z. A su vez esto implica que cualquier valor calculado que *exceda* a z es más contradictorio a H_0 que z mismo. Se deduce que

$$\text{Valor } P = P(Z \geq z \text{ cuando } H_0 \text{ es verdadera})$$

Ahora, este es el punto clave: cuando H_0 es verdadera el estadístico de prueba Z tiene una distribución normal estándar, porque se creó Z estandarizando a $\overline{X}$ al suponer que H_0 es verdadera (es decir, restando μ_0). La implicación en este caso es que, el valor P es simplemente el área bajo la curva normal estándar a la derecha de z. Debido a esto la prueba es referida como de *cola superior*. Por ejemplo, en el párrafo anterior se calculó $z = 1.5$. Si en la hipótesis alternativa se tiene que H_a: $\mu > 100$, entonces el valor P = área debajo de la curva z a la derecha de $1.5 = 1 - \Phi(1.50) = .0668$. En el nivel de significancia .05 no podremos rechazar la hipótesis nula porque el valor P excede a α.

Ahora considere una hipótesis alternativa de la forma H_a: $\mu < \mu_0$. En este caso cualquier valor de la media muestral más pequeño que $\overline{x}$ es aún más contradictorio a la hipótesis nula. Así, cualquier valor del estadístico de prueba *más pequeño* que z calculado es más contradictorio a H_0 que z mismo. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\text{Valor } P &= P(Z \leq z \text{ cuando } H_0 \text{ es verdadera}) \\ &= \text{área bajo la curva normal a la izquierda de } z = \Phi(z)\end{aligned}$$

La prueba, en este caso, habitualmente se conoce como de *cola inferior*. Si, por ejemplo, la hipótesis alternativa es H_a: $\mu < 100$ y $z = -2.75$, entonces el valor $P = \Phi(-2.75) = .0030$. Esto es lo suficientemente pequeño como para justificar el rechazo de H_0 con un nivel de significancia de .05 o .01, pero no .001.

La tercera alternativa, H_a: $\mu \neq \mu_0$, requiere pensar con un poco más de cuidado. Supongamos, por ejemplo, que el valor nulo es 100 y que $\bar{x} = 103$, lo que resulta en $z = 1.5$. Entonces cualquier valor de $\bar{x}$ superior a 103 es más contradictorio a H_0 que 103. Así cualquier z superior a 1.5 es, asimismo, más contradictorio a H_0 que lo que es 1.5. Sin embargo, 97 es tan contradictorio a la hipótesis nula como lo es 103, ya que hay la misma distancia por debajo de 100 que lo que 103 está arriba de 100. Así $z = -1.5$ es tan contradictorio a H_0 como lo es $z = 1.5$. Por tanto, cualquier z menor que -1.5 es más contradictorio a H_0 que lo que es 1.5 o -1.5. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\text{Valor } P &= P(\text{sea } Z \geq 1.5 \text{ o } \leq -1.5 \text{ cuando } H_0 \text{ es verdadera})\\ &= (\text{área bajo la curva } z \text{ a la derecha de } 1.5)\\ &\quad + (\text{área bajo la curva } z \text{ a la izquierda de } -1.5)\\ &= 1 - \Phi(1.5) + \Phi(-1.5) = 2[1 - \Phi(1.5)]\\ &= 2(.0668) = .1336\end{aligned}$$

Este sería el valor P si $\bar{x} = 97$ lo que da como resultado en $z = -1.5$. El punto importante es que debido a la desigualdad $\neq$ en H_a, el valor P es la suma de un área de cola superior y un área de cola inferior. Por simetría de la distribución normal estándar esto se convierte en dos veces el área capturada en la cola en la que se encuentra z. En forma equivalente, es dos veces el área capturada en la cola superior por $|z|$, es decir, $2[1 - \Phi(|z|)]$. Es natural referirse a esta prueba como de *dos colas*, ya que los valores de z se alejan hacia fuera en cualquier cola de la curva z para rechazar H_0.

El procedimiento de prueba se resume en el siguiente cuadro, y el valor P para cada una de las posibles hipótesis alternativas se ilustra en la figura 8.4.

1. **Prueba de cola superior**
   H_a tiene la desigualdad >

2. **Prueba de cola inferior**
   H_a tiene la desigualdad <

3. **Prueba de dos colas**
   H_a tiene la desigualdad $\neq$

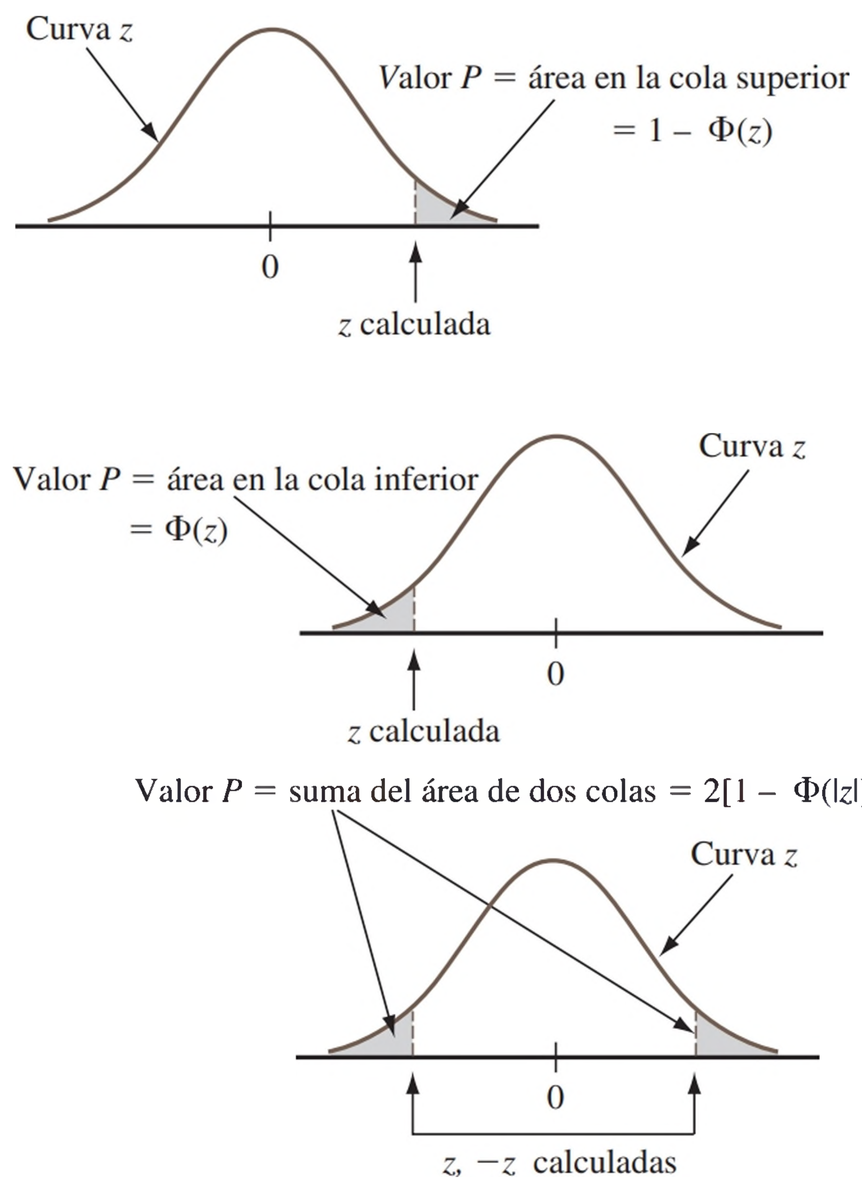


Figura 8.4 Determinación del valor P para una prueba z

Hipótesis nula H_0: $\mu = \mu_0$

Estadístico de prueba: $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

Hipótesis alternativa	Determinación del valor *P*
H_a: $\mu > \mu_0$	Área bajo la curva normal estándar a la derecha de z
H_a: $\mu < \mu_0$	Área bajo la curva normal estándar a la izquierda de z
H_a: $\mu \neq \mu_0$	$2 \cdot$ (Área bajo la curva normal estándar a la derecha de $\lvert z \rvert$)

Suposiciones: Una distribución de población normal con σ de valor conocido.

Se recomienda utilizar la siguiente secuencia de pasos cuando se prueben hipótesis respecto a un parámetro. La factibilidad de cualquier suposición fundamenta el uso del procedimiento de prueba seleccionado que, por supuesto, se debe comprobar antes de realizar la prueba.

1. Identificar el parámetro de interés y describirlo en el contexto de la situación del problema.
2. Determinar el valor nulo y formular la hipótesis nula.
3. Formular la hipótesis alternativa apropiada
4. Dar la fórmula para el valor calculado del estadístico de prueba (sustituyendo el valor nulo y los valores conocidos de cualesquiera otros parámetros, pero *no* aquellos de cualesquiera cantidades basadas en una muestra).
5. Calcular cualquier cantidad muestral necesaria, sustituir en la fórmula para el valor estadístico de prueba y calcular dicho valor.
6. Determinar el valor *P*.
7. Comparar el nivel de significancia seleccionado o deseado con el valor *P* para decidir si H_0 debe ser rechazada y expresar esta conclusión en el contexto del problema.

La formulación de hipótesis (pasos 2 y 3) deberá ser realizada antes de examinar los datos, y se debe elegir el nivel de significancia α antes de determinar el valor *P*.

EJEMPLO 8.6 Un fabricante de sistemas rociadores utilizados como protección contra incendios en edificios de oficinas afirma que la temperatura de activación del sistema promedio verdadera es de 130°. Una muestra de $n = 9$ sistemas, cuando se somete a prueba, da una temperatura de activación promedio muestral de 131.08°F. Si la distribución de los tiempos de activación es normal con desviación estándar de 1.5°F, ¿contradicen los datos la afirmación del fabricante a un nivel de significancia $\alpha = .01$?

1. Parámetro de interés: μ = temperatura de activación promedio verdadera.
2. Hipótesis nula: H_0: $\mu = 130$ (valor nulo $= \mu_0 = 130$).
3. Hipótesis alternativa: H_a: $\mu \neq 130$ (un alejamiento del valor declarado en *una u otra* dirección es de interés).
4. Valor del estadístico de prueba:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x} - 130}{1.5/\sqrt{n}}$$

5. Sustituyendo $n = 9$ y $\bar{x} = 131.08$,

$$z = \frac{131.08 - 130}{1.5/\sqrt{9}} = \frac{1.08}{.5} = 2.16$$

Es decir, la media muestral observada está a un poco más de 2 desviaciones estándar arriba del valor que se esperaría si H_0 fuera verdadera.

6. La desigualdad en H_a implica que la prueba es de dos colas, por lo que el valor P da como resultado la duplicación del área capturada de la cola:

$$\text{Valor } P = 2[1 - \Phi(2.16)] = 2(.0154) = .0308$$

7. Ya que el valor $P = .0308 > .01 = \alpha$, H_0 no se puede rechazar al nivel de significancia .01. Los datos no dan fuerte apoyo a la afirmación de que el promedio verdadero difiere del valor de diseño de 130. ■

β y determinación del tamaño de la muestra Las pruebas z con σ conocida se encuentran entre las pocas pruebas en estadística para las cuales existen fórmulas simples disponibles para β, la probabilidad de error de tipo II. Considere en primer lugar la alternativa H_a: $\mu > \mu_0$. La hipótesis nula se rechaza si el valor $P \leq \alpha$, y el valor P es el área bajo la curva normal estándar a la derecha de z. Supóngase que $\alpha = .05$. El valor crítico de z que captura un área de cola superior de 0.05 es $z_{.05} = 1.645$ (busque un área acumulada de .95 en la tabla A.3). Así, si el valor del estadístico de prueba calculado z es menor que 1.645, el área a la derecha de z será mayor que .05 y entonces la hipótesis nula *no* se rechazará. Ahora, se sustituye $(\bar{x} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n})$ en lugar de z en la desigualdad, $z < 1.645$ y se maneja algebraicamente para despejar $\bar{x}$ a la izquierda (se multiplican ambos lados por $\sigma/\sqrt{n}$ y luego se suma μ_0 a ambos lados). Esto da la desigualdad equivalente $\bar{x} < \mu_0 + z_\alpha \cdot \sigma/\sqrt{n}$. Ahora sea μ' un valor particular de μ que excede el valor nulo μ_0. Entonces,

$$\begin{aligned}
\beta(\mu') &= P(H_0 \text{ no se rechaza cuando } \mu = \mu') \\
&= P(\bar{X} < \mu_0 + z_\alpha \cdot \sigma/\sqrt{n} \text{ cuando } \mu = \mu') \\
&= P\left(\frac{\bar{X} - \mu'}{\sigma/\sqrt{n}} < z_\alpha + \frac{\mu_0 - \mu'}{\sigma/\sqrt{n}} \text{ cuando } \mu = \mu'\right) \\
&= \Phi\left(z_\alpha + \frac{\mu_0 - \mu'}{\sigma/\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

Conforme μ' aumenta, $\mu_0 - \mu'$ se convierte más negativo, por lo que $\beta(\mu')$ será pequeño cuando μ' supere μ_0 (porque el valor en que se evalúa Φ será muy negativo). Las probabilidades de error para las pruebas de menor cola y dos colas se derivan de manera análoga.

Si σ es grande la probabilidad de un error tipo II puede ser grande con un valor alternativo de μ' que sea de interés particular para un investigador. Suponga que se fija σ y que también se especifica β para tal valor alternativo. En el ejemplo de los sistemas rociadores, los funcionarios de la compañía podrían considerar a $\mu' = 132$ como un alejamiento muy sustancial de H_0: $\mu = 130$ y desear, por consiguiente, $\beta(132) = .10$ además de $\alpha = .01$. Más generalmente, considere las dos restricciones $P(\text{error de tipo I}) = \alpha$ y $\beta(\mu') = \beta$ para α, μ' y β específicas. Entonces para una prueba de cola superior, el tamaño de la muestra n debe ser elegido para satisfacer

$$\Phi\left(z_\alpha + \frac{\mu_0 - \mu'}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \beta$$

Esto implica que

$$-z_\beta = \begin{array}{l}\text{valor crítico } z \text{ que captura} \\ \text{el área de cola inferior } \beta\end{array} = z_\alpha + \frac{\mu_0 - \mu'}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Es fácil resolver esta ecuación para la n deseada. Un argumento paralelo da el tamaño de muestra necesario para las pruebas de cola inferior y de dos colas, tal como se resume en el siguiente recuadro.

Hipótesis alternativa	Probabilidad de error de tipo II para una prueba de nivel α
$H_a: \mu > \mu_0$	$\Phi\left(z_\alpha + \dfrac{\mu_0 - \mu'}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$
$H_a: \mu < \mu_0$	$1 - \Phi\left(-z_\alpha + \dfrac{\mu_0 - \mu'}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$
$H_a: \mu \neq \mu_0$	$\Phi\left(z_{\alpha/2} + \dfrac{\mu_0 - \mu'}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(-z_{\alpha/2} + \dfrac{\mu_0 - \mu'}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$

donde $\Phi(z)$ = función de distribución acumulada normal estándar.

El tamaño de la muestra n por el cual una prueba de nivel α también tiene $\beta(\mu') = \beta$ con el valor alternativo μ' es:

$$n = \begin{cases} \left[\dfrac{\sigma(z_\alpha + z_\beta)}{\mu_0 - \mu'}\right]^2 & \text{prueba para una cola (superior o inferior)} \\ \left[\dfrac{\sigma(z_{\alpha/2} + z_\beta)}{\mu_0 - \mu'}\right]^2 & \text{para una prueba de dos colas (una solución aproximada)} \end{cases}$$

EJEMPLO 8.7 Sea μ la vida promedio verdadera de la banda de rodamiento de un cierto tipo de neumático. Considere poner a prueba H_0: $\mu = 30\,000$ versus H_a: $\mu > 30\,000$ basado en un tamaño de muestra $n = 16$ de una distribución de población normal con $\sigma = 1500$. Una prueba con $\alpha = .01$ requiere $z_\alpha = z_{.01} = 2.33$. La probabilidad de cometer un error de tipo II cuando $\mu = 31\,000$ es

$$\beta(31\,000) = \Phi\left(2.33 + \frac{30\,000 - 31\,000}{1500/\sqrt{16}}\right) = \Phi(-.34) = .3669$$

Puesto que $z_{.1} = 1.28$, la exigencia de que el nivel de prueba .01 también tenga $\beta(31\,000) = .1$ requiere

$$n = \left[\frac{1500(2.33 + 1.28)}{30\,000 - 31\,000}\right]^2 = (-5.42)^2 = 29.32$$

El tamaño de la muestra debe ser un entero, por tanto se deberán utilizar $n = 30$ neumáticos. ■

Pruebas con muestras grandes

Cuando el tamaño de la muestra es grande, las pruebas z anteriores son fáciles de modificar para dar procedimientos de prueba válidos sin requerir una distribución de población normal o una σ conocida. El resultado clave se utilizó en el capítulo 7 para justificar intervalos de confianza para una muestra grande: una n grande implica que la variable estandarizada

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

tiene *aproximadamente* una distribución normal estándar. La sustitución del valor nulo μ_0 en lugar de μ da el estadístico de prueba

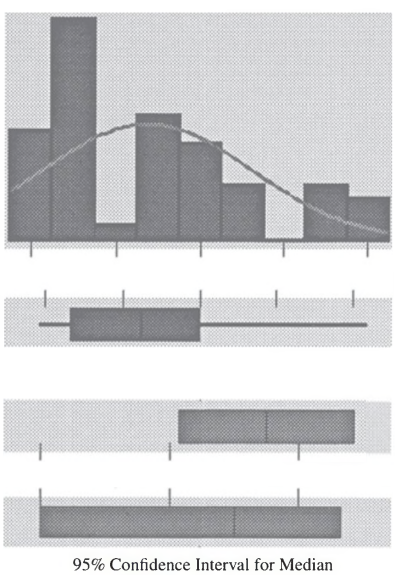
$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

que tiene de manera aproximada una distribución normal estándar cuando H_0 es verdadera. El valor P se determina exactamente como se describió anteriormente en esta sección (por ejemplo, $\Phi(z)$ cuando la hipótesis alternativa H_a: $\mu < \mu_0$). Rechazar H_0 cuando el valor $P \leq \alpha$ da una prueba con nivel de significancia *aproximada* α. La regla empírica $n > 40$ nuevamente se utilizará para caracterizar una muestra de tamaño grande.

EJEMPLO 8.8 Se utiliza un penetrómetro cónico dinámico para medir la resistencia de un material a la penetración (mm/golpe), a medida que el cono es insertado en el pavimento o el subsuelo. Suponga que para una aplicación particular, se requiere que el valor de penetración cónica dinámica promedio verdadera para un cierto tipo de pavimento sea menor que 30. El pavimento no será utilizado a menos que exista evidencia concluyente de que la especificación se satisfizo. Formule y pruebe las hipótesis apropiadas utilizando los siguientes datos **("Probabilistic Model for the Analysis of Dynamic Cone Penetrometer Test Values in Pavement Structure Evaluation", *J. of Testing and Evaluation*, 1999: 7–14):**

14.1	14.5	15.5	16.0	16.0	16.7	16.9	17.1	17.5	17.8
17.8	18.1	18.2	18.3	18.3	19.0	19.2	19.4	20.0	20.0
20.8	20.8	21.0	21.5	23.5	27.5	27.5	28.0	28.3	30.0
30.0	31.6	31.7	31.7	32.5	33.5	33.9	35.0	35.0	35.0
36.7	40.0	40.0	41.3	41.7	47.5	50.0	51.0	51.8	54.4
55.0	57.0								

La figura 8.5 muestra un resumen descriptivo obtenido con Minitab. La penetración cónica dinámica media muestral es menor que 30. Sin embargo, existe una cantidad sustancial de variación en los datos (coeficiente de variación muestral = $s/\bar{x}$ = .4265), de modo que el hecho de que la media sea menor que el valor de corte de la especificación de diseño puede ser simplemente una consecuencia de la variabilidad muestral. Observe que el histograma no se asemeja en absoluto a una curva normal (y una gráfica de probabilidad normal no exhibe un patrón lineal), aunque las pruebas z con muestras grandes no requieren una distribución de población normal.



Estadística descriptiva

Variable: penetración cónica dinámica

Prueba de normalidad de Anderson-Darling

A-Squarect	1.902
P-Value:	0.000
Mean	28.7615
StDev	12.2647
Variance	150.423
Skewness	0.808264
Kurtosis	–3.9E–01
N	52
Minimum	14.1000
1st Quartile	18.2250
Median	27.5000
3rd Quartile	35.0000
Maximum	57.0000

95% Confidence Interval for Mu

25.3470 3.21761

95% Confidence Interval for Sigma

10.2784 15.2098

95% Confidence Interval for Median

20.0000 31.7000

Figura 8.5 Resumen descriptivo, generado por Minitab, para los datos de penetración cónica dinámica del ejemplo 8.8

1. μ = valor de penetración cónica dinámica promedio verdadero

2. H_0: $\mu = 30$

3. H_a: $\mu < 30$ (por consiguiente, el pavimento no será utilizado a menos que la hipótesis nula sea rechazada)

4. $z = \dfrac{\bar{x} - 30}{s/\sqrt{n}}$

5. Con $n = 52$, $\bar{x} = 28.76$ y $s = 12.2647$,

$$z = \frac{28.76 - 30}{12.2647/\sqrt{52}} = \frac{-1.24}{1.701} = -.73$$

6. El valor P para esta prueba de cola larga z es $\Phi(-.73) = .2327$.

7. Dado que $.2327 > .05$, H_0 no puede ser rechazada. No se cuenta con evidencia precisa para concluir que $\mu < 30$; el uso del pavimento no se justifica. Considere que de no rechazar H_0, posiblemente cometeríamos un error tipo II. ■

La determinación de β y el tamaño de muestra necesario para estas pruebas con muestra grande pueden basarse en la especificación de un valor adecuado de σ y en el uso de las fórmulas anteriores (aun cuando se utilice s en la prueba) o en el uso de la metodología que se introducirá en conexión con las pruebas t de una muestra, que se analizarán en la sección 8.3.

EJERCICIOS Sección 8.2 (15–28)

15. Sea μ el verdadero tiempo promedio de reacción a un estímulo. Para una prueba z de H_0: $\mu = 5$ contra H_a: $\mu > 5$, determinar el valor P para cada uno de los siguientes valores del estadístico de prueba z.

a. 1.42 **b.** .90 **c.** 1.96 **d.** 2.48 **e.** −.11

16. Se supone que los neumáticos de un tipo recién comprados están inflados a una presión de 30 lb/pulg^2. Sea μ la presión promedio verdadera. Se realiza una prueba para decidir si μ difiere del valor destino. Halle el valor P asociado a cada uno de los siguientes valores del estadístico de prueba z.

a. 2.10 **b.** −1.75 **c.** −.55 **d.** 1.41 **e.** −5.3

17. Responda las siguientes preguntas en relación con el problema de los neumáticos en el ejemplo 8.7.

a. Si $\bar{x} = 30\,960$ y se utiliza una prueba de nivel $\alpha = .01$, ¿cuál es la decisión?

b. Si se utiliza una prueba de nivel .01, ¿cuál es $\beta(30\,500)$?

c. Si se utiliza una prueba de nivel .01 y también se requiere que $\beta(30\,500) = .05$, ¿qué tamaño de muestra n es necesario?

d. Si $\bar{x} = 30\,960$ ¿cuál es la α más pequeña con la cual H_0 puede ser rechazada (con base en $n = 16$)?

18. Reconsidere la situación de secado de pintura del ejemplo 8.5, en el cual el tiempo de secado para un espécimen de prueba está normalmente distribuido con $\sigma = 9$. Las hipótesis H_0: $\mu = 75$ contra H_a: $\mu < 75$ tienen que ser probadas con una muestra aleatoria de $n = 25$ observaciones.

a. ¿A cuántas desviaciones estándar (de $\bar{X}$) por debajo del valor nulo se encuentra $\bar{x} = 72.3$?

b. Si $\bar{x} = 72.3$, ¿cuál es la conclusión si utiliza $\alpha = .002$?

c. ¿Cuál es $\beta(70)$ para el procedimiento de prueba con $\alpha = .002$?

d. Si se utiliza el procedimiento de prueba con $\alpha = .002$, ¿qué n es necesaria para asegurar que $\beta(70) = .01$?

e. Si se utiliza una prueba de nivel .01 con $n = 100$, ¿cuál es la probabilidad de un error de tipo I cuando $\mu = 76$?

19. Se determinó el punto de fusión de cada una de las 16 muestras de una marca de aceite vegetal hidrogenado y el resultado fue $\bar{x} = 94.32$. Suponga que la distribución del punto de fusión es normal con $\sigma = 1.20$.

a. Pruebe H_0: $\mu = 95$ versus H_a: $\mu \neq 95$ mediante una prueba de dos colas de nivel .01.

b. Si se utiliza una prueba de nivel .01, ¿cuál es $\beta(94)$, la probabilidad de un error de tipo II cuando $\mu = 94$?

c. ¿Qué valor de n es necesario para garantizar que $\beta(94) = .1$ cuando $\alpha = .01$?

20. Se anuncia que los focos de un tipo duran un promedio de 750 horas. El precio de estos focos es muy favorable por lo que un cliente potencial ha decidido continuar con un convenio de compra hasta que en conclusión se demuestre que la duración promedio verdadera es menor que la anunciada. Se seleccionó una muestra aleatoria de 50 focos, se determinó la duración de cada uno, se

probaron las hipótesis apropiadas con Minitab y se obtuvieron los siguientes resultados.

```
Variable   N    Mean  StDev  SE Mean      Z  P-Value
lifetime  50  738.44  38.20     5.40  −2.14    0.016
```

¿Qué conclusión sería apropiada para un nivel de significancia de .05? ¿Y un nivel de significancia de .01? ¿Qué nivel de significancia y qué conclusión recomendaría?

21. El porcentaje deseado de SiO_2 en cierto tipo de cemento aluminoso es de 5.5. Para comprobar si en una instalación de producción particular el porcentaje promedio verdadero es de 5.5 se analizaron 16 muestras obtenidas de manera independiente. Suponga que el porcentaje de SiO_2 en una muestra está normalmente distribuida con $\sigma = .3$ y que $\bar{x} = 5.25$.

a. ¿Indica esto concluyentemente que el porcentaje promedio verdadero difiere de 5.5?

b. Si el porcentaje promedio verdadero es $\mu = 5.6$ y se utiliza una prueba de nivel $\alpha = .01$ con $n = 16$, ¿cuál es la probabilidad de descubrir este alejamiento de H_0?

c. ¿Qué valor de n se requiere para satisfacer $\alpha = .01$ y $\beta(5.6) = .01$?

22. Con el fin de obtener información sobre las propiedades de resistencia a la corrosión de un tipo de conducto de acero, fueron enterrados en el suelo 45 especímenes durante 2 años. Se midió la penetración máxima (en mils) en cada espécimen y se obtuvo una penetración promedio muestral de $\bar{x} = 52.7$ y una desviación estándar muestral de $s = 4.8$. Los conductos se fabricaron con la especificación de que la penetración promedio verdadera fuera cuando mucho de 50 mils. Serán utilizados a menos que se pueda demostrar concluyentemente que la especificación no se satisface. ¿Qué concluiría?

23. La identificación automática de los límites de las estructuras significativas en una imagen médica es un área de investigación continua. El artículo **"Automatic Segmentation of Medical Images Using Image Registration: Diagnostic and Simulation Applications" (*J. of Medical Engr. and Tech.*, 2005: 53–63)** analiza una nueva técnica para realizar dicha identificación. Una medida de la precisión de la región automática es el desplazamiento lineal promedio. El artículo proporciona las siguientes observaciones de desplazamiento lineal promedio con una muestra de 49 riñones (unidades de dimensiones en pixeles).

1.38	0.44	1.09	0.75	0.66	1.28	0.51
0.39	0.70	0.46	0.54	0.83	0.58	0.64
1.30	0.57	0.43	0.62	1.00	1.05	0.82
1.10	0.65	0.99	0.56	0.56	0.64	0.45
0.82	1.06	0.41	0.58	0.66	0.54	0.83
0.59	0.51	1.04	0.85	0.45	0.52	0.58
1.11	0.34	1.25	0.38	1.44	1.28	0.51

a. Resuma y describa los datos.

b. ¿Es factible que el desplazamiento lineal promedio esté al menos normalmente distribuido en forma aproximada? ¿Se debe suponer normalidad antes de calcular un intervalo de confianza para el desplazamiento lineal promedio verdadero, o probar las hipótesis en cuanto a desplazamiento lineal promedio verdadero? Explique.

c. Los autores comentaron que en la mayoría de los casos el desplazamiento lineal promedio es del orden de 1.0 o mejor. ¿Proporcionan en realidad los datos una fuerte evidencia para concluir que el desplazamiento lineal promedio en estas circunstancias es menor que 1.0? Efectúe una prueba apropiada de hipótesis.

d. Calcule un límite de confianza superior para el desplazamiento lineal promedio verdadero utilizando un nivel de confianza de 95% e interprete este límite.

24. A diferencia de la mayoría de los alimentos envasados, las etiquetas en las bebidas alcohólicas no están obligadas a mostrar el contenido de nutrientes o calorías. El artículo **"What Am I Drinking? The Effects of Serving Facts Information on Alcohol Beverage Containers" (*J. of Consumer Affairs*, 2008: 81–99)** reporta acerca de un estudio piloto en el que se le pidió a cada una de las 58 personas de una muestra que estimaran el contenido de calorías de una lata de 12 onzas de cerveza sabiendo que contiene 153 calorías. La media resultante de la muestra estimada del nivel de calorías fue de 191 y la desviación estándar de la muestra fue de 89. ¿Sugerirán estos datos que la media verdadera estima que el contenido de calorías en la población encuestada excede el contenido real? Pruebe las hipótesis apropiadas para el nivel de significancia de .001.

25. Los chalecos antibalas proporcionan protección crítica para personal policial, pero afectan el equilibrio y la movilidad. El artículo **"Impact of Police Body Armour and Equipment on Mobility" (*Applied Ergonomics*, 2013: 957–961)** informa que en una muestra de 52 oficiales varones sometidos a una tarea de velocidad que simula apearse de un vehículo con el chaleco antibalas puesto, la media de la muestra fue de 1.95 segundos, y la desviación estándar de la muestra fue .20 segundos. ¿Será que el tiempo de la verdadera tarea promedio es menor de 2 segundos? Realice una prueba de hipótesis apropiadas usando un nivel de significancia de .01.

26. La cantidad diaria recomendada de zinc en la dieta entre los varones mayores de 50 años de edad es de 15 mg/día. El artículo **"Nutrient Intakes and Dietary Patterns of Older Americans: A National Study" (*J. of Gerontology*, 1992: M145-150)** presenta el siguiente resumen de datos sobre el consumo de zinc en una muestra de varones con edades entre 65 y 74 años: $n = 115$, $\bar{x} = 11.3$ y $s = 6.43$. ¿Indicarán estos datos que la ingesta de zinc diaria promedio en la población de hombres de todas las edades de 65 a 74 años cae por debajo de la cantidad recomendada?

27. Demuestre que, cuando la distribución de la población es normal y cuando se conoce σ, para cualquier $\Delta > 0$ la prueba de dos colas satisface $\beta(\mu_0 - \Delta) = \beta(\mu_0 + \Delta)$, de modo que $\beta(\mu')$ es simétrica respecto a μ_0.

28. Para un valor μ' alternativo fijo, demuestre que $\beta(\mu') \to 0$ cuando $n \to \infty$, para una prueba z de una cola o de dos colas en el caso de una distribución normal de la población con σ conocida.

8.3 Prueba *t* de una sola muestra

Cuando n es pequeño, el teorema del límite central (TLC) ya no puede ser invocado para justificar el uso de una prueba con muestra grande. Esta misma dificultad se presentó al obtener un intervalo de confianza (IC) con muestra pequeña para μ en el capítulo 7. El método utilizado en este capítulo será el mismo que se empleó ahí: se supondrá que la distribución de población es al menos aproximadamente normal y se describirán los procedimientos de prueba cuya validez se fundamenta en esta suposición. Si un investigador tiene una buena razón para creer que la distribución de población es bastante no normal, puede utilizar una prueba libre de distribución del capítulo 15. Alternativamente, un estadístico puede ser consultado en cuanto a procedimientos válidos para familias específicas de distribuciones de población, aparte de la familia normal. O puede desarrollarse un procedimiento *bootstrap*.

En el capítulo 7 se utilizó el resultado clave en el cual están basadas las pruebas con una media de población normal para obtener el intervalo de confianza t para una muestra: si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de una distribución normal, la variable estandarizada

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

tiene una distribución t con $n - 1$ grados de libertad (gl). Considere poner a prueba H_0: $\mu = \mu_0$ utilizando el estadístico de prueba $T = (\overline{X} - \mu_0)/(S/\sqrt{n})$. Es decir, el estadístico de prueba resulta de estandarizar $\overline{X}$ conforme a la suposición de que H_0 es verdadera (utilizando $S/\sqrt{n}$ la desviación estándar estimada de $\overline{X}$, en lugar de $\sigma/\sqrt{n}$). Cuando H_0 es verdadera el estadístico de prueba tiene una distribución t con $n - 1$ grados de libertad. Conocer la distribución del estadístico de prueba cuando H_0 es verdadera (la "distribución nula") permite determinar el valor P.

El estadístico de prueba es en realidad el mismo del caso de muestra grande pero se denota con T para recalcar que su distribución de referencia para determinar el valor P es una distribución t con $n - 1$ grados de libertad en lugar de la distribución normal estándar (z). En lugar del área bajo la curva z como era el caso para las pruebas de muestras grandes, el valor P usará ahora un área bajo la curva t_{n-1} (véase la figura 8.6).

Prueba *t* con una muestra

Hipótesis nula: H_0: $\mu = \mu_0$

Valor del estadístico de prueba: $t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$

Hipótesis alternativa	Determinación del valor *P*
H_a: $\mu > \mu_0$	Área bajo la curva t_{n-1} a la derecha de t
H_a: $\mu < \mu_0$	Área bajo la curva t_{n-1} a la izquierda de t
H_a: $\mu \neq \mu_0$	$2 \cdot$ (Área bajo la curva t_{n-1} a la derecha de $\lvert t \rvert$)

Suposición: Los datos consisten en una muestra aleatoria de una distribución de población normal.

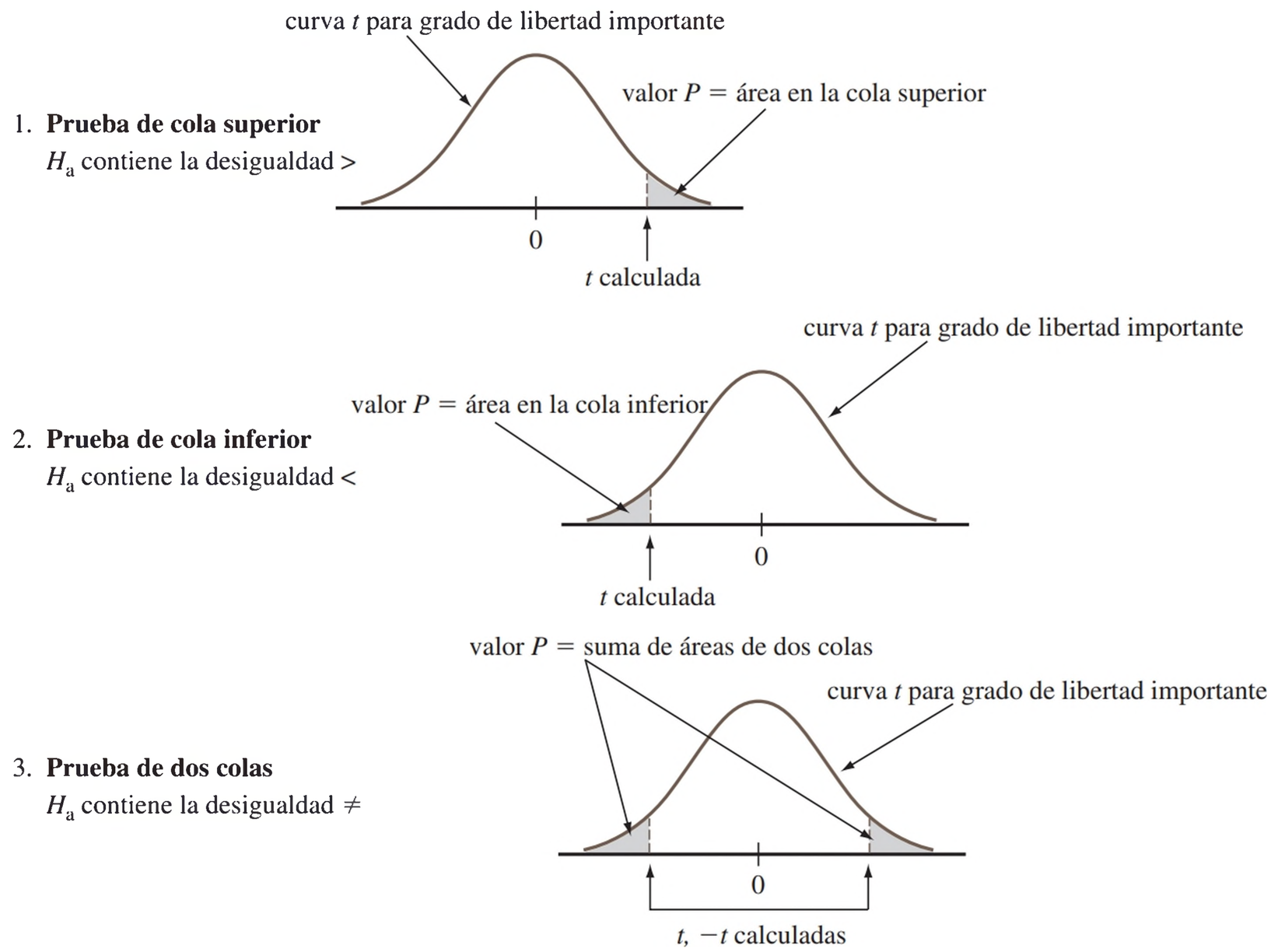


Figura 8.6 Valores P para las pruebas t

Lamentablemente la tabla de valores críticos de t que se utilizó para el cálculo del intervalo de confianza y la predicción en el capítulo 7 no proporciona mucha información acerca de las áreas de cola de la curva t. Esto es porque para cada distribución de t sólo hay siete valores para las áreas de cola que se usan más comúnmente: .10, .05, .025, .01, .005, .001 y .0005. La determinación del valor P sería fácil si tuviéramos una tabla de áreas de cola (o, alternativamente, áreas acumuladas) semejante a nuestra tabla z: para cada distribución t diferente, el área bajo la correspondiente curva a la derecha o la izquierda de valores 0.00, 0.01, 0.02, 0.03, . . . , 3.97, 3.98, 3.99 y finalmente 4.00. Pero para esto sería necesaria una página entera de texto para cada distribución diferente de t.

Por consiguiente, se ha incluido otra tabla t en la tabla A.8 del apéndice. Contiene una tabulación del área bajo la cola superior de la curva t pero con menos precisión decimal que la que proporciona la tabla z. Cada otra columna de la tabla es para un número distinto de grados de libertad, y las filas son para los valores calculados del estadístico de prueba t que van desde 0.0 a 4.0 en incrementos de .1. Por ejemplo, el número .074 aparece en la intersección de la fila 1.6 y la columna 8 de los grados de libertad. Por tanto, el área bajo la curva 8 de los grados de libertad a la derecha de 1.6 (un área de cola superior) es .074. Puesto que las curvas t son simétricas sobre 0, .074 también es el área bajo la curva de 8 grados de libertad a la izquierda de -1.6.

Suponga, por ejemplo, que una prueba de H_0: $\mu = 100$ versus H_a: $\mu > 100$ se basa en la distribución t de 8 grados de libertad. Si el valor calculado del estadístico de prueba es $t = 1.6$, entonces el valor P para esta prueba con cola superior es .074. Debido a que .074 excede .05, no seríamos capaces de rechazar H_0 en un nivel de significancia de 0.05. Si la hipótesis alternativa es H_a: $\mu < 100$ y una prueba basada en 20 grados de libertad produce $t = -3.2$, entonces la tabla A.7 del apéndice muestra que el valor P es el área de cola inferior capturada .002. La hipótesis nula puede ser rechazada en cualquier nivel .05 o .01. En el capítulo siguiente presentamos una prueba t de hipótesis sobre la diferencia entre dos medias de población. Supongamos que las hipótesis relevantes son H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ versus H_a: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$; la hipótesis nula establece que las medias de las dos poblaciones son

idénticas, mientras que la hipótesis alternativa establece que son diferentes sin especificar una dirección de alejamiento de H_0. Si una prueba t se basa en 20 grados de libertad y $t = 3.2$, entonces el valor P de esta prueba de dos colas es $2(.002) = .004$. Este sería el valor P de $t = -3.2$. El área de la cola se duplica ya que valores mayores de 3.2 y más pequeños que -3.2 son más contradictorios a H_0 que lo que eran los valores calculados (valores más alejados de *cualquier* cola de la curva t).

EJEMPLO 8.9 Las nanofibras de carbono tienen la aplicación potencial de ser materiales que manejan el calor, que refuerzan compuestos y como componente en nanoelectrónica y en fotónica. Los siguientes datos de esfuerzo de falla (MPa) de especímenes de fibra se obtuvieron de una gráfica en el artículo **"Mechanical and Structural Characterization of Electrospun PAN2Derived Carbon Nanofibers" (*Carbon*, 2005: 2175–2185)**.

300	312	327	368	400	425	470	556	573	575
580	589	626	637	690	715	757	891	900	

El resumen de las cantidades es $n = 19$, $\bar{x} = 562.68$, $s = 180.874$, $s/\sqrt{n} = 41.495$. ¿Proporcionarán los datos evidencias convincentes para concluir que el esfuerzo de falla promedio verdadero excede los 500 MPa?

La figura 8.7 muestra un diagrama de probabilidad normal de los datos; el considerable patrón lineal indica que una distribución de la población normal del esfuerzo de falla es bastante verosímil, lo que nos permite emplear la prueba t de una muestra (el cuadro a la derecha de la gráfica da información sobre una prueba formal de la hipótesis de que la distribución de la población es normal; esto se estudiará en el capítulo 14).

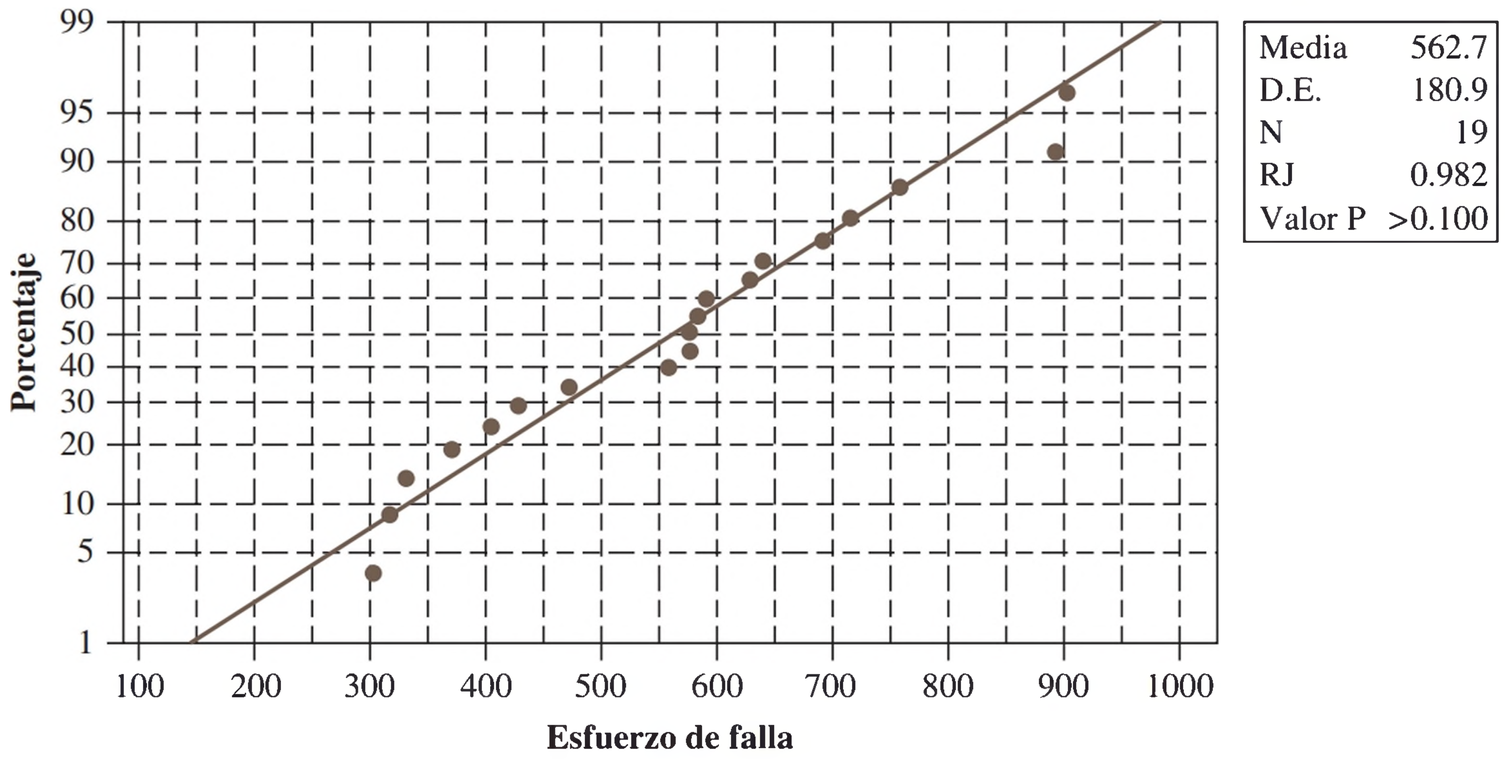


Figura 8.7 Gráfica de población normal de los datos del esfuerzo de falla ■

Realicemos una prueba de las hipótesis pertinentes con un nivel de significancia de 0.05.

1. El parámetro de interés es μ = esfuerzo de falla promedio verdadero
2. La hipótesis nula es H_0: $\mu = 500$
3. La hipótesis alternativa apropiada es H_a: $\mu > 500$ (así creeremos que el esfuerzo de falla promedio verdadera excede a 500 sólo si puede rechazarse la hipótesis).
4. El estadístico de prueba t de una muestra es $T = (\bar{X} - 500)/(S/\sqrt{n})$. Este valor t de los datos es resultado de sustituir $\bar{X}$ por $\bar{x}$ y S por s.
5. El valor del estadístico de prueba es $t = (562.68 - 500)/41.495 = 1.51$.

6. La prueba se basa en $19 - 1 = 18$ grados de libertad. La entrada en esa columna y la fila de 1.5 de la tabla A.8 del apéndice es .075. Puesto que la prueba es de cola superior (porque aparece $>$ en H_a), se deduce que el valor $P \approx .075$ (Minitab dice .074).
7. Debido a que $.075 > .05$, no hay suficiente evidencia para justificar el rechazo de la hipótesis nula al nivel de significancia .05. En lugar de concluir que el esfuerzo de falla verdadero promedio supera los 500, parece que la variabilidad del muestreo proporciona una explicación factible para el hecho de que la media muestral exceda 500 por una cantidad bastante considerable. ■

EJEMPLO 8.10 Muchos de los efectos nocivos del tabaquismo sobre la salud han sido bien documentados. En el artículo **"Smoking Abstinence Impairs Time Estimation Accuracy in Cigarette Smokers" (*Psychopharmacology Bull.*, 2003: 90–95)** se describe una investigación acerca de si la percepción del tiempo, que es un indicador de la capacidad de una persona para concentrarse, se deteriora durante los periodos de abstinencia de nicotina. Después de una no fumar durante 24 horas, se le pidió a cada uno de 20 fumadores que estimara cuánto tiempo había transcurrido en un lapso de 45 segundos. Los siguientes datos de la percepción del tiempo transcurrido son consistentes con el resumen de cantidades que proporciona el artículo citado.

69	65	72	73	59	55	39	52	67	57
56	50	70	47	56	45	70	64	67	53

Una gráfica de probabilidad normal de los datos muestra un patrón lineal muy importante. Se va a realizar una prueba de hipótesis a nivel de significancia .05 para decidir si la percepción de cierto tiempo transcurrido promedio difiere del tiempo conocido de 45.

1. μ = percepción del tiempo transcurrido promedio verdadero para todos los fumadores expuestos al régimen experimental descrito
2. H_0: $\mu = 45$
3. H_0: $\mu \neq 45$
4. $t = (\bar{x} - 45)/(s/\sqrt{n})$
5. Con $\bar{x} = 59.30$ y $s/\sqrt{n} = 9.84/\sqrt{20} = 2.200$, el valor del estadístico de prueba es $t = 14.3/2.200 = 6.50$.
6. El valor P para una prueba de dos colas es dos veces el área bajo la curva de t con 19 grados de libertad a la derecha de 6.50. Puesto que la tabla A.8 muestra que el área bajo esta curva de t a la derecha de 4.0 es 0, el área a la derecha de 6.50 es 0. El valor P es entonces $2(0) = 0$ (.00000 según el software).
7. Un valor P tan pequeño es un fuerte argumento para rechazar H_0 en cualquier nivel de significancia razonable y en particular en el nivel de significancia .05. La diferencia entre la media de la muestra y su valor esperado cuando H_0 es verdadera no puede explicarse simplemente por la variación de la probabilidad. La media verdadera de la percepción del tiempo transcurrido es evidentemente diferente de 45, por lo que la abstinencia de la nicotina parece afectar la percepción del tiempo. ■

β y determinación del tamaño de la muestra

El cálculo de β con el valor alternativo μ' para una distribución de población normal con σ conocida se realizó mediante la conversión de la desigualdad valor $P > \alpha$ en un enunciado de $\bar{x}$ (por ejemplo, $\bar{x} < \mu_0 + z_\alpha \cdot \sigma/\sqrt{n}$) y luego restar μ' para estandarizar correctamente. Un método implica observar que cuando $\mu = \mu'$, el estadístico de prueba $Z = (\bar{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n})$ sigue teniendo una distribución normal con varianza 1, pero ahora la media de Z está dada por $(\mu' - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n})$. Es decir, cuando $\mu = \mu'$, el estadístico de

prueba sigue teniendo una distribución normal pero no la distribución normal estándar. Debido a esto $\beta(\mu')$ es un área bajo la curva normal correspondiente a la media $(\mu' - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n})$ y varianza 1. Tanto α como β implican trabajar con variables normalmente distribuidas.

El cálculo de $\beta(\mu')$ para la prueba t es mucho menos directo. Esto es porque la distribución del estadístico de prueba $T = (\overline{X} - \mu_0)/(S/\sqrt{n})$ es bastante complicada cuando H_0 es falsa y H_a es verdadera. Por consiguiente, en una prueba de cola superior, determinar

$$\beta(\mu') = P(T < t_{\alpha, n-1} \text{ cuando } \mu = \mu' \text{ en lugar de } \mu_0)$$

implica integrar una desagradable función de densidad. Esto debe hacerse numéricamente. Los resultados se resumen en gráficas de β que aparecen en la tabla A.17 del apéndice. Existen cuatro juegos de gráficas, correspondientes a pruebas de una cola a nivel .05 y nivel .01, y pruebas de dos colas a los mismos niveles.

Para entender cómo se utilizan estas gráficas, obsérvese primero que tanto β como el tamaño de muestra necesario n son funciones no sólo de la diferencia absoluta $|\mu_0 - \mu'|$ sino de $d = |\mu_0 - \mu'|/\sigma$. Suponga, por ejemplo, que $|\mu_0 - \mu'| = 10$. Este alejamiento de H_0 será mucho más fácil de descubrir (β más pequeña) cuando $\sigma = 2$, en cuyo caso μ_0 y μ' están a 5 desviaciones estándar de la población, una de otra, que cuando $\sigma = 10$. El hecho de que β para la prueba t dependa de d y no sólo de $|\mu_0 - \mu'|$ es desafortunado, puesto que para utilizar las gráficas se debe tener alguna idea del valor verdadero de σ. Una suposición conservadora (grande) para σ dará por resultado un valor conservador (grande) de $\beta(\mu')$ y una estimación conservadora del tamaño de muestra necesario para α y $\beta(\mu')$ prescritas.

Una vez que se seleccionan la μ' alternativa y el valor de σ, se calcula d y su valor se localiza sobre el eje horizontal del conjunto de curvas pertinente. El valor de β es la altura de la curva con $n - 1$ grados de libertad por encima del valor de d (es necesaria una interpolación visual si $n - 1$ no es un valor para el cual aparezca la curva correspondiente) como se ilustra en la figura 8.8.

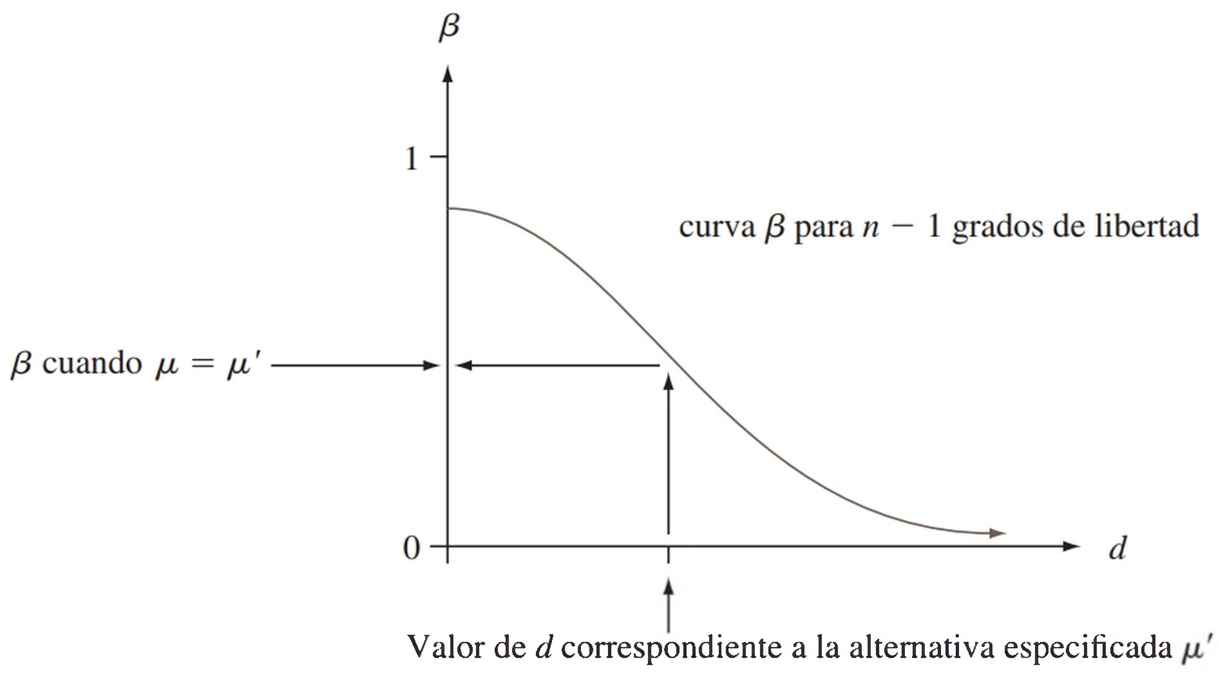


Figura 8.8 Curva β típica de la prueba t

En lugar de fijar n (es decir, $n - 1$) y, por consiguiente, la curva particular en donde se lee β) se podría prescribir tanto α (.05 o .01 en este caso) y un valor de β para las μ' y σ seleccionadas. Después de calcular d se localiza el punto (d, β) en el conjunto de gráficas pertinentes. La curva debajo y más próxima a este punto da $n - 1$ y, por consiguiente, n (de nuevo con frecuencia se requiere interpolación).

EJEMPLO 8.11 Se supone que la caída de voltaje promedio verdadera entre el colector y el emisor de transistores bipolares de compuerta aislados de cierto tipo es cuando mucho de 2.5 volts. Un investigador selecciona una muestra de $n = 10$ de esos transistores y utiliza los voltajes resultantes para probar H_0: $\mu = 2.5$ contra H_a: $\mu > 2.5$ mediante una prueba t con nivel de significancia $\alpha = .05$. Si la desviación estándar de la distribución de voltaje es $\sigma = .100$ ¿qué tan probable es que H_0 no sea rechazada cuando en realidad $\mu = 2.6$? Con $d = |2.5 - 2.6|/.100 = 1.0$, el punto sobre la curva β con 9 grados de libertad para una prueba de una cola con $\alpha = .05$ por encima de 1.0 tiene una altura aproximadamente de .1, por tanto $\beta \approx .1$. El investigador podría pensar que este es un valor de β demasiado grande con semejante alejamiento sustancial de H_0 y puede ser que desee tener $\beta = .05$ para este valor alternativo de μ. Puesto que $d = 1.0$, el punto $(d, \beta) = (1.0, .05)$ debe ser localizado. Este punto se aproxima mucho a la curva de 14 grados de libertad, por tanto, con $n = 15$ se obtendrá tanto $\alpha = .05$ como $\beta = .05$ cuando el valor de μ es 2.6 y $\sigma = .10$. Un valor más grande de σ daría una β más grande para esta alternativa, y un valor alternativo de μ más cercano a 2.5 también daría por resultado un valor incrementado de β. ■

La mayoría de los programas computacionales de estadística también calculará probabilidades de error tipo II. Por lo general, estos programas trabajan en términos de **potencia**, que es simplemente $1 - \beta$. Un valor pequeño de β (cerca de 0) es equivalente a una potencia grande (cerca de 1). Una prueba de *gran alcance* es la que tiene gran potencia y, por tanto, buena capacidad para detectar cuándo la hipótesis nula es falsa.

Por ejemplo, se le pide a Minitab que determine la potencia de la prueba de cola superior del ejemplo 8.11 para tres tamaños de muestra de 5, 10 y 15 cuando $\alpha = .05$, $\sigma = .10$ y el valor de μ es en realidad 2.6 en lugar del valor nulo de 2.5, una "diferencia" de $2.6 - 2.5 = .1$. También se le pidió al software determinar el tamaño necesario de la muestra para una potencia de .9 ($\beta = .1$) y .95. Aquí están los datos resultantes.

```
Power and Sample Size
Testing mean = null (versus > null)
Calculating power for mean = null + difference
Alpha = 0.05 Assumed standard deviation = 0.1

            Sample
Difference    Size     Power
0.1              5  0.579737
0.1             10  0.897517
0.1             15  0.978916

               Sample Target
                                    Actual
Difference       Size      Power     Power
0.1                11       0.90  0.924489
0.1                13       0.95  0.959703
```

La potencia para el tamaño de muestra $n = 10$ es un poco menor que .9. Así que si se insiste en que la potencia sea al menos de .9, se requiere una muestra de tamaño 11 y la potencia real para n es aproximadamente .92. El software dice que para una potencia objetivo de .95, es necesario un tamaño de muestra de $n = 13$, mientras que al echar un vistazo a nuestras curvas β dio 15. Cuando está disponible, este tipo de software es más confiable que las curvas. Por último, ahora Minitab también proporciona curvas de potencia para los tamaños determinados de muestra, tal como se ilustra en la figura 8.6. Estas curvas muestran cómo aumenta la potencia para cada tamaño de muestra a medida que el valor real de μ se desplaza más allá y más lejos del valor nulo.

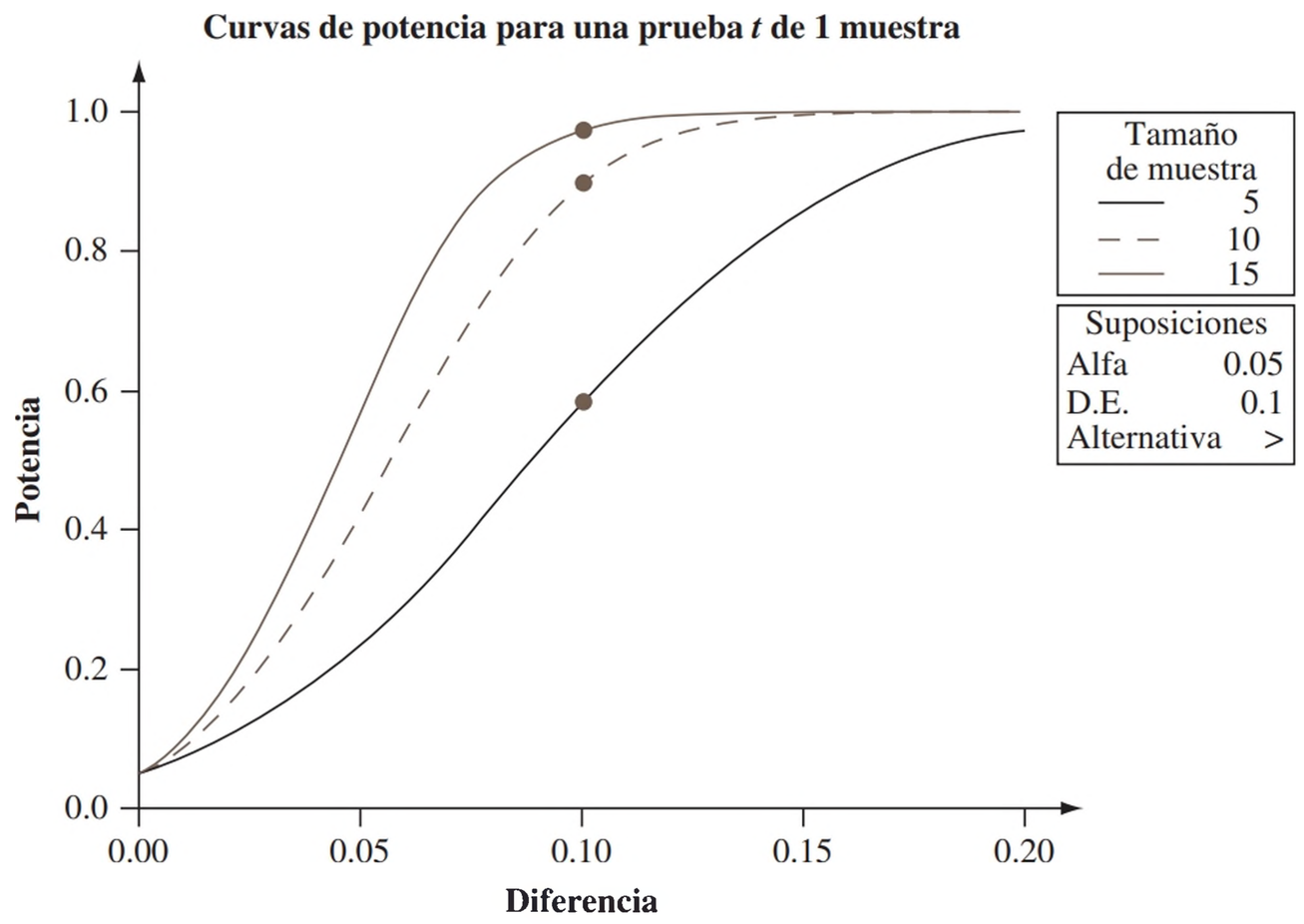


Figura 8.9 Curvas de potencia de Minitab para la prueba *t* del ejemplo 8.11

Variación en los valores *P*

El valor *P* que resulta al realizar una prueba en una muestra seleccionada *no* es la probabilidad de que H_0 sea verdadera, ni la probabilidad de rechazar la hipótesis nula. Una vez más, es la probabilidad, calculada suponiendo que H_0 es verdadera, de obtener un valor del estadístico de prueba al menos tan contradictorio a la hipótesis nula como el valor real resultante. Por ejemplo, considere la prueba H_0: $\mu = 50$ versus H_0: $\mu < 50$, usando una prueba *t* de cola inferior con base en 20 grados de libertad. Si el valor calculado del estadístico de prueba es $t = -2.00$, entonces

$$\begin{aligned}\text{valor } P &= P(T < -2.00 \text{ cuando } \mu = 50)\\ &= \text{área bajo la } t_{20} \text{ a la izquierda de } -2.00 = .030\end{aligned}$$

Pero si se selecciona una segunda muestra, el valor resultante de *t* es casi seguro que será diferente de -2.00, por lo que el valor *P* correspondiente también es probable que difiera de .030. Ya que el valor del estadístico de prueba varía por sí mismo de una muestra a otra, el valor *P* también varía de una muestra a otra. Es decir, el estadístico de prueba es una variable aleatoria y, por tanto, el valor *P* será una variable aleatoria. Una primera muestra puede dar un valor *P* de .030, una segunda muestra puede dar como resultado un valor *P* de .117, una tercera muestra puede producir el valor *P* de .061 y así sucesivamente.

Si H_0 es falsa, esperamos que el valor *P* sea cercano a 0 por lo que se puede rechazar la hipótesis nula. Por otro lado, cuando H_0 es verdadera, nos gustaría que el valor *P* superara el nivel de significancia seleccionado, así la decisión correcta es no rechazar H_0. El siguiente ejemplo presenta simulaciones que muestran cómo se comporta el valor *P* cuando la hipótesis nula es verdadera así como cuando es falsa.

EJEMPLO 8.12 El consumo de combustible (mpg) de cualquier vehículo nuevo particular bajo condiciones de conducción puede no ser idéntico a la figura de EPA (Agencia de Protección Ambiental) que aparece en la etiqueta del vehículo. Supongamos se deben seleccionar cuatro diferentes vehículos de un tipo en particular y conducir en una ruta dada, después de lo cual se debe determinar la eficiencia de combustible de cada uno.

Sea μ la eficiencia de combustible promedio verdadero bajo estas condiciones. Considere la prueba H_0: $\mu = 20$ versus H_0: $\mu > 20$ utilizando la prueba t de una muestra basada en la muestra resultante. Puesto que la prueba se basa en $n - 1 = 3$ grados de libertad, el valor P para una prueba de cola superior es el área bajo la curva t con 3 grados de libertad a la derecha de la t calculada.

Suponga primero que la hipótesis nula es verdadera. Pedimos a Minitab que generara 10 000 muestras diferentes, cada una con 4 observaciones, de una distribución de la población normal con media $\mu = 20$ y desviación estándar $\sigma = 2$. La primera muestra y el resumen de cantidades resultante fueron

$$x_1 = 20.830, x_2 = 22.232, x_3 = 20.276, x_4 = 17.718$$

$$\bar{x} = 20.264 \quad s = 1.8864 \quad t = \frac{20.264 - 20}{.1.8864/\sqrt{4}} = .2799$$

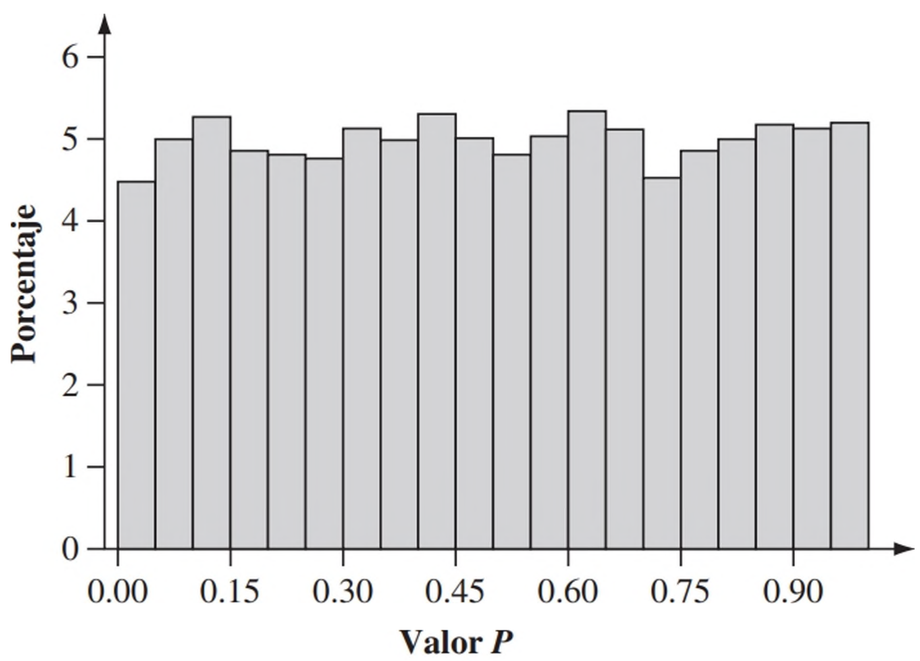
El valor P es el área bajo la curva de t con 3 grados de libertad a la derecha de .2799, que según Minitab es .3989. Utilizando un nivel de significancia de 0.05, por supuesto, la hipótesis nula no sería rechazada. Los valores t para las siguientes cuatro muestras fueron -1.7591, .6082, $-.7020$ y 3.1053, con los valores P correspondientes .912, .293, .733 y.0265.

La figura 8.10(a) muestra un histograma de los 10 000 valores P de este experimento de simulación. Aproximadamente 4.5% de estos valores P están en el intervalo de primera de clase de 0 a .05. Así, cuando se utiliza un nivel de significancia de 0.05 se rechaza la hipótesis nula en aproximadamente 4.5% de estas 10 000 pruebas. Si continuamos generando muestras y realizando la prueba para cada muestra en el nivel de significancia .05, a largo plazo 5% de los valores P estarían en el intervalo de primera clase. Esto es porque cuando H_0 es verdadera y se utiliza una prueba con nivel de significancia .05, por definición, la probabilidad de rechazar H_0 es .05.

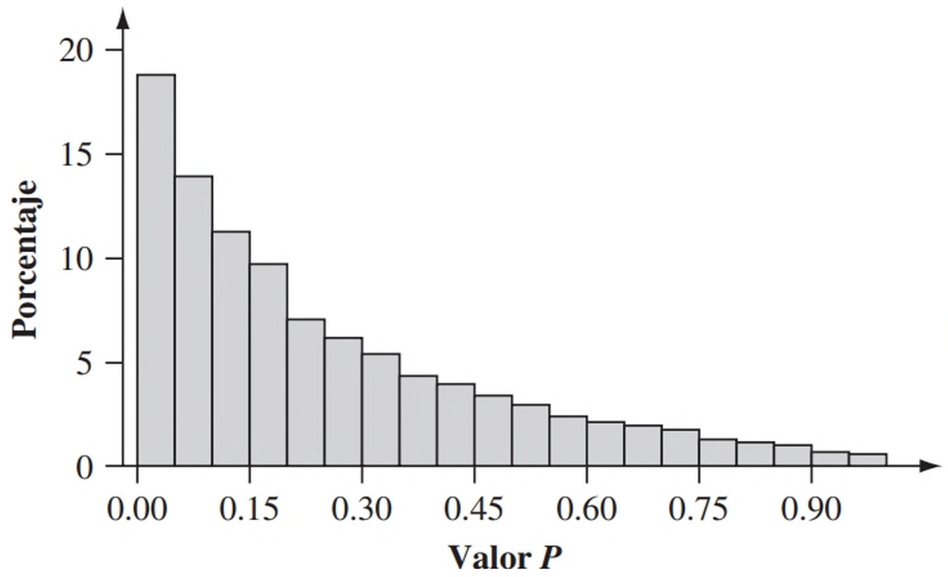
Al observar el histograma, parece que la distribución de valores de P es relativamente plana. De hecho, puede demostrarse que cuando H_0 es verdadera, la distribución de probabilidad del valor P es una distribución uniforme en el intervalo de 0 a 1. Es decir, la curva de densidad es completamente plana en este intervalo y así debe tener una altura de 1 si el área total bajo la curva es 1. Puesto que el área bajo dicha curva a la izquierda de .05 es $(.05)(1) = .05$, otra vez tenemos que la probabilidad de rechazar H_0 cuando es verdadera es .05, el nivel de significancia elegido.

Ahora considere lo que sucede cuando H_0 es falsa porque $\mu = 21$. Otra vez tuvimos que generar con Minitab 10 000 muestras de tamaño 4 (cada una a partir de una distribución normal con $\mu = 21$ y $\sigma = 2$), calcular $t = (\bar{x} - 20)/(s/\sqrt{n})$ para cada una y luego determinar el valor P. El primer resultado de dicha muestra en $\bar{x} = 20.6411$, $s = .49637$, $t = 2.5832$, valor $P = .0408$. La figura 8.10(b) muestra un histograma de los valores P obtenidos. La forma de este histograma es bastante diferente de la figura 8.10(a); hay una mayor tendencia a que el valor P sea pequeño (más cercano a 0) cuando $\mu = 21$ que cuando $\mu = 20$. Otra vez H_0 se rechaza al nivel de significancia .05 siempre que el valor P sea a lo más .05 (en el intervalo de primera clase). Lamentablemente, este es el caso de sólo 19% de los valores P. Tan sólo 19% de las 10 000 pruebas rechazan correctamente la hipótesis nula; para 81% se ha cometido un error tipo II. La dificultad es que el tamaño de muestra es muy pequeño y 21 no es muy diferente del valor afirmado por la hipótesis nula.

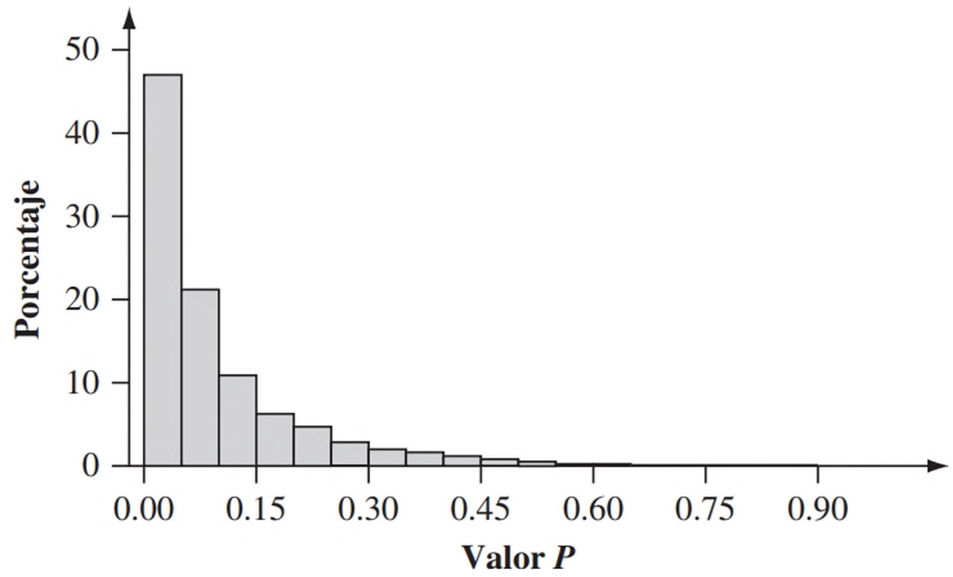
La figura 8.10(c) muestra lo que le sucede al valor P cuando H_0 es falsa porque $\mu = 22$ (aún con $n = 4$ y $\sigma = 2$). El histograma está aún más concentrado hacia valores cercanos a 0, que fue el caso cuando $\mu = 21$. En general, puesto que μ se mueve alejándose a la derecha del valor nulo 20, la distribución de los valores P se vuelve cada vez más concentrada en valores cercanos a 0. Hasta aquí un poco menos de 50% de los valores P es menor que .05. Por tanto, aún es poco más probable que improbable que la hipótesis



(a) $\mu = 20$



(b) $\mu = 21$



(c) $\mu = 22$

Figura 8.10 Resultados de la simulación del valor *P* del ejemplo 8.12

nula sea incorrectamente no rechazada. Sólo para valores μ mucho más grandes que 20 (p. ej., al menos 24 o 25) es muy probable que el valor *P* sea menor de .05 y así nos dará la conclusión correcta.

La gran idea de este ejemplo es que debido a que valor de cualquier estadístico de prueba es aleatorio, también el valor *P* es una variable aleatoria y, por tanto, tienen una distribución. Cuanto más fuerte es el valor real del parámetro desde el valor especificado por la hipótesis nula, más se concentrará en valores cercanos a 0 la distribución de los valores *P* y mayor será la posibilidad de que la prueba rechace correctamente H_0 (correspondiente a β más pequeños). ■

Siempre que se reporta el valor observado de un estadístico como $\overline{X}$ o $\hat{p}$, es una buena práctica estadística incluir una medida cuantitativa de la precisión del estadístico, por ejemplo, que el error estándar estimado de $\overline{X}$ es $s/\sqrt{n}$. El valor *P* es en sí mismo un estadístico, su valor se puede calcular cuando se tienen los datos y en particular se selecciona un procedimiento de prueba, y antes que se tengan esos datos el valor *P* está sujeto a la aleatoriedad. Así que sería bueno contar con σ_P o con un cálculo de esta desviación estándar.

Lamentablemente la distribución de muestreo de un valor *P* es en general bastante complicada. Los resultados de la simulación del ejemplo 8.12 sugieren que la distribución muestral está muy sesgada cuando H_0 es falsa (está uniformemente distribuida en (0, 1) cuando H_0 es verdadera y el estadístico de prueba tiene una distribución continua, por ejemplo, una distribución *t*). Una desviación estándar no es tan fácil de interpretar y utilizar cuando hay una importante no normalidad. Los estadísticos Dennis Boos y Leonard Stefanski investigan el comportamiento aleatorio del valor *P* en su artículo **"*P*-Value**

Precision and Reproducibility" (*The American Statistician*, 2011: 213-221). Para abordar la no normalidad se manejó la cantidad –log(valor *P*). El log-transformado del valor *P* hace que muchos procedimientos de prueba tengan aproximadamente una distribución normal cuando *n* es grande.

Suponga que se aplica un procedimiento de prueba en particular a los resultados de los datos de la muestra en un valor *P* de .001. Entonces H_0 se rechazaría utilizando un nivel de significancia de .05 o .01. Si entonces se selecciona una nueva muestra de la misma distribución de población, ¿qué tan probable es que el valor *P* para estos datos nuevos conduzca a rechazar H_0 con un nivel de significancia de .05 o .01? Esto es lo que los autores del artículo citado entienden por "reproducibilidad": ¿qué posibilidades hay de que una muestra nueva conduzca a la misma conclusión a la que se llegó usando la muestra original? La respuesta a esta pregunta depende de la distribución de la población, del tamaño de la muestra y del procedimiento de prueba utilizado. Sin embargo, con base en sus investigaciones, los autores sugieren las siguientes pautas generales:

Si el valor *P* para los datos originales es .0001, entonces $P(\text{valor } P \leq 05) \approx .97$, mientras que esta probabilidad es aproximadamente .91 si el valor *P* original es .001 y aproximadamente .73 cuando el valor *P* original es .01.

Especialmente cuando el valor *P* original es alrededor de .01 hay razonablemente una buena probabilidad de que una muestra nueva no conducirá al rechazo de H_0 en el nivel de significancia 5%. Por tanto, a menos que el valor *P* original sea muy pequeño, no sería sorprendente que una nueva muestra contradijera la inferencia de los datos originales. Un valor *P* no mucho menor en un nivel de significancia elegido como .05 o .01 ¡debe verse con cierta cautela!

EJERCICIOS Sección 8.3 (29–41)

29. Se supone que el diámetro promedio verdadero de rodamientos de bolas de un tipo es de .5 pulg. Se realizará una prueba *t* con una muestra para ver si este es el caso. ¿Qué conclusión es apropiada en cada una de las siguientes situaciones?

a. $n = 13, t = 1.6, \alpha = .05$
b. $n = 13, t = -1.6, \alpha = .05$
c. $n = 25, t = -2.6, \alpha = .01$
d. $n = 25, t = -3.9$

30. Se selecciona una muestra de *n* ejemplares de lodo y se determina el pH de cada uno. La prueba *t* de una muestra se utilizará entonces para ver si hay pruebas contundentes con el fin de concluir que el pH promedio verdadero es menor de 7.0. ¿Qué conclusión es adecuada en cada una de las siguientes situaciones?

a. $n = 6, t = -2.3, \alpha = .05$
b. $n = 15, t = -3.1, \alpha = .01$
c. $n = 12, t = -1.3, \alpha = .05$
d. $n = 6, t = .7, \alpha = .05$
e. $n = 6, \bar{x} = 6.68, s/\sqrt{n} = .0820$

31. La pintura utilizada para trazar los señalamientos en las autopistas debe reflejar suficiente luz para que sean claramente visibles de noche. Sea μ la lectura promedio verdadera del *reflejómetro* de un nuevo tipo de pintura considerada. Una prueba de H_0: $\mu = 20$ versus H_a: $\mu > 20$ se basará en una muestra aleatoria de tamaño *n* de una distribución de población normal. ¿Qué conclusión es apropiada en cada una de las siguientes situaciones?

a. $n = 15, t = 3.2, \alpha = .05$
b. $n = 9, t = 1.8, \alpha = .01$
c. $n = 24, t = -.2$

32. La conductividad relativa de un dispositivo semiconductor está determinado por la cantidad de impurezas "adicionadas" al mismo durante su fabricación. Un diodo de silicio usado para propósitos específicos requiere un voltaje de corte promedio de .60 V y si este no se alcanza se debe ajustar la cantidad de impurezas. Se seleccionó una muestra de diodos y se determinó el voltaje de corte. Los siguientes datos de salida obtenidos con el software SAS son el resultado de una solicitud para probar las hipótesis apropiadas.

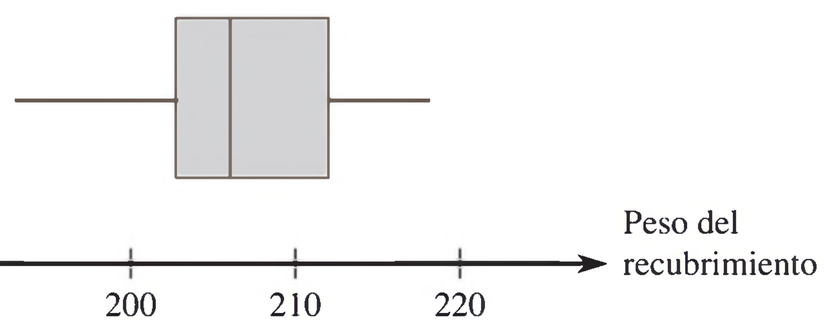
N	Mean	Std Dev	T	Prob.>|T|
15	0.0453333	0.0899100	1.9527887	0.0711

[*Nota*: SAS prueba explícitamente H_0: $\mu = 0$, así que para probar H_0: $\mu = .60$, el valor nulo .60 se debe restar de cada x_i; la media reportada es entonces el promedio de los valores $(x_i - .60)$. También, el valor *P* de SAS siempre es para una prueba de dos colas.] ¿Qué se concluiría con un nivel de significancia de .01?, ¿y de .05?, ¿y de .10?

33. El artículo **"The Foreman's View of Quality Control" (*Quality Engr.*, 1990: 257–280)** describe una investigación de los pesos del recubrimiento de grandes tuberías resultantes de un proceso de galvanizado. Los estándares de producción demandan un peso promedio verdadero de 200 lb por tubería. Los siguientes resumen y gráfica de caja descriptivos fueron producidos por Minitab.

```
Variable   N    Mean  Median  TrMean  StDev  SEMean
ctg wt    30  206.73  206.00  206.81   6.35    1.16

Variable      Min      Max      Q1      Q3
ctg wt     193.00   218.00   202.75   212.00
```



a. ¿Qué sugiere la gráfica de caja sobre el estado de la especificación del peso de recubrimiento promedio verdadero?

b. Una gráfica de probabilidad normal de los datos resultó bastante recta. Use los datos de salida descriptivos para probar las hipótesis apropiadas.

34. Las siguientes son observaciones en la distancia de frenado (pies) de un camión particular a 20 millas por hora en condiciones experimentales específicas **("Experimental Measurement of the Stopping Performance of a Tractor-Semitrailer from Multiple Speeds". NHTSA, DOT HS 811 488, junio de 2011):**

32.1 30.6 31.4 30.4 31.0 31.9

El trabajo citado señala que bajo estas condiciones, la distancia máxima permitida es 30. Una gráfica de probabilidad normal valida la suposición de que la distancia de frenado se distribuye normalmente.

a. ¿Sugerirán los datos que la media de la distancia de frenado verdadera supera este valor máximo? Pruebe las hipótesis apropiadas usando $\alpha = .01$.

b. Determine la probabilidad de un error tipo II cuando $\alpha = .01$, $\sigma = 5.65$ y el valor real de μ es 31. Repita este proceso para $\mu = 32$ (use software estadístico o la tabla A.17).

c. Repita el inciso b) usando $\sigma = .80$ y compare los resultados con los del inciso b).

d. ¿Qué tamaño muestral sería necesario para tener $\alpha = .01$ y $\beta = .10$ cuando $\mu = 31$ y $\sigma = .65$?

35. El artículo **"Uncertainty Estimation in Railway Track Life-Cycle Cost" (*J. of Rail and Rapid Transit*, 2009)** presenta los siguientes datos sobre el tiempo de reparación (minutos) de la rotura de un carril alto en una vía curva del tren de cierta línea de ferrocarril.

159 120 480 149 270 547 340 43 228 202 240 218

Una gráfica de probabilidad normal de los datos muestra un patrón bastante lineal, por lo que es factible que la distribución de la población del tiempo de reparación sea al menos aproximadamente normal. La desviación media y la desviación estándar de la muestra son 249.7 y 145.1, respectivamente.

a. ¿Habrá pruebas de peso para concluir que el tiempo medio verdadero de reparación es superior a 200 minutos? Lleve a cabo una prueba de hipótesis con un nivel de significancia de .05.

b. Usando $\sigma = 150$, ¿cuál es la probabilidad de error tipo II de la prueba utilizada en el inciso a) cuando el tiempo promedio verdadero de reparación es en realidad 300 minutos? Es decir, ¿cuál es $\beta(300)$?

36. ¿Alguna vez se ha visto frustrado porque no puede conseguir un contenedor de cierto tipo en el que se pueda liberar la última parte de su contenido? El artículo **"Shake, Rattle, and Squeeze: How Much Is Left in That Container?" (*Consumer Reports*, mayo de 2009: 8)** informa sobre una investigación de este tema para varios productos de consumo. Supongamos se seleccionan al azar cinco tubos de 6.0 onzas de pasta de dientes de una marca en particular y se les oprime hasta que ya no salga más pasta de dientes. Luego, se corta cada tubo y la cantidad restante se pesa, dando lugar a los siguientes datos (en consistencia con lo que informaba el artículo citado): .53, .65, .46, .50, .37. ¿Será que la cantidad promedio restante real es inferior a 10% del contenido neto anunciado?

a. Compruebe la validez de los supuestos necesarios para probar la hipótesis apropiada.

b. Lleve a cabo una prueba de las hipótesis adecuadas con un nivel de significancia de .05. ¿Cambiaría su conclusión si se ha utilizado un nivel de significancia de .01?

c. Describa en contexto los errores tipo I y II, y diga qué error podría haberse cometido para llegar a una conclusión.

37. Los datos que acompañan la fuerza del cubo de compresión (MPa) de probetas de hormigón apareció en el artículo **"Experimental Study of Recycled Rubber-Filled High-Strength Concrete" (*Magazine of Concrete Res.*, 2009: 549-556)**:

112.3 97.0 92.7 86.0 102.0
99.2 95.8 103.5 89.0 86.7

a. ¿Es posible que la resistencia a la compresión para este tipo de concreto tenga una distribución normal?

b. Suponga que el concreto se utilizará para una aplicación particular, a menos que haya una fuerte evidencia de que la fuerza promedio real es inferior a 100 MPa. ¿Podría utilizarse el concreto? Realice una prueba de hipótesis adecuada.

38. Se obtuvo una muestra aleatoria de especímenes de suelo, se determinó la cantidad (%) de materia orgánica presente en el suelo por cada espécimen y se obtuvieron los siguientes datos (tomados de **"Engineering Properties of Soil", *Soil Science*, 1998: 93-102**).

1.10 5.09 0.97 1.59 4.60 0.32 0.55 1.45
0.14 4.47 1.20 3.50 5.02 4.67 5.22 2.69
3.98 3.17 3.03 2.21 0.69 4.47 3.31 1.17
0.76 1.17 1.57 2.62 1.66 2.05

Los valores de la media muestral, la desviación estándar muestral y el error estándar (estimado) de la media son 2.481, 1.616 y .295, respectivamente. ¿Sugieren estos datos que el porcentaje promedio verdadero de materia orgánica presente en el suelo es algún otro diferente de 3%? Realice una prueba de la hipótesis apropiada a un nivel de significancia de .10. ¿Sería diferente su conclusión si se hubiera usado $\alpha = .05$? [*Nota*: Una gráfica de probabilidad normal de los datos muestra un patrón aceptable a la luz del tamaño de la muestra razonablemente grande.]

39. Reconsidere los datos del ejemplo que muestran la proporción de gastos (%) de los fondos de crecimiento de gran capitalización mutua presentados por primera vez en el ejercicio 1.53.

0.52	1.06	1.26	2.17	1.55	0.99	1.10	1.07	1.81	2.05
0.91	0.79	1.39	0.62	1.52	1.02	1.10	1.78	1.01	1.15

Una gráfica de probabilidad normal muestra un patrón bastante lineal.

a. ¿Hay pruebas de peso para concluir que la media poblacional de la proporción de gastos excede 1%? Lleve a cabo una prueba de las hipótesis pertinentes con un nivel de significancia de .01.

b. Volviendo al inciso a), describa en contexto el tipo de errores I y II y diga qué error podría haberse cometido para llegar a su conclusión. La fuente de la cual se obtuvieron los datos informó que $\mu = 1.33$ para la población de los 762 fondos. Así que, ¿habrá cometido un error al llegar a su conclusión?

c. Suponiendo que $\sigma = .5$, determine e interprete la potencia de la prueba en el inciso (a) para el valor real de μ indicado en el inciso b).

40. Los materiales poliméricos compuestos han ganado popularidad porque tienen alta resistencia a las relaciones de peso y su fabricación es relativamente fácil y barata. Sin embargo, su naturaleza no degradable impulsó el desarrollo de materiales compuestos ecológicos con materiales naturales. El artículo **"Properties of Waste Silk Short Fiber/Cellulose Green Composite Films" (*J. of Composite Materials*, 2012: 123-127)** informa que para una muestra de 10 ejemplares con contenido de fibra de 2%, la media de la resistencia a la tracción (MPa) fue de 51.3 y la desviación estándar fue de 1.2. Suponga que se sabe que la fuerza promedio verdadera para 0% fibras (celulosa pura) es 48 MPa. ¿Proporcionarán los datos evidencias convincentes para concluir que la fuerza promedio verdadera para el compuesto de FSM/celulosa supera este valor?

41. Un espectrofotómetro utilizado para medir concentración de CO [ppm (partes por millón) por volumen] es sometido a prueba en cuanto a precisión tomando lecturas de un gas fabricado (llamado gas de ajuste) en el cual la concentración de CO se controla con precisión a 70 ppm. Si las lecturas sugieren que el espectrofotómetro no está funcionando de manera apropiada, este tendrá que volver a calibrarse. Suponga que es adecuadamente calibrado y la concentración medida en las muestras de gas de ajuste está normalmente distribuida. Con base en las seis lecturas: 85, 77, 82, 68, 72 y 69, ¿es necesaria una nueva calibración? Realice una prueba de las hipótesis pertinentes utilizando $\alpha = .05$.

8.4 Pruebas relacionadas con una proporción de población

Sea p la proporción de individuos u objetos en una población que poseen una propiedad especial (p. ej., vehículos con transmisión manual o fumadores que fuman cigarrillos con filtro). Si un individuo u objeto con la propiedad especial es etiquetado como éxito (S), entonces p es la proporción de éxitos de la población. Las pruebas relacionadas con p se basarán en una muestra aleatoria de tamaño n de la población. Siempre que n sea pequeña respecto al tamaño de la población, X (el número de éxitos en la muestra) tiene (aproximadamente) una distribución binomial. Además, si n es grande [$np \geq 10$ y $n(1 - p) \geq 10$], tanto X como el estimador $\hat{p} = X/n$ están normalmente distribuidos en forma aproximada. Primero se consideran pruebas con muestras grandes basadas en este último hecho y luego se acude al caso de la muestra pequeña que usa de modo directo la distribución binomial.

Pruebas con muestra grande

Las pruebas con muestra grande relacionadas con p son un caso especial de los procedimientos con muestra grande para un parámetro θ. Sea $\hat{\theta}$ un estimador de θ que es (al menos de manera aproximada) insesgado y que tiene aproximadamente una distribución normal. La hipótesis nula tiene la forma H_0: $\theta = \theta_0$, donde θ_0 denota un número (el valor nulo)

apropiado al contexto del problema. Suponga que cuando H_0 es verdadera, la desviación estándar de $\hat{\theta}$, $\sigma_{\hat{\theta}}$ no implica parámetros desconocidos. Por ejemplo, si $\theta = \mu$ y $\hat{\theta} = \overline{X}$, $\sigma_{\hat{\theta}} = \sigma_{\overline{X}} = \sigma/\sqrt{n}$, la cual implica parámetros conocidos sólo si se conoce el valor de σ. Al estandarizar $\hat{\theta}$ conforme a la suposición de que H_0 es verdadera (de modo que $E(\hat{\theta}) = \theta_0$) resulta un estadístico de prueba de muestra grande:

$$\text{Estadístico de prueba: } Z = \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{\sigma_{\hat{\theta}}}$$

Si la hipótesis alternativa es H_a: $\theta > \theta_0$, una prueba de cola superior cuyo nivel de significancia es aproximadamente α tiene valor $P = 1 - \Phi(z)$. Las otras dos alternativas, H_a: $\theta < \theta_0$ y H_a: $\theta \neq \theta_0$, se someten a una prueba z de cola inferior y a una prueba z de dos colas, respectivamente.

En el caso $\theta = p$, $\sigma_{\hat{\theta}}$ no implicará parámetros desconocidos cuando H_0 es verdadera, aunque esto es poso usual. Cuando $\sigma_{\hat{\theta}}$ implica parámetros desconocidos, a menudo es posible utilizar una desviación estándar $S_{\hat{\theta}}$ estimada en lugar de $\sigma_{\hat{\theta}}$ y seguir teniendo Z aproximadamente distribuida de manera normal cuando H_0 es verdadera (porque esta sustitución no aumenta mucho la variabilidad en Z). La prueba con muestra grande de la sección previa da un ejemplo de esto: debido a que σ casi siempre es desconocida, se utiliza $s_{\hat{\theta}} = s_{\overline{X}} = s/\sqrt{n}$ en lugar de $\sigma/\sqrt{n}$ en el denominador de z.

El estimador $\hat{p} = X/n$ es insesgado ($E(\hat{p}) = p$) y su desviación estándar es $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{p(1-p)/n}$. Estos hechos se utilizaron en la sección 7.2 para obtener un intervalo de confianza para p. Cuando H_0 es verdadera, $E(\hat{p}) = p_0$ y $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{p_0(1-p_0)/n}$, así $\sigma_{\hat{p}}$ no implica parámetros desconocidos. Se concluye entonces que cuando n es grande y H_0 es verdadera, el estadístico de prueba

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$$

tiene aproximadamente una distribución normal estándar. El valor P para la prueba es entonces un área bajo la curva z, igual que era para μ en el caso de pruebas z de muestras grandes. Su cálculo depende de cuál de las tres desigualdades en H_a se está considerado.

Hipótesis nula: H_0: $p = p_0$

Valor del estadístico de prueba: $z = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$

Hipótesis alternativa	Determinación del valor P
H_a: $p > p_0$	Área bajo la curva normal estándar a la derecha de z
H_a: $p < p_0$	Área bajo la curva normal estándar a la izquierda de z
H_a: $p \neq p_0$	2·(Área bajo la curva normal estándar a la derecha de $\lvert z \rvert$)

Estos procedimientos de prueba son válidos siempre que $np_0 \geq 10$ y $n(1 - p_0) \geq 10$.

Se les refiere como *cola superior*, *cola inferior* y *dos colas*, respectivamente, para las tres hipótesis alternativas diferentes.

EJEMPLO 8.13 El uso de teléfonos celulares durante la clase por parte de los alumnos es percibido por muchos profesores como un distractor molesto pero inofensivo. Sin embargo, usar teléfono celular para enviar mensajes durante un examen es una falta grave de conducta. El artículo **"The Use and Abuse of Cell Phones and Text Messaging During Class: A Survey of College Students" (*College Teaching*, 2012: 1-9)** reporta que 27 de los 267 alumnos en una muestra admitieron haber hecho esto. ¿Puede concluirse a nivel de significancia .001 que más de 5% de todos los estudiantes de la población encuestada han enviado mensajes durante un examen?

1. El parámetro de interés es la proporción p de la población muestreada que ha enviado mensajes durante un examen.
2. la hipótesis nula es H_0: $p = .05$
3. La hipótesis alternativa es H_a: $p > .05$.
4. Ya que $np_0 = 267(.05) = 13.35 \geq 10$ y $nq_0 = 267(.95) = 253.65 \geq 10$, puede utilizarse la prueba de muestra grande z. El valor del estadístico de prueba es $z = (\hat{p} - .05)/\sqrt{(.05)(.95)/n}$.
5. $\hat{p} = 27/267 = .1011$ de la que $z = (.1011 - .05)/\sqrt{(.05)(.95)/267} = .0511/.0133 = 3.84$.
6. El valor P para esta prueba z de cola superior es $1 - \Phi(3.84) < 1 - \Phi(3.49) = .0003$ (el software da .000062).
7. La hipótesis nula es rechazada rotundamente, ya que el valor $P < .0003 \leq .001 = \alpha$. La evidencia para concluir que el porcentaje de la población de estudiantes que envían mensajes durante un examen supera 5% es muy convincente. El resumen del artículo citado contenía el siguiente comentario: "La mayoría de los estudiantes encuestados cree que los instructores son en gran parte inconscientes de hasta qué grado los mensajes de texto y otras actividades de telefonía celular involucran a los estudiantes en el aula". Quizá sea el momento en que profesores, administradores y líderes estudiantiles sean proactivos respecto a este problema. ■

β y determinación del tamaño de la muestra Cuando H_0 es verdadera el estadístico de prueba Z tiene aproximadamente una distribución normal estándar. Suponga ahora que H_0 *no* es verdadera y que $p = p'$. Entonces Z sigue teniendo aproximadamente una distribución normal (porque es una función lineal de $\hat{p}$), pero su media y su varianza ya no son 0 y 1, respectivamente. En su lugar,

$$E(Z) = \frac{p' - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}} \qquad V(Z) = \frac{p'(1 - p')/n}{p_0(1 - p_0)/n}$$

La hipótesis nula no será rechazada si el valor $P > \alpha$. Para una prueba z de cola superior (desigualdad $>$ en H_a), sostuvimos anteriormente que esto es equivalente a $z < z_\alpha$. La probabilidad de un error tipo II es $\beta(p') = P(Z < z_\alpha$ cuando $p = p')$. Esta se puede calcular usando la media y la varianza dadas para estandarizar y después referirse la función de distribución acumulada normal estándar. Además, si se desea que el nivel de prueba α también tenga $\beta(p') = \beta$ para un valor especificado de β, esta ecuación se resuelve para la n necesaria como en la sección 8.2. En el siguiente recuadro se dan expresiones generales para $\beta(p')$ y n.

Hipótesis alternativas	$\beta(p')$
H_a: $p > p_0$	$\Phi\left[\dfrac{p_0 - p' + z_\alpha\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}}{\sqrt{p'(1 - p')/n}}\right]$
H_a: $p < p_0$	$1 - \Phi\left[\dfrac{p_0 - p' - z_\alpha\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}}{\sqrt{p'(1 - p')/n}}\right]$

$$H_a: \quad p \neq p_0 \qquad \Phi\left[\frac{p_0 - p' + z_{\alpha/2}\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}{\sqrt{p'(1-p')/n}}\right] - \Phi\left[\frac{p_0 - p' - z_{\alpha/2}\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}{\sqrt{p'(1-p')/n}}\right]$$

El tamaño de la muestra n con el cual la prueba de nivel α también satisface $\beta(p') = \beta$ es

$$n = \begin{cases} \left[\dfrac{z_\alpha\sqrt{p_0(1-p_0)} + z_\beta\sqrt{p'(1-p')}}{p' - p_0}\right]^2 & \text{prueba de una cola} \\ \left[\dfrac{z_{\alpha/2}\sqrt{p_0(1-p_0)} + z_\beta\sqrt{p'(1-p')}}{p' - p_0}\right]^2 & \text{prueba de dos colas (una solución aproximada)} \end{cases}$$

EJEMPLO 8.14 Un servicio de mensajería anuncia que la menos 90% de todos los paquetes que se reciben en su oficina alrededor de las 9 a.m. para entrega en la misma ciudad son entregados alrededor del mediodía de ese mismo día. Sea p la proporción verdadera de dichos paquetes, que son entregados como se anuncia, y considere las hipótesis H_0: $p = .9$ versus H_a: $p < .9$. Si sólo 80% de los paquetes es entregado como se anuncia, ¿qué tan probable es que una prueba de nivel .01 basada en $n = 225$ paquetes detecte dicho alejamiento de H_0? ¿Cuál debe ser el tamaño de la muestra para garantizar que $\beta(.8) = .01$? Con $\alpha = .01$, $p_0 = .9$, $p' = .8$ y $n = 225$,

$$\begin{aligned}\beta(.8) &= 1 - \Phi\left(\frac{.9 - .8 - 2.33\sqrt{(.9)(.1)/225}}{\sqrt{(.8)(.2)/225}}\right) \\ &= 1 - \Phi(2.00) = .0228\end{aligned}$$

Por tanto, la probabilidad de que H_0 sea rechazada si se realiza la prueba cuando $p = .8$ es .9772; aproximadamente 98% de todas las muestras darán por resultado el rechazo correcto de H_0.

Con $z_\alpha = z_\beta = 2.33$ en la fórmula del tamaño de la muestra se obtiene

$$n = \left[\frac{2.33\sqrt{(.9)(.1)} + 2.33\sqrt{(.8)(.2)}}{.8 - .9}\right]^2 \approx 266$$

■

Pruebas con muestra pequeña

Los procedimientos de prueba cuando el tamaño de muestra n es pequeño están basados directamente en la distribución binomial en lugar de la aproximación normal. Considere la hipótesis alternativa H_a: $p > p_0$ y de nuevo sea X el número de éxitos en la muestra. Entonces X es el estadístico de prueba. Cuando H_0 es verdadera, X tiene una distribución binomial con parámetros n y p_0, por tanto,

$$\begin{aligned}\text{Valor } P &= P(X \geq x \text{ cuando } H_0 \text{ es verdadera}) \\ &= P(X \geq x \text{ cuando } X \sim \text{Bin(n, } p_0)) \\ &= 1 - P(X \geq x - 1 \text{ cuando } X \sim \text{Bin}(n, p_0)) \\ &= 1 - B(x - 1; n, p_0)\end{aligned}$$

Debido a que X tiene una distribución de probabilidad discreta, por lo general no es posible hallar una prueba para la cual P(error de tipo I) sea exactamente el nivel de significancia α deseado (p. ej., .05 o .01; refiérase a la mitad de la página 323 para un ejemplo).

Sea p' un valor alternativo de $p(p' > p_0)$. Cuando $p = p'$, $X \sim \text{Bin}(n, p')$. Entonces la probabilidad de un error tipo II se calcula expresando la condición valor $P > \alpha$ en la forma equivalente $x < c_\alpha$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\beta(p') &= P(\text{error tipo II cuando } p = p') \\ &= P(X < c_\alpha \text{ cuando } X \sim \text{Bin}(n, p')) = B(c_\alpha - 1; n, p')\end{aligned}$$

Es decir, $\beta(p')$ es el resultado de un cálculo de probabilidad binomial directo. El tamaño de muestra n necesario para garantizar que una prueba de nivel α tiene una β especificada con valor alternativo particular p' debe ser determinado mediante ensayo y error, utilizando la función de distribución acumulada binomial.

Los procedimientos de prueba para H_a: $p < p_0$ y para H_a: $p \neq p_0$ se construyen de manera similar. En el primer caso, el valor P es $B(x; n, p_0)$. El valor P cuando la hipótesis alternativa es H_a: $p \neq p_0$ es el doble de la más pequeña de las probabilidades $B(x; n, p_0)$ y $1 - B(x - 1; n, p_0)$.

EJEMPLO 8.15 Un fabricante de plástico desarrolló un nuevo tipo de bote de plástico para la basura y propone venderlo con una garantía incondicional de 6 años. Para ver si esto es factible desde el punto de vista económico, 20 botes prototipo se someten a una prueba acelerada de duración para simular 6 años de uso. La garantía propuesta se modificará sólo si los datos muestrales sugieren fuertemente que menos de 90% de los botes sobrevivirían el periodo de 6 años. Sea p la proporción de todos los botes que sobreviven la prueba acelerada. Las hipótesis pertinentes son H_0: $p = .9$ contra H_a: $p < .9$. La decisión se basará en el estadístico de prueba X, el número entre los 20 que sobreviven. Debido a la desigualdad en H_a cualquier valor más pequeño que el valor observado x es más contradictorio a H_0 que x mismo. Por consiguiente

$$\text{valor } P = P(X) \; P(X \leq x \text{ cuando } H_0 \text{ es verdadera} = B(x, .9)$$

De la tabla A.1 del apéndice, $B(15, 20, .9) = .043$, mientras que $B(16; 20, .9) = .133$. El nivel de significancia factible más cercano a .05, por tanto, es .043. Ya que $B(14; 20, .9) = .011$, H_0 será rechazada en este nivel de significancia si la prueba acelerada da como resultado $x = 14$. Luego sería conveniente modificar la garantía propuesta. Ya que el valor $P \leq .043$ es equivalente a $x \leq 15$, la probabilidad de que un error tipo II para el valor alternativo $p' = .8$ es

$$\begin{aligned}\beta(.8) &= P(H_0 \text{ no es rechazada cuando } X \sim \text{Bin}(20, .8)) \\ &= P(X \geq 16 \text{ cuando } X \sim \text{Bin}(20, 8) \\ &= 1 - B(15; 20, .8) = 1 - .370 = .630\end{aligned}$$

Es decir, cuando $p = .8$, 63% de todas las muestras que constan de $n = 20$ latas dará como resultado que H_0 incorrectamente no se rechace. Esta probabilidad de error es alta porque 20 es una muestra de tamaño pequeño y $p' = .8$ está cerca del valor nulo $p_0 = .9$. ■

EJERCICIOS Sección 8.4 (42–52)

42. Considere usar una prueba z para probar H_0: $p = .6$. Determine el valor P en cada una de las siguientes situaciones.

a. H_a: $p > .6$, $z = 1.47$
b. H_a: $p < .6$, $z = -2.70$
c. H_a: $p \neq .6$, $z = -2.70$
d. H_a: $p < .6$, $z = .25$

43. Una característica común de las personas obesas es que su índice de masa corporal es de al menos 30 [IMC = peso/(altura)^2, donde la altura está en metros y el peso en kilogramos]. El artículo **"The Impact of Obesity on Illness Absence and Productivity in an Industrial Population of Petrochemical Workers"** (***Annals of Epidemiology*, 2008: 8-14**) informa que

en una muestra de mujeres trabajadoras, 262 tenían un índice de masa corporal inferior a 25; 159 tenían IMC de al menos 25 pero no más de 30 y 120 tenían un IMC superior a 30. ¿Habrá pruebas contundentes para concluir que más de 20% de individuos en la población analizada son obesos?

a. Establezca las hipótesis de prueba adecuadas con un nivel de significancia de .05.

b. Explique en el contexto de este escenario qué constituye los errores de tipos I y II.

c. ¿Cuál es la probabilidad de no concluir que más de 20% de la población es obesa cuando el porcentaje real de los individuos obesos es de 25?

44. Un fabricante de baterías de níquel−hidrógeno selecciona al azar 100 placas de níquel para probar las celdas y someterlas a un número especificado de ciclos, y concluye que 14 de ellas tienen burbujas en tales circunstancias.

a. ¿Proporcionará esto una evidencia precisa para concluir que más de 10% de todas las placas tienen burbujas en tales circunstancias? Formule y pruebe las hipótesis apropiadas con un nivel de significancia de .05. Al llegar a su conclusión, ¿qué tipo de error pudo haber cometido?

b. Si realmente es el caso de que 15% de todas las placas tienen burbujas en estas circunstancias y se utiliza un tamaño de muestra de 100, ¿qué tan probable es que la hipótesis nula del inciso a) no sea rechazada por la prueba de nivel .05? Responda esta pregunta para un tamaño de muestra de 200.

c. ¿Cuántas placas tendrían que ser probadas para tener $\beta(.15) = .10$ para la prueba del inciso a)?

45. Una muestra aleatoria de 150 donaciones recientes en un banco de sangre revela que 82 fueron de sangre tipo A. ¿Sugiere esto que el porcentaje real de donaciones tipo A difiere de 40%, el porcentaje de la población que tiene sangre tipo A? Realice una prueba de las hipótesis apropiadas utilizando un nivel de significancia de .01. ¿Habría sido diferente su conclusión si se hubiera utilizado un nivel de significancia de .05?

46. Se sabe que aproximadamente 2/3 de todos los seres humanos tienen un ojo o pie derecho dominantes. ¿Existe también dominio del lado derecho en el acto de besar? El artículo **"Human Behavior: Adult Persistence of Head-Turning Asymmetry" (*Nature*, 2003: 771)** reporta que en una muestra aleatoria de 124 parejas que se besan, ambas personas en 80 de las parejas tendieron a inclinarse más hacia la derecha que hacia la izquierda.

a. Si 2/3 de las parejas que se besan exhiben esta tendencia de inclinarse hacia la derecha, ¿cuál es la probabilidad de que el número en una muestra de 124 que lo hacen así difiera del valor esperado al menos en lo que en realidad se observó?

b. ¿Sugiere este resultado del experimento que la cifra de 2/3 es no factible como comportamiento al besarse? Formule y pruebe las hipótesis apropiadas.

47. El artículo **"Effects of Bottle Closure Type on Consumer Perception of Wine Quality" (*Amer. J. of Enology and Viticulture*, 2007: 182–191)** informa que en una muestra de 106 consumidores de vino, 22 (20.8%) opina que las tapas de rosca son un sustituto aceptable para los corchos naturales. Suponga que una bodega particular decide utilizar tapas de rosca en uno de sus vinos a menos que haya pruebas sólidas que sugieran que un porcentaje inferior a 25% de los consumidores de vino encuentran esto aceptable.

a. Utilizando un nivel de significancia de .10, ¿qué le recomendaría a la bodega?

b. Para la hipótesis probada en el inciso a), describa en el contexto qué tipos de errores I y II serían y diga qué tipo de error pudo haberse cometido.

48. Con la disminución desde hace varios años de las fuentes locales de materiales de construcción, alrededor de 60 000 casas fueron construidas con paneles de yeso chinos importados. De acuerdo con el artículo **"Report Links Chinese Drywall to Home Problems" (*New York Times*, 24 de noviembre de 2009)**, los investigadores federales identificaron una fuerte asociación entre los productos químicos en los paneles de yeso y los problemas eléctricos, y también una fuerte evidencia de dificultades respiratorias debidas a la emisión de gases de sulfuro de hidrógeno. Un examen exhaustivo de 51 casas encontró que en 41 había este tipo de problemas. Suponga que estas 51 fueron muestreadas al azar de la población de todas las casas que tienen paneles de yeso chinos.

a. ¿Los datos proporcionarán una fuerte evidencia para concluir que más de 50% de todas las casas con paneles de yeso chinos tiene problemas eléctricos o ambientales? Realice una prueba de hipótesis usando $\alpha = .01$.

b. Calcule un límite de confianza inferior con un nivel de confianza del 99% para el porcentaje de todos los hogares que tengan problemas eléctricos o ambientales.

c. Si en realidad es el caso que en 80% de todas las casas existen tales problemas, ¿qué tan probable es que la prueba del inciso a) no llegue a la conclusión de que más de 50% los tiene?

49. Una aerolínea desarrolló un club de viajeros ejecutivos sobre la premisa de que 5% de sus clientes actuales satisface los requisitos para la membresía. Una muestra aleatoria de 500 clientes arrojó 40 que calificarían.

a. Con estos datos, pruebe a un nivel de .01 la hipótesis nula de que la premisa de la compañía es correcta contra la alternativa de que no sea correcta.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que cuando se utiliza la prueba del inciso a) la premisa de la compañía será juzgada correcta, cuando en realidad 10% de todos los clientes actuales cumple los requisitos?

50. Cada uno de un grupo de 20 tenistas intermedios recibe dos raquetas, una con cuerdas de nailon y la otra con cuerdas de tripa sintética. Tras varias semanas de jugar con las dos raquetas, a cada jugador se le pide que manifieste preferencia por uno de los dos tipos de cuerdas. Sea p la proporción de todos los jugadores que prefirieron las de tripa y sea X el número de jugadores en la muestra que prefieren las de tripa. Puesto que las cuerdas de tripa son más caras, considere la hipótesis nula de que cuando mucho 50% de todos los jugadores prefiere las cuerdas de tripa. Se simplifica esto a H_0: $p = .5$, planeando rechazar H_0 sólo si la evidencia muestral favorece fuertemente las cuerdas de tripa.

a. ¿Es viable un nivel de significancia de exactamente .05? Si no, ¿cuál es el α más grande menor que .05 factible?

b. Si 60% de todos los fanáticos prefiere las cuerdas de tripa, calcule la probabilidad de un error de tipo II utilizando la región apropiada del inciso a). Repita si 80% de todos los fanáticos prefiere las cuerdas de tripa.

c. Si 13 de los 20 jugadores prefieren las cuerdas de tripa, ¿deberá ser rechazada H_0 si se utiliza el nivel de significancia del inciso a)?

51. Un fabricante de artículos de plomería creó un nuevo tipo de llave de agua sin empaques. Sea $p = P$(en una llave de este tipo, seleccionada al azar, aparecerá una fuga luego de 2 años de uso normal). El fabricante decidió proseguir con la producción a menos que se pueda determinar que p es demasiado grande; el valor límite aceptable de p se especifica como .10. El fabricante decide someter n de estas llaves a una prueba acelerada (simulando de manera aproximada dos años de uso normal). Con X = el número entre las n llaves en las que ocurren fugas antes de que concluya la prueba, la producción arrancará a menos que la X observada sea demasiado grande. Se decidió que si $p = .10$, la probabilidad de no proseguir deberá ser cuando mucho de .10, en tanto que si $p = .30$ la probabilidad de proseguir deberá ser cuando mucho de .10. ¿Se puede utilizar $n = 10$?, ¿$n = 20$?, ¿$n = 25$? ¿Cuáles son las probabilidades de error reales para la n elegida?

52. En una muestra de 171 estudiantes en una universidad australiana que introdujo el uso de un software para detectar de plagio en una serie de cursos, 58 de ellos creen que dicho software acusa injustamente a los estudiantes (**"Student and Staff Perceptions of the Effectiveness of Plagiarism Detection Software,"** ***Australian J. of Educ. Tech.*****, 2008: 222–240).** ¿Sugerirá esto que la mayoría de los estudiantes en la universidad no comparten dicha creencia? Pruebe las hipótesis apropiadas.

8.5 Otros aspectos de las pruebas de hipótesis

Cerramos este capítulo introductorio sobre la prueba de hipótesis considerando brevemente una variedad de problemas que implican el uso de los procedimientos de prueba: la distinción entre significancia estadística y práctica, la relación entre las pruebas y los intervalos de confianza, las implicaciones de pruebas múltiples y un método general para deducir estadísticos de prueba.

Significancia estadística contra práctica

Significancia estadística significa simplemente que la hipótesis nula fue rechazada en el nivel de significancia seleccionado. Es decir, en el juicio del investigador, cualquier discrepancia observada entre los datos y lo que se esperaría fuera H_0 verdadera no puede ser explicada únicamente por la variación de la probabilidad. Sin embargo, un valor de P pequeño, que normalmente indica significancia estadística, puede ser el resultado de un tamaño de muestra grande en combinación con un alejamiento de H_0 que tiene poca **significancia práctica**. En muchas situaciones experimentales sólo los alejamientos de H_0 de gran magnitud serían dignos de detección, mientras que un pequeño alejamiento de H_0 tendría poca significancia práctica.

Por ejemplo, sea μ el cociente intelectual promedio verdadero de todos los niños en la gran ciudad de Euforia. Considere la prueba H_0: $\mu = 100$ versus H_a: $\mu > 100$ suponiendo una distribución normal del cociente intelectual con $\sigma = 15$ (convencionalmente se cree que 100 es el cociente intelectual promedio para todas las personas, por lo que los padres de los niños de Euforia podrían estar eufóricos de que la hipótesis nula sea rechazada). Pero un punto del cociente intelectual no es gran cosa, por lo que el valor $\mu = 101$ ciertamente no representa una salida de H_0, que tiene importancia práctica. Para un tamaño de muestra n razonablemente grande, esta μ conduciría a un valor $\bar{x}$ cercano a 101, por lo que no queremos esta evidencia de la muestra para argumentar fuertemente acerca del rechazo de H_0 cuando se observa $\bar{x} = 101$. Para diferentes tamaños de muestra, la tabla 8.1 registra el valor P cuando $\bar{x} = 101$, así como la probabilidad de no rechazar H_0 en el nivel de .01 cuando $\mu = 101$.

La segunda columna en la tabla 8.1 muestra que incluso con tamaños de muestra moderadamente grandes, el valor P de $\bar{x} = 101$ es un fuerte argumento en favor del rechazo

Tabla 8.1 Ilustración del efecto del tamaño de la muestra en los valores P y β

n	Valor n cuando $\bar{x} = 101$	$\beta(101)$ para una prueba de nivel .01
25	.3707	.9772
100	.2514	.9525
400	.0918	.8413
900	.0228	.6293
1600	.0038	.3707
2500	.0004	.1587
5000	.0000012	.0087
10000	.0000000	.0000075

de H_0, en tanto que el valor $\bar{x}$ observado por sí mismo sugiere que, en términos prácticos, el valor verdadero de μ difiere poco del valor nulo $\mu_0 = 100$. La tercera columna señala que incluso cuando existe poca diferencia práctica entre la μ verdadera y el valor nulo, con un nivel de significancia fijo un tamaño de muestra grande casi siempre conduce al rechazo de la hipótesis nula a ese nivel. En resumen, *se debe tener especial cautela al interpretar evidencia cuando el tamaño de muestra es grande, puesto que cualquier alejamiento pequeño de H_0 casi con seguridad será detectado por una prueba, aunque tal alejamiento pueda tener poca significancia práctica.*

La relación entre los intervalos de confianza y pruebas de hipótesis

Supongamos que la variable estandarizada $Z = (\hat{\theta} - \theta)/\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}$ tiene (al menos aproximadamente) una distribución normal estándar. El área de la curva central z capturada entre -1.96 y 1.96 es .95 (y el área restante de .05 se divide igualmente entre las dos colas, proporcionando el área de .025 en cada una). Esto implica que un intervalo de confianza para θ con el nivel de confianza 95% es $\hat{\theta} \pm 1.96\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}$.

Ahora considere la prueba H_0: $\theta = \theta_0$ contra H_a: $\theta \neq \theta_0$ en el nivel de significancia .05 usando el estadístico de prueba $Z = (\hat{\theta} - \theta_0)/\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}$. La frase "prueba z" implica que cuando la hipótesis nula es verdadera Z tiene (al menos aproximadamente) una distribución normal estándar. Así que el valor P será dos veces el área bajo la curva z a la derecha de $|z|$. Este valor P será menor o igual a .05, lo que permite el rechazo de la hipótesis nula, si y sólo si $z \geq 1.96$ o $z \leq -1.96$. La hipótesis nula, por tanto, no será rechazada si $-1.96 < z < 1.96$.

Sustituyendo la fórmula para z en este último sistema de desigualdades y manejarlas para despejar θ_0 da el sistema equivalente $\hat{\theta} - 1.96\hat{\sigma}_{\hat{\theta}} < \theta_0 < \hat{\theta} + 1.96\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}$. El límite inferior de este sistema es sólo el extremo izquierdo del intervalo de confianza 95%, y el límite superior es el extremo derecho del intervalo. Lo que esto dice es que no se rechazará la hipótesis nula solamente si y sólo si el valor nulo θ_0 se encuentra en el intervalo de confianza. Suponga, por ejemplo, que la muestra de datos produce el intervalo de confianza de 95% (68.6, 72.0). Entonces la hipótesis nula H_0: $\theta = 70$ no puede ser rechazada en el nivel de significancia .05 porque 70 se encuentra en el intervalo de confianza. Pero la hipótesis nula H_0: $\theta = 65$ puede ser rechazada porque 65 no se encuentra en el intervalo de confianza. Hay una relación análoga entre un intervalo de confianza de 99% y una prueba con nivel de significancia .01, no se puede rechazar la hipótesis nula si el valor nulo se encuentra en el intervalo de confianza y se debe rechazar si el valor nulo está fuera del intervalo de confianza. Existe una dualidad entre un intervalo de confianza bilateral con nivel de confianza $100(1 - \alpha)\%$ y la conclusión de una prueba de dos colas con un nivel de significancia α.

Ahora consideremos la prueba H_0: $\theta = \theta_0$ contra la alternativa H_a: $\theta > \theta_0$ en el nivel de significancia .01. Debido a la desigualdad H_a, el valor P es el área bajo la curva z a la derecha de la z calculada. El valor crítico de z de 2.33 captura el área de la cola superior .01. Por tanto, el valor P (área de cola superior capturada) será a lo más .01 si y sólo si

$z \geq 2.33$; no podremos rechazar la hipótesis nula si y sólo si $z < 2.33$. Otra vez hay que sustituir la fórmula para z en esta desigualdad y manejarla algebraicamente para despejar θ_0 lo que da la desigualdad equivalente $\hat{\theta} - 2.33\hat{\sigma}_{\hat{\theta}} < \theta_0$. El límite inferior de esta desigualdad es el límite de confianza inferior para θ con un nivel de confianza de 99%. Así la hipótesis nula no se rechazará al nivel de significancia .01 si y sólo si el valor nulo excede el límite inferior del intervalo de confianza. Así, hay una dualidad entre un límite inferior del intervalo de confianza y la conclusión de una prueba de cola superior. Por esta razón el paquete de software Minitab producirá un límite menor del intervalo de confianza cuando se realiza una prueba de cola superior. Si, por ejemplo, el límite inferior del intervalo de confianza de 90% es 25.3, es decir, $25.3 < \theta$ con nivel de confianza 90%, entonces no podríamos rechazar H_0: $\theta = 26$ versus H_a: $\theta > 26$ en el nivel de significancia .10 pero sería capaz de rechazar la H_0: $\theta = 24$ en favor de la H_a: $\theta > 24$. Existe una dualidad análoga entre un límite superior del intervalo confianza y la conclusión de una prueba de cola menor. Y hay relaciones análogas para pruebas t y los intervalos de confianza t o sus límites.

PROPOSICIÓN

Sea $(\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U)$ un intervalo de confianza para θ con el nivel de confianza $100(1 - \alpha)\%$. Entonces una prueba de H_0: $\theta = \theta_0$ contra H_a: $\theta \neq \theta_0$ con nivel de significancia α rechaza la hipótesis nula si el valor nulo θ_0 no está incluido en el intervalo de confianza y no rechaza H_0 si el valor nulo se encuentra en el intervalo de confianza. Existe una relación análoga entre un límite inferior del intervalo de confianza y una prueba de cola superior y también entre un límite superior del intervalo de confianza y una prueba de cola inferior.

A la luz de estas relaciones es tentador realizar una prueba de hipótesis mediante el cálculo de los intervalos de confianza o límites de confianza correspondientes. ¡No caiga en la tentación! En su lugar realice un análisis más informativo por determinar e informar el valor P.

Prueba simultánea de varias hipótesis

Muchos publicaron artículos informando resultados de algo más que una sola prueba de hipótesis. Por ejemplo, el artículo **"Distributions of Compressive Strength Obtained from Various Diameter Cores" (*ACI Materials J.*, 2012: 597–606)** considera la factibilidad de las distribuciones de Weibull, normales y lognormal como modelo para la distribución de resistencia a la compresión bajo diferentes condiciones experimentales. La tabla 3 de dicho artículo reportó valores P exactos para un total de 71 diferentes pruebas.

Considere dos pruebas diferentes, una para un par de hipótesis sobre una media de la población y otra para un par de hipótesis sobre una proporción de la población; por ejemplo, la longitud del ala media para mariposas monarca adultas y la proporción de escolares que son obesos en un estado particular. Suponga que la muestra utilizada para el primer par de hipótesis de prueba se selecciona independientemente de que se utilice para probar el segundo par. Entonces si cada prueba se realiza en el nivel de significancia .05 (probabilidad .05 de error tipo I),

$$\begin{aligned} &P(\text{al menos se comete un error tipo I}) = 1 - P(\text{no se cometen errores del tipo I}) \\ &= 1 - P(\text{no hay error tipo I en la primera prueba}) \cdot P(\text{no hay error tipo I en la segunda prueba}) \\ &= 1 - (.95)^2 = 1 - .9025 = .0975 \end{aligned}$$

Por tanto, la probabilidad de cometer al menos un error tipo I cuando se realizan dos pruebas independientes es mucho mayor que la probabilidad de que un error tipo I sea el resultado de una sola prueba. Si se realizan tres pruebas independientemente, cada uno en el nivel de significancia .05, entonces la probabilidad de que al menos se haya cometido un error tipo I es $1 - (95)^3 = .1426$. Claramente, puesto que el número de pruebas aumenta, la probabilidad de cometer al menos un error tipo I es mayor y de hecho se acerca a 1.

Suponga que queremos que la probabilidad de cometer al menos un error tipo I en dos pruebas independientes sea .05, una tasa de error *experimental* de .05. Entonces el nivel de significancia para cada prueba debe ser inferior a .05:

$$.05 = 1 - (1 - \alpha)^2 \Rightarrow 1 - \alpha = \sqrt{.95} = .975 \Rightarrow \alpha = .025$$

Si la probabilidad de cometer al menos un error tipo I en tres ensayos independientes es .05, el nivel de significancia para cada uno debe ser .017 (al sustituir la raíz cuadrada por la raíz cúbica en el argumento anterior). A medida que aumenta el número de pruebas, el nivel de significancia para cada una debe disminuir a 0 para mantener una tasa de error experimental de .05.

Con frecuencia no es razonable suponer que las distintas pruebas son independientes una de otra. En el ejemplo citado al principio de esta subsección se realizaron cuatro diferentes pruebas, con base en la misma muestra, que implican un determinado tipo de hormigón en combinación con un diámetro de base específico y su relación longitud diámetro. Entonces no es claro cómo se relaciona la tasa de error experimental con el nivel de significancia para cada prueba individual. Sea A_i el evento en que en la $i-$ésima prueba se presenta un error tipo I. Entonces en el caso de k pruebas,

$$\begin{aligned} &P(\text{al menos un error tipo I}) \\ &\quad = P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) \leq P(A_1) + \cdots + P(A_k) = k\alpha \end{aligned}$$

(a la desigualdad en el último renglón se le llama *desigualdad de Bonferroni*; puede probarse por inducción sobre k). Así, un nivel de significancia de $.05/k$ para cada prueba asegurará que el nivel de significancia experimental sea a lo más .05.

Una vez más la idea central aquí es que para que se reduzca la probabilidad de al menos un error tipo I entre k pruebas, el nivel de significancia para cada prueba individual debe ser bastante pequeño. Si el nivel de significancia para cada prueba individual es .05, incluso con un moderado número de pruebas, es bastante probable que se cometerá al menos un error tipo I. Es decir, con $\alpha = .05$ para cada prueba, cuando cada hipótesis nula es realmente verdadera, es bastante probable que al menos una de las pruebas dé un resultado estadísticamente significativo. Por esta razón se debe ver con escepticismo un resultado estadísticamente significativo cuando se realizan muchas pruebas utilizando uno de los niveles de significancia tradicionales.

Principio del cociente de verosimilitud

Los procedimientos de análisis presentados en este y en los capítulos siguientes (al menos en su mayor parte) serán intuitivamente razonables. Pero hay muchas situaciones que se presentan en la práctica donde la intuición no es una guía confiable para la obtención de un estadístico de prueba. Ahora, describamos una estrategia general para este propósito. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ las observaciones en una muestra aleatoria de tamaño n de una distribución de probabilidad $f(x; \theta)$. La distribución conjunta evaluada en estos valores de la muestra es el producto $f(x_1; \theta) \cdot f(x_2; \theta) \cdot \cdots \cdot f(x_n; \theta)$. Tal como en el análisis de la estimación de máxima verosimilitud la *función de verosimilitud* es esta distribución conjunta, considerada como una función de θ. Considere que la prueba H_0: θ está en Ω_0 versus H_a: θ está en Ω_a, donde Ω_0 y Ω_a son disjuntos (por ejemplo, H_0: $\theta \leq 100$ contra H_a: $\theta > 100$). La construcción de la prueba del **principio del cociente de verosimilitud** es la siguiente:

1. Encuentre la probabilidad máxima para cualquier θ en Ω_0 (encuentre la estimación de máxima verosimilitud dentro de Ω_0 y sustitúyala en la función de verosimilitud).
2. Encuentre la probabilidad máxima para cualquier θ en Ω_a.
3. Forme el cociente

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\text{probabilidad máxima para } \theta \text{ en } \Omega_0}{\text{probabilidad máxima para } \theta \text{ en } \Omega_a}$$

Al cociente $\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ se le llama *valor estadístico del cociente de probabilidades*. Intuitivamente, entre menor sea el valor de λ, más fuerte es la evidencia contra H_0. Se puede, por ejemplo, demostrar que para probar H_0: $\mu \leq \mu_0$ versus H_a: $\mu > \mu_0$ en caso de población normal, un valor pequeño de λ es equivalente a un valor grande de t. Así, la prueba t de una muestra proviene de aplicar el principio de la razón de verosimilitud. Hacemos hincapié en que una vez que se ha seleccionado un estadístico de prueba, cuando H_0 es verdadera, se requiere su distribución para determinar el valor P; ¡la teoría estadística nos debe rescatar otra vez!

El principio del cociente de verosimilitud puede aplicarse también cuando los X_i tienen diferentes distribuciones e incluso cuando son dependientes, aunque la función de verosimilitud puede ser complicada en estos casos. En los capítulos siguientes se presentarán muchos de los procedimientos de prueba que se obtienen a partir del principio de la razón de verosimilitud. A menudo estas pruebas resultan de minimizar β entre todas las pruebas que tienen la α deseada, así que son realmente mejores pruebas. Para más detalles y algunos ejemplos trabajados consulte alguna de las referencias listadas en la bibliografía del capítulo 6.

Una limitación práctica es que, para la construcción del estadístico de prueba del principio del cociente de verosimilitud, se debe especificar la forma de distribución de probabilidad de la cual proviene la muestra. La deducción de la prueba t a partir del principio del cociente de verosimilitud requiere suponer una función de distribución de probabilidad normal. Si un investigador está dispuesto a suponer que la distribución es simétrica, pero no quiere ser específico acerca de su forma exacta (como la normal, uniforme o de Cauchy), entonces falla el principio porque no hay manera de escribir una función de distribución de probabilidad común simultáneamente válida para todas las distribuciones simétricas. En el capítulo 15 presentamos varios procedimientos de prueba **libres de distribución**, llamados así porque la probabilidad de que se cometa un error tipo I es controlada simultáneamente para muchas diferentes distribuciones subyacentes. Estos procedimientos son útiles cuando el investigador cuenta con un conocimiento limitado de la distribución subyacente. También examinaremos los criterios para la selección de un procedimiento de prueba cuando hay disponibles varios candidatos razonables, y comentaremos acerca de los resultados de varios procedimientos cuando se viola una suposición subyacente tal como la normalidad.

EJERCICIOS Sección 8.5 (53–56)

53. Reconsidere el problema de secado de pintura que se estudió en el ejemplo 8.5. Las hipótesis fueron H_0: $\mu = 75$ versus H_a: $\mu < 75$, suponiendo que el valor de σ es 9.0. Considere el valor alternativo $\mu = 74$, que en el contexto del problema presumiblemente no sería un alejamiento prácticamente significativo de H_0.

- **a.** Con una prueba de nivel .01, calcule β para esta alternativa con tamaños de muestra $n = 100$, 900 y 2500.
- **b.** Si el valor observado de $\overline{X}$ es $\overline{x}$, ¿qué puede decir sobre el valor P resultante cuando $n = 2500$? ¿Serán los datos estadísticamente significativos con cualquiera de los valores estándar de α?
- **c.** ¿Realmente preferiría utilizar un tamaño de muestra de 2500 junto con una prueba de nivel .01 (haciendo caso omiso del costo de semejante experimento)? Explique.

54. Considere la prueba de nivel .01 de muestra grande en la sección 8.4 para probar H_0: $p = .2$ contra H_a: $p > .2$.

- **a.** Para el valor alternativo $p = .21$, calcule $\beta(.21)$ con tamaños de muestra $n = 100$, 2500, 10 000, 40 000 y 90 000.
- **b.** Para $\hat{p} = x/n = .21$, calcule el valor P cuando $n = 100$, 2500, 10 000 y 40 000.
- **c.** En la mayoría de las situaciones, ¿sería razonable utilizar una prueba de nivel .01 junto con un tamaño de muestra de 40 000? ¿Por qué sí o por qué no?

55. Considere realizar m pruebas de hipótesis basadas en muestras independientes, cada una en el nivel de significancia .01 (exactamente).

- **a.** ¿Cuál es la probabilidad de cometer al menos un error tipo I cuando $m = 5$? ¿Y cuándo $m = 10$?
- **b.** ¿Cuántas de esas pruebas se necesitarían para que la probabilidad de cometer al menos un error tipo I fuera al menos de .5?

56. Se calculó un intervalo de confianza de 95% para el promedio de curvatura verdadero (mm) de hojas laminadas en condiciones determinadas como (1.81, 1.95), con base en una muestra de tamaño $n = 15$ y la suposición de que la cantidad de alabeo se distribuya normalmente.

- **a.** Suponga que se quiere probar H_0: $\mu = 2$ versus H_a: $\mu \neq 2$ usando $\alpha = .05$. ¿Qué conclusión sería apropiada y por qué?
- **b.** Si desea utilizar un nivel de significancia de .01 para la prueba en a), qué conclusión sería apropiada?

EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS (57–80)

57. Una muestra de 50 lentes utilizados en anteojos aporta un espesor medio muestral de 3.05 mm y una desviación estándar muestral de .34 mm. El espesor promedio verdadero deseado de los lentes es de 3.20 mm. ¿Sugerirán fuertemente los datos que el espesor promedio verdadero de los lentes es algún otro diferente del deseado? Haga la prueba con $\alpha = .05$.

58. En el ejercicio 57 suponga que el experimentador creía antes de recopilar los datos que el valor de σ era aproximadamente de .30. Si el experimentador deseó que la probabilidad de un error tipo II fuera de .05 cuando $\mu = 3.00$, ¿era innecesariamente grande un tamaño de muestra 50?

59. Se especificó que cierto tipo de hierro debía contener .85 g de silicio por cada 100 g de hierro (.85%). Se determinó el contenido de silicio de cada uno de los 25 especímenes seleccionados al azar y se obtuvieron los siguientes resultados con Minitab, a partir de una prueba de las hipótesis apropiadas.

```
Variable    N    Mean   StDev  SE Mean     T     P
sil cont   25  0.8880  0.1807   0.0361  1.05  0.30
```

a. ¿Cuáles hipótesis se probaron?

b. ¿A qué conclusión llegaría con un nivel de significancia de .05 y por qué? Responda la misma pregunta para un nivel de significancia de .10.

60. Un método de enderezar alambre antes de enrollarlo para fabricar resortes se llama "enderezado con rodillos". El artículo **"The Effect of Roller and Spinner Wire Straightening on Coiling Performance and Wire Properties" (*Springs*, 1987: 27–28)** reporta sobre las propiedades de la tensión del alambre. Suponga que se selecciona una muestra de 16 alambres y cada uno se somete a prueba para determinar su resistencia a la tensión (N/mm^2). La media y la desviación estándar muestrales resultantes son 2160 y 30, respectivamente.

a. La resistencia media a la tensión de resortes hechos mediante una máquina enderezadora rotatoria es de 2150 N/mm^2. ¿Qué hipótesis deberán ser probadas para determinar si la resistencia media a la tensión del método de rodillos excede de 2150?

b. Suponiendo que la distribución de la resistencia a la tensión es aproximadamente normal, ¿qué estadístico de prueba utilizaría para probar la hipótesis del inciso a)?

c. ¿Cuál es el valor del estadístico de prueba con estos datos?

d. ¿Cuál es el valor P con el valor del estadístico de prueba calculado en el inciso c)?

e. Con una prueba de nivel .05, ¿a qué conclusión llegaría?

61. La contaminación de los suelos de minas en China es un grave problema ambiental. El artículo **"Heavy Metal Contamination in Soils and Phytoaccumulation in a Manganese Mine Wasteland, South China" (*Air, Soil, and Water Res.*, 2008: 31–41)** informa que, para una muestra de 3 especímenes de suelo de cierta área restaurada de minería, la media de la concentración total de la muestra de Cu fue 45.31 mg/kg, con un correspondiente error estándar (estimado) de la media de 5.26. Se menciona también que el valor histórico en China de esta concentración fue de 20. Los resultados de diversas pruebas estadísticas descritas en el artículo se basan en el supuesto de normalidad.

a. ¿Proporcionarán los datos una fuerte evidencia para concluir que la concentración real promedio en la región de la muestra supera el valor histórico planteado? Lleve a cabo una prueba al nivel de significancia .01 utilizando el método de valor P. ¿Le sorprende el resultado? Explique.

b. Volviendo a la prueba del inciso a), ¿qué tan probable es que el valor P sea al menos .01 cuando la concentración promedio real es de 50 y la verdadera desviación estándar de la concentración es de 10?

62. El artículo **"Orchard Floor Management Utilizing Soil Applied Coal Dust for Frost Protection" (*Agri. and Forest Meteorology*, 1988: 71–82)** reporta los siguientes valores de flujo de calor a través del suelo de ocho solares cubiertos con polvo de hulla.

34.7 35.4 34.7 37.7 32.5 28.0 18.4 24.9

El flujo de calor medio a través del suelo en solares cubiertos sólo con césped es de 29.0. Suponiendo que la distribución del flujo de calor es aproximadamente normal, ¿sugieren los datos que el polvo de hulla es eficaz para incrementar el flujo medio de calor sobre el del césped? Pruebe las hipótesis apropiadas con $\alpha = .05$.

63. El artículo **"Caffeine Knowledge, Attitudes, and Consumption in Adult Women" (*J. of Nutrition Educ.*, 1992: 179–184)** reporta los siguientes datos sobre consumo diario de cafeína para una muestra de mujeres adultas: $n = 47$, $\bar{x} = 215$ mg, $s = 235$ mg y rango 5–1176.

a. ¿Parece posible que la distribución de la población de consumo diario de cafeína sea normal? ¿Es necesario suponer una distribución de población normal para probar hipótesis acerca del valor del consumo medio de la población? Explique su razonamiento.

b. Suponga que antes se creía que el consumo medio era cuando mucho de 200 mg. ¿Contradicen los datos dados esta creencia previa? Pruebe las hipótesis apropiadas a nivel de significancia de .10.

64. El volumen de negocios anual de un fondo de inversión es el porcentaje de los activos de un fondo que se venden en un año determinado. En términos generales, un fondo con un valor bajo de volumen de negocios es más estable y contrario al riesgo, mientras que un valor alto de volumen de negocios indica una cantidad sustancial de compra y venta en un intento de tomar ventaja de las fluctuaciones del mercado a corto plazo. Los siguientes son los valores del volumen de negocios para una muestra de 20 fondos de gran capitalización combinados (véase el ejercicio 1.53 para un poco más de información), extraídos de **Morningstar.com**:

1.03	1.23	1.10	1.64	1.30	1.27	1.25	0.78	1.05	0.64
0.94	2.86	1.05	0.75	0.09	0.79	1.61	1.26	0.93	0.84

a. ¿Usaría la prueba t de una muestra para decidir si existen pruebas convincentes para concluir que la población media del volumen de negocios es inferior a 100%? Explique.

b. Una gráfica de probabilidad normal del 20 ln(el volumen de negocios) de los valores muestra un patrón lineal muy pronunciado, lo que sugiere que es razonable suponer que la distribución del volumen de negocios es lognormal. Recuerde que X tiene una distribución logarítmica normal si $\ln(X)$ es una distribución normal con media μ y varianza σ^2. Puesto que μ también es la mediana de la distribución $\ln(X)$, e^{μ} es la mediana de la distribución X. Utilice esta información para decidir si existen pruebas convincentes para concluir que la mediana de la distribución de la población del volumen de negocios es inferior a 100%.

65. Se supone que la resistencia a la ruptura promedio verdadera de aislantes de cerámica de cierto tipo es al menos de 10 lb/pulg^2. Se utilizará para una aplicación particular a menos que los datos muestrales indiquen concluyentemente que esta especificación no ha sido satisfecha. Una prueba de hipótesis con $\alpha = .01$ tiene que basarse en una muestra aleatoria de diez aislantes. Suponga que la distribución de resistencia a la ruptura es normal con desviación estándar desconocida.

a. Si la desviación estándar verdadera es de .80, ¿qué tan probable es que los aislantes sean juzgados satisfactorios cuando la resistencia a la ruptura promedio verdadera es en realidad de sólo 9.5? ¿Y cuando sólo es de 9.0?

b. ¿Qué tamaño de muestra sería necesario para tener 75% de posibilidad de detectar que la resistencia a la ruptura promedio verdadera es de 9.5 cuando la desviación estándar verdadera es de .80?

66. Las siguientes observaciones sobre el tiempo de permanencia del fuego (segundos) en tiras de ropa de dormir para niños tratada aparecieron en el artículo **"An Introduction to Some Precision and Accuracy of Measurement Problems" (*J. of Testing and Eval.*, 1982: 132–140)**. Suponga que se asignó por encargo un tiempo de permanencia del fuego promedio verdadero de cuando mucho 9.75. ¿Sugieren los datos que esta condición no se ha cumplido? Realice una prueba apropiada después de investigar la factibilidad de las suposiciones que fundamentan su método de inferencia.

9.85	9.93	9.75	9.77	9.67	9.87	9.67
9.94	9.85	9.75	9.83	9.92	9.74	9.99
9.88	9.95	9.95	9.93	9.92	9.89	

67. Se cree que la incidencia de un tipo de cromosoma defectuoso en la población de varones adultos estadounidenses es de 1 en 75. Una muestra aleatoria de 800 individuos en instituciones penitenciarias estadounidenses revela que 16 tienen tales defectos. ¿Se puede concluir que la proporción de incidencia de este defecto entre los prisioneros difiere de la proporción supuesta para toda la población de varones adultos?

a. Formule y pruebe las hipótesis pertinentes con $\alpha = .05$. ¿Qué tipo de error podría haber cometido al llegar a una conclusión?

b. ¿Qué valor P está asociado con esta prueba? Basado en este valor P, ¿podría H_0 ser rechazada a un nivel de significancia de .20?

68. En una investigación de la toxina producida por una serpiente venenosa, un investigador preparó 26 frascos, cada uno con 1 g de la toxina y luego determinó la cantidad de antitoxina necesaria para neutralizar la toxina. Se encontró que la cantidad promedio muestral de antitoxina necesaria era de 1.89 mg y la desviación estándar muestral era de .42. Una investigación previa indicó que la cantidad neutralizante promedio verdadera fue de 1.75 mg/g de toxina. ¿Contradicen estos datos nuevos el valor sugerido por la investigación previa? Pruebe la hipótesis pertinente. ¿Dependerá la validez de su análisis de cualquier suposición sobre la distribución de la población de cantidad neutralizante? Explique.

69. La resistencia a la compresión no restringida promedio muestral de 45 especímenes de un tipo particular de ladrillos resultó ser de 3107 lb/pulg^2 y la desviación estándar muestral fue de 188. La distribución de la resistencia a la compresión no restringida puede ser un tanto asimétrica. ¿Indican los resultados fuertemente que la resistencia a la compresión no restringida promedio verdadera es menor que el valor de diseño de 3200? Haga la prueba con $\alpha = .001$.

70. El 30 de diciembre de 2009 el *New York Times* informó que en una encuesta de 948 adultos estadounidenses que señalaron estar al menos un poco interesados en el futbol universitario, 597 dijeron que el actual Bowl Championship System (B.C.S) debería ser sustituido por una eliminatoria similar a la utilizada en el baloncesto universitario. ¿Aportará esto pruebas convincentes para concluir que la mayoría de todos los individuos están a favor de la sustitución del B.C.S. con una eliminatoria? Pruebe la hipótesis apropiada utilizando el nivel de significancia de .001.

71. Cuando $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables de Poisson independientes, cada una con parámetro μ, y la n es grande, la media muestral $\overline{X}$ tiene aproximadamente una distribución normal con $\mu = E(\overline{X})$ y $V(\overline{X}) = \mu/n$. Esto implica que

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\mu/n}}$$

tiene aproximadamente una distribución normal estándar. Para probar H_0: $\mu = \mu_0$, se puede reemplazar μ con μ_0 en la ecuación para Z a fin de obtener un estadístico de prueba. Normalmente se prefiere este estadístico al estadístico de muestra grande con denominador $S/\sqrt{n}$ (cuando las X_i son de Poisson) porque está explícitamente hecho a la medida de la suposición de Poisson. Si el número de solicitudes de consultoría recibidas por cierto estadístico durante una semana de trabajo de 5 días tiene una distribución de Poisson, y el número total de solicitudes de consultoría durante 36 semanas es de 160, ¿sugiere esto que el número promedio verdadero de solicitudes semanales excede de 4.0? Haga la prueba con $\alpha = .02$.

72. Un artículo en el ejemplar del 11 de noviembre de 2005 del ***Tribune de San Luis Obispo*** reporta que los investigadores que realizan compras aleatorias en tiendas Wal-Mart en California encontraron que los escáneres dan el precio equivocado 8.3% del tiempo. Suponga que esto se basó en 200 compras. El National Institute for Standards and Technology (NIST) comenta que a la larga cuando mucho dos de 100 artículos deberían tener precios incorrectamente escaneados.

a. Elabore un procedimiento de prueba con un nivel de significancia de (aproximadamente) .05 y luego realice la prueba para decidir si la referencia del NIST no se cumple.

b. Con el procedimiento de prueba empleado en a), ¿cuál es la probabilidad de decidir que la referencia del NIST ha sido satisfecha cuando en realidad la proporción de errores es de 5%?

73. El artículo **"Heavy Drinking and Polydrug Use Among College Students" (*J. of Drug Issues*, 2008: 445-466)** señala que 51 de los 462 estudiantes universitarios en una muestra tenían una vida de abstinencia de alcohol. ¿Proporcionará esto una fuerte evidencia para concluir que más de 10% de la población analizada se abstuvo por completo del consumo de alcohol? Pruebe las hipótesis apropiadas. [*Nota:* El artículo utiliza los métodos estadísticos más avanzados para estudiar el uso de diversos medicamentos entre los estudiantes clasificados como bebedores leves, moderados y fuertes.]

74. El artículo **"Analysis of Reserve and Regular Bottlings: Why Pay for a Difference Only the Critics Claim to Notice?" (*Chance*, verano de 2005, págs. 9-15)** reportó sobre un experimento para investigar si los catadores de vino podían distinguir entre vinos de reserva más caros y sus contrapartes regulares. El vino fue presentado a los catadores en cuatro recipientes marcados A, B, C y D dos de ellos con el vino de reserva y los otros dos con el vino regular. Cada catador seleccionó al azar tres de los recipientes, degustó los vinos seleccionados e indicó cuál de los tres creía que era diferente de los otros dos. De los $n = 855$ ensayos de degustación, 346 dieron por resultado la distinción correcta (el de reserva que difería de los dos vinos regulares o el vino regular que difería de dos reservas). ¿Proporcionará esto evidencia contundente para concluir que los catadores de este tipo tienen capacidad para distinguir entre vinos de reserva y regulares? Formule y pruebe las hipótesis pertinentes con el método del valor P. ¿Se siente particularmente impresionado con la capacidad de los catadores de distinguir entre los dos tipos de vino?

75. La Academia Americana de Pediatría recomienda un nivel de vitamina D de al menos 20 ng/ml para los bebés. El artículo **"Vitamin D and Parathormone Levels of Late-Preterm Formula Fed Infants During the First Year of Life" (*European J. of Clinical Nutr.*, 2012: 224–230)** informa que en una muestra de 102 niños prematuros calificados con peso adecuado para su edad gestacional, la media muestral del nivel de vitamina D a las 2 semanas era 21, con una desviación estándar muestral de 11. ¿Proporcionará esto evidencia convincente de que la media poblacional del nivel de vitamina D para estos recién nacidos supera 20? Pruebe las hipótesis pertinentes con un nivel de significancia de .10

76. El capítulo 7 presentó un intervalo de confianza para la varianza σ^2 de una distribución de población normal. El resultado clave allí fue que la variable aleatoria $\chi^2 = (n-1)S^2/\sigma^2$ tiene una distribución ji-cuadrada con $n - 1$ grados de libertad. Considere la hipótesis nula H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ (de forma equivalente, $\sigma = \sigma_0$). Luego, cuando H_0 es verdadera, el estadístico de prueba tiene una distribución ji-cuadrada con $n - 1$ grados de libertad. Si la alternativa pertinente es H_a: $\sigma^2 < \sigma_0^2$, el valor P es el área bajo la curva χ^2 con $n - 1$ grados de libertad a la derecha del valor calculado χ^2. Para garantizar características razonablemente uniformes en una aplicación particular se desea que la desviación estándar verdadera del punto de ablandamiento de cierto tipo de alquitrán de petróleo sea cuando mucho de .50°C. Se determinaron los puntos de ablandamiento de diez diferentes especímenes y se obtuvo una desviación estándar muestral de .58°C. ¿Contradice esto fuertemente la especificación de uniformidad? Pruebe las hipótesis apropiadas con $\alpha = .01$. [*Sugerencia:* Consulte la tabla A.11.]

77. Remitiéndose al ejercicio 76 suponga que un investigador desea probar H_0: $\sigma^2 = .04$ contra H_a: $\sigma^2 < .04$ basado en una muestra de 21 observaciones. El valor calculado de $20s^2/.04$ es 8.58. Ponga límites en el valor P y luego llegue a una conclusión al nivel .01. [*Sugerencia*: Consulte la tabla A.7]

78. Cuando la distribución de la población es normal y n es grande, la desviación estándar muestral S tiene aproximadamente una distribución normal con $E(S) \approx \sigma$ y $V(S) = \sigma^2/(2n)$. Ya se sabe que en este caso, con cualquier n, $\overline{X}$ es normal con $E(\overline{X}) = \mu$ y $V(\overline{X}) = \sigma^2/n$.

a. Suponiendo que la distribución subyacente es normal, ¿cuál es un estimador aproximadamente insesgado del 99° percentil $\theta = \mu + 2.33\sigma$?

b. Cuando las X_i son normales, se puede demostrar que $\overline{X}$ y S son variables aleatorias independientes (una mide la ubicación mientras que la otra mide la dispersión). Use esto para calcular $V(\hat{\theta})$ y $\sigma_{\hat{\theta}}$ para el estimador $\hat{\theta}$ del inciso a). ¿Cuál es el error estándar estimado $\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}$?

c. Escriba un estadístico de prueba para probar H_0: $\theta = \theta_0$, que tiene aproximadamente una distribución estándar normal cuando H_0 es verdadera. Si el pH del suelo está normalmente distribuido en cierta región y 64 muestras de suelo dan $\bar{x} = 6.33$, $s = .16$, ¿proporcionará esto una fuerte evidencia para concluir que cuando mucho 99% de todas las muestras posibles tendrán un pH de menos de 6.75? Pruebe con $\alpha = .01$.

79. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución exponencial con parámetro λ. En ese caso se puede demostrar que $2\lambda\Sigma X_i$ tiene una distribución ji-cuadrada con $\nu = 2n$ (demuestre primero que $2\lambda X_i$ tiene distribución ji-cuadrada con $\nu = 2$).

a. Use este hecho para obtener un estadístico de prueba y probar que H_0: $\mu = \mu_0$. Después explique cómo determinaría el valor P cuando la hipótesis alternativa es H_0: $\mu < \mu_0$. [*Sugerencia*: $E(X_i) = \mu = 1/\lambda$, de modo que $\mu = \mu_0$ equivale a $\lambda = 1/\mu_0$.]

b. Suponga que se prueban diez componentes idénticos que tienen un tiempo exponencialmente distribuido hasta la falla. Los tiempos de falla resultantes son

95 16 11 3 42 71 225 64 87 123

Use el procedimiento de prueba del inciso a) para decidir si los datos sugieren fuertemente que la vida útil promedio verdadera es menor que el valor antes señalado de 75. [*Sugerencia*: Consulte la tabla A.7.]

80. Debido a la variabilidad en el proceso de fabricación el punto de rendimiento real de una muestra de acero suave sometida a un esfuerzo creciente normalmente diferirá del punto de rendimiento teórico. Sea p la proporción verdadera de las muestras que ceden antes de su punto de rendimiento teórico. Si basándose en una muestra se concluye que más de 20% de todos los especímenes ceden antes del punto teórico, el proceso de producción tendrá que ser modificado.

a. Si 15 de 60 especímenes ceden antes del punto teórico, ¿cuál es el valor P cuando se utiliza la prueba apropiada y qué le aconsejaría hacer a la compañía?

b. Si el porcentaje verdadero de "rendimientos tempranos" es en realidad de 50% (de modo que el punto teórico sea la mediana de la distribución de rendimiento) y se utiliza una prueba de nivel .01, ¿cuál es la probabilidad de que la compañía concluya que es necesario modificar el proceso?

BIBLIOGRAFÍA

Véanse las bibliografías al final de los capítulos 6 y 7.

Inferencias basadas en dos muestras

9

INTRODUCCIÓN

Los capítulos 7 y 8 presentaron intervalos de confianza (IC) y procedimientos de prueba de hipótesis para una sola media μ, una sola proporción p y una sola varianza σ^2. En este capítulo se amplían estos métodos a situaciones que implican las medias, las proporciones y las varianzas de dos distribuciones de población diferentes. Por ejemplo, sea μ_1 la dureza Rockwell promedio verdadera de especímenes de acero térmicamente tratados y μ_2 la dureza promedio verdadera de especímenes laminados en frío. Entonces es posible que un investigador desee utilizar muestras de observaciones de dureza de cada tipo de acero como base para calcular una estimación de intervalo de $\mu_1 - \mu_2$, la diferencia entre las dos durezas promedio verdaderas. Como otro ejemplo, sea p_1 la proporción verdadera de celdas de níquel-cadmio producidas en las condiciones de producción actuales defectuosas a causa de cortos internos y sea p_2 la proporción verdadera de celdas con cortos internos producidas en condiciones de operación modificadas. Si el razonamiento en cuanto a las condiciones modificadas es reducir la proporción de celdas defectuosas, un ingeniero de calidad desearía utilizar información muestral para probar la hipótesis nula H_0: $p_1 - p_2 = 0$ (es decir, $p_1 = p_2$) contra la hipótesis alternativa H_a: $p_1 - p_2 > 0$ (es decir, $p_1 > p_2$).

En la sección 9.1 se presentan los intervalos z y las pruebas para hacer inferencias sobre la diferencia entre las medias de dos poblaciones (por ejemplo, los procedimientos desarrollados comenzando con una variable estandarizable que tiene al menos una distribución aproximadamente normal estándar). Los procedimientos t de dos muestras, utilizados para hacer inferencias sobre $\mu_1 - \mu_2$ son la base de la sección 9.2. la validez de los métodos descritos en las primeras dos secciones depende de la selección de las muestras a partir de dos poblaciones independientes una de la otra. Comúnmente, en la práctica, los datos se colectan en pares. Por ejemplo, una muestra de individuos puede ser seleccionada, una medición de algún tipo puede hacerse antes de aplicar un tratamiento, y después se hace otra medición después de la aplicación del tratamiento. El análisis de dichos datos apareados se describe en la sección 9.3. La sección 9.4

considera las inferencias sobre una diferencia entre las proporciones de dos poblaciones, y la sección 9.5 hace lo mismo para la relación entre las varianzas de una población o sus desviaciones estándar.

9.1 Pruebas *z* e intervalos de confianza para una diferencia entre dos medias de población

Las inferencias discutidas en esta sección se refieren a una diferencia $\mu_1 - \mu_2$ entre las medias de dos distribuciones de población diferentes. Un investigador, por ejemplo, deseará probar hipótesis respecto a la diferencia entre las resistencias a la ruptura promedio verdaderas de dos tipos distintos de cartón corrugado. Una de esas hipótesis formularía que $\mu_1 - \mu_2 = 0$, es decir, que $\mu_1 = \mu_2$. Alternativamente, puede ser apropiado estimar $\mu_1 - \mu_2$ calculando un intervalo de confianza de 95%. Estas inferencias están basadas en una muestra de observaciones de resistencia de cada tipo de cartón.

Suposiciones básicas

1. $X_1, X_2, \ldots, X_m$ es una muestra aleatoria de una distribución con media μ_1 y varianza σ_1^2.
2. $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ es una muestra aleatoria de una distribución con media μ_1 y varianza σ_2^2.
3. Las muestras X y Y son independientes entre sí.

El uso de m para el número de observaciones en la primera muestra y n el número de observaciones en la segunda muestra permite que los dos tamaños de la muestra sean diferentes. A veces esto se debe a que es más difícil o caro muestrear una población que otra. En otras situaciones, inicialmente puede especificarse igual tamaño de muestra, pero por razones más allá del alcance del experimento, el tamaño de las muestras reales puede diferir. Por ejemplo, el resumen del artículo **"A Randomized Controlled Trial Assessing the Effectiveness of Professional Oral Care by Dental Hygienists" (*Intl. J. of Dental Hygiene*, 2008: 63–67)** señala: "Cuarenta pacientes fueron asignados al azar al grupo POC ($m = 20$) o el grupo control ($n = 20$). Un paciente del grupo POC y tres del grupo control se retiraron debido a la exacerbación de la enfermedad subyacente o la muerte". El análisis de los datos se basó entonces en $m = 19$ y $n = 16$.

El estimador natural de $\mu_1 - \mu_2$ es $\overline{X} - \overline{Y}$, la diferencia entre las medias muestrales correspondientes. Procedimientos inferenciales se basan en estandarizar este estimador, así que se requieren expresiones para el valor esperado y la desviación estándar de $\overline{X} - \overline{Y}$.

PROPOSICIÓN

El valor esperado de $\overline{X} - \overline{Y}$ es $\mu_1 - \mu_2$, así que $\overline{X} - \overline{Y}$ es un estimador insesgado de $\mu_1 - \mu_2$. La desviación estándar de $\overline{X} - \overline{Y}$ es

$$\sigma_{\overline{X}-\overline{Y}} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}$$

Demostración Estos dos resultados dependen de las reglas de valor esperado y varianza, presentados en el capítulo 5. Puesto que el valor esperado de una diferencia es la diferencia de valores esperados,

$$E(\overline{X} - \overline{Y}) = E(\overline{X}) - E(\overline{Y}) = \mu_1 - \mu_2$$

Debido a que las muestras X y Y son independientes, $\overline{X}$ y $\overline{Y}$ son cantidades independientes, así que la varianza de la diferencia es la *suma* de $V(\overline{X})$ y $V(\overline{Y})$:

$$V(\overline{X} - \overline{Y}) = V(\overline{X}) + V(\overline{Y}) = \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}$$

La desviación estándar de $\overline{X} - \overline{Y}$ es la raíz cuadrada de esta expresión. ■

Si se piensa en $\mu_1 - \mu_2$ como un parámetro θ, entonces su estimador es $\hat{\theta} = \overline{X} - \overline{Y}$ con desviación estándar $\sigma_{\hat{\theta}}$ dada por la proposición. Cuando tanto σ_1^2 como σ_2^2 tienen valores conocidos, el valor de esta desviación estándar puede ser calculado. Las varianzas muestrales deben ser utilizadas para estimar $\sigma_{\hat{\theta}}$ cuando σ_1^2 y σ_2^2 son desconocidas.

Procedimientos de prueba para poblaciones normales con varianzas conocidas

En los capítulos 7 y 8 el primer intervalo de confianza y el procedimiento de prueba para una media de población μ se basaron en la suposición de que la distribución de la población era normal con el valor de la varianza de población σ^2 conocido por el investigador. Asimismo, primero se supone que *ambas* distribuciones de población son normales y que los valores de *ambos*, es decir, tanto de σ_1^2 como de σ_2^2 son conocidos. En breve se presentarán situaciones en las cuales una o ambas suposiciones pueden ser eximidas.

Puesto que las distribuciones de población son normales, tanto $\overline{X}$ como $\overline{Y}$ tienen distribuciones normales. Por otra parte, la independencia de las dos muestras implica que las dos medias son independientes una de otra. Esto implica que $\overline{X} - \overline{Y}$ está normalmente distribuida con valor esperado $\mu_1 - \mu_2$ y desviación estándar $\sigma_{\overline{X}-\overline{Y}}$ dada en la proposición precedente. Al estandarizar $\overline{X} - \overline{Y}$ se obtiene la variable normal estándar

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} \tag{9.1}$$

En un problema de prueba de hipótesis, la hipótesis nula formulará que $\mu_1 - \mu_2$ tiene un valor específico. Si Δ_0 denota este valor nulo, se tiene H_0: $\mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$. Con frecuencia $\Delta_0 = 0$, en cuyo caso H_0 dice que $\mu_1 = \mu_2$. Si μ_1 representa el valor real de la eficiencia de un combustible (mpg) para automóviles de cierto tipo equipados con un motor de seis cilindros y si μ_2 representa la eficiencia promedio verdadera para automóviles del mismo tipo equipados con un motor de cuatro cilindros, una hipótesis nula sensible de interés podría ser H_0: $\mu_1 - \mu_2 = -3$. Esta es una elegante manera de decir que en promedio la eficiencia de combustible para los motores de 4 cilindros es 3 mpg más alta que para los motores de seis cilindros.

Considere la hipótesis alternativa H_a: $\mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$. Un valor $\overline{x} - \overline{y}$ que exceda considerablemente de Δ_0 (el valor esperado de $\overline{X} - \overline{Y}$ cuando H_0 es verdadera) proporciona evidencia en contra de H_0 y en favor de H_a. Este valor de $\overline{x} - \overline{y}$ corresponde a un valor positivo y grande del estadístico de prueba. Esto implica que si las medias muestrales calculadas y los tamaños de muestra se sustituyen en la fórmula para Z y el valor

resultante es z, entonces los valores para H_0 más contradictorios que z son aquellos mayores a z. Por tanto

$$\begin{aligned}\text{Valor } P &= P(\text{obtener un valor en la prueba estadística que sea al menos tan contradictorio con } z \text{ cuando } H_0 \text{ es verdadera})\\ &= P(\text{una variable aleatoria normal estándar es} \geq z)\\ &= \text{el área bajo la curva normal estándar a la derecha de } z\\ &= 1 - \Phi(z)\end{aligned}$$

El procedimiento de prueba en este caso es de *cola superior*, ya que el valor P es un área de curva z de cola superior.

Cuando la hipótesis alternativa contiene la desigualdad $<$, los valores de los estadísticos de prueba más contradictorios a H_0 que z mismo son aquellos menores a z. El valor P es entonces el área bajo la curva normal a la izquierda de z; la prueba es entonces de *cola inferior*. Finalmente, si aparece una desigualdad $\neq$ en H_a entonces los valores tanto más grandes que $|z|$ como más pequeños que $|z|$ son más contradictorios a H_0 que z misma (el valor absoluto alrededor de z toma en cuenta el caso en el que z es positiva así como en el que es negativa). En consecuencia el valor P es la suma del área bajo la curva normal estándar a la izquierda de $-|z|$ y el área a la derecha de $|z|$, esto es una prueba de *dos colas*. La suma del área de dos colas es la misma que el resultado de duplicar el área de la cola capturada.

Hipótesis nula: H_0: $\mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$

Valor del estadístico de prueba: $z = \dfrac{\bar{x} - \bar{y} - \Delta_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m} + \dfrac{\sigma_2^2}{n}}}$

Hipótesis alternativa	Determinación del valor P
H_a: $\mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$	Área bajo la curva normal estándar a la derecha de z
H_a: $\mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$	Área bajo la curva normal estándar a la izquierda de z
H_a: $\mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$	$2 \cdot$ (área bajo la curva normal estándar a la derecha de $\lvert z \rvert$)

Suposiciones: Dos distribuciones de población normal con valores conocidos de σ_1 y σ_2, dos muestras aleatorias independientes.

EJEMPLO 9.1 Un análisis de una muestra aleatoria compuesta de $m = 20$ especímenes de acero laminado en frío para determinar las resistencias a ceder dio por resultado una resistencia promedio muestral de $\bar{x} = 29.8$ kilo libras/pulg^2. Una segunda muestra aleatoria de $n = 25$ especímenes bilaterales de acero galvanizado dio una resistencia promedio muestral de $\bar{y} = 34.7$ kilo libras/pulg^2. Suponiendo que las dos distribuciones de resistencia a ceder son normales con $\sigma_1 = 4.0$ y $\sigma_2 = 5.0$ (sugeridas por una gráfica en el artículo **"Zinc–Coated Sheet Steel: An Overview", *Automotive Engr.*, diciembre de 1984: 39–43**), ¿indicarán los datos que las resistencias a ceder promedio verdaderas μ_1 y μ_2 son diferentes? Realice una prueba a un nivel de significancia $\alpha = .01$.

1. El parámetro de interés es $\mu_1 - \mu_2$, la diferencia entre las resistencias promedio verdaderas de los dos tipos de acero.
2. La hipótesis nula es H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$.

3. La hipótesis alternativa es H_a: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$; si H_a es verdadera, entonces μ_1 y μ_2 son diferentes.
4. Con $\Delta_0 = 0$, el valor del estadístico de prueba es

$$z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}}$$

5. Al sustituir $m = 20$, $\bar{x} = 29.8$, $\sigma_1^2 = 16.0$, $n = 25$, $\bar{y} = 34.7$ y $\sigma_2^2 = 25.0$ en la fórmula para z se obtiene

$$z = \frac{29.8 - 34.7}{\sqrt{\frac{16.0}{20} + \frac{25.0}{25}}} = \frac{-4.90}{1.34} = -3.66$$

   Es decir, el valor observado de $\bar{x} - \bar{y}$ está a más de tres desviaciones estándar por debajo de lo que era de esperarse si H_0 fuera verdadera.
6. La desigualdad $\neq$ en H_a implica que una prueba de dos colas es apropiada. El valor P es

$$2[1 - \Phi(3.66)] \approx 2(0) = 0 \quad \text{(el software da como resultado .00025)}$$

7. Dado que el valor $P \approx 0 \leq .01 = \alpha$, H_0 es, por consiguiente, rechazada al nivel .01 a favor de la conclusión de que $\mu_1 \neq \mu_2$. De hecho, con un valor P así de pequeño la hipótesis nula sería rechazada en *cualquier* nivel de significancia. Los datos muestrales sugieren fuertemente que la resistencia a ceder promedio verdadera del acero laminado en frío difiere de la del acero galvanizado. ■

Utilizar una comparación para identificar la causalidad

A los investigadores a menudo les interesa comparar el efecto de dos tratamientos diferentes en una respuesta, o la respuesta después de un tratamiento con la respuesta sin tratamiento (tratamiento contra control). Si los individuos u objetos que van a ser utilizados en la comparación no son asignados por los investigadores a las dos diferentes condiciones, se dice que el estudio es **observacional**. La dificultad de sacar conclusiones con base en un estudio observacional es que aunque el análisis estadístico puede indicar una diferencia significativa de respuesta entre los dos grupos, la diferencia puede deberse a algunos factores subyacentes que no habían sido controlados en lugar de a cualquier diferencia en los tratamientos.

EJEMPLO 9.2 Una carta que aparece publicada en el ***Journal of the American Medical Association* (19 de mayo de 1978)** reporta que de 215 médicos que se graduaron en Harvard y murieron entre noviembre de 1974 y octubre de 1977, 125 en servicio de tiempo completo vivieron un promedio de 48.9 años después de su graduación, en tanto que 90 con afiliaciones académicas vivieron un promedio de 43.2 años después de su graduación. ¿Sugieren estos datos que la vida media después de la graduación de los doctores en práctica completa excede la vida media de aquellos que tienen afiliación académica? (De ser así, aquellos estudiantes que "mueren por lograr una afiliación académica" pueden estar más cerca de la verdad de lo que piensan, en otras palabras, ¿"publicar o perecer" es en realidad "publicar y perecer"?)

Sea μ_1 el número del promedio verdadero de años vividos después de la graduación de los médicos en práctica completa, y μ_2 la misma cantidad de los médicos con afiliación académica. Suponga que los 125 y los 90 médicos son muestras aleatorias de las poblaciones 1 y 2, respectivamente (lo cual puede no ser razonable si hay motivos para creer que los graduados de Harvard poseen características especiales que los diferencia de todos los

demás médicos; en este caso las inferencias se limitarían sólo a las "poblaciones Harvard"). La carta en la que aparecen los datos no da información sobre varianzas, por tanto, a modo de ilustración suponga que $\sigma_1 = 14.6$ y $\sigma_2 = 14.4$. Las hipótesis son H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ contra H_a: $\mu_1 - \mu_2 > 0$, de modo que Δ_0 es cero. El valor calculado del estadístico de prueba es

$$z = \frac{48.9 - 43.2}{\sqrt{\dfrac{(14.6)^2}{125} + \dfrac{(14.4)^2}{90}}} = \frac{5.70}{\sqrt{1.70 + 2.30}} = 2.85$$

El valor P para una prueba de cola superior es $1 - \Phi(2.85) = .0022$. A un nivel de significancia de .01, H_0 es rechazada (porque $\alpha >$ valor P) en favor de la conclusión de que $\mu_1 - \mu_2 > 0$ ($\mu_1 > \mu_2$). Esto es compatible con la información que se reporta en la carta.

Estos datos derivaron de un estudio observacional **retrospectivo**; el investigador no comenzó seleccionando una muestra de doctores y asignando algunos al tratamiento de "afiliación académica" y a los demás al tratamiento de "práctica de tiempo completo", en lugar de ello identificó miembros de los dos grupos regresando un poco en el tiempo (¡mediante obituarios!), incluso revisando registros del pasado. ¿Puede ser el resultado estadísticamente significativo atribuido en realidad a una diferencia en el tipo de práctica médica después de la graduación, o existe algún otro factor subyacente (p. ej., edad al momento de la graduación, regímenes de ejercicio, etc.) que pudiera proporcionar también una explicación factible para la diferencia? Se han utilizado estudios observacionales para argumentar en cuanto a un vínculo causal entre el tabaquismo y el cáncer de pulmón. Existen muchos estudios que demuestran que la incidencia de cáncer de pulmón es significativamente más alta entre fumadores que entre no fumadores. No obstante, los individuos habían decidido convertirse en fumadores mucho antes de que los investigadores aparecieran en la escena y los factores para tomar esta decisión pueden haber desempeñado un rol causal en la aparición de cáncer de pulmón. ■

Cuando los investigadores asignan sujetos a los dos tratamientos de una manera aleatoria se obtiene un **experimento controlado aleatorizado**. Cuando se observa significancia estadística en dicho experimento, el investigador y otras partes interesadas tendrán más confianza en la conclusión de que la diferencia en la respuesta ha sido provocada por una diferencia en los tratamientos. Un ejemplo muy famoso de este tipo de experimento y conclusión es el experimento de la vacuna Salk contra la polio, descrito en la sección 9.4. Estos temas se estudian con mayor amplitud en los libros (no matemáticos) de Moore y de Freedman y colaboradores, que se mencionan en las referencias del capítulo 1.

β y la opción del tamaño de la muestra

La probabilidad de un error de tipo II es fácil de calcular cuando ambas distribuciones de población son normales con valores conocidos de σ_1 y σ_2. Considere el caso en el cual la hipótesis alternativa es H_a: $\mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$. Sea Δ' un valor de $\mu_1 - \mu_2$ que excede Δ_0 (un valor con el cual H_0 es falsa). Al igual que con las pruebas z de cola superior del capítulo 8, la desigualdad de valor $P \leq \alpha$ es equivalente a $z \geq z_\alpha$ (el área bajo la cola superior de la curva z será como máximo α si y sólo si la z calculada está en o a la derecha del valor crítico z bajo el área α). Esto a su vez es equivalente a $\bar{x} - \bar{y} \geq \Delta_0 + z_\alpha \sigma_{\bar{X} - \bar{Y}}$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\beta(\Delta') &= P(\text{no rechazar } H_0 \text{ cuando } \mu_1 - \mu_2 = \Delta') \\ &= P(\bar{X} - \bar{Y} < \Delta_0 + z_\alpha \sigma_{\bar{X} - \bar{Y}} \text{ cuando } \mu_1 - \mu_2 = \Delta')\end{aligned}$$

Cuando $\mu_1 - \mu_2 = \Delta'$, $\bar{X} - \bar{Y}$ está normalmente distribuida con media Δ' y desviación estándar $\sigma_{\bar{X} - \bar{Y}}$ (la misma desviación estándar como cuando H_0 es verdadera); al usar estos valores para estandarizar la desigualdad entre paréntesis se obtiene la probabilidad deseada.

Hipótesis alternativa	$\beta(\Delta') = P$(error de tipo II cuando $\mu_1 - \mu_2 = \Delta'$)
$H_a: \mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$	$\Phi\left(z_\alpha - \dfrac{\Delta' - \Delta_0}{\sigma}\right)$
$H_a: \mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$	$1 - \Phi\left(-z_\alpha - \dfrac{\Delta' - \Delta_0}{\sigma}\right)$
$H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$	$\Phi\left(z_{\alpha/2} - \dfrac{\Delta' - \Delta_0}{\sigma}\right) - \Phi\left(-z_{\sigma/2} - \dfrac{\Delta' - \Delta_0}{\sigma}\right)$

donde $\sigma = \sigma_{\overline{X}-\overline{Y}} = \sqrt{(\sigma_1^2/m) + (\sigma_2^2/n)}$

EJEMPLO 9.3 (Continuación del ejemplo 9.1)

Suponga que cuando μ_1 y μ_2 (las resistencias a ceder promedio verdaderas de los dos tipos de acero) difieren cuando mucho en 5, la probabilidad de detectar este alejamiento de H_0 (el poder de la prueba) debe ser de .90. ¿Satisface esta condición una prueba a nivel .01 con tamaños de muestra $m = 20$ y $n = 25$? El valor de σ con estos tamaños de muestra (el denominador de z) se calculó previamente como 1.34. La probabilidad de un error de tipo II con la prueba a nivel .01 de dos colas cuando $\mu_1 - \mu_2 = \Delta' = 5$ es

$$\begin{aligned}\beta(5) &= \Phi\left(2.58 - \frac{5-0}{1.34}\right) - \Phi\left(-2.58 - \frac{5-0}{1.34}\right)\\ &= \Phi(-1.15) - \Phi(-6.31) = .1251\end{aligned}$$

Es fácil verificar que también $\beta(-5) = .1251$ (porque la región de rechazo es simétrica). Por consiguiente, la potencia es $1 - \beta(5) = .8749$. Debido a que este valor es un poco menor que .9, se deberán utilizar tamaños de muestra un poco más grandes. ■

Tal como en el capítulo 8, se pueden determinar tamaños de muestra m y n que satisfagan tanto P(error de tipo I) = una α especificada y P(error de tipo II cuando $\mu_1 - \mu_2 = \Delta'$) = una β especificada. Para una prueba de cola superior, la igualación de la expresión previa para $\beta(\Delta')$ al valor especificado de β da

$$\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n} = \frac{(\Delta' - \Delta_0)^2}{(z_\alpha + z_\beta)^2}$$

Cuando los dos tamaños de muestra son iguales, esta ecuación da

$$m = n = \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)(z_\alpha + z_\beta)^2}{(\Delta' - \Delta_0)^2}$$

Estas expresiones también son correctas para una prueba α cola inferior, en tanto que α es reemplazada por $\alpha/2$ para una prueba de dos colas.

Pruebas con muestra grande

Las suposiciones de distribuciones de población normal y los valores conocidos de σ_1 y σ_2 afortunadamente son innecesarios cuando ambos tamaños de muestra son suficientemente grandes. En este caso, el teorema del límite central garantiza que $\overline{X} - \overline{Y}$ tenga de manera aproximada una distribución normal independientemente de las distribuciones de pobla-

ción subyacentes. Además, con S_1^2 y S_2^2 en lugar de σ_1^2 y σ_2^2 en la expresión (9.1) se obtiene una variable cuya distribución es aproximadamente normal estándar:

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{m} + \frac{S_2^2}{n}}}$$

Al reemplazar $\mu_1 - \mu_2$ con Δ_0 se obtiene un estadístico de prueba con muestra grande, el valor esperado de $\overline{X} - \overline{Y}$ cuando H_0 es verdadera. Este estadístico Z tiene aproximadamente una distribución estándar normal cuando H_0 es verdadera lo cual permite la determinación directa de un valor P como un área de curva z.

El uso del valor estadístico de prueba

$$z = \frac{\bar{x} - \bar{y} - \Delta_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{m} + \frac{s_2^2}{n}}}$$

junto con las regiones de rechazo de colas superior, inferior y de dos colas antes formuladas basadas en valores críticos z da pruebas con muestra grande cuyos niveles de significancia son aproximadamente α. Estas pruebas son apropiadas de modo normal si $m > 40$ y $n > 40$.

EJEMPLO 9.4 ¿Qué impacto tiene el consumo de comida rápida en diferentes dietas y tener salud? El artículo **"Effects of Fast–Food Consumption on Energy Intake and Diet Quality Among Children in a National Household Study" (*Pediatrics*, 2004: 112–118)** reporta el resumen de datos que acompaña a la ingesta diaria de calorías, tanto para una muestra de adolescentes que dijeron no consumir comida rápida y otra muestra de adolescentes que señalaron que sí acostumbran consumir comida rápida.

Consumen comida rápida	Tamaño de la muestra	Media de la muestra	DE de las muestras
No	663	2258	1519
Sí	413	2637	1138

¿Proporcionarán estos datos una fuerte evidencia para concluir que la ingesta promedio de calorías real para los adolescentes que suelen consumir comida rápida, excede en más de 200 calorías por día el consumo promedio real de aquellos que normalmente no ingieren comida rápida? Vamos a investigar mediante la realización de una prueba de hipótesis en un nivel de significancia de aproximadamente .05.

El parámetro de interés es $\mu_1 - \mu_2$, donde μ_1 es la ingesta media de calorías real para los adolescentes que no suelen ingerir comida rápida y μ_2 es el consumo real promedio de los adolescentes que suelen ingerir comida rápida. Las hipótesis de interés son

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = -200 \text{ contra } H_a: \mu_1 - \mu_2 < -200$$

La hipótesis alternativa afirma que el verdadero consumo promedio diario de los que suelen consumir comida rápida supera al de aquellos que no ingieren más de 200 calorías. El valor del estadístico de prueba es

$$z = \frac{\bar{x} - \bar{y} - (-200)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{m} + \frac{s_2^2}{n}}}$$

El valor del estadístico de prueba calculado es

$$z = \frac{2258 - 2637 + 200}{\sqrt{\dfrac{(1519)^2}{663} + \dfrac{(1138)^2}{413}}} = \frac{-179}{81.34} = -2.20$$

La desigualdad en H_a implica que el valor P para la prueba es $= \Phi(-2.20) = .0139$ (una prueba de cola inferior). Ya que $.0139 \leq .05$, volvemos a rechazar la hipótesis nula. Al nivel de significancia .05 parece que el promedio real de ingesta de calorías para adolescentes que suelen consumir comida rápida, excede por más de 200 el valor promedio real de ingesta para aquellos que no suelen consumir dicha comida. Sin embargo, el valor P no es lo suficientemente pequeño como para justificar el rechazo de H_0 al nivel de significancia .01.

Tenga en cuenta que si la etiqueta 1 se utilizó para la condición de la comida rápida y la 2, para la condición de ausencia de comida rápida, entonces 200 han sustituido -200 en ambas hipótesis y H_a habría contenido la desigualdad $>$, lo que implica una prueba de cola superior. El valor del estadístico de prueba resultante habría sido 2.20, dando como antes el mismo valor P. ■

Intervalos de confianza para $\mu_1 - \mu_2$

Cuando ambas distribuciones de población son normales la estandarización de $\overline{X} - \overline{Y}$ da una variable aleatoria Z con distribución normal estándar. Puesto que el área bajo la curva z entre $-z_{\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2}$ es $1 - \alpha$, se deduce que

$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m} + \dfrac{\sigma_2^2}{n}}} < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

La manipulación de las desigualdades entre paréntesis para despejar a $\mu_1 - \mu_2$ da la formulación de probabilidad equivalente

$$P\left(\overline{X} - \overline{Y} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} < \mu_1 - \mu_2 < \overline{X} - \overline{Y} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Esto implica que un intervalo de confianza de $100(1 - \alpha)\%$ para $\mu_1 - \mu_2$ tiene un límite inferior $\overline{x} - \overline{y} - z_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\overline{X} - \overline{Y}}$ y uno superior $\overline{x} - \overline{y} + z_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\overline{X} - \overline{Y}}$ donde $\sigma_{\overline{X} - \overline{Y}}$ es la expresión de la raíz cuadrada. Este intervalo es un caso especial de la fórmula general $\hat{\theta} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\hat{\theta}}$

Si tanto m como n son grandes, el teorema del límite central implica que este intervalo es válido incluso sin la suposición de población normal; en este caso, el intervalo de confianza es *aproximadamente* de $100(1 - \alpha)\%$. Además, el uso de las varianzas muestrales S_1^2 y S_2^2 en la variable estandarizada Z da un intervalo válido en el cual s_1^2 y s_2^2 reemplazan a σ_1^2 y σ_2^2.

Siempre que m y n sean grandes, un intervalo de confianza para $\mu_1 - \mu_2$ con un nivel de confianza de aproximadamente $100(1 - \alpha)\%$ es

$$\overline{x} - \overline{y} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{m} + \frac{s_2^2}{n}}$$

donde $-$ da el límite inferior y $+$ es el límite superior del intervalo. Un límite de confianza superior o inferior también puede ser calculado reteniendo el signo apropiado ($+$ o $-$) reemplazando $z_{\alpha/2}$ con z_α.

Una regla empírica estándar para caracterizar tamaños de muestra tan grandes es $m > 40$ y $n > 40$.

EJEMPLO 9.5 La técnica de recuperación de petróleo mejorada utiliza vapor el cual es llevado a la zona de producción. El anillo entre la formación rocosa y la cubierta metálica de la tubería está lleno de cemento. El artículo **"Thermal Stability of the Cement Sheath in Steam Treated Oil Wells" (*J. of the Amer. Ceramic Soc.*, 2011: 4463–4470)** reporta un estudio sobre el desempeño de la cobertura de cemento cuando se curan diferentes tipos de cementos térmicos a 35°C y posteriormente se calientan a 230°C. Aquí se muestra un resumen de los datos de dureza de Vicker (MPa) para ambos cementos, tanto el control como el experimental:

Tipo	Tamaño de muestra	Media de la muestra	DE de la muestra
Control	50	24.3	5.2
Experimental	50	27.0	5.8

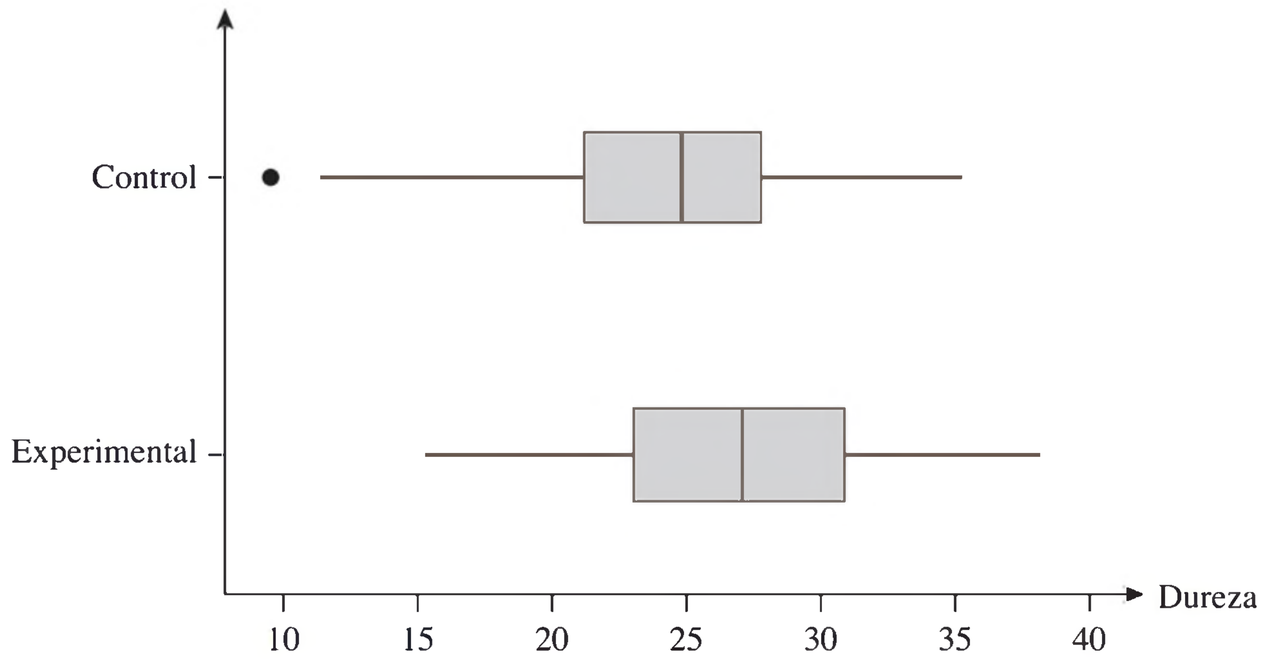


Figura 9.1 Gráfica de caja comparativa de los datos de resistencia al esfuerzo cortante

Calcule ahora un intervalo de confianza para la diferencia entre el promedio real de la dureza para el cemento control (μ_1) y el promedio verdadero de la dureza para el cemento experimental (μ_2) con un nivel de confianza de 95%:

$$24.3 - 27.0 \pm (1.96)\sqrt{\frac{(5.2)^2}{50} + \frac{(5.8)^2}{50}} = -2.7 \pm (1.96)(1.1016)$$

$$= -2.7 \pm 2.2 = (-4.9, -.5)$$

Es decir, con confianza de 95%, $-4.9 < \mu_1 - \mu_1 < -.5$. Por consiguiente se puede estar muy confiado en que el promedio verdadero de la dureza para el cemento experimental excede la del cemento control por .5 y 4.9 MPa. El intervalo de confianza no incluye 0, por lo que al intervalo de confianza elegido 0 no es un valor posible para $\mu_1 - \mu_2$. De acuerdo con la relación entre el intervalo de confianza y la prueba de hipótesis que se analizó en la sección 8.5, la hipótesis nula H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ deberá rechazarse a favor de H_a: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$ a un nivel de significancia de .5 (el valor P para esta prueba, citado en el artículo, no está en correlación con otros datos resumidos).

Observe que si se reetiquetan de modo que μ_1 se refiera al cemento experimental y μ_2 al cemento control, el intervalo de confianza se vuelve (.5, 4.9). La interpretación de este intervalo es exactamente la misma que la del primer intervalo. ■

Si las varianzas de σ_1^2 y σ_2^2 son al menos aproximadamente conocidas y el investigador utiliza tamaños de muestra iguales, entonces el tamaño de muestra común n que da un intervalo de $100(1-\alpha)\%$ de ancho w es

$$n = \frac{4z_{\alpha/2}^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{w^2}$$

la que normalmente tiene que ser redondeada a un entero.

EJERCICIOS **Sección 9.1 (1–16)**

1. Un artículo que aparece en el ejemplar de noviembre de 1983 del ***Consumer Reports*** compara varios tipos de baterías. Las duraciones promedio de las baterías AA alcalinas Duracell y alcalinas Eveready Energizer se dieron como 4.1 horas y 4.5 horas, respectivamente. Suponga que éstas son las duraciones promedio de la población.

a. Sea $\overline{X}$ la duración promedio muestral de 100 baterías Duracell y $\overline{Y}$ la duración promedio muestral de 100 baterías Eveready. ¿Cuál es la media $\overline{X} - \overline{Y}$ (es decir, dónde está centrada la distribución de $\overline{X} - \overline{Y}$? ¿Cómo depende su respuesta de los tamaños de muestra especificados?

b. Suponga que la desviación estándar de población de duración es de 1.8 horas para baterías Duracell y de 2.0 horas para baterías Eveready. Con los tamaños de muestra dados en el inciso a), ¿cuál es la varianza del estadístico $\overline{X} - \overline{Y}$ y cuál es su desviación estándar?

c. Con los tamaños de muestra dados en el inciso a) trace la curva de distribución aproximada de $\overline{X} - \overline{Y}$ (incluya una escala de medición sobre el eje horizontal). ¿Sería la forma de la curva necesariamente la misma con tamaños de muestra de 10 baterías de cada tipo? Explique.

2. En los informes de fecha 22 de octubre de 2008, la **National Health Statistics Reports** incluye la siguiente información sobre la estatura (pulgadas) para las mujeres blancas no hispanas.

Edad	Tamaño muestral	Media muestral	Error estándar de la media
20–39	866	64.9	.09
60 y mayor	934	63.1	.11

a. Calcule e interprete un intervalo de confianza al nivel de confianza de aproximadamente 95% de la diferencia entre la estatura media de la población de las mujeres más jóvenes y las mujeres mayores.

b. Sea que μ_1 denote la media poblacional de estatura para las personas de 20 a 39 años y μ_2 la media poblacional de estatura para las mayores de 60 años. Interprete las hipótesis H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 1$ y H_a: $\mu_1 - \mu_2 > 1$ y, a continuación lleve a cabo una prueba de estas hipótesis al nivel de significancia .001.

c. Con base en el valor P que se calculó en el inciso b) ¿se rechazaría la hipótesis nula a cualquier nivel de significancia razonable? Explique.

d. ¿Qué hipótesis es conveniente si μ_1 se refiere al grupo de mayor edad, μ_2 al grupo de edad más joven y si usted desea ver si había pruebas de peso para concluir que la media poblacional de estatura para las mujeres más jóvenes superó la de las mujeres de mayor edad en más de 1 pulgada?

3. Los pilates son un popular conjunto de ejercicios para el tratamiento de individuos con dolor en la espalda baja. El método tiene seis principios básicos, centrado, concentración, control, precisión, flujo y respiración. El artículo **"Efficacy of the Addition of Modified Pilates Exercises to a Minimal Intervention in Patients with Chronic Low Back Pain: A Randomized Controlled Trial" (*Physical Therapy*, 2013: 309–321)** reporta un experimento con 86 sujetos que padecían un dolor de espalda baja inespecífico. Los participantes se dividieron al azar en dos grupos del mismo tamaño. El primer grupo recibió únicamente materiales educativos, mientras que el segundo grupo participó en clases de pilates durante 6 semanas. El nivel medio de dolor en la muestra (en una escala de 0 a 10) para el grupo control, después del seguimiento de 6 semanas, fue de 5.2 y la media de la muestra para el grupo tratamiento fue de 3.1; las desviaciones estándar de ambos grupos eran 2.3.

a. ¿Será que el nivel de dolor promedio verdadero para la condición control excede el de la condición de tratamiento? Lleve a cabo una prueba de hipótesis utilizando un nivel de significancia de .01 (el artículo citado reportó una significancia estadística en este valor de α y una diferencia en la media de la muestra de 2.1 también sugiere una significancia práctica).

b. ¿Será que el valor promedio verdadero del nivel de dolor para la condición control excede el de la condición de tratamiento por más de 1? Lleve a cabo una prueba de hipótesis apropiada.

4. El uso en interiores de combustibles basados en biomasa sólida para cocinar y calentar expone a muchos niños de países en vías de desarrollo a altos niveles de contaminación ambiental. El artículo **"Domestic Fuels, Indoor Air Pollution, and Children´s Health" (*Annals of the N.Y. Academy of Sciences*, 2008: 209–217)** presenta información sobre varias características

pulmonares en muestras de niños en cuyas casas en la India se utilizan combustibles sólidos o gas petróleo licuado (LPG). Para los 755 niños en cuyas casas se utilizaban combustibles sólidos la media muestral del pico de flujo expiratorio (la velocidad máxima de expiración de una persona) fue de 3.30 L/s, y la desviación estándar de la muestra fue de 1.20. Para los 750 niños en cuya casa se utiliza LPG, la media muestral del pico de flujo expiratorio fue de 4.25 y la desviación estándar fue de 1.75.

a. Calcule el intervalo de confianza al 95% para la PEF media de la población de aquellos niños en cuyas casas se utilizan combustibles sólidos y de la misma manera para aquellos niños en cuyas casas se utiliza LPG. ¿Cuál es el nivel de confianza simultáneo para los dos intervalos?

b. Lleve a cabo una prueba de hipótesis en un nivel de significancia de 0.1 para decidir si el valor promedio real de PEF es menor para los niños en cuyas casas se utilizan combustibles sólidos que para los niños en cuyas casas se utiliza LPG (el artículo citado incluye un valor P para esta prueba).

c. FEV_1, el volumen expiratorio forzado en 1 segundo, es otra medida de la función pulmonar. El artículo citado reporta que para las casas en las que se utilizan combustibles sólidos la media de FEV_1 de la muestra fue de 2.3 L/s y la desviación estándar de la muestra fue de .5 L/s. Si esta información se utiliza para calcular un CI al 95% para la FEV_1 media de la población, ¿el nivel de confianza simultáneo para este intervalo y para el primer intervalo calculado en a) sería el mismo que el nivel de confianza simultáneo determinado ahí? Explique.

5. Las personas que padecen el síndrome de Reynaud son propensas a sufrir un deterioro repentino en la circulación sanguínea en los dedos de manos y pies. En un experimento para estudiar el grado de este deterioro, cada uno de los sujetos sumergió en agua un dedo índice y se midió la producción de calor resultante (cal/cm²/min). Con $m = 10$ sujetos con el síndrome, la producción de calor promedio fue $\bar{x} = .64$ y con $n = 10$ sin el síndrome, la producción promedio fue de 2.05. Sean μ_1 y μ_2 las producciones de calor promedio verdaderas de los dos tipos de sujetos. Suponga que las dos distribuciones de producción de calor son normales con $\sigma_1 = .2$ y $\sigma_2 = .4$.

a. Considere probar H_0: $\mu_1 - \mu_2 = -1.0$ contra H_a: $\mu_1 - \mu_2 < -1.0$ a un nivel .01. Describa en palabras qué dice H_a y luego realice la prueba.

b. Calcule el valor P para el valor de Z obtenido en el inciso a).

c. ¿Cuál es la probabilidad de un error de tipo II cuando la diferencia real entre μ_1 y μ_2 es $\mu_1 - \mu_2 = -1.2$?

d. Suponiendo que $m = n$, ¿qué tamaños de muestra se requieren para asegurar que $\beta = .1$ cuando $\mu_1 - \mu_2 = -1.2$?

6. Un experimento para comparar la resistencia de adhesión a la tensión de un mortero modificado con un polímero de látex (mortero de cemento Portland al cual se le agregan emulsiones de polímero de látex durante la mezcla) con la de un mortero no modificado dio por resultado $\bar{x} = 18.12$ kgf/cm² para el mortero modificado ($m = 40$) y $\bar{y} = 16.87$ kgf/cm² para el mortero no modificado ($n = 32$). Sean μ_1 y μ_2 las resistencias de adhesión a la tensión promedio verdaderas para los morteros modificado y no modificado, respectivamente. Suponga que ambas distribuciones de la resistencia de adhesión son normales.

a. Suponiendo que $\sigma_1 = 1.6$ y $\sigma_2 = 1.4$, pruebe H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ contra H_a: $\mu_1 - \mu_2 > 0$ a un nivel .01.

b. Calcule la probabilidad de un error de tipo II para la prueba del inciso a) cuando $\mu_1 - \mu_2 = 1$.

c. Suponga que el investigador decidió utilizar una prueba a un nivel .05 y deseaba $\beta = .10$ cuando $\mu_1 - \mu_2 = 1$. Si $m = 40$, ¿qué valor de n es necesario?

d. ¿Cómo cambiarían el análisis y conclusión del inciso a) si σ_1 y σ_2 fueran desconocidas pero $s_1 = 1.6$ y $s_2 = 1.4$?

7. ¿Habrá alguna tendencia sistemática por parte de los profesores universitarios de tiempo parcial para sujetar a sus estudiantes a las diferentes normas que establecen los profesores de tiempo completo? El artículo **"Are There Instructional Differences Between Full–Time and Part–Time Faculty?" (*College Teaching*, 2009: 23–26)** informa que para una muestra de 125 cursos impartidos por profesores de tiempo completo, la media de GPA fue 2.7186 y la desviación estándar fue de .63342, mientras que para una muestra de 88 cursos impartidos por trabajadores de tiempo parcial, la media y la desviación estándar fueron 2.8639 y .49241, respectivamente. ¿Será que el promedio verdadero del curso de GPA para el profesorado de tiempo parcial difiere del de tiempo completo? Pruebe la hipótesis apropiada al nivel de significancia .01 para obtener primero un valor P.

8. Se realizaron pruebas de resistencia a la tensión en dos grados diferentes de alambrón **("Fluidized Bed Patenting of Wire Rods", *Wire J.*, junio de 1977: 56–61)** y se obtuvieron los datos adjuntos.

Grado	Tamaño muestral	Media muestral (kg/mm²)	DE muestral
AISI 1064	$m = 129$	$\bar{x} = 107.6$	$s_1 = 1.3$
AISI 1078	$n = 129$	$\bar{y} = 123.6$	$s_2 = 2.0$

a. ¿Proporcionarán los datos evidencia precisa para concluir que la resistencia promedio verdadera del grado 1078 excede la del grado 1064 en más de 10 kg/mm²? Pruebe las hipótesis apropiadas con el método del valor P.

b. Estime la diferencia entre resistencias promedio verdaderas para los dos grados en una forma que aporte información sobre precisión y confiabilidad.

9. El artículo **"Evaluation of a Ventilation Strategy to Prevent Barotrauma in Patients at High Risk for Acute Respiratory Distress Syndrome" (*New Engl. J. of Med.*, 1998: 355–358)** reporta sobre un experimento en el cual 120 pacientes con características clínicas similares fueron distribuidos al azar entre un grupo de control y un grupo de tratamiento, cada uno compuesto de 60 individuos. La permanencia en la unidad de cuidados intensivos media UCI y la desviación estándar de la muestra para el grupo de tratamiento fueron 19.9 y 39.1, respectivamente, en tanto que estos valores para el grupo de control fueron 13.7 y 15.8.

a. Calcule una estimación puntual de la diferencia entre la permanencia en la unidad de cuidados intensivos promedio

verdadera para los grupos de tratamiento y de control. ¿Sugiere esta estimación que existe una diferencia significativa entre las permanencias promedio verdaderas en las dos condiciones?

b. Responda la pregunta planteada en el inciso a) realizando una prueba formal de hipótesis. ¿Será diferente el resultado de lo que se conjeturó en el inciso a)?

c. ¿Será que la permanencia en la unidad de cuidados intensivos de pacientes a los que se les administró tratamiento de ventilación está normalmente distribuida? Explique su razonamiento.

d. Estime el tiempo de permanencia promedio verdadero de los pacientes a quienes se les administró tratamiento de ventilación de modo que dé información sobre precisión y confiabilidad.

10. Se realizó un experimento con el fin de comparar la tenacidad a la fractura del acero maraging de alta pureza con 18% de níquel, con acero de pureza comercial del mismo tipo (***Corrosion Science*, 1971: 723–736**). Con $m = 32$ especímenes, la tenacidad promedio muestral fue $\bar{x} = 65.6$ para el acero de alta pureza, en tanto que para $n = 38$ especímenes de acero comercial $\bar{y} = 59.8$. Debido a que el acero de alta pureza es más caro, su uso en ciertas aplicaciones se justifica sólo si su tenacidad a la fractura supera la del acero de pureza comercial en más de 5. Suponga que ambas distribuciones de tenacidad son normales.

a. Suponiendo que $\sigma_1 = 1.2$ y $\sigma_2 = 1.1$, pruebe las hipótesis pertinentes con $\alpha = .001$.

b. Calcule β para la prueba realizada en el inciso a) cuando $\mu_1 - \mu_2 = 6$.

11. Se determinó el nivel de plomo en la sangre con una muestra de 152 trabajadores todos hombres en el área de desechos peligrosos, con edades entre 20 y 30 años; así también con una muestra de 86 trabajadoras y el resultado fue un error estándar medio ± de 5.5 ± 0.3 para los hombres y de 3.8 ± 0.2 para las mujeres (**"Temporal Changes in Blood Lead Levels of Hazardous Waste Workers in New Jersey, 1984–1987", *Environ. Monitoring and Assessment*, 1993: 99–107**). Estime la diferencia entre los niveles de plomo en sangre promedio verdaderos para hombres y mujeres en una forma que proporcione información respecto a la confiabilidad y la precisión.

12. Los siguientes datos sobre el nivel total de colesterol (mmol/l) se obtuvieron de mujeres asiáticas post menopáusicas que eran veganas y de otra muestra similar de mujeres que eran omnívoras (**"Vegetarianism, Bone Loss, and Vitamin D: A Longitudinal Study in Asian Vegans and Non–Vegans," *European J of Clinical Nutr.*, 2012:75–82**).

Dieta	Tamaño muestral	Media muestral	DE muestral
Vegana	88	5.10	1.07
Omnívora	93	5.55	1.10

YaCalcule e interprete un intervalo de confianza de 99% para la diferencia entre la media del nivel de colesterol total para la población vegana y la media del nivel de colesterol total para la población omnívora. (El artículo citado incluye un IC de 95%.)

Nota: [El artículo describe un análisis estadístico más sofisticado para estudiar la pérdida de densidad ósea tomando en cuenta otras características ("covariantes") tales como la edad, el peso corporal y varios factores nutricionales; el IC resultante incluía 0, sugiriendo que no hay efecto de la dieta.]

13. Un ingeniero mecánico desea comparar las propiedades de resistencia de las vigas de acero con vigas similares hechas de una aleación particular. Se probará el mismo número de vigas, n, de cada tipo. Cada viga se colocará en posición horizontal con un apoyo en cada extremo y se le aplicará una fuerza de 2500 lb en el centro y se medirá la deflexión. Por experiencias pasadas con las mismas vigas, el ingeniero desea suponer que la desviación estándar verdadera de la deflexión de ambos tipos de viga es de .05 pulg. Debido a que la aleación es más cara, el ingeniero desea probar a un nivel de .01 si su deflexión promedio es más pequeña que la de la viga de acero. ¿Qué valor de n es apropiado si la probabilidad de error de tipo II deseado es de .05 cuando la diferencia de deflexión promedio verdadera favorece la aleación por .04 pulg?

14. Se determinó el nivel de actividad de monoamino oxidasa (MAO, por sus siglas en inglés) en plaquetas sanguíneas (nm/mg proteína/h) para cada individuo en una muestra de 43 esquizofrénicos crónicos, y el resultado fue $\bar{x} = 2.69$ y $s_1 = 2.30$; así también para 45 sujetos normales el resultado fue $\bar{y} = 6.35$ y $s_2 = 4.03$. ¿Sugerirán fuertemente estos datos que la actividad de MAO promedio verdadera en sujetos normales es más del doble del nivel de actividad en esquizofrénicos? Obtenga un procedimiento de prueba y realice una prueba con $\alpha = .01$. [*Sugerencia*: H_0 y H_a en este caso tienen una forma diferente de los tres casos estándar. Si μ_1 y μ_2 se refieren a la actividad de MAO promedio verdadera para sujetos esquizofrénicos y normales, respectivamente, considere el parámetro $\theta = 2\mu_1 - \mu_2$. Escriba H_0 y H_a en función de θ, estime θ y derive $\sigma_{\hat{\theta}}$ (**"Reduced Monoamine Oxidase Activity in Blood Platelets from Schizophrenic Patients", *Nature*, 28 de julio de 1972: 225–226**).]

15. **a.** Demuestre que para la prueba de cola superior con σ_1 y σ_2 conocidas a medida que m o n se incrementan, β disminuye cuando $\mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$.

b. En el caso de tamaños de muestra iguales ($m = n$) y α fijo, ¿qué le sucede al tamaño de muestra necesario n a medida que β disminuye, donde β es la probabilidad de error de tipo II deseada con una alternativa fija?

16. Para decidir si dos tipos diferentes de acero tienen los mismos valores de tenacidad a la fractura promedio verdaderos, se probaron n especímenes de cada tipo y se obtuvieron los siguientes resultados:

Tipo	Promedio muestral	DE muestral
1	60.1	1.0
2	59.9	1.0

Calcule el valor P para la prueba z con dos muestras apropiadas, suponiendo que los datos se basaron en $n = 100$. Luego repita el cálculo con $n = 400$. ¿Será el valor P pequeño con $n = 400$ indicativo de una diferencia con significado práctico? ¿Se sentiría usted satisfecho con sólo el reporte del valor P? Comente brevemente.

9.2 Prueba *t* con dos muestras e intervalo de confianza

Normalmente un investigador no conoce los valores de las varianzas de población. En la sección previa se ilustró, respecto a muestras grandes, el uso de un procedimiento de prueba z y un intervalo de confianza en el cual se utilizaron las varianzas muestrales en lugar de las varianzas de población. En realidad, con muestras grandes el teorema del límite central permite utilizar estos métodos incluso cuando las dos poblaciones de interés no son normales.

En la práctica, sin embargo, a menudo sucede que al menos un tamaño de muestra es pequeño y las variaciones de población tienen valores desconocidos. Sin el TLC a nuestra disposición, se procede haciendo suposiciones específicas sobre las distribuciones de población subyacentes. El uso de procedimientos inferenciales que se desprenden de estas suposiciones se limita entonces a situaciones en que las suposiciones se satisfacen al menos de forma aproximada. Podríamos, por ejemplo, suponer que las dos distribuciones de la población son miembros de la familia de Weibull o que ambas son distribuciones de Poisson. No debería sorprenderle enterarse de que la normalidad generalmente es la hipótesis más razonable.

SUPOSICIONES

Ambas distribuciones de población son normales, de modo que $X_1, X_2, \ldots, X_m$ es una muestra aleatoria de una distribución normal y, por tanto, es $Y_1, \ldots, Y_n$ (con las X y Y independientes entre sí). La factibilidad de estas suposiciones puede ser juzgada al construir una gráfica de probabilidad normal de las x_i y otra de las y_i.

El estadístico de prueba y la fórmula del intervalo de confianza están basados en la misma variable estandarizada que se desarrolla en la sección 9.1, pero la distribución pertinente ahora es t en lugar de z.

TEOREMA

Cuando ambas distribuciones de población son normales, la variable estandarizada

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{m} + \dfrac{S_2^2}{n}}} \tag{9.2}$$

tiene aproximadamente una distribución t con n grados de libertad estimados a partir de los datos como sigue

$$\nu = \frac{\left(\dfrac{s_1^2}{m} + \dfrac{s_2^2}{n}\right)^2}{\dfrac{(s_1^2/m)^2}{m-1} + \dfrac{(s_2^2/n)^2}{n-1}} = \frac{[(se_1)^2 + (se_2)^2]^2}{\dfrac{(se_1)^4}{m-1} + \dfrac{(se_2)^4}{n-1}}$$

donde

$$se_1 = \frac{s_1}{\sqrt{m}}, \quad se_2 = \frac{s_2}{\sqrt{n}}$$

(redondear ν al entero más cercano hacia abajo).

La manipulación de T en un enunciado de probabilidad para aislar $\mu_1 - \mu_2$ da un intervalo de confianza, en tanto que al reemplazar $\mu_1 - \mu_2$ con el valor nulo Δ_0 se obtiene un estadístico de prueba.

El **intervalo de confianza *t* con dos muestras para $\mu_1 - \mu_2$** con nivel de confianza de $100(1 - \alpha)\%$ es entonces

$$\bar{x} - \bar{y} \pm t_{\alpha/2,\nu}\sqrt{\frac{s_1^2}{m} + \frac{s^2}{n}}$$

Se puede calcular un límite de confianza unilateral tal como ya se describió.

La **prueba *t* con dos muestras** para probar H_0: $\mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$ es como sigue:

$$\text{Valor estadístico de prueba: } t = \frac{\bar{x} - \bar{y} - \Delta_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{m} + \frac{s_2^2}{n}}}$$

Hipótesis alternativa	Determinación del valor *P*
H_a: $\mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$	Área bajo la curva t_ν a la derecha de t
H_a: $\mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$	Área bajo la curva t_ν a la izquierda de t
H_a: $\mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$	$2 \cdot$ (Área bajo la curva t_ν a la derecha de $\lvert t \rvert$)

Suposiciones: Las distribuciones de ambas poblaciones son normales y las dos muestras aleatorias se seleccionan independientemente una de la otra.

EJEMPLO 9.6 El volumen de vacío en una tela afecta las propiedades de comodidad, inflamabilidad y aislantes. La permeabilidad de una tela se refiere a la accesibilidad de los espacios vacíos al flujo de un gas o líquido. El artículo **"The Relationship Between Porosity and Air Permeability of Woven Textile Fabrics" (*J. of Testing and Eval.*, 1997: 1082114)** proporciona información resumida sobre permeabilidad al aire ($cm^3/cm^2/s$) de varios tipos diferentes de tela. Considere los siguientes datos sobre dos tipos diferentes de tela de tejido ordinario:

Tipo de tela	Tamaño de la muestra	Media de la muestra	DE estándar de la muestra
Algodón	10	51.71	.79
Triacetato	10	136.14	3.59

Suponiendo que son normales las distribuciones de porosidad en ambos tipos de tela, calcule un intervalo de confianza para la diferencia entre la porosidad promedio verdadera de la tela de algodón y la de la tela de acetato, utilizando un nivel de confianza de 95%. Antes de que se pueda seleccionar un valor crítico *t* apropiado se debe determinar el número de grados de libertad:

$$\text{df} = \frac{\left(\frac{.6241}{10} + \frac{12.8881}{10}\right)^2}{\frac{(.6241/10)^2}{9} + \frac{(12.8881/10)^2}{9}} = \frac{1.8258}{.1850} = 9.87$$

Así pues se utiliza $\nu = 9$; la tabla A.5 del apéndice da $t_{.025,9} = 2.262$. El intervalo resultante es

$$51.71 - 136.14 \pm (2.262)\sqrt{\frac{.6241}{10} + \frac{12.8881}{10}} = -84.43 \pm 2.63$$

$$= (-87.06, -81.80)$$

Con un alto grado de confianza, se puede decir que la porosidad promedio verdadera de especímenes de tela de triacetato excede la de los especímenes de algodón por entre 81.80 y 87.06 $cm^3/cm^2/s$. ■

EJEMPLO 9.7 El deterioro de muchas redes de tuberías municipales a través del país es una preocupación creciente. Una tecnología propuesta para rehabilitar las tuberías utiliza un forro flexible insertado en las tuberías existentes. El artículo **"Effect of Welding on a High–Density Polyethylene Liner" (*J. of Materials in Civil Engr.*, 1996: 94–100)** reportó los siguientes datos de resistencia a la tensión ($lb/pulg^2$) de especímenes de forro cuando se utilizó cierto proceso de fusión y cuando este proceso no se utilizó.

Sin fusionar	2748	2700	2655	2822	2511			
	3149	3257	3213	3220	2753			
	$m = 10$	$\bar{x} = 2902.8$		$s_1 = 277.3$				
Fusionada	3027	3356	3359	3297	3125	2910	2889	2902
	$n = 8$	$\bar{y} = 3108.1$		$s_2 = 205.9$				

La figura 9.2 muestra curvas de probabilidad normal generadas por Minitab. El patrón lineal de cada una confirma la suposición de que las dos distribuciones de resistencia a la tensión en las dos condiciones son normales.

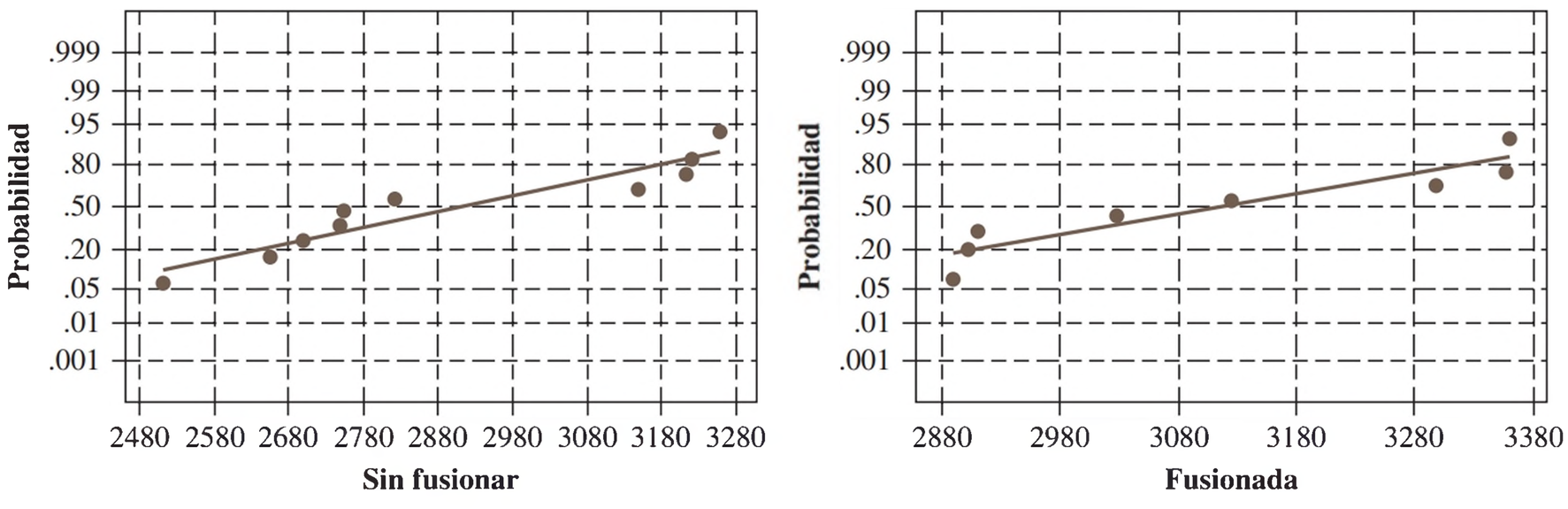


Figura 9.2 Gráficas de probabilidad normal con Minitab para los datos de resistencia a la tensión

Los autores del artículo afirman que el proceso de fusión incrementó la resistencia a la tensión promedio. El mensaje de la gráfica de caja comparativa de la figura 9.3 no es del todo claro. Realice una prueba de hipótesis para ver si los datos confirman esta conclusión.

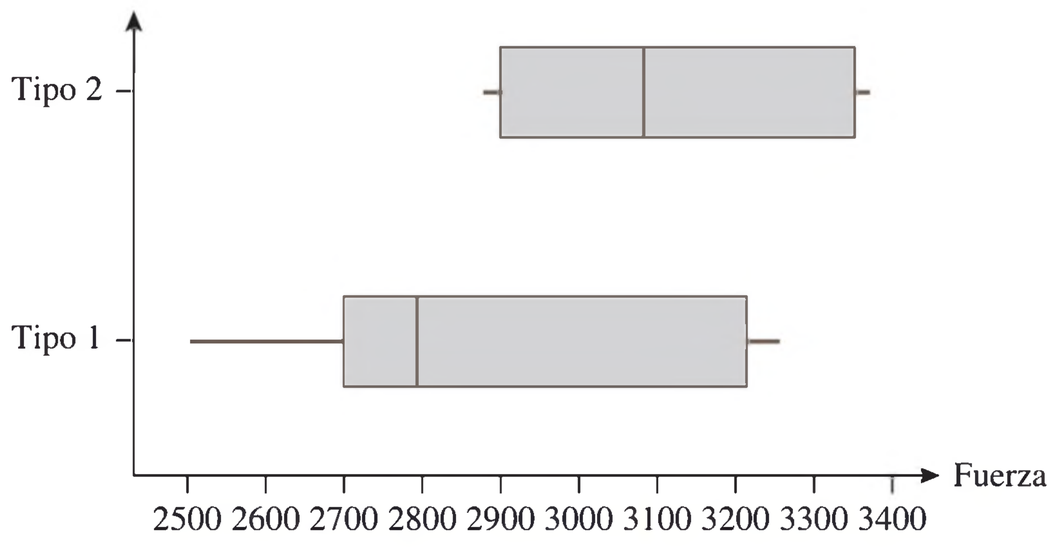


Figura 9.3 Gráfica de caja comparativa de los datos de resistencia a la tensión

1. Sea μ_1 la resistencia a la tensión promedio verdadera de especímenes cuando se utiliza el tratamiento de no fusión y μ_2 la resistencia a la tensión promedio verdadera cuando se utiliza el tratamiento de fusión.
2. H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ (ninguna diferencia en las resistencias a la tensión promedio verdaderas con los dos tratamientos)
3. H_a: $\mu_1 - \mu_2 < 0$ (la resistencia a la tensión promedio verdadera del tratamiento sin fusión es menor que la del tratamiento de fusión, de modo que la conclusión de los investigadores es correcta)
4. El valor nulo es $\Delta_0 = 0$, de modo que el valor del estadístico de prueba es

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{m} + \dfrac{s_2^2}{n}}}$$

5. A continuación se calcula tanto el valor estadístico de prueba como el número de grados de libertad para la prueba:

$$t = \frac{2902.8 - 3108.1}{\sqrt{\dfrac{(277.3)^2}{10} + \dfrac{(205.9)^2}{8}}} = \frac{-205.3}{113.97} = -1.8$$

Con $s_1^2/m = 7689.529$ y $s_2^2/n = 5299.351$,

$$\nu = \frac{(7689.529 + 5299.351)^2}{(7689.529)^2/9 + (5299.351)^2/7} = \frac{168\ 711\ 003.7}{10\ 581\ 747.35} = 15.94$$

así, la prueba se basará en 15 grados de libertad.

6. La tabla A.8 del apéndice muestra que el área bajo la curva *t* con 15 grados de libertad a la derecha de 1.8 es .046, de modo que el valor *P* para una prueba de cola inferior también es .046. Los siguientes datos generados por Minitab resumen todos los cálculos:

```
Two-sample T for no fusión vs fusión

              N     Mean     StDev     SE Mean
no fusión    10     2903       277           88
fusión        8     3108       206           73
95% C.I. for mu no fusión-mu fusión: (-488, 38)
t-Test mu no fusión = mu fusión (vs <): T = -1.80  P = 0.046  DF = 15
```

7. Con un nivel de significancia de .05, apenas si se puede rechazar la hipótesis nula en favor de la hipótesis alternativa, lo que confirma la conclusión expresada en el artículo. No obstante, alguien que demande evidencia más contundente podría seleccionar $\alpha = .01$, un nivel con el cual H_0 no puede ser rechazada.

Si la pregunta planteada hubiera sido respecto a si la fusión incrementó la resistencia promedio verdadera en más de 100 lb/pulg^2, entonces las hipótesis pertinentes habrían sido H_0: $\mu_1 - \mu_2 = -100$ contra H_a: $\mu_1 - \mu_2 < -100$; es decir, el valor nulo habría sido $\Delta_0 = -100$. ■

Procedimientos *t* agrupados

De la suposición de que no sólo las dos distribuciones de población son normales, sino que también tienen varianzas iguales ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$) deriva la alternativa de los procedimientos *t* con dos muestras. Es decir, las dos curvas de distribución de población se suponen normales con dispersiones iguales, la única diferencia posible entre ellas sería dónde están centradas.

Sea σ^2 la varianza de población común. Luego, estandarizando $\overline{X} - \overline{Y}$ se obtiene

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{m} + \frac{\sigma^2}{n}}} = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}}$$

cuya distribución es normal estándar. Antes de que esta variable pueda utilizarse como base para hacer inferencias respecto a $\mu_1 - \mu_2$ se debe estimar la varianza común a partir de los datos muestrales. Un estimador de σ^2 es S_1^2, la varianza de las m observaciones en la primera muestra, y otro es , la varianza de la segunda muestra. Intuitivamente, se obtiene un mejor estimador que cualquier varianza muestral individual al combinar las dos varianzas muestrales. Un primer intento podría ser utilizar $(S_1^2 + S_2^2)/2$. No obstante, si $m > n$, entonces la primera muestra contiene más información sobre σ^2 que la segunda y un comentario análogo es válido si $m < n$. El siguiente promedio *ponderado* de las dos varianzas muestrales, llamado **estimador agrupado** (es decir, combinado) **de σ^2**, se ajusta a cualquier diferencia que exista entre los dos tamaños de muestra:

$$S_p^2 = \frac{m-1}{m+n-2} \cdot S_1^2 + \frac{n-1}{m+n-2} \cdot S_2^2$$

La primera muestra contribuye con $m - 1$ grados de libertad a la estimación de σ^2 y la segunda con $n - 1$ grados de libertad, para un total de $m + n - 2$ grados de libertad. La teoría estadística dice que si S_p^2 reemplaza a σ^2 en la expresión para Z, la variable estandarizada resultante tiene una distribución t basada en $m + n - 2$ grados de libertad. Del mismo modo que las variables estandarizadas con anterioridad se utilizaron como base para deducir intervalos de confianza y procedimientos de prueba, esta variable t conduce de inmediato al intervalo de confianza t agrupado para estimar $\mu_1 - \mu_2$ y a la prueba t agrupada para probar hipótesis respecto a una diferencia entre las medias.

En el pasado, muchos estadísticos recomendaban estos procedimientos t agrupados sobre los procedimientos t con dos muestras. La prueba t agrupada, por ejemplo, puede deducirse del principio de razón de probabilidad, mientras que la prueba t con dos muestras no es una prueba de razón de probabilidad. Además, el nivel de significancia para la prueba t agrupada es exacto, en tanto que sólo es aproximado para la prueba t con dos muestras. Sin embargo, investigaciones recientes han demostrado que aunque la prueba t agrupada supera por poco el desempeño de la prueba t con dos muestras (las β más pequeñas con la misma α) cuando $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, la primera prueba puede llevar fácilmente a conclusiones erróneas, si se aplica cuando las varianzas son diferentes. Comentarios análogos se aplican al comportamiento de los dos intervalos de confianza. Es decir, los procedimientos t agrupados no son robustos a las violaciones de la suposición de varianza igual.

Se ha sugerido que podría realizarse una prueba preliminar de H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ y utilizar un procedimiento t agrupado si esta hipótesis nula no fuera rechazada. Desafortunadamente, la "prueba F" usual de varianzas iguales (sección 9.5) es bastante sensible a la suposición de distribuciones de población normales, mucho más que los procedimientos t. Por consiguiente, se recomienda el método conservador de utilizar procedimientos t con dos muestras a menos que exista evidencia realmente contundente para proceder de otra manera, en particular cuando los dos tamaños de muestra son diferentes.

Probabilidades de error tipo II

La determinación de probabilidades de error tipo II (o de forma equivalente, potencia = $1 - \beta$) con la prueba t con dos muestras es complicada. Parece que no existe una forma simple de utilizar las curvas β de la tabla A.17 del apéndice. La versión más reciente de Minitab (versión 16) calculará potencia para la prueba t agrupada, pero no para la prueba t con dos muestras. Sin embargo, la página de inicio del Departamento de Estadística de la UCLA (http://www.stat.ucla.edu) permite el acceso a una calculadora de potencia que

llevará a cabo esto. Por ejemplo, se especificó $m = 10$, $n = 8$, $\sigma_1 = 300$ y $\sigma_1 = 225$ (estos son los tamaños de muestra del ejemplo 9.7 cuyas desviaciones estándar muestrales son algo más pequeñas que estos valores de σ_1 y σ_2) y demandan la potencia de una prueba con nivel de .05 de dos colas de H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ cuando $\mu_1 - \mu_2 = 100$, 250 y 500. Los valores de la potencia obtenidos son .1089, .4609 y .9635 (correspondientes a $\beta = .89$, .54 y .04), respectivamente). En general, β disminuirá a medida que se incrementen los tamaños de muestra, a medida que se incremente α y a medida que $\mu_1 - \mu_2$ se aleje de 0. El programa también calculará los tamaños de muestra necesarios a fin de obtener un valor específico de potencia para un valor particular de $\mu_1 - \mu_2$.

EJERCICIOS **Sección 9.2 (17–35)**

17. Determine el número de grados de libertad para la prueba *t* con dos muestras o el intervalo de confianza en cada una de las siguientes situaciones:

a. $m = 10, n = 10, s_1 = 5.0, s_2 = 6.0$

b. $m = 10, n = 15, s_1 = 5.0, s_2 = 6.0$

c. $m = 10, n = 15, s_1 = 2.0, s_2 = 6.0$

d. $m = 12, n = 24, s_1 = 5.0, s_2 = 6.0$

18. ¿Qué manera de servir champaña, la tradicional en forma vertical o la inclinada como con la cerveza, preserva más las pequeñas burbujas de gas que mejoran el sabor y el aroma? En el artículo **"On the Losses of Dissolved CO_2 during Champagne Serving" (*J. Agr. Food Chem.*, 2010: 8768–8775)** se reportaron los siguientes.

Temp (°C)	Manera de servir	*n*	Media (g/L)	DE
18	Tradicional	4	4.0	.5
18	Inclinada	4	3.7	.3
12	Tradicional	4	3.3	.2
12	Inclinada	4	2.0	.3

Asuma que las distribuciones muestrales son normales

a. Haga una prueba con un nivel de significancia de .01 para decidir si el promedio verdadero de la pérdida de CO_2 a 18°C para la manera tradicional de servir difiere de la manera de servir en la que se inclina la copa.

b. Repita la prueba de hipótesis sugerida en a) para una temperatura de 12°C. ¿Es diferente la conclusión que para la temperatura de 18°C? *Nota*: El resultado a 12°C se reportó en varios medios de comunicación populares.

19. Suponga que μ_1 y μ_2 son distancias medias de frenado verdaderas a 50 mph de automóviles de cierto tipo equipados con dos clases diferentes de sistemas de frenado. Use la prueba *t* con dos muestras a un nivel de significancia de .01 para demostrar H_0: $\mu_1 - \mu_2 = -10$ contra H_a: $\mu_1 - \mu_2 < -10$ con los siguientes datos: $m = 6, \bar{x} = 115.7, s_1 = 5.03, n = 6, \bar{y} = 129.3$, y $s_2 = 5.38$.

20. Use los datos del ejercicio 19 para calcular un intervalo de confianza de 95% para la diferencia entre distancia de frenado promedio verdadera de automóviles equipados con el sistema 1 y automóviles equipados con el sistema 2. ¿Sugerirá el intervalo la disponibilidad de información precisa sobre el valor de esta diferencia?

21. Se requieren técnicas no invasivas cuantitativas para la valoración rutinaria de neuropatías periféricas, tales como el síndrome de túnel carpiano (CTS, por sus siglas en inglés). El artículo **"A Gap Detection Tactility Test for Sensory Deficits Associated with Carpal Tunnel Syndrome" (*Ergonomics*, 1995: 2588–2601)** reporta sobre una prueba que implica detectar una pequeña grieta en una superficie, en otras circunstancias lisa, tentando con un dedo; esto funcionalmente se asemeja a muchas actividades táctiles relacionadas con el trabajo, tal como detectar rasguños o defectos superficiales. Cuando no se permitía tentar con los dedos, el umbral de detección de grietas promedio muestral con $m = 8$ sujetos normales fue de 1.71 mm y la desviación estándar de la media .53 y con $n = 10$ sujetos con el síndrome de túnel carpiano, la media y la desviación estándar muestrales fueron 2.53 y .87, respectivamente. ¿Sugieren estos datos que el umbral de detección de grietas promedio verdadero de sujetos con CTS excede el de sujetos normales? Formule y pruebe las hipótesis pertinentes utilizando un nivel de significancia de .01.

22. De acuerdo con el artículo **"Modeling and Predicting the Effects of Submerged Arc Weldment Process Parameters on Weldment Characteristics and Shape Profiles" (*J. Of Engr. Manuf.*, 2012: 1230–1240)**, el proceso de soldadura de arco sumergido (SAW, por sus siglas en inglés) es un proceso comúnmente utilizado para unir placas muy gruesas y tuberías. La zona afectada por calor (ZAC), una banda que se crea en la base de metal durante el proceso de soldado, fue de particular interés para los investigadores. Aquí se muestran observaciones de la profundidad (mm) del ZAC cuando la corriente se estableció en un valor alto y cuando se estableció en un valor bajo.

Bajo	1.04	1.15	1.23	1.69	1.92
	1.98	2.36	2.49	2.72	
	1.37	1.43	1.57	1.71	1.94
	2.06	2.55	2.64	2.82	
Alto	1.55	2.02	2.02	2.05	2.35
	2.57	2.93	2.94	2.97	

a. Construya una gráfica de caja comparativa y comente algunas de sus características más interesantes.

b. ¿Será razonable utilizar una prueba *t* de dos colas para probar la hipótesis sobre la diferencia entre el promedio real de la profundidad del ZAC para las dos condiciones?

c. ¿Será que la profundidad promedio real del ZAC es mayor para la condición de mayor corriente que para la condición de menor corriente? Lleve a cabo una prueba para la hipótesis apropiada utilizando un nivel de significancia de .01.

23. En la ropa, se están utilizando entretelas con mayor frecuencia para soportar la tela externa y mejorar la forma y la caída de varias piezas de ropa. El artículo **"Compatibility of Outer and Fusible Interlining Fabrics in Tailored Garments" (*Textile Res. J.*, 1997: 137–142)** muestra los siguientes datos sobre extensibilidad (%) a 100 g/cm tanto de especímenes de telas de alta calidad (H) como especímenes de telas de baja calidad (P).

H	1.2	.9	.7	1.0	1.7	1.7	1.1	.9	1.7
	1.9	1.3	2.1	1.6	1.8	1.4	1.3	1.9	1.6
	.8	2.0	1.7	1.6	2.3	2.0			
P	1.6	1.5	1.1	2.1	1.5	1.3	1.0	2.6	

a. Construya gráficas de probabilidad normal para verificar la factibilidad con ambas muestras seleccionadas de distribuciones de población normales.

b. Construya una gráfica comparativa de caja. ¿Sugiere esta que existe una diferencia entre la extensibilidad promedio verdadera de especímenes de tela de alta calidad y la de especímenes de baja calidad?

c. La media y la desviación estándar muestrales de alta calidad son 1.508 y .444, respectivamente, y las de la muestra de baja calidad son 1.588 y .530. Use la prueba t con dos muestras para decidir si la extensibilidad promedio verdadera difiere para ambos tipos de tela.

24. Los daños a las uvas debido a la depredación por parte de las aves es un serio problema para los viticultores. El artículo **"Experimental Method to Investigate and Monitor Bird Behavior and Damage to Vineyards" (*Amer. J. of Enology and Viticulture*, 2004: 288–291)** reporta sobre un experimento que implica una mesa alimentadora de aves, un vídeo del tiempo transcurrido y alimentos artificiales. Se recopiló información para dos especies de pájaros diferentes tanto en el sitio experimental como en un entorno de viñedo natural. Considere los siguientes datos del tiempo (s) empleado en una sola visita al lugar.

Especie	Ubicación	n		DE de la media
Mirlos	Experimental	65	13.4	2.05
Mirlos	Natural	50	9.7	1.76
Silvereyes	Experimental	34	49.4	4.78
Silvereyes	Natural	46	38.4	5.06

a. Calcule un límite de confianza superior para el tiempo promedio verdadero que los mirlos emplean en una sola visita en el lugar del experimento.

b. ¿Será que el tiempo promedio verdadero que los mirlos permanecen en el lugar del experimento excede el tiempo promedio verdadero que las aves de este tipo se quedan en el lugar natural? Pruebe las hipótesis apropiadas.

c. Calcule la diferencia entre el tiempo promedio verdadero que los mirlos permanecen en el lugar natural y el tiempo promedio verdadero que los silvereyes se quedan en el lugar natural; hágalo de modo que informe sobre confiabilidad y precisión.

[*Nota*: Todas las medianas muestrales reportadas en el artículo parecían significativamente más pequeñas que las medias, lo que sugiere una asimetría sustancial de la distribución de población. Los autores, en realidad, utilizaron el procedimiento de prueba libre de distribución que se muestra en la sección 2 del capítulo 15.]

25. Los siguientes datos representan los precios ($) para una muestra de vinos cabernet sauvignon de California que recibieron calificaciones de 93 o más en la edición de mayo de 2013 de la revista ***Wine spectator*** y otra muestra de vinos cabernet de California que recibieron calificaciones de 89 o menos en el mismo volumen.

≥ 93:	100	100	60	135	195	195	
	125	135	95	42	75	72	
≤ 89:	80	75	75	85	75	35	85
	65	45	100	28	38	50	28

Asuma que ambas son muestras aleatorias de precios provenientes de la población de todos los vinos que fueron calificados recientemente y que recibieron calificaciones al menos de 93 y a lo más de 89, respectivamente.

a. Investigue la posibilidad de asumir que ambas poblaciones muestreadas son normales.

b. Construya una gráfica comparativa de caja. ¿Qué sugiere sobre la diferencia en los precios promedio verdaderos?

c. Calcule un intervalo de confianza al 95% para estimar la diferencia entre μ_1, el precio medio de la población con una calificación mayor y μ_2, el precio medio en la población con calificación menor. ¿Será consistente el intervalo con la afirmación "El precio raramente se compara con la calidad" hecha por un columnista en el texto citado?

26. **El artículo "The Influence of Corrosion Inhibitor and Surface Abrassion on the Failure of Aluminum–Wired Twist–On Connections" (*IEEE Trans. on Components, Hybrids, and Manuf. Tech.*, 1984: 20–25)** reportó datos sobre mediciones de caída de potencial para una muestra de conectores alambrados con aluminio de aleación y otra muestra con aluminio EC. ¿Sugieren los datos adjuntos obtenidos con SAS que la caída de potencial promedio verdadera de conexiones de aleación (tipo I) es más alta que las conexiones EC (como se manifestó en el artículo)? Realice la prueba apropiada con un nivel de significancia de .01. Al llegar a su conclusión, ¿qué tipo de error podría haber cometido? [*Nota*: SAS reporta el valor P para una prueba de dos colas.]

Type	N	Mean	Std Dev	Std Error
1	20	17.49900000	0.55012821	0.12301241
2	20	16.90000000	0.48998389	0.10956373

Variances	T	DF	Prob>|T|
Unequal	3.6362	37.5	0.0008
Equal	3.6362	38.0	0.0008

27. La anorexia nerviosa (AN) es un trastorno psiquiátrico que lleva a la pérdida de peso importante entre las mujeres con miedo a engordar. El artículo **"Adipose Tissue Distribution After Weight Restoration and Weight Maintenance in Women with Anorexia Nervosa" (*Amer. J. of Clinical Nutr.*

2009: 1132–1137) utilizó imágenes de resonancia magnética de cuerpo entero para determinar las diferentes características del tejido para una muestra de individuos con AN que se sometieron a la recuperación aguda del peso y que mantuvieron su peso durante un año, en comparación con el peso de la muestra control (al comienzo del estudio). Aquí se resumen los datos sobre el tejido adiposo intermuscular (TAI; kg).

Condición	Tamaño muestral	Media muestral	DE muestral
AN	16	.52	.26
Control	8	.35	.15

Supongamos que ambas muestras fueron seleccionadas de distribuciones normales.

a. Calcule una estimación del TAI promedio real en el marco del protocolo AN descrito y hágalo de una manera que transmita información acerca de la fiabilidad y la precisión de la estimación.

b. Calcule una estimación de la diferencia entre el promedio real TAI AN y el promedio real de control del TAI y hágalo de una manera que transmita información acerca de la fiabilidad y la precisión de la estimación. ¿Qué hace que su estimación sugiera un promedio real TAI AN en relación con el promedio real de control del TAI?

28. A medida que la población envejece existe una creciente preocupación sobre las lesiones relacionadas con los accidentes que sufren las personas de edad. El artículo **"Age and Gender Differences in Single–Step Recovery from a Forward Fall" (*J. of Gerontology*, 1999: M44–M50)** reporta sobre un experimento en el cual el ángulo de inclinación máximo, lo más lejos que un sujeto es capaz de inclinarse incluso enderezarse en un solo paso, se determinó tanto para una muestra de mujeres jóvenes (21−29 años) como para una muestra de mujeres mayores (67–81 años). Las siguientes observaciones son consistentes con los datos que aparecen en el artículo:

MJ: 29, 34, 33, 27, 28, 32, 31, 34, 32, 27
MV: 18, 15, 23, 13, 12

¿Sugieren los datos que el ángulo de inclinación máximo promedio verdadero de mujeres mayores es más de 10 grados menor que el de mujeres jóvenes? Formule y pruebe las hipótesis pertinentes a nivel de significancia de .10 obteniendo un valor *P*.

29. El artículo **"Effect of Internal Gas Pressure on the Compression Strength of Beverage Cans and Plastic Bottles" (*J. of Testing and Evaluation*, 1993: 129–131)** incluye los datos adjuntos sobre resistencia a la compresión (lb) para una muestra de latas de aluminio de 12 oz de refresco de fresas llenas y otra muestra de latas de refresco de cola llenas. ¿Sugieren los datos que la carbonatación extra de la cola da por resultado una resistencia a la compresión promedio más alta? Base su respuesta en un valor *P*. ¿Qué suposiciones son necesarias para su análisis?

Bebida	Tamaño de la muestra	Media muestral	DE muestral
Fresa	15	540	21
Cola	15	554	15

30. El artículo **"Flexure of Concrete Beams Reinforced with Advanced Composite Orthogrids" (*J. of Aerospace Engr.*, 1997: 7–15)** proporciona los siguientes datos sobre una carga final (kN) de dos tipos diferentes de vigas.

Tipo	Tamaño de la muestra	Media muestral	DE muestral
Vigas de fibra de vidrio	26	33.4	2.2
Vigas de fibra de carbono	26	42.8	4.3

a. Suponiendo que las distribuciones subyacentes son normales, calcule e interprete un intervalo de confianza de 99% para la diferencia entre carga promedio verdadera para las vigas de fibra de vidrio y la de vigas de fibra de carbono.

b. ¿El límite superior del intervalo que calculó en el inciso a) da un límite de confianza superior de 99% para la diferencia entre las dos μ? Si no, calcule tal límite. ¿Sugiere fuertemente que la carga promedio verdadera de las vigas de fibra de carbono es más grande que la de las vigas de fibra de vidrio? Explique.

31. Remítase al ejercicio 33 en la sección 7.3. El artículo citado también da las siguientes observaciones sobre el grado de polimerización de especímenes con concentración de tiempos de viscosidad en un rango más alto:

429 430 430 431 436 437
440 441 445 446 447

a. Trace una gráfica de caja comparativa para las dos muestras y comente sobre cualquier característica interesante.

b. Calcule un intervalo de confianza de 95% para la diferencia entre el grado promedio verdadero de polimerización del rango medio y del rango alto. ¿Sugiere el intervalo que μ_1 y μ_2 pueden en realidad ser diferentes? Explique su razonamiento.

32. La enfermedad degenerativa osteoartritis afecta mayormente las articulaciones que soportan peso como las rodillas. El artículo **"Evidence of Mechanical Load Redistribution at the Knee Joint in the Elderly when Ascending Stairs and Ramps" (*Annals of Biomed. Engr.*, 2008: 467–476)** presenta el siguiente resumen de datos sobre la duración de la postura (en milisegundos) para las muestras de ancianos y jóvenes.

Edad	Tamaño muestral	Media muestral	DE muestral
Ancianos	28	801	117
Jóvenes	16	780	72

Supongamos que ambas distribuciones de la duración de postura son normales.

a. Calcule e interprete 99% de IC para la duración verdadera de una postura media entre las personas de edad avanzada.

b. Lleve a cabo una prueba de hipótesis al nivel de significancia .05 para decidir si la verdadera duración de postura promedio es mayor entre las personas de edad avanzada que entre los individuos más jóvenes.

33. **33.** El artículo **"The Effects of a Low–Fat, Plant–Based Dietary Intervention on Body Weight, Metabolism, and**

Insulin Sensitivity in Postmenopausal Women" (*Amer. J. of Med.*, 2005: 991–997) reporta sobre los resultados de un experimento en el cual la mitad de un grupo de 64 mujeres posmenopáusicas con sobrepeso fueron asignadas al azar a un dieta vegetariana particular y la otra mitad recibió una dieta basada en las recomendaciones del National Cholesterol Education Program. La pérdida de peso media muestral de aquellas que llevaron la dieta vegetariana fue de 5.8 kg y la desviación estándar muestral fue de 3.2, en tanto que para aquellas que llevaron la dieta de control, la pérdida de peso media muestral y la desviación estándar fueron de 3.8 y 2.8, respectivamente. ¿Será que la pérdida de peso promedio verdadera con la dieta vegetariana excede la de la dieta de control por más de 1 kg? Realice una prueba de hipótesis apropiada a un nivel de significancia de .05 con base en el cálculo de un valor *P*.

34. Considere la variable *t* agrupada

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}$$

la cual tiene una distribución *t* con $m + n - 2$ grados de libertad cuando ambas distribuciones de población son normales con $\sigma_1 = \sigma_2$ (véase la subsección "Procedimientos *t* agrupados" para una descripción de S_p).

a. Use esta variable *t* para obtener una fórmula de intervalo de confianza *t* agrupado para $\mu_1 - \mu_2$.

b. Se seleccionó una muestra de humidificadores ultrasónicos de una marca particular para la cual las observaciones de producción máxima de humedad (oz) en una cámara controlada fueron 14.0, 14.3, 12.2 y 15.1. Una muestra de una segunda marca arrojó los valores de producción 12.1, 13.6, 11.9 y 11.2 **("Multiple Comparisons of Means Using Simultaneous Confidence Intervals", *J. of Quality Technology*, 1989: 232–241)**. Use la fórmula de *t* agrupada del inciso a) para calcular la diferencia entre producciones promedio verdaderas de las dos marcas con un intervalo de confianza de 95%.

c. Calcule la diferencia entre las dos μ utilizando el intervalo *t* para dos muestras que se analizó en esta sección y compárelo con el intervalo del inciso b).

35. Remítase al ejercicio 34. Describa la prueba *t* agrupada para probar H_0: $\mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$ cuando ambas distribuciones de población son normales con $\sigma_1 = \sigma_2$. Luego utilice este procedimiento de prueba para probar las hipótesis sugeridas en el ejercicio 33.

9.3 Análisis de datos apareados

En las secciones 9.1 y 9.2, se consideró probar en busca de una diferencia entre dos medias μ_1 y μ_2. Se hizo utilizando los resultados de una muestra aleatoria $X_1, X_2, \ldots, X_m$ de la distribución con media μ_1 y una muestra completamente independiente (de las *X*) $Y_1, \ldots, Y_n$ de la distribución con media μ_2. Es decir, se seleccionaron *m* individuos de la población 1 y *n* individuos diferentes de la población 2, o *m* individuos (u objetos experimentales) recibieron un tratamiento y otro conjunto de *n* individuos recibió el otro tratamiento. En contraste, existen varias situaciones experimentales en las cuales hay sólo un conjunto de *n* individuos u objetos experimentales y se realizan dos observaciones de cada individuo u objeto y el resultado es un apareado natural de valores.

EJEMPLO 9.8 Las trazas de metales presentes en el agua potable afectan el sabor, y las concentraciones inusualmente altas plantean un riesgo para la salud. El artículo **"Trace Metals of South Indian River" (*Envir. Studies*, 1982: 62–66)** reporta sobre un estudio en el cual se seleccionaron seis lugares en el río (seis objetos experimentales) y se determinó la concentración de zinc (mg/L) tanto en el agua superficial como en la del fondo en cada lugar. Los seis pares de observaciones aparecen en la tabla adjunta. ¿Sugieren los datos que la concentración promedio verdadera en el agua del fondo excede la del agua de la superficie?

	Ubicación					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Concentración de zinc en el agua del fondo (*x*)	.430	.266	.567	.531	.707	.716
Concentración de zinc en el agua de la superficie (*y*)	.415	.238	.390	.410	.605	.609
Diferencia	.015	.028	.177	.121	.102	.107

La figura 9.4(a) muestra una gráfica de estos datos. A primera vista parece haber poca diferencia entre las muestras x y y. De lugar a lugar, existe mucha variación en cada muestra y pareciera como si cualquier diferencia entre las muestras pudiera ser atribuida a esta variabilidad. No obstante, cuando las observaciones están identificadas por lugar, como en la figura 9.4(b) emerge una vista diferente. En cada lugar la concentración en el fondo excede la concentración en la superficie. Esto se confirma por el hecho de que todas las diferencias $x - y$ que aparecen en la fila inferior de la tabla son positivas. Un análisis correcto de estos datos se enfoca en estas diferencias.

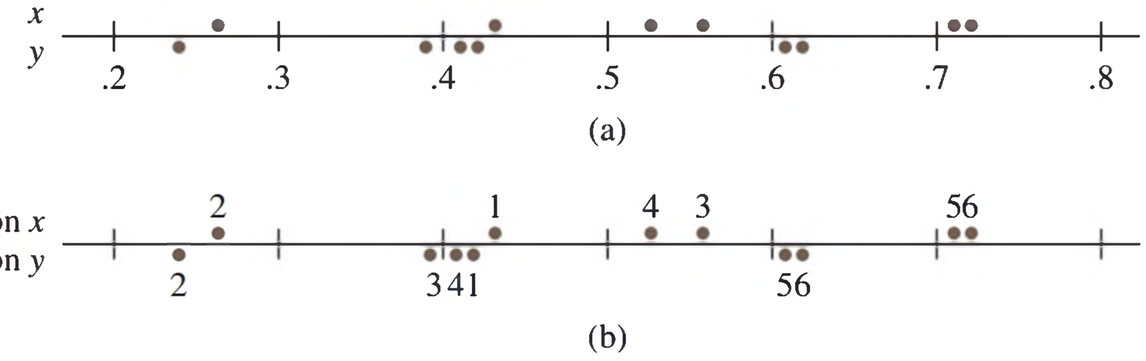


Figura 9.4 Gráfica de los datos apareados del ejemplo 9.8. (a) observaciones no identificadas por ubicación; (b) observaciones identificadas por ubicación ■

SUPOSICIONES

Los datos se componen de n pares seleccionados independientemente (X_1, Y_1), (X_2, Y_2),... , (X_n, Y_n), con $E(X_i) = \mu_1$ y $E(Y_i) = \mu_2$. Sean $D_1 = X_1 - Y_1$, $D_2 = X_2 - Y_2$,..., $D_n = X_n - Y_n$, de modo que las D_i son las diferencias dentro de los pares. En ese caso se supone que las D_i casi siempre están distribuidas con media μ_D y varianza σ_D^2 (normalmente esto es una consecuencia de que las X_i y Y_i mismas están normalmente distribuidas).

De nuevo interesa probar las hipótesis respecto a la diferencia $\mu_1 - \mu_2$. El intervalo de confianza para dos muestras t y el estadístico de prueba se obtuvo suponiendo muestras independientes y aplicando la regla $V(\overline{X} - \overline{Y}) = V(\overline{X}) + V(\overline{Y})$. Sin embargo, con datos apareados, las observaciones X y Y dentro de cada par a menudo no son independientes, de modo que $\overline{X}$ y $\overline{Y}$ no son independientes entre sí. Por consiguiente, se debe abandonar la prueba t con dos muestras y buscar un método de análisis alternativo.

Prueba t con datos apareados

Como los pares diferentes son independientes, las D_i son independientes entre sí. Sea $D = X - Y$, donde X y Y son la primera y la segunda observaciones, respectivamente, dentro de un par arbitrario. Entonces la diferencia esperada es

$$\mu_D = E(X - Y) = E(X) - E(Y) = \mu_1 - \mu_2$$

(la regla de valores esperados utilizada aquí es válida aun cuando X y Y sean dependientes). Por consiguiente, cualquier hipótesis respecto a $\mu_1 - \mu_2$ puede ser parafraseada como una hipótesis respecto a la diferencia media μ_D. Pero debido a que las D_i constituyen una muestra aleatoria normal (de diferencias) con media μ_D, las hipótesis respecto a μ_D se demuestran mediante una prueba t con una muestra. Es decir, *para probar hipótesis respecto a* $\mu_1 - \mu_2$ *cuando los datos están apareados, se forman las diferencias* $D_1, D_2,..., D_n$ *y se realiza una prueba t con una muestra* (*basada en* $n - 1$ *grados de libertad*) *de estas diferencias.*

Prueba *t* con datos apareados

Hipótesis nula: H_0: $\mu_D = \Delta_0$ (donde $D = X - Y$ es la diferencia entre la primera y la segunda observaciones dentro de un par, y $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$)

Valor del estadístico de prueba: $t = \dfrac{\bar{d} - \Delta_0}{s_D/\sqrt{n}}$ (donde $\bar{d}$ y s_D son la media y la desviación estándar muestrales, respectivamente, de las d_i)

Hipótesis alternativa	Determinación del valor *P*
H_a: $\mu_D > \Delta_0$	Área bajo la curva t_{n-1} a la derecha de t
H_a: $\mu_D < \Delta_0$	Área bajo la curva t_{n-1} a la izquierda de t
H_a: $\mu_D \neq \Delta_0$	$2 \cdot$ (Área bajo la curva t_{n-1} a la derecha de $\lvert t \rvert$)

Suposiciones: Las D_i constituyen una muestra aleatoria de una población con una diferencia "normal".

EJEMPLO 9.9 Los desórdenes musculoesqueléticos del cuello y el hombro son comunes entre empleados de oficina que realizan tareas repetitivas mediante pantallas de visualización. El artículo **"Upper–Arm Elevation During Office Work" (*Ergonomics*, 1996: 1221–1230)** reporta sobre un estudio para determinar si las condiciones de trabajo más variadas habrían tenido algún impacto en el movimiento del brazo. Los siguientes datos adjuntos se obtuvieron con una muestra de $n = 16$ sujetos. Cada observación es la cantidad de tiempo, expresada como una proporción de tiempo total observado, durante el cual la elevación del brazo fue de menos de 30°. Las dos mediciones de cada sujeto se obtuvieron con una separación de 18 meses. Durante este periodo las condiciones de trabajo cambiaron y se permitió que los sujetos realizaran una variedad más amplia de tareas. ¿Sugieren estos datos que el tiempo promedio verdadero durante el cual la elevación es menor de 30°, difiere después del cambio de lo que era antes del mismo?

Sujeto	1	2	3	4	5	6	7	8
Antes	81	87	86	82	90	86	96	73
Después	78	91	78	78	84	67	92	70
Diferencia	3	−4	8	4	6	19	4	3
Sujeto	9	10	11	12	13	14	15	16
Antes	74	75	72	80	66	72	56	82
Después	58	62	70	58	66	60	65	73
Diferencia	16	13	2	22	0	12	−9	9

La figura 9.5 muestra una gráfica de probabilidad normal de las 16 diferencias; el patrón seguido por la gráfica es bastante lineal, lo que afirma la suposición de normalidad. En la figura 9.6 aparece una gráfica de caja de estas diferencias; la gráfica de caja se encuentra considerablemente a la derecha del cero, lo que sugiere que quizás $\mu_D > 0$ (observe también que 13 de las 16 diferencias son positivas y sólo dos son negativas).

Pruebe ahora las hipótesis apropiadas.

1. Sea μ_D la diferencia promedio verdadera entre el tiempo de elevación antes del cambio de las condiciones de trabajo y el tiempo después del cambio.
2. H_0: $\mu_D = 0$ (no existe diferencia entre el tiempo promedio verdadero antes del cambio y el tiempo promedio verdadero después del cambio)
3. H_0: $\mu_D \neq 0$

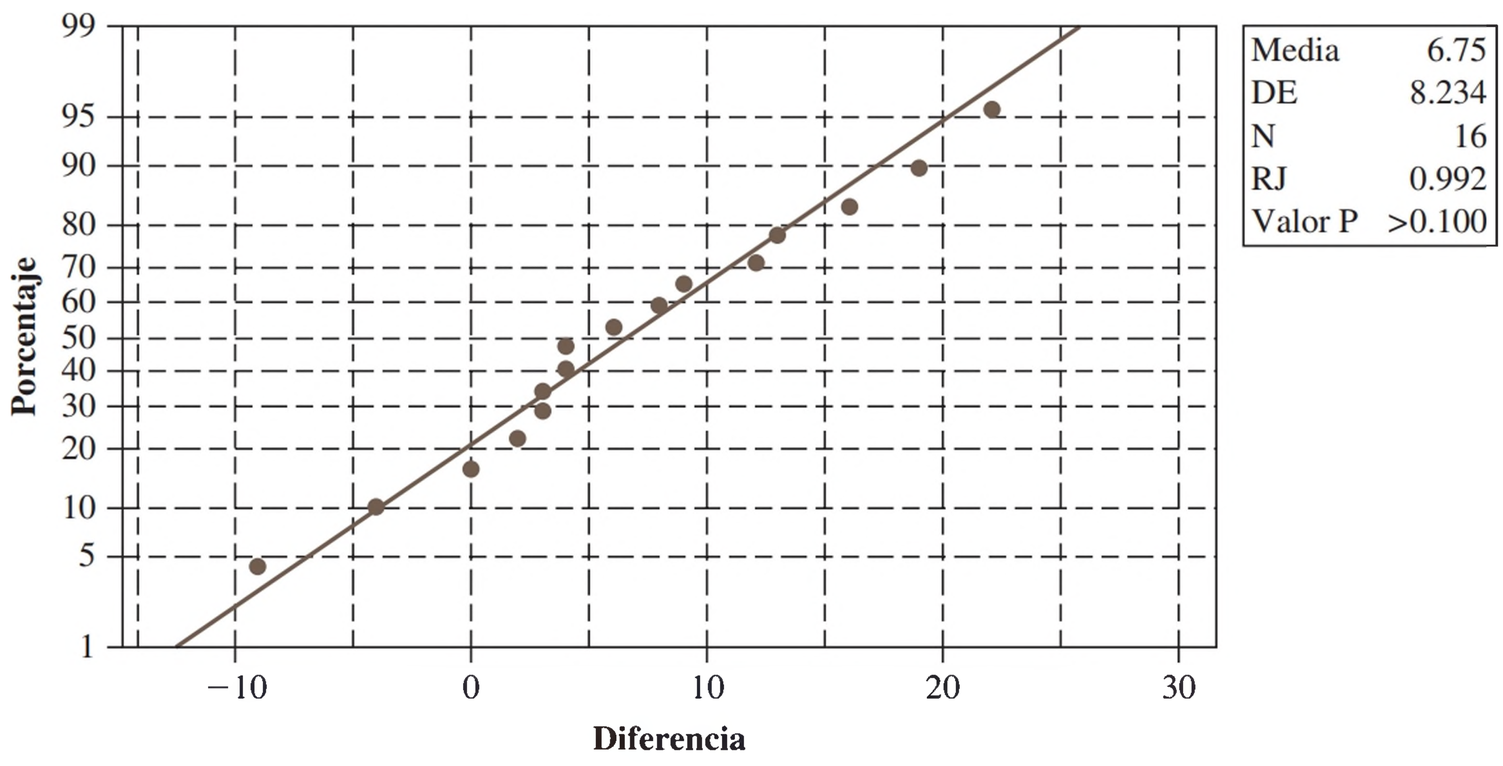


Figura 9.5 Gráfica de probabilidad normal generada por Minitab de las diferencias en el ejemplo 9.9

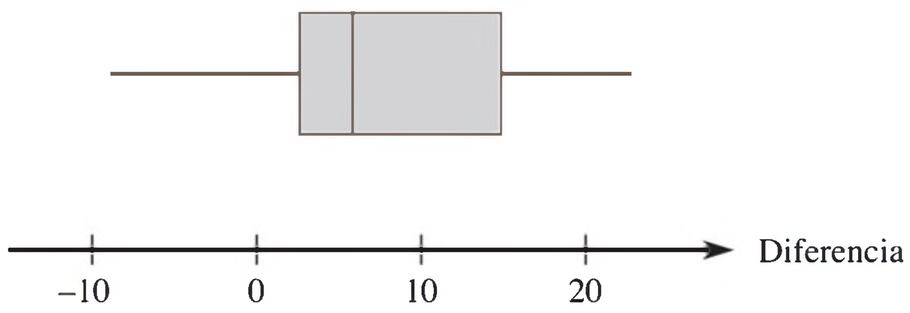


Figura 9.6 Gráfica de caja de las diferencias en el ejemplo 9.9

4. $t = \dfrac{\bar{d} - 0}{s_D/\sqrt{n}} = \dfrac{\bar{d}}{s_D/\sqrt{n}}$

5. $n = 16$, $\Sigma d_i = 108$ y $\Sigma d_i^2 = 1746$, de donde $\bar{d} = 6.75$, $s_D = 8.234$ y

$$t = \frac{6.75}{8.234/\sqrt{16}} = 3.28 \approx 3.3$$

6. La tabla A.8 del apéndice muestra que el área a la derecha de 3.3 bajo la curva t con 15 grados de libertad es .002. La desigualdad de H_a implica que la prueba de dos colas es apropiada, de modo que el valor P es aproximadamente $2(.002) = .004$ (Minitab da .0051).

7. Puesto que $.004 < .01$, la hipótesis nula puede ser rechazada a un nivel de significancia de .05 o .01. Parece que la diferencia promedio verdadera entre los tiempos es algún valor distinto de cero; es decir, el tiempo promedio verdadero después del cambio es diferente del de antes del cambio. ■

Cuando el número de pares es grande, la suposición de distribución de diferencia normal no es necesaria. El teorema del límite central valida la prueba z resultante.

Un intervalo de confianza *t* apareado

En la misma forma en que el intervalo de confianza t para una media de población única μ está basado en la variable $T = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$, un intervalo de confianza t para μ_D $(= \mu_1 - \mu_2)$ está basado en el hecho de que

$$T = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_D/\sqrt{n}}$$

tiene una distribución t con $n - 1$ grados de libertad. La manipulación de la variable t, tal como en deducciones previas de intervalos de confianza, produce el siguiente intervalo de confianza de $100(1 - \alpha)\%$:

El **intervalo de confianza *t* apareado para μ_D** es

$$\bar{d} \pm t_{\alpha/2,n-1} \cdot s_D/\sqrt{n}$$

Al retener el signo pertinente y al reemplazar $t_{\alpha/2}$ con t_α se obtiene un límite de confianza unilateral.

Cuando n es pequeño, la validez de este intervalo requiere que la distribución de diferencias sea al menos aproximadamente normal. Con n grande, el límite del teorema central garantiza que el intervalo z resultante es válido sin ninguna restricción en la distribución de diferencias.

EJEMPLO 9.10 La imagenología por resonancia magnética es una técnica no invasiva que se usa para determinar el nivel de daño en un cartílago. Sin embargo, hay una preocupación de que la MRI (por sus siglas en inglés) puede no ser precisa para determinar el tamaño de los defectos del cartílago en las articulaciones. El artículo **"Preoperative MRI Underestimates Articular Cartilage Defect Size Compared with Findings at Arthroscopic Knee Surgery" (*Amer. J. Of Sports Med.*, 2013: 590–595)** es un reporte de un estudio que utilizó una muestra de 92 defectos en cartílago. Para cada uno el tamaño del área de la lesión se determinó por un análisis de MRI y también durante una cirugía artroscópica. Cada valor de MRI se sustrajo del valor artroscópico correspondiente para obtener una valor de dicha diferencia. La diferencia muestral media fue de 1.04 cm^2, con una desviación estándar de 1.67. Ahora calculemos el intervalo de confianza utilizando un nivel de confianza de (al menos aproximadamente) 95% para μ_D, la diferencia media para la población de dichos defectos (como lo hicieron los autores del artículo citado). Debido a que n es bastante grande aquí, utilizamos un valor crítico de z, $z_{.025} = 1.96$ (uno de los valores incluidos en la parte baja de nuestra tabla t). El IC resultante es:

$$1.04 \pm (1.96) \cdot \frac{1.67}{\sqrt{92}} = 1.04 \pm .34 = (.70, 1.38)$$

En un nivel de confianza de 95%, se considera que $.70 < \mu_D < 1.38$. Tal vez el aspecto más interesante de este intervalo es que no se incluye el 0; únicamente ciertos valores positivos de μ_D son posibles. De hecho esto fue lo que llevó a los investigadores a concluir que la MRI tiende a subestimar el tamaño de los defectos. ■

Datos apareados y procedimientos *t* con dos muestras

Considere el uso de la prueba t de datos apareados con dos muestras. Los numeradores de los dos estadísticos de prueba son idénticos, puesto que $\bar{d} = \Sigma d_i/n = [\Sigma(x_i - y_i)]/n = (\Sigma x_i)/n - (\Sigma y_i)/n = \bar{x} - \bar{y}$. La diferencia entre los estadísticos se debe por completo a los denominadores. Cada estadístico de prueba se obtiene estandarizando $\bar{X} - \bar{Y}\,(= \bar{D})$. Pero en la presencia de dependencia la estandarización t con dos muestras es incorrecta. Para ver esto, recuerde de la sección 5.5 que

$$V(X \pm Y) = V(X) + V(Y) \pm 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$$

La correlación entre X y Y es

$$\rho = \mathrm{Corr}(X, Y) = \mathrm{Cov}(X, Y)/[\sqrt{V(X)} \cdot \sqrt{V(Y)}]$$

Se deduce que

$$V(X - Y) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2$$

Aplicando esto a $\bar{X} - \bar{Y}$ da

$$V(\bar{X} - \bar{Y}) = V(\bar{D}) = V\left(\frac{1}{n}\Sigma D_i\right) = \frac{V(D_i)}{n} = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$$

La prueba t con dos muestras está basada en la suposición de independencia, en cuyo caso $\rho = 0$. Pero en muchos experimentos apareados, habrá una fuerte dependencia *positiva* entre X y Y (X grande asociada con Y grande), de modo que ρ será positiva y la varianza de $\overline{X} - \overline{Y}$ será más pequeña que $\sigma_1^2/n + \sigma_2^2/n$. Por tanto, *siempre que haya dependencia positiva dentro de los pares, el denominador del estadístico t apareado deberá ser más pequeño que para t de la prueba con muestras independientes*. Con frecuencia la t con dos muestras se aproximará mucho más a cero que la t apareada, subestimando considerablemente el significado de los datos.

Asimismo, cuando los datos están apareados, el intervalo de confianza t apareado normalmente será más angosto que el intervalo de confianza t para dos muestras (incorrecto). Esto es porque en general existe mucho menos variabilidad en las diferencias que en los valores x y y.

Experimentos apareados contra no apareados

En los ejemplos se obtuvieron datos apareados con dos observaciones del mismo sujeto (ejemplo 9.9) u objeto experimental (localización en el ejemplo 9.8). Aun cuando esto no puede hacerse, se pueden obtener datos apareados con dependencia dentro de pares emparejando individuos u objetos en relación con una o más características que, se piensa, influyen en las respuestas. Por ejemplo, en un experimento médico para comparar la eficacia de dos medicamentos para bajar la presión sanguínea el presupuesto del experimentador permitiría el tratamiento de 20 pacientes. Si se seleccionan 10 al azar para tratamiento con el primer medicamento y se seleccionan otros 10 independientemente para tratamiento con el segundo medicamento, el resultado es un experimento con muestras independientes.

No obstante, el experimentador, sabiendo que la edad y el peso influyen en la presión sanguínea, podría decidir crear pares de pacientes de modo que dentro de cada uno de los 10 pares resultantes, la edad y el peso fueran aproximadamente iguales (aunque pudiera haber diferencias apreciables entre los pares). Entonces cada medicamento sería administrado a un paciente diferente dentro de cada par para un total de 10 observaciones de cada medicamento.

Sin este emparejamiento (o "bloqueo") podría parecer que un medicamento sobrepasa el desempeño de otro, simplemente porque los pacientes en una muestra pesaban menos y eran más jóvenes y, por tanto, más susceptibles a reducir su presión sanguínea que los pacientes más pesados y con más edad presentes en la segunda muestra. Sin embargo, hay un precio que pagar por el emparejamiento: un número de grados de libertad más pequeño para el análisis apareado, así que hay que preguntarse cuándo se debe preferir un experimento sobre el otro.

No existe una respuesta directa y precisa a esta pregunta, pero sí algunas recomendaciones útiles. Si se tiene una opción entre dos pruebas t que son válidas (y realizadas al mismo nivel de significancia α), se deberá preferir la prueba que tenga el número más grande de grados de libertad. La razón de esto es que un número más grande de grados de libertad significa una β más pequeña con cualquier valor alternativo fijo del parámetro o parámetros. Esto es, con una probabilidad de error de tipo I fija, la probabilidad de un error de tipo II se reduce al incrementarse los grados de libertad.

Sin embargo, si las unidades experimentales son bastante heterogéneas en su respuesta, será difícil detectar diferencias pequeñas pero significativas entre dos tratamientos. Esto en esencia es lo que aconteció en el conjunto de datos en el ejemplo 9.8; con ambos "tratamientos" (agua del fondo y agua superficial), existe gran variabilidad entre lugares, lo que tiende a enmascarar diferencias en tratamientos dentro de los lugares. Si existe una alta correlación positiva dentro de unidades experimentales o sujetos, la varianza de $\overline{D} = \overline{X} - \overline{Y}$ será mucho más pequeña que la varianza no apareada. Debido a que esto reduce la varianza, será más fácil detectar una diferencia con muestras apareadas que con muestras independientes. Los pros y los contras de aparear ahora se resumen como sigue.

1. Si existe una gran heterogeneidad entre unidades experimentales y una gran correlación dentro de unidades experimentales (ρ grande positiva), entonces la pérdida de grados de libertad será compensada por la precisión incrementada asociada con el apareamiento, así que se prefiere un experimento apareado a un experimento con muestras independientes.
2. Si las unidades experimentales son relativamente homogéneas y la correlación dentro de los pares no es grande, la ganancia en precisión a causa del apareamiento será superada por la disminución de grados de libertad, así que se deberá utilizar un experimento con muestras independientes.

Desde luego, normalmente los valores de σ_1^2, σ_2^2 y ρ no serán conocidos con precisión, así que se requerirá que un investigador haga una apreciación educada sobre si se obtiene la situación 1 o la 2. En general, si el número de observaciones obtenidas es grande, entonces una pérdida de grados de libertad (p. ej., de 40 a 20) no será seria; pero si el número es pequeño, entonces la pérdida (por ejemplo, de 16 a 8) debido al apareamiento, puede ser seria si no es compensada por la precisión incrementada. Consideraciones similares son válidas cuando se elige entre dos tipos de experimentos para estimar $\mu_1 - \mu_2$ con un intervalo de confianza.

EJERCICIOS Sección 9.3 (36–48)

36. Considere los datos adjuntos sobre carga de ruptura (kg/25 mm de ancho) de varias telas tanto desgastadas como no desgastadas (**"The Effect of Wet Abrasive Wear on the Tensile Properties of Cotton and Polyester–Cotton Fabrics", *J. Testing and Evaluation*, 1993: 84–93).** Use la prueba t apareada, como lo hicieron los autores del artículo citado, para demostrar H_0: $\mu_D = 0$ contra H_a: $\mu_D > 0$ a un nivel de significancia de .01.

	Tela							
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
U	36.4	55.0	51.5	38.7	43.2	48.8	25.6	49.8
A	28.5	20.0	46.0	34.5	36.5	52.5	26.5	46.5

37. Se ha identificado cromo hexavalente como carcinógeno inhalado y como una toxina presente en el aire de interés en varios lugares diferentes. El artículo **"Airborne Hexavalent Chromium in Southwestern Ontario" (*J. Air and Waste Mgmnt. Assoc.*, 1997: 905–910)** reporta los siguientes datos tanto de concentración bajo techo como al aire libre (nanogramos/m^3) para una muestra de casas seleccionadas al azar en cierta región.

	Casa								
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Bajo techo	.07	.08	.09	.12	.12	.12	.13	.14	.15
Intemperie	.29	.68	.47	.54	.97	.35	.49	.84	.86

	Casa							
	10	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**
Bajo techo	.15	.17	.17	.18	.18	.18	.18	.19
Intemperie	.28	.32	.32	1.55	.66	.29	.21	1.02

	Casa							
	18	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**
Bajo techo	.20	.22	.22	.23	.23	.25	.26	.28
Intemperie	1.59	.90	.52	.12	.54	.88	.49	1.24

	Casa							
	26	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**
Bajo techo	.28	.29	.34	.39	.40	.45	.54	.62
Intemperie	.48	.27	.37	1.26	.70	.76	.99	.36

a. Calcule un intervalo de confianza para la diferencia de media de población entre concentraciones bajo techo y a la intemperie, utilizando un nivel de confianza de 95% e interprete el intervalo resultante.

b. Si la 34ª casa fuera seleccionada al azar de la población, ¿entre qué valores pronostica que quedaría la diferencia de concentraciones?

38. La adición de imágenes computarizadas a una base de datos promete aumentar en gran medida los recursos para los médicos.

Sin embargo, hay otros métodos para obtener dicha información, por lo que el hecho de la eficiencia de acceso necesita investigarse. El artículo **"The Comparative Effectiveness of Conventional and Digital Image Libraries" (*J. Of Audiovisual in Medicine*, 2001: 8–15)** reporta un experimento en el que se analizó el tiempo en el que 13 profesionales médicos con competencias en computación obtenían una imagen de un banco de diapositivas, y mientras tanto obtenían la misma imagen de una base de datos con una interfaz web.

Sujeto	1	2	3	4	5	6	7
Diapositiva	30	35	40	25	20	30	35
Digital	25	16	15	15	10	20	7
Diferencia	5	19	25	10	10	10	28
Sujeto	8	9	10	11	12	13	
Diapositiva	62	40	51	25	42	33	
Digital	16	15	13	11	19	19	
Diferencia	46	25	38	14	23	14	

a. Construya una gráfica de caja comparativa entre los tiempos de los dos medios para la obtención de imágenes, y comente cualquier característica de interés.

b. Estime la diferencia entre los tiempos promedio reales para los dos tipos de obtención de imágenes de manera que de información sobre la precisión y confiabilidad de cada uno. Asegúrese de comprobar la verosimilitud de cualquier suposición que necesite para su análisis. ¿Será aceptable que los tiempos promedio reales de los dos tipos de obtención de imágenes sean idénticos? ¿Por qué si o por qué no?

39. Los científicos y los ingenieros con frecuencia desean comparar dos técnicas diferentes de medir o determinar el valor de una variable. En tales situaciones, el interés se concentra en probar si la diferencia media en las mediciones es cero. El artículo **"Evaluation of the Deuterium Dilution Technique Against the Test Weighing Procedure for the Determination of Breast Milk Intake" (*Amer. J. of Clinical Nutr.*, 1983: 996–1003)** reporta los datos adjuntos sobre la cantidad de leche ingerida por cada uno de 14 niños seleccionados al azar.

	Niño				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
Método isotópico	1509	1418	1561	1556	2169
Método ponderado de prueba	1498	1254	1336	1565	2000
Diferencia	11	164	225	−9	169

	Niño				
	6	**7**	**8**	**9**	**10**
Método isotópico	1760	1098	1198	1479	1281
Método ponderado de prueba	1318	1410	1129	1342	1124
Diferencia	442	−312	69	137	157

	Niño			
	11	**12**	**13**	**14**
Método isotópico	1414	1954	2174	2058
Método ponderado de prueba	1468	1604	1722	1518
Diferencia	−54	350	452	540

a. ¿Es factible que la distribución de población de las diferencias sea normal?

b. ¿Parece que la diferencia promedio verdadera entre valores de ingesta medidos con los dos métodos es algún valor diferente de cero? Determine el valor *P* de la prueba y utilícelo para llegar a una conclusión a nivel de significancia de .05.

40. La lactancia estimula una pérdida temporal de masa ósea para proporcionar cantidades de calcio adecuadas para la producción de leche. El artículo **"Bone Mass Is Recovered from Lactation to Postweaning in Adolescent Mothers with Low Calcium Intakes" (*Amer. J. of Clinical Nutr.*, 2004; 1322–1326)** dio los siguientes datos sobre contenido total de minerales en los huesos del cuerpo (TBBMC, por sus siglas en inglés) (g) para una muestra tanto durante la lactancia (L) como en el periodo de posdestete (P).

	Sujeto									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
L	1928	2549	2825	1924	1628	2175	2114	2621	1843	2541
P	2126	2885	2895	1942	1750	2184	2164	2626	2006	2627

a. ¿Sugieren los datos que el contenido total de minerales en los huesos del cuerpo durante el posdestete excede el de la lactancia por más de 25 g? Formule y pruebe las hipótesis apropiadas utilizando un nivel de significancia de .05 [*Nota*: La gráfica de probabilidad normal apropiada muestra algo de curvatura pero no suficiente para sembrar dudas sustanciales sobre una suposición de normalidad.]

b. Calcule un límite de confianza superior utilizando un nivel de confianza de 95% para la diferencia promedio verdadera entre TBBMC durante el posdestete y durante la lactancia.

c. ¿Conduce el uso (incorrecto) de la prueba *t* con dos muestras para demostrar las hipótesis sugeridas en a) a la misma conclusión a la que se llegó allí? Explique.

41. Los fármacos antipsicóticos son ampliamente prescritos para condiciones como la esquizofrenia y enfermedad bipolar. El artículo **"Cardiometabolic Risk of Second–Generation Antipsychotic Medications During First–Time Use in Children and Adolescents" (*J. of the Amer. Med. Assoc.*, 2009)** informa sobre la composición corporal y los cambios en el metabolismo de las personas que habían ingerido varios medicamentos antipsicóticos por periodos cortos de tiempo.

a. La muestra de 41 individuos que habían ingerido aripiprazol tuvo una variación media del colesterol total (mg/dL) de 3.75, y el error estándar estimado $s_D/\sqrt{n}$ fue de 3.878.

Calcule un intervalo de confianza con un nivel de confianza de aproximadamente 95% para el verdadero aumento promedio en el colesterol total en estas circunstancias (el artículo citado incluyó este IC).

b. El artículo también informa que en una muestra de 36 individuos que ingirieron la quetiapina, la media de la muestra del nivel de colesterol cambia y el error estándar estimado fue de 9.05 y 4.256, respectivamente. El hecho de hacer cualquier suposición necesaria acerca de la distribución de los cambios en el nivel de colesterol, ¿influye en la elección de un nivel de significancia para su conclusión acerca de cierto aumento promedio en el nivel de colesterol? Explique. [*Nota*: El artículo incluye un valor *P*.]

c. Para la muestra de 45 individuos que habían ingerido la olanzapina, el artículo reportó (7.38, 9.69) como un IC de 95% para la ganancia real de peso promedio (kg). ¿Qué es un IC de 99%?

42. Muchas autopistas tienen señalamientos de servicio que dan información sobre atracciones, campamentos, hospedaje comida y estaciones de gasolina antes de las rampas de salida. Estos señalamientos no suelen proporcionar información sobre las distancias. El artículo **"Evaluation of Adding Distance Information to Freeway–Specific Service (Logo) signs" (*J. Of Transp. Engr.*, 2011:782–788)** reporta que en una investigación se seleccionaron seis sitios a lo largo de la autopista interestatal en Virginia que cuenta con señalamientos. Para cada sitio, se obtuvieron datos de choques de los tres años previos y un año posterior al momento en el que se colocó la información sobre las distancias en los señalamientos. El número de choques por año antes y después de los cambios se muestra a continuación:

Antes:	15	26	66	115	62	64
Después:	16	24	42	80	78	73

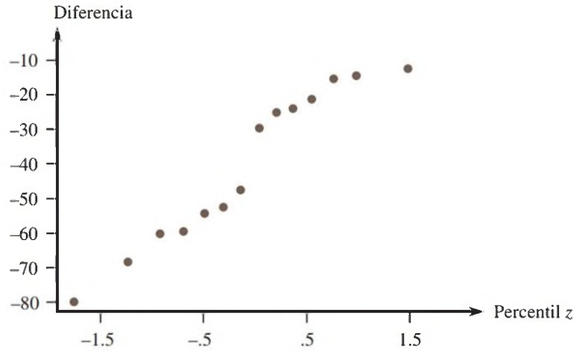
a. El artículo citado señala que "se realizó una prueba *t* apareada para determinar si hubo cualquier cambio en la media del número de choques antes y después de que se añadiera información sobre la distancia en los señalamientos". Lleve a cabo dicha prueba. [*Nota*: El gráfico relevante de probabilidad normal muestra un patrón sustancialmente lineal.]

b. Si un séptimo sito se seleccionara al azar entre los diferentes sitios que cuentan con señalamientos de servicio, entre qué valores esperaría que se encontrara la diferencia en el número de choques?

43. La enfermedad de Cushing se caracteriza por debilidad muscular por una disfunción de la suprarrenal o pituitaria. Para administrar un tratamiento eficaz es importante detectar la enfermedad de Cushing en la niñez tan pronto como sea posible. En el artículo **"Treatment of Cushing–s Disease in Childhood and Adolescence by Transphenoidal Microadenomectomy" (*New Engl. J. of Med.*, 1984: 889)** se muestra la edad al inicio de los síntomas (meses) y la edad en el momento del diagnóstico en 15 niños que padecen la enfermedad. A continuación se dan los valores de las diferencias de edades al principio de los síntomas y la edad en el momento del diagnóstico:

−24 −12 −55 −15 −30 −60 −14 −21
−48 −12 −25 −53 −61 −69 −80

a. ¿Será que la siguiente gráfica de probabilidad normal adjunta siembra una fuerte duda sobre la normalidad aproximada de la distribución de diferencias de población?



b. Calcule un límite de confianza de 95% inferior para la diferencia media de población e interprete el límite resultante.

c. Suponga que ya se habían calculado las diferencias (edad al momento del diagnóstico) − (edad al inicio de los síntomas). ¿Cuál sería un límite de confianza superior de 95% para la diferencia de la media de población correspondiente?

44. Refiérase al ejercicio anterior.

a. Por mucho, la hipótesis nula de mayor frecuencia cuando los datos están apareados es H_0: $\mu_D = 0$. ¿Es una hipótesis razonable en este contexto? Explique.

b. Lleve a cabo una prueba de hipótesis para decidir si existen pruebas convincentes para concluir que el diagnóstico se produce en promedio más de 25 meses después de la aparición de los síntomas.

45. La torsión durante la rotación externa de la cadera (RE) y la extensión pueden ser responsables de ciertos tipos de lesiones en los jugadores de golf y otros atletas. El artículo **"Hip Rotational Velocities During the Full Golf Swing" (*J. of Sports Science and Medicine*, 2009: 296–299)** informa sobre un estudio en que el pico de velocidad de RE y el pico de velocidad (rotación interna) de IR (ambas en grado·segundo^{-1}) fue determinado en una muestra de 15 mujeres golfistas colegiales durante sus giros. Los siguientes datos son suministrados por los autores del artículo

Golfista	RE	RI	Diferencia	Percentil *z*
1	−130.6	−98.9	−31.7	−1.28
2	−125.1	−115.9	−9.2	−0.97
3	−51.7	−161.6	109.9	0.34
4	−179.7	−196.9	17.2	−0.73
5	−130.5	−170.7	40.2	−0.34
6	−101.0	−274.9	173.9	0.97
7	−24.4	−275.0	250.6	1.83
8	−231.1	−275.7	44.6	−0.17
9	−186.8	−214.6	27.8	−0.52
10	−58.5	−117.8	59.3	0.00
11	−219.3	−326.7	107.4	0.17
12	−113.1	−272.9	159.8	0.73
13	−244.3	−429.1	184.8	1.28
14	−184.4	−140.6	−43.8	−1.83
15	−199.2	−345.6	146.4	0.52

a. ¿Será factible que las diferencias provengan de una población distribuida normalmente?

b. El artículo informó que la media (± DE)= −145.3(68.0) para la velocidad de RE y para la velocidad del RI = −227.8(96.6). Basándose sólo en esta información, ¿podría realizarse una prueba de hipótesis acerca de la diferencia entre la velocidad real media del RI y la velocidad real media de RE? Explique.

c. El artículo afirma que "el pico principal de velocidad del RI de la cadera fue significativamente mayor que la velocidad de arrastre RE de la cadera (p= .003, valor t= 3.65)". (La redacción sugiere que se utilizó una prueba de cola superior.) De hecho, ¿es este el caso en realidad? [*Nota*: "p = .033" en la tabla 2 de este artículo es errónea.]

46. El ejemplo 7.11 aportó datos sobre el módulo de elasticidad obtenido 1 minuto después de cargar con una configuración de especímenes de madera. El artículo citado también aportó los valores del módulo de elasticidad obtenidos 4 semanas después de cargar los mismos especímenes de madera. A continuación se presentan los datos.

Observación	1 minuto	4 semanas	Diferencia
1	10490	9110	1380
2	16620	13250	3370
3	17300	14720	2580
4	15480	12740	2740
5	12970	10120	2850
6	17260	14570	2690
7	13400	11220	2180
8	13900	11100	2800
9	13630	11420	2210
10	13260	10910	2350
11	14370	12110	2260
12	11700	8620	3080
13	15470	12590	2880
14	17840	15090	2750
15	14070	10550	3520
16	14760	12230	2530

Calcule e interprete un límite de confianza superior para la diferencia promedio verdadera entre el módulo después de 1 minuto y el módulo después de 4 semanas; primero compruebe la factibilidad de cualquier suposición necesaria.

47. El artículo **"Slender High–Strength RC Columns Under Eccentric Compression" (*Magazine of Concrete Res.*, 2005: 361–370)** presenta los siguientes datos sobre resistencia de cilindros (MPa) de varios tipos de columnas curadas tanto en condiciones húmedas como en condiciones secas en el laboratorio.

	Tipo					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
H:	82.6	87.1	89.5	88.8	94.3	80.0
CS:	86.9	87.3	92.0	89.3	91.4	85.9
	7	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
H:	86.7	92.5	97.8	90.4	94.6	91.6
CS:	89.4	91.8	94.3	92.0	93.1	91.3

a. Estime la diferencia en la resistencia promedio verdadera en las dos condiciones secas de forma que dé información sobre confiabilidad y precisión e interprete la estimación. ¿Qué sugiere la estimación sobre el modo en que se compara la resistencia promedio verdadera en condiciones húmedas y en condiciones secas en el laboratorio?

b. Verifique la verosimilitud de cualquier suposición que fundamente su análisis de a).

48. Construya un conjunto de datos apareados para el cual $t = \infty$, de modo que los datos sean altamente significativos cuando se utilice el análisis correcto, aunque t para la prueba t con dos muestras esté bastante cerca de cero, de tal suerte que el análisis incorrecto dé un resultado insignificante.

9.4 Inferencias sobre una diferencia entre proporciones de población

Después de presentar métodos para comparar las medias de dos poblaciones diferentes, ahora se presta atención a la comparación de dos proporciones de población. Un individuo u objeto se considera como éxito S si posee alguna característica de interés (alguien que se graduó de una universidad, un refrigerador con hacedor de cubos de hielo, etc.). Sean

$$p_1 = \text{la proporción de éxitos } S \text{ en la población \# 1}$$

$$p_2 = \text{la proporción de éxitos } S \text{ en la población \# 2}$$

Alternativamente, $p_1 (p_2)$ pueden ser consideradas como la probabilidad de que un individuo u objeto seleccionado al azar de la primera (segunda) población sea un éxito.

Suponga que se selecciona un tamaño de muestra m de la primera población e, independientemente, se selecciona una muestra de tamaño n de la segunda. Sea X el número de éxitos S en la primera muestra y Y el número de éxitos S en la segunda. La independencia

de las dos muestras implica que X y Y son independientes. Siempre que los dos tamaños de muestras sean mucho más pequeños que los tamaños de población correspondientes, se puede considerar que las distribuciones de X y Y son binomiales. El estimador natural de $p_1 - p_2$, la diferencia en las proporciones de la población, es la diferencia correspondiente en las proporciones muestrales $X/m - Y/n$.

PROPOSICIÓN

Sean $\hat{p}_1 = X/m$ y $\hat{p}_2 = Y/n$, donde $X \sim \text{Bin}(m, p_1)$ y $Y \sim \text{Bin}(n, p_2)$ con X y Y variables independientes. Entonces

$$E(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = p_1 - p_2$$

de modo que $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ sea un estimador insesgado de $p_1 - p_2$, y

$$V(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = \frac{p_1 q_1}{m} + \frac{p_2 q_2}{n} \quad (\text{donde } q_i = 1 - p_i) \tag{9.3}$$

Demostración Puesto que $E(X) = mp_1$ y $E(Y) = np_2$,

$$E\left(\frac{X}{m} - \frac{Y}{n}\right) = \frac{1}{m}E(X) - \frac{1}{n}E(Y) = \frac{1}{m}mp_1 - \frac{1}{n}np_2 = p_1 - p_2$$

Dado que $V(X) = mp_1q_1$, $V(Y) = np_2q_2$, y X y Y son independientes,

$$V\left(\frac{X}{m} - \frac{Y}{n}\right) = V\left(\frac{X}{m}\right) + V\left(\frac{Y}{n}\right) = \frac{1}{m^2}V(X) + \frac{1}{n^2}V(Y) = \frac{p_1q_1}{m} + \frac{p_2q_2}{n}$$

■

Primero se abordarán situaciones en las que tanto m como n son grandes. Así, puesto que las distribuciones de $\hat{p}_1$ y $\hat{p}_2$ son aproximadamente normales, la distribución del estimador $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ también es normal en forma aproximada. Al estandarizar $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ se obtiene una variable Z cuya distribución es aproximadamente normal estándar.

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\dfrac{p_1q_1}{m} + \dfrac{p_2q_2}{n}}}$$

Procedimiento de prueba con muestra grande

La hipótesis nula más general que un investigador podría considerar sería de la forma H_0: $p_1 - p_2 = \Delta_0$. Aunque para medias de población el caso $\Delta_0 \neq 0$ no presentó dificultades, para proporciones de población los casos $\Delta_0 = 0$ y $\Delta_0 \neq 0$ deben ser considerados por separado. Abordaremos este caso, debido a que la mayoría de los problemas reales de esta clase implican $\Delta_0 = 0$ (es decir, la hipótesis nula $p_1 = p_2$). Cuando H_0: $p_1 - p_2 = 0$ es verdadera, sea p el valor común de p_1 y p_2 (y del mismo modo para q). Por tanto, la variable estandarizada

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - 0}{\sqrt{pq\left(\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}\right)}} \tag{9.4}$$

tiene aproximadamente una distribución estándar normal cuando H_0 es verdadera. Sin embargo, esta Z no sirve como estadístico de prueba porque el valor de p es desconocido, H_0 afirma sólo que existe un valor común de p, pero no dice cuál es ese valor. Al reemplazar p y q en (9.4) por estimadores apropiados se obtiene un estadístico de prueba.

Suponiendo que $p_1 = p_2 = p$, en lugar de muestras separadas de tamaño m y n de dos poblaciones diferentes (dos distribuciones binomiales distintas), en realidad se tiene una sola muestra de tamaño $m + n$ de una población con proporción p. El número total de individuos en esta muestra combinada que tiene la característica de interés es $X + Y$. El estimador natural de p es, por tanto,

$$\hat{p} = \frac{X + Y}{m + n} = \frac{m}{m + n} \cdot \hat{p}_1 + \frac{n}{m + n} \cdot \hat{p}_2 \tag{9.5}$$

La segunda expresión para $\hat{p}$ indica que en realidad es un promedio ponderado de los estimadores $\hat{p}_1$ y $\hat{p}_2$ obtenidos con las dos muestras. Si se utiliza $\hat{p}$ y $\hat{q} = 1 - \hat{p}$ en lugar de p y q en (9.4) se obtiene un estadístico de prueba cuya distribución es aproximadamente normal estándar cuando H_0 es verdadera.

Hipótesis nula: $H_0: p_1 - p_2 = 0$

Valor estadístico de prueba (muestras grandes): $z = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}\right)}}$

Hipótesis alternativa	Determinación del valor *P*
$H_a: p_1 - p_2 > 0$	Área bajo la curva normal estándar a la derecha de la curva z
$H_a: p_1 - p_2 < 0$	Área bajo la curva normal estándar a la izquierda de la curva z
$H_a: p_1 - p_2 \neq 0$	$2 \cdot$ (área bajo la curva normal estándar a la derecha de $\lvert z \rvert$)

La prueba de seguridad se puede usar siempre y cuando $m\hat{p}_1$, $m\hat{q}_1$, $n\hat{p}_2$ y $n\hat{q}_2$ sean todos al menos 10.

EJEMPLO 9.11 El artículo **"Aspirin Use and Survival After Diagnosis of Colorectal Cancer" (*J. of the Amer. Med. Assoc.*, 2009: 649–658)** informa que de 549 participantes del estudio que utilizan regularmente aspirina después de ser diagnosticados con cáncer colorrectal, hubo 81 muertes por cáncer colorrectal específico, mientras que de entre 730 individuos diagnosticados de manera similar que no hicieron posteriormente uso de la aspirina, hubo 141 muertes por cáncer colorrectal específico. ¿Sugerirán estos datos que el uso regular de aspirina después del diagnóstico, reduce la tasa de incidencia específica de muertes por cáncer colorrectal? Probemos la hipótesis apropiada con un nivel de significancia de .05.

El parámetro de interés es la diferencia $p_1 - p_2$, donde p_1 es la verdadera proporción de las muertes de aquellos que utilizan regularmente aspirina y p_2 es la verdadera proporción de muertes para los que no hicieron uso de la aspirina. El uso de la aspirina es beneficiosa si $p_1 < p_2$, que corresponde a una diferencia negativa entre las dos proporciones.

Las hipótesis relevantes son, por tanto,

$$H_0: p_1 - p_2 = 0 \qquad \text{versus} \qquad H_a: p_1 - p_2 < 0$$

los parámetros estimados son $\hat{p}_1 = 81/549 = .1475$, $\hat{p}_2 = 141/730 = .1932$, y $\hat{p} = (81 + 141)/(549 + 730) = .1736$. Una prueba z es apropiada en este caso porque todos $m\hat{p}_1$, $m\hat{q}_1$, $n\hat{p}_2$ y $n\hat{q}_2$ son al menos 10. El valor de la prueba estadística resultante es

$$z = \frac{.1475 - .1932}{\sqrt{(.1736)(.8264)\left(\dfrac{1}{549} + \dfrac{1}{730}\right)}} = \frac{-.0457}{.021397} = -2.14$$

El correspondiente valor P para una prueba z de cola inferior es $\Phi(-2.14) = .0162$. Ya que $.0162 \leq .05$, la hipótesis nula puede ser rechazada al nivel de significancia .05. Así que cualquiera que acepte este nivel de significancia puede estar convencido de que el uso de aspirina en estas circunstancias es beneficioso. Sin embargo, alguien en busca de más evidencia convincente puede seleccionar un nivel de significancia de .01 y luego no estar convencido. ■

Probabilidades de error tipo II y tamaños de muestra

En este caso la determinación de β es un poco más tediosa de lo que fue para otras pruebas con muestra grande. La razón es que el denominador de Z es una estimación de la desviación estándar de $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$, suponiendo que $p_1 = p_2 = p$. Cuando H_0 es falsa, $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ debe volver a estandarizarse mediante

$$\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \sqrt{\frac{p_1 q_1}{m} + \frac{p_2 q_2}{n}} \tag{9.6}$$

La forma de σ implica que β no es una función de sólo $p_1 - p_2$, de modo que se denota como $\beta(p_1, p_2)$.

Hipótesis alternativa	$\beta(p_1, p_2)$
H_a: $p_1 - p_2 > 0$	$\Phi\left[\dfrac{z_\alpha \sqrt{\bar{p}\,\bar{q}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)} - (p_1 - p_2)}{\sigma}\right]$
H_a: $p_1 - p_2 < 0$	$1 - \Phi\left[\dfrac{-z_\alpha \sqrt{\bar{p}\,\bar{q}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)} - (p_1 - p_2)}{\sigma}\right]$
H_a: $p_1 - p_2 \neq 0$	$\Phi\left[\dfrac{z_{\alpha/2} \sqrt{\bar{p}\,\bar{q}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)} - (p_1 - p_2)}{\sigma}\right]$ $-\Phi\left[\dfrac{-z_{\alpha/2} \sqrt{\bar{p}\,\bar{q}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)} - (p_1 - p_2)}{\sigma}\right]$

Donde $\bar{p} = (mp_1 + np_2)/(m + n)$, $\bar{q} = (mq_1 + nq_2)/(m + n)$ y σ está dada por (9.6).

Demostración Para la prueba de cola superior (H_a: $p_1 - p_2 > 0$),

$$\beta(p_1, p_2) = P\left[\hat{p}_1 - \hat{p}_2 < z_\alpha \sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}\right]$$

$$= P\left[\frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - (p_1 - p_2))}{\sigma} < \frac{z_a \sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)} - (p_1 - p_2)}{\sigma}\right]$$

Cuando m y n son grandes,

$$\hat{p} = (m\hat{p}_1 + n\hat{p}_2)/(m + n) \approx (mp_1 + np_2)/(m + n) = \bar{p}$$

y $\hat{q} \approx \bar{q}$ la cual da la expresión previa (aproximada) para $\beta(p_1, p_2)$. ■

Alternativamente, para p_1 especificada, p_2 con $p_1 - p_2 = d$, se pueden determinar los tamaños de muestra necesarios para obtener $\beta(p_1, p_2) = \beta$. Por ejemplo, para la prueba de cola superior se iguala $-z_\beta$ al argumento de $\Phi(\cdot)$(es decir, lo que está entre paréntesis) en el recuadro siguiente. Si $m = n$, existe una expresión simple para el valor común.

En el caso $m = n$, la prueba a nivel α tiene una probabilidad β de error tipo II con valores alternativos de p_1, p_2 con $p_1 - p_2 = d$ cuando

$$n = \frac{\left[z_\alpha\sqrt{(p_1 + p_2)(q_1 + q_2)/2} + z_\beta\sqrt{p_1q_1 + p_2q_2}\right]^2}{d^2} \qquad \textbf{(9.7)}$$

para una prueba de cola superior o inferior, con $\alpha/2$ reemplazando α para una prueba de dos colas.

EJEMPLO 9.12 Una de las aplicaciones verdaderamente impresionantes de la estadística ocurrió en conexión con el diseño de experimento y análisis de la vacuna Salk contra la polio en 1954. Una parte del experimento se centró en la eficacia de la vacuna en el combate de la polio paralítica. Debido a que se pensó que sin un grupo de control de niños, no habría una base sólida para evaluar la vacuna, se decidió administrar la vacuna a un grupo y una inyección placebo (visualmente indistinguible de la vacuna pero que no tiene ningún efecto) a un grupo de control. Por razones éticas y también porque se pensaba que el conocimiento de la administración de la vacuna podría afectar el tratamiento y diagnóstico, el experimento se llevó a cabo de una manera **doble ciego**. Es decir, ninguno de los individuos que recibieron inyecciones ni los que la administraron en realidad sabían quién estaba recibiendo la vacuna y quién estaba recibiendo el placebo (las muestras fueron numéricamente codificadas); recuerde que en ese momento no estaba del todo claro si la vacuna era benéfica.

Sean p_1 y p_2 las probabilidades de que un niño contraiga polio paralítica en las condiciones de control y tratamiento, respectivamente. El objetivo era probar H_0: $p_1 - p_2 = 0$ contra H_a: $p_1 - p_2 > 0$ (la alternativa afirma que es menos probable que un niño vacunado contraiga polio que un niño no vacunado). Suponiendo que el valor verdadero de p_1 es .0003 (un coeficiente de incidencia de 30 por cada 100 000), la vacuna sería una mejora significativa si el coeficiente de incidencia se redujera a la mitad, es decir, $p_2 = .00015$. Con una prueba a un nivel $\alpha = .05$, sería entonces razonable requerir tamaños de muestra con los cuales $\beta = .1$ cuando $p_1 = .0003$ y $p_2 = .00015$. Si se suponen tamaños de muestra iguales, el requerido n se obtiene con (9.7) como

$$n = \frac{\left[1.645\sqrt{(.5)(.00045)(1.99955)} + 1.28\sqrt{(.00015)(.99985) + (.0003)(.9997)}\right]^2}{(.0003 - .00015)^2}$$
$$= [(.0349 + .0271)/.00015]^2 \approx 171\,000$$

Los datos reales para este experimento son los siguientes. Se utilizaron tamaños de muestra de aproximadamente 200 000. El lector puede verificar con facilidad que $z = 6.43$, un valor muy significativo. ¡La vacuna fue un rotundo éxito!

Placebo: $m = 201\,229$, x = número de casos de polio paralítica = 110

Vacuna: $n = 200\,745$, $y = 33$ ■

Intervalo de confianza con muestra grande

Tal como con la media, muchos problemas de dos muestras implican el objetivo de comparación mediante pruebas de hipótesis, pero en ocasiones una estimación de intervalo para $p_1 - p_2$ es apropiada. Tanto $\hat{p}_1 = X/m$ y $\hat{p}_2 = Y/n$ tienen distribuciones aproximadamente normales cuando tanto m como n son grandes. Si se identifica θ con $p_1 - p_2$, entonces $\hat{\theta} = \hat{p}_1 - \hat{p}_2$ satisface las condiciones necesarias a fin de obtener un intervalo de confianza para muestra grande. En particular, la desviación estándar estimada de $\hat{\theta}$ es $\sqrt{(\hat{p}_1\hat{q}_1/m) + (\hat{p}_2\hat{q}_2/n)}$. El intervalo general $\hat{\theta} \pm z_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\theta}}$ de $100(1 - \alpha)\%$ toma la forma siguiente.

Un IC para $p_1 - p_2$ con un nivel de confianza aproximadamente $100(1 - \alpha)\%$ es

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{m} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n}}$$

Este intervalo puede usarse con seguridad siempre y cuando $m\hat{p}_1$, $m\hat{q}_1$, $n\hat{p}_2$ y $n\hat{q}_2$ sean todos al menos 10.

Observe que la desviación estándar estimada de $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ (la expresión de la raíz cuadrada) es diferente aquí de lo que fue para probar hipótesis cuando $\Delta_0 = 0$.

Investigaciones recientes han demostrado que el nivel de confianza para el intervalo de confianza tradicional que se acaba de dar en ocasiones se desvía sustancialmente del nivel nominal (el nivel que se piensa que se obtendrá cuando se utiliza un valor crítico z particular, p. ej., 95% cuando $z_{\alpha/2} = 1.96$). Se dice que la mejora sugerida es agregar un éxito y una falla a cada una de las dos muestras y luego reemplazar las $\hat{p}$ y $\hat{q}$ en la fórmula anterior por los $\tilde{p}$ y $\tilde{q}$ donde $\tilde{p}_1 = (x + 1)/(m + 2)$, etcétera. Este intervalo modificado también puede ser utilizado cuando los tamaños de muestra son bastante pequeños.

EJEMPLO 9.13 ¿La gente que duerme muchas horas tiene más problemas para conciliar el sueño? En el artículo **"Long Working Hours and Sleep Distrubances: The Whitehall II Prospective Cohort Study" (*Sleep*, 2009: 7372745)** se describe una investigación sobre este tema**.** En una muestra de 1501 burócratas británicos que trabajaron más de 40 horas a la semana, 750 indicaron que suelen dormir menos de 7 horas por noche. En otra muestra de 958 burócratas británicos que trabajaron entre 35 y 40 horas a la semana, 407 dijeron que suelen dormir menos de 7 horas por noche. Los investigadores creyeron que estas muestras eran representativas de las poblaciones a las que pertenecen.

Sea que p_1 denote la proporción de todos los burócratas británicos que trabajaron más de 40 horas a la semana y que durmieron menos de 7 horas por noche, y que p_2 denote la proporción análoga para la población de 35−40 horas. Los estimados puntuales de p_1 y p_2 son

$$\hat{p}_1 = \frac{750}{1501} = .500,\ \hat{p}_2 = \frac{407}{958} = .425$$

a partir de lo cual $\hat{q}_1 = .500$, $\hat{q}_2 = .575$. Todas las cantidades $m\hat{p}_1$, $m\hat{q}_1$, $n\hat{p}_2$, $n\hat{q}_2$ son mucho mayores a 10, por lo que se puede utilizar el intervalo de confianza $p_1 - p_2$ para la muestra grande. El intervalo al 99% es

$$.500 - .425 \pm 2.58\sqrt{\frac{(.500)(.500)}{1501} + \frac{(.425)(.575)}{958}} = .075 \pm (2.58)(.020534)$$
$$= 0.75 \pm 0.53 = (.022, .128)$$

A un nivel de confianza de 99% se estima que la proporción de aquellos que trabajan durante largas jornadas y que duermen menos de 7 horas por noche excede la proporción correspondiente de aquellos que trabajan pocas horas por un valor entre .022 y .128. El hecho

de que este intervalo sólo incluya valores positivos sugiere que aquellos que habían trabajado muchas más horas tienden a dormir menos. Sin embargo este estudio es observacional y no aleatorio controlado, por lo que sería peligroso inferir una relación causal entre las horas de trabajo y la cantidad de sueño. Debido a que los tamaños de muestra son muy grandes, el intervalo modificado que utiliza $\tilde{p}_2$, $\tilde{q}_2$, $\tilde{p}_2$ y $\tilde{q}_2$ es idéntico al que se calculó. ■

Inferencias basadas en muestras pequeñas

En ocasiones una inferencia respecto a $p_1 - p_2$ es posible que tenga que basarse en muestras para las cuales al menos un tamaño de muestra es pequeño. Los métodos apropiados para tales situaciones no son directos como aquellos para muestras grandes, y existe más controversia entre los estadísticos en cuanto a los procedimientos recomendados. Una prueba utilizada con frecuencia, llamada prueba de Fisher–Irwin, se basa en la distribución hipergeométrica. Consulte con su amigable vecino estadístico para mayor información.

EJERCICIOS Sección 9.4 (49–58)

49. Considere las dos preguntas siguientes diseñadas para obtener conocimiento cuantitativo:

a. Cuál es el 15% de 1000?

b. Una tienda ofrece 15% de descuento en todas las televisiones. La televisión más popular suele costar $1000. Cuánto dinero ahorraría el consumidor sobre el precio de la televisión gracias al descuento?

Suponga que la primera pregunta se le formula a 200 estudiantes universitarios, seleccionados al azar, 164 de los cuales la responden de manera correcta; la segunda pregunta se le hace a una muestra aleatoria distinta de 200 estudiantes universitarios, de los cuales 140 dan la respuesta correcta (los porcentajes de la muestra se correlacionan con los que se presentan en el artículo **"Using the Right Yardstick: Assessing Financial Literacy Measures by Way of Financial Well–Being"**, ***J of Consumer Affairs*****, 2013: 243–262**; los investigadores encontraron que aquellos que respondieron las preguntas correctamente, de manera particular las preguntas con un contexto, fueron significativamente más exitosos en sus decisiones respecto a inversiones más que aquellos que no la respondieron correctamente). Lleve a cabo una prueba de hipótesis con un nivel de significancia de .05 para decidir si la proporción verdadera de respuestas correctas a la pregunta sin un contexto excede la de las respuestas correctas a la pregunta con un contexto.

50. Algunos incidentes recientes de contaminación alimentaria han causado mucha preocupación entre los consumidores. El artículo **"How Safe is That Chicken?" (*Consumer Reports, Jan.* 2010:19–23)** reportó que 35 de 80 pollos de la marca Perdue seleccionados al azar dieron prueba positiva ya sea para campilobacter o salmonella (o ambas), los agentes bacterianos responsables del mayor número de enfermedades provocadas por alimentos. Mientras que 66 de 80 pollos de la marca Tyson dieron pruebas positivas.

a. ¿Sesá que la proporción verdadera de pollos Perdue no contaminados difiere del de pollos de la marca Tyson? Lleve a cabo una prueba de hipótesis con un nivel de significancia de .01.

b. Si las proporciones verdaderas de pollos no contaminados para las marcas Perdue y Tyson son .50 y .25, respectivamente, qué tan probable es que la hipótesis nula de proporciones iguales sea rechazada cuando se utiliza un nivel de significancia de .01 y el tamaño de ambas muestras es de 80 en ambos casos?

51. Es bien sabido que un placebo, un medicamento o tratamiento falso, pueden tener un efecto positivo algunas veces sólo por el hecho de que los pacientes piensan que la medicación o el tratamiento son útiles. El artículo **"Beware the Nocebo Effect" (*New York Times,* agosto 12 de 2012)** proporciona ejemplos de un fenómeno mucho menos familiar: la tendencia de los pacientes que saben de los posibles efectos secundarios a realmente experimentar tales efectos. El artículo cita un estudio publicado en ***The Journal of Sexual Medicine*** en el que un grupo de pacientes diagnosticados con hiperplasia prostática benigna fue dividido en dos subgrupos de manera aleatoria. Un subgrupo de 55 pacientes recibió un compuesto cuya eficiencia había sido probada además de que se les advirtió que el tratamiento podría provocar disfunción eréctil como efecto secundario. El otro subgrupo, de 52 pacientes, recibió el mismo tratamiento pero sin la advertencia. El porcentaje del subgrupo que no recibió ninguna advertencia que reportó uno o más efectos secundarios de tipo sexual fue de 15.3%, mientras que en el grupo que recibió la advertencia el 43.6% de los pacientes reportó al menos un efecto secundario de tipo sexual. Escriba y pruebe la hipótesis apropiada con un nivel de significancia de .05 y decida si el efecto nocebo está operando en este caso. [*Nota*: El número estimado de "éxitos" en el grupo que no recibió ninguna advertencia es de 10, pero no es suficiente para ser preocupante (algunas fuentes utilizan un valor de corte menos conservador de 5 en vez de 10).]

52. ¿Consideran los maestros que su trabajo es remunerativo y satisfactorio? El artículo **"Work–Related Attitudes" (*Psychological***

***Reports*, 1991: 443–450)** muestra los resultados de una encuesta de 395 maestros de primaria y 266 maestros de preparatoria. De los maestros de primaria, 224 dijeron que estaban muy satisfechos con su trabajo, en tanto que 126 de los profesores de preparatoria estaban muy satisfechos con su trabajo. Calcule las diferencias entre la proporción de todos los maestros de primaria que están satisfechos y todos los de preparatoria que también están satisfechos, calculando e interpretando un intervalo de confianza.

53. Olestra es un sustituto de grasa aprobado por la FDA para usarse en bocadillos. Debido a que habido reportes anecdóticos de problemas gastrointestinales asociados con el consumo de olestra se realizó un experimento de control con placebo doble ciego aleatorizado para comparar las papas fritas con olestra con las regulares respecto a síntomas gastrointestinales (**"Gastrointestinal Symptoms Following Consumption of Olestra or Regular Triglyceride Potato Chips", *J. of the Amer. Med. Assoc.*, 1998: 150–152**). Entre 529 individuos en el grupo de control con las papas regulares, 17.6% experimentó un evento gastrointestinal adverso, en tanto que entre los 563 individuos en el grupo de tratamiento con papas olestra, 15.8% experimentó dicho evento.

a. Realice una prueba de hipótesis al nivel de significancia de 5% para decidir si la proporción de incidencia de problemas gastrointestinales en aquellos que consumen papas con olestra, de acuerdo con el régimen experimental, difiere de la proporción de incidencia con el tratamiento de control con papas regulares.

b. Si los porcentajes verdaderos con los dos tratamientos fueron 15 y 20%, respectivamente, ¿qué tamaños de muestra ($m = n$) serían necesarios para detectar semejantes diferencias con probabilidad de .90?

54. Teen Court es un programa de diversión juvenil diseñado para eludir el tratamiento formal de infractores por primera vez en el sistema para justicia de menores. El artículo **"An Experimental Evaluation of Teen Courts" (*J. of Experimental Criminology*, 2008: 137–163)** informa sobre un estudio en el que los delincuentes fueron asignados aleatoriamente a la Teen Court o corte de adolescentes o al Departamento de Servicios Juveniles (DJS, por sus siglas en inglés), método de procesamiento tradicional. De los 56 individuos TC, 18 reincidieron (¡búsquelos!) durante los 18 meses de seguimiento, mientras que de los 51 individuos DJS 12 fueron reincidentes. ¿Sugerirán los datos que la verdadera proporción de individuos TC que reincidieron durante el periodo de seguimiento específico difiere de la proporción de individuos DJS que lo hicieron? Establezca y pruebe las hipótesis pertinentes al obtener un valor P y luego con un nivel de significancia de .10.

55. En investigaciones médicas, la proporción $\theta = p_1/p_2$ a menudo es de más interés que la diferencia $p_1 - p_2$ (p. ej., ¿qué tan probable es que los individuos que recibieron el tratamiento 1 se recuperen tal como aquellos que recibieron el tratamiento 2?) Sea $\hat{\theta} = \hat{p}_1/\hat{p}_2$. Cuando tanto m como n son grandes, el estadístico $\ln(\theta)$ tiene aproximadamente una distribución normal con media aproximada $\ln(\theta)$ y desviación estándar aproximada $[(m - x)/(mx) + (n - y)/(ny)]^{1/2}$.

a. Use estos datos para obtener una fórmula para intervalo de confianza de 95% de muestra grande para calcular el $\ln(\theta)$ y luego un intervalo de confianza para θ mismo.

b. Regrese a los datos de ataque cardiaco del ejemplo 1.3 y calcule un intervalo de valores factibles de θ al nivel de confianza de 95%. ¿Qué sugiere este intervalo sobre la eficacia del tratamiento con aspirina?

56. En ocasiones algunos experimentos que implican éxitos o fallas se realizan en pares o de una manera antes/después. Suponga que antes de un discurso político importante dado por un candidato político, se seleccionan n individuos y se les pregunta si están a favor del candidato (S) o si no lo están (F). Luego del discurso a las mismas n personas se les hizo la misma pregunta. Las respuestas pueden ser ingresadas en una tabla como la siguiente:

		Después S	Después F
Antes	S	x_1	x_2
	F	x_3	x_4

donde $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$. Sean p_1, p_2, p_3 y p_4, las cuatro probabilidades de las celdas, de modo que $p_1 = P(S$ antes y S después), y así sucesivamente. Se desea probar la hipótesis de que la real proporción de simpatizantes (S) después del discurso no se ha incrementado contra la alternativa de que sí se haya incrementado.

a. Establezca las dos hipótesis de interés en función de p_1, p_2, p_3 y p_4.

b. Construya un estimador de la diferencia antes/después en probabilidades de éxito.

c. Cuando n es grande, se puede demostrar que la variable aleatoria $(X_i - X_j)/n$ tiene de manera aproximada una distribución normal con varianza dada por $[p_i + p_j - (p_i - p_j)^2]/n$. Use esto para construir un estadístico de prueba con aproximadamente una distribución estándar normal cuando H_0 es verdadera (el resultado se llama prueba de McNemar).

d. Si $x_1 = 350$, $x_2 = 150$, $x_3 = 200$ y $x_4 = 300$, ¿qué se concluye?

57. Se han utilizado dos tipos diferentes de aleación, A y B, para fabricar especímenes experimentales de un pequeño eslabón sometido a tensión utilizado en una aplicación de ingeniería. Se determinó la resistencia última (lb/pulg^2) de cada espécimen y los resultados se resumen en la distribución de frecuencia adjunta.

	A	B
26 – < 30	6	4
30 – < 34	12	9
34 – < 38	15	19
38 – < 42	7	10
	$m = 40$	$m = 42$

Calcule un intervalo de confianza de 95% para la diferencia entre las proporciones verdaderas de todos los especímenes de aleaciones A y B que tienen una resistencia última de al menos 34 lb/pulg^2.

58. Con la fórmula tradicional, se tiene que construir un intervalo de confianza de 95% para $p_1 - p_2$ con base en tamaños de muestra iguales de las dos poblaciones. ¿Con qué valor de $n(= m)$ tendrá el intervalo resultante un ancho de a lo más .1, independientemente de los resultados del muestreo?

9.5 Inferencias sobre dos varianzas de población

De vez en cuando se requieren métodos para comparar dos varianzas de población (o desviaciones estándar), aunque tales problemas surgen con mucho menor frecuencia que aquellos que implican medias o proporciones. Para el caso en que las poblaciones investigadas son normales, los procedimientos están basados en una nueva familia de distribuciones de probabilidad.

La distribución *F*

La distribución de probabilidad *F* tiene dos parámetros, denotados por ν_1 y ν_2. El parámetro ν_1 se conoce como *número de grados de libertad del numerador* y ν_2 es el *número de grados de libertad del denominador*; en este caso ν_1 y ν_2 son enteros positivos. Una variable aleatoria que tiene una distribución *F* no puede asumir un valor negativo. Puesto que la función de densidad es complicada y no será utilizada en forma explícita, se omite la fórmula. Existe una importante conexión entre una variable *F* y variables ji al cuadrado. Si X_1 y X_2 son variables aleatorias ji al cuadrado independientes con ν_1 y ν_2 grados de libertad, respectivamente, entonces la variable aleatoria

$$F = \frac{X_1/\nu_1}{X_2/\nu_2} \tag{9.8}$$

(la razón de las dos variables ji-cuadrada divididas entre sus respectivos grados de libertad) se puede demostrar que tiene una distribución *F*.

La figura 9.7 ilustra la gráfica de una función de densidad *F* típica. Análoga a la notación $t_{\alpha,\nu}$ y $X^2_{\alpha,\nu}$, se utiliza F_{α,ν_1,ν_2} para el valor sobre el eje horizontal que captura α del área bajo la curva de densidad *F*, con ν_1 y ν_2 grados de libertad en la cola superior. La curva de densidad no es simétrica, así que parecería que tanto los valores críticos de cola superior como los de cola inferior deben ser tabulados. Esto no es necesario, debido al hecho de que $F_{1-\alpha,\nu_1,\nu_2} = 1/F_{\alpha,\nu_2,\nu_1}$.

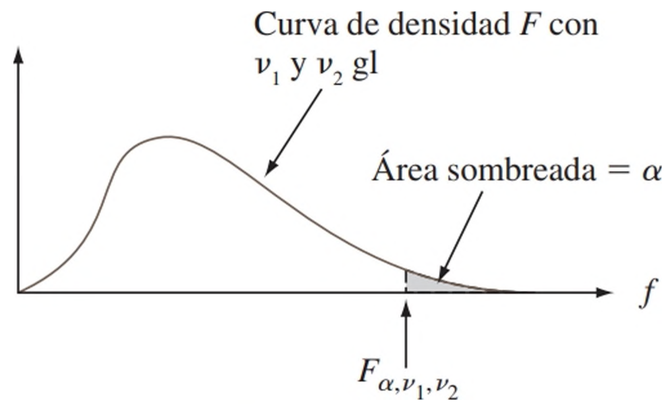


Figura 9.7 Una curva de densidad *F* y valor crítico

La tabla A.9 del apéndice da F_{α,ν_2,ν_1} con $\alpha = .10, .05, .01$ y $.001$ y varios valores de ν_1 (en diferentes columnas de la tabla) y ν_2 (en diferentes grupos de renglones de la tabla). Por ejemplo, $F_{.05,6,10} = 3.22$ y $F_{.05,10,6} = 4.06$. El valor crítico $F_{.95,6,10}$, que captura .95 del área a su derecha (y por tanto .05 a la izquierda) bajo la curva *F* con $\nu_1 = 6$ y $\nu_2 = 10$, es $F_{.95,6,10} = 1/F_{.05,10,6} = 1/4.06 = .246$

Prueba *F* para igualdad de varianzas

Un procedimiento de prueba de hipótesis que se refiere a la razón σ_1^2/σ_2^2 está basado en el siguiente resultado.

TEOREMA

Sean $X_1,\ldots, X_m$ una muestra aleatoria de una distribución normal con varianza σ_1^2, sean $Y_1,\ldots, Y_n$ otra muestra aleatoria (independiente de las X_i) de una distribución normal con varianza σ_2^2, y sean S_1^2 y S_2^2 las dos varianzas muestrales. Entonces la variable aleatoria

$$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \tag{9.9}$$

tiene una distribución F con $\nu_1 = m - 1$ y $\nu_2 = n - 1$.

Este teorema se obtiene al combinar (9.8) con el hecho de que cada una de las variables $(m-1)S_1^2/\sigma_1^2$ y $(n-1)S_2^2/\sigma_2^2$ tienen una distribución ji al cuadrado con $m-1$ y $n-1$ grados de libertad, respectivamente (véase la sección 7.4). Puesto que F incluye un cociente en lugar de una diferencia, el estadístico de prueba es la razón de varianzas muestrales. La pretensión de que $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ es entonces rechazada si la razón difiere por mucho de 1.

Recuerde que el valor P para una prueba t de cola superior es el área bajo una curva t apropiada a la derecha de la t calculada, mientras que para una prueba de cola inferior, el valor P es el área bajo la curva a la izquierda de t. De manera análoga, el valor P para una prueba F de cola superior es el área bajo la curva F apropiada (aquella con grados de libertad especificos para el numerador y el denominador) a la derecha de f, y el valor P para una prueba de cola inferior es el área bajo la curva F a la izquierda de f. Debido a que las curvas t son simétricas, el valor P para una prueba de dos colas es el doble del área bajo la cola inferior si t es negativa y el doble del área bajo la cola superior si t es positiva. Aunque las curvas F no son simétricas, por analogía el valor P para una prueba F de dos colas es el doble del área bajo la cola inferior si f está debajo de la mediana y el doble del área bajo la cola superior, si está por encima de la mediana. La figura 9.8 ilustra esto para una prueba de cola superior basada en $\nu_1 = 4$ y $\nu_2 = 6$.

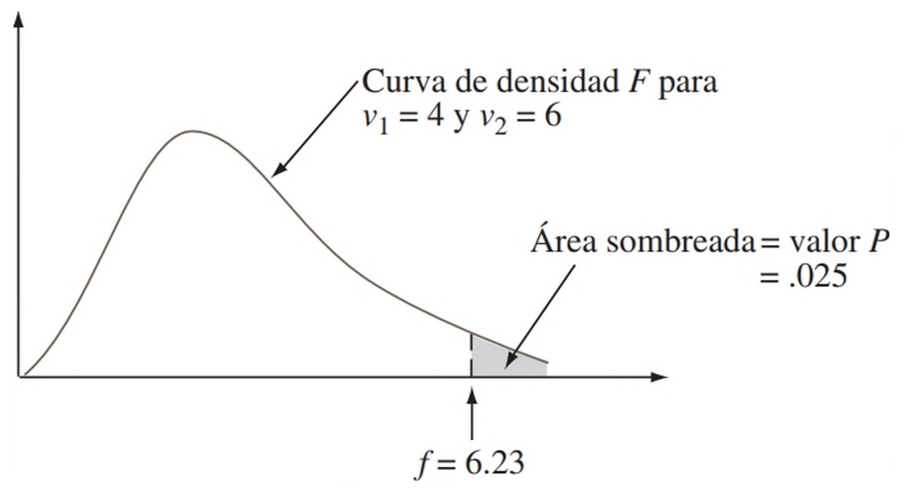


Figura 9.8 Valor P para una prueba F de cola superior

Hipótesis nula: $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Valor estadístico de prueba: $f = s_1^2/s_2^2$

Hipótesis alternativa	Determinación del valor P
$H_a: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	A_R = área bajo la curva $F_{m-1,\,n-1}$ a la derecha de f
$H_a: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$	A_L = área bajo la curva $F_{m-1,\,n-1}$ a la izquierda de f
$H_a: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$2 \cdot \min(A_R, A_L)$

Suposición: Ambas distribuciones de la población son normales y las dos muestras aleatorias son independientes una de la otra.

La tabulación de áreas de cola superior de una curva F es mucho más tediosa que para curvas t porque están implicados dos grados de libertad. Con cada combinación de ν_1 y ν_2, la tabla F da sólo los cuatro valores críticos que capturan las áreas .10, .05, .01 y .001. Debido a esto, la tabla generalmente sólo proporciona un límite superior y uno inferior (o ambos) sobre el valor P. Por ejemplo, suponga que la prueba es de cola superior y está basada en 4 gl para el numerador y en 6 gl para el denominador. Si $f = 5.82$, entonces el valor P es el área bajo la curva $F_{4,6}$ a la derecha de 5.82. Debido a que $F_{.05,4,6} = 4.53$, el área a la derecha de 4.53 es por definición .05. De manera similar, $F_{.01,4,6} = 9.15$ implica que el área bajo la curva a la derecha de este valor es de .01. Dado que 5.82 cae entre 4.53 y 9.15, el área a la derecha de 5.82 debe estar entre .01 y .05. Esto es, .01 < valor P < .05. La figura 9.9 muestra lo que se puede decir sobre el valor P dependiendo de dónde cae f en relación con los cuatro valores críticos relevantes que están tabulados.

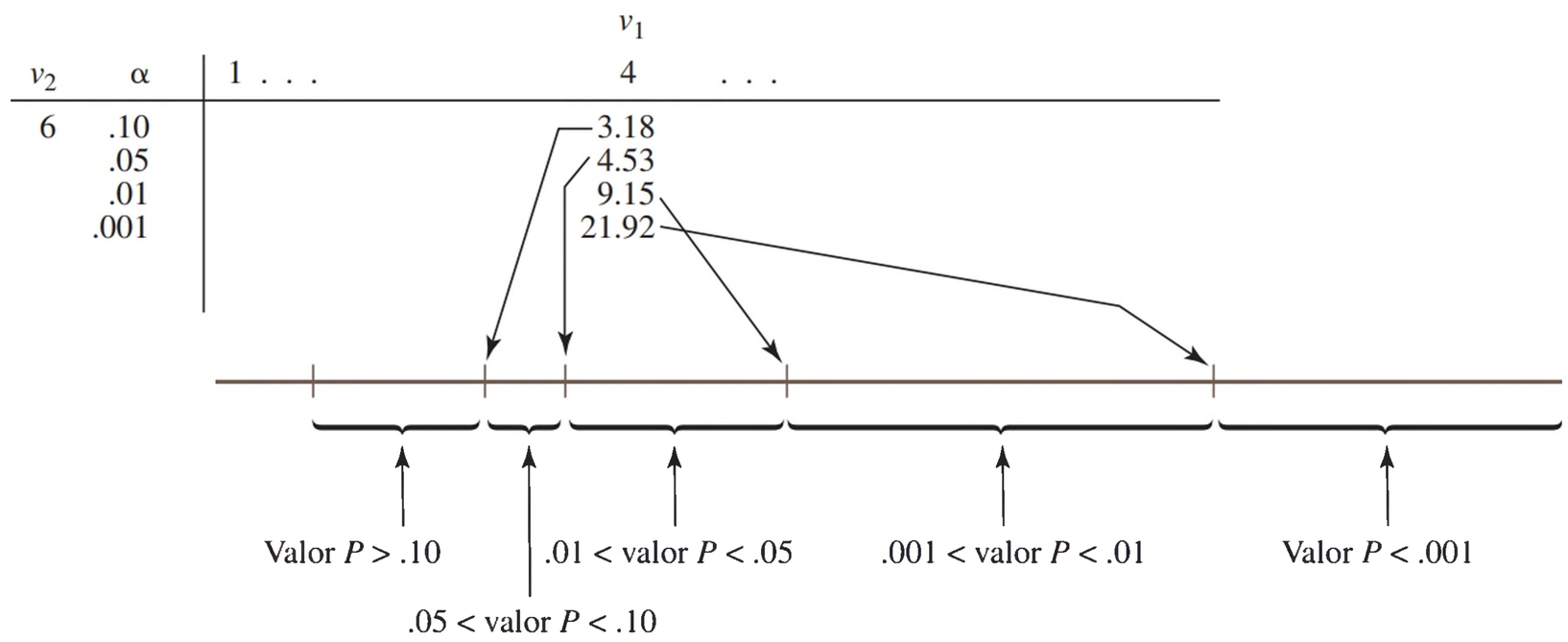


Figura 9.9 Obtención de información sobre el valor P a partir de la tabla F para una prueba F de cola superior

De nuevo, considerando una prueba con $\nu_1 = 4$ y $\nu_2 = 6$,

$$f = 5.70 \Rightarrow .01 < \text{valor } P < .05$$
$$f = 2.16 \Rightarrow \text{valor } P > .10$$
$$f = 25.03 \Rightarrow \text{valor } P < .001$$

Sólo si f es igual a un valor tabulado se obtiene un valor P exacto (p. ej., si $f = 4.53$, entonces el valor $P = .05$). Una vez que se sabe que .01 < valor P < .05, H_0 sería rechazada a un nivel de significancia de .05, pero no a un nivel de .01. Cuando el valor P < .001, H_0 deberá ser rechazada a cualquier nivel de significancia razonable.

Todas las pruebas F que se analizaron en capítulos subsiguientes serán de cola superior. Si, sin embargo, una prueba F de cola inferior es apropiada, entonces, los valores críticos de cola inferior deben obtenerse como se describió antes para poder establecer un límite o límites del valor P. En el caso de una prueba de dos colas, el límite o los límites de una prueba de una cola deberán multiplicarse por 2. Por ejemplo, si $f = 5.82$ cuando $\nu_1 = 4$ y $\nu_2 = 6$, y puesto que 5.82 queda entre los valores críticos .05 y .01, 2(.01) < valor P < 2(.05), es decir .02 < valor P < .10. H_0 sería rechazada si $\alpha = .10$ pero no si $\alpha = .01$. En este caso, no se puede decir con base en la tabla qué conclusión es apropiada cuando $\alpha = .05$ (puesto que no se sabe si el valor P es más pequeño o más grande que este). Sin embargo, el software estadístico muestra que el área a la derecha de 5.82 bajo esta curva F es .029, de modo que el valor P es .058 y, por consiguiente, la hipótesis nula no debe ser rechazada al nivel .05. Varios programas de computadora estadísticos, desde luego, proporcionan un valor P exacto para cualquier prueba F.

EJEMPLO 9.14 Una muestra aleatoria de 200 vehículos que viajan sobre caminos de grava en un país con un límite de velocidad de 35 mph en dichos caminos dio como resultado una velocidad media muestral de 37.5 mph y una desviación estándar muestral de 8.6 mph, mientras que otra muestra aleatoria de 200 vehículos en un país con un límite de velocidad de 55 mph resultó en una media muestral y una desviación estándar muestral de 35.8 mph y 9.2 mph, respectivamente (estas medias y desviaciones estándar se reportan en el artículo **"Evaluation of Criteria for Setting Speed Limits on Gravel Roads" (*J. Of Transp. Engr.*, 2011: 57–63)**; los tamaños reales de las muestras dieron como resultado distintos grados de libertad que exceden a los que se encuentran en la tabla F). Llevemos a cabo una prueba con un nivel de significancia de .10 para decidir si las varianzas en la distribución de ambas poblaciones son idénticas.

1. σ_1^2 es la varianza de la distribución de velocidad en los caminos con límite de 35 mph, y σ_2^2 es la varianza de la distribución de velocidad en los caminos de 55 mph.
2. H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$
3. H_a: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
4. El valor estadístico de prueba es: $f = s_1^2/s_2^2$
5. Cálculo: $f = (8.6)^2/(9.2)^2 = .87$
6. Determinación del valor P: .87 cae en la cola inferior de la curva F con numerador de 199 gl y denominador de 199 gl. Al echar un vistazo a la tabla F se observa que $F_{.10,199,199} \approx F_{.10,200,200} \approx 1.20$ (consulte las columnas $\nu_1 = 120$ y $\nu_1 = 1000$ columnas), lo que implica que $F_{.90,199,199} \approx 1/1.20 = .83$ (estos valores se confirman con un software). Esto es, el área bajo la curva F relevante a la izquierda de .83 es .10. Por tanto, el área bajo la curva a la izquierda de .87 excede .10 y, por tanto, el valor $P > 2(.10) = .2$ (el software da .342).
7. El valor P claramente rebasa el nivel de significancia dado. La hipótesis nula se puede rechazar, por tanto; es posible que las varianzas de ambas distribuciones de velocidad sean idénticas.

Los tamaños de muestra en el artículo citado fueron de 2665 y 1868, respectivamente, y el valor P reportado fue de .0008. por lo que para estos datos la hipótesis de varianzas iguales se rechazaría no sólo a un nivel de significancia de .10 —en comparación con nuestra conclusión— sino que también en los niveles de .05, .01, incluso .001. Esto ilustra de nuevo la manera en la que un tamaño de muestra relativamente grande puede aumentar una diferencia pequeña en los valores estimados. Note también que la velocidad media muestral para el país con un límite de velocidad inferior fue mayor que para el país con un límite mayor, un resultado contraintiuitivo que sorprendió a los investigadores; y debido a que los tamaños de muestra son muy grandes, esta diferencia entre las medias es estadísticamente significativa. ■

Intervalo de confianza para σ_1/σ_2

El intervalo de confianza para σ_1^2/σ_2^2 se basa en el reemplazo de F en el enunciado de probabilidad

$$P(F_{1-\alpha/2,\nu_1,\nu_2} < F < F_{\alpha/2,\nu_1,\nu_2}) = 1 - \alpha$$

con la variable F (9.9) y al manipular las desigualdades para aislar σ_1^2/σ_2^2. Se obtiene un intervalo para σ_1/σ_2 al tomar la raíz cuadrada de cada límite. Se dejan los detalles para un ejercicio.

EJERCICIOS **Sección 9.5 (59–66)**

59. Obtenga o calcule las siguientes cantidades:

a. $F_{.05,5,8}$ **b.** $F_{.05,8,5}$ **c.** $F_{.95,5,8}$ **d.** $F_{.95,8,5}$

e. El 99° percentil de la distribución F con $\nu_1 = 10$, $\nu_2 = 12$

f. El 1er percentil de la distribución F con $\nu_1 = 10$, $\nu_2 = 12$

g. $P(F \leq 6.16)$ para $\nu_1 = 6$, $\nu_2 = 4$

h. $P(.177 \leq F \leq 4.74)$ para $\nu_1 = 10$, $\nu_2 = 5$

60. Dé tanta información como pueda sobre el valor *P* de la prueba *F* en cada una de las siguientes situaciones:

a. $\nu_1 = 5, \nu_2 = 10$, prueba de cola superior, $f = 4.75$

b. $\nu_1 = 5, \nu_2 = 10$, prueba de cola superior, $f = 2.00$

c. $\nu_1 = 5, \nu_2 = 10$, prueba de dos colas, $f = 5.64$

d. $\nu_1 = 5, \nu_2 = 10$, prueba de cola inferior, $f = .200$

e. $\nu_1 = 35, \nu_2 = 20$, prueba de cola superior, $f = 3.24$

61. Regrese a los datos sobre ángulo de inclinación máximo dados en el ejercicio 28 de este capítulo. Realice una prueba a nivel de significancia de .10 para ver si las desviaciones estándar de población de los dos grupos de edad son diferentes (las curvas de probabilidad normal confirman la suposición de normalidad necesaria).

62. Remítase al ejemplo 9.7. ¿Sugieren los datos que la desviación estándar de la distribución de resistencia de especímenes sometidos a un proceso de fusión es más pequeña que la de los especímenes no sometidos a un proceso de fusión? Realice una prueba de significancia de .01 obteniendo tanta información como pueda sobre el valor *P*.

63. El toxafen es un insecticida que ha sido identificado como contaminante en el ecosistema de los Grandes Lagos. Para investigar el efecto de la exposición al toxafen en animales, se les administró toxafen a grupos de ratas en su dieta. El artículo **"Reproduction Study of Toxaphene in the Rat" (*J. of Environ. Sci. Health*, 1988: 101–126)** reporta aumentos de peso (en gramos) de ratas a las que se les administró una dosis baja (4 ppm) y de ratas de control cuya dieta no incluía el insecticida. La desviación estándar de la muestra de 23 ratas hembras de control fue de 32 g y la de 20 ratas hembras sometidas a dosis bajas fue de 54 g. ¿Sugieren estos datos que existe más variabilidad en los incrementos de peso a dosis bajas que en los incrementos de peso en las ratas de control? Suponiendo normalidad, realice una prueba de hipótesis a nivel de significancia de .05.

64. Las siguientes observaciones son del tiempo (h) que tarda una batería AA de 1.5 volts en alcanzar un voltaje de 0.8 **("Comparing the Lifetimes of Two Brands of Batteries," *J. Of Statistical Educ.*, 2013, en línea)**:

Energizer:	8.65	8.74	8.91	8.72	8.85
Ultracell:	8.76	8.81	8.81	8.70	8.73
Energizer:	8.52	8.62	8.68	8.86	
Ultracell:	8.76	8.68	8.64	8.79	

Las gráficas de probabilidad normal apoyan la suposición de que las distribuciones de población son normales. ¿Sugieren los datos que la varianza de la distribución de la población Energizer difiere de la distribución de la población Ultracell? Pruebe la hipótesis relevante utilizando un nivel de significancia de .05. [*Nota*: La prueba *t* de dos muestras para la igualdad de las medias de la población da un valor *P* de .763.] Las baterías Energizer son mucho más caras que las baterías Ultracell. ¿Pagaría el dinero extra?

65. El artículo **"Enhancement of Compressive Properties of Failed Concrete Cylinders with Polymer Impregnation" (*J. of Testing and Evaluation*, 1977: 333–337)** reporta los siguientes datos sobre un módulo de compresión impregnado ($lb/pulg^2 \times 10^6$) cuando se utilizaron dos polímeros diferentes para reparar grietas en el concreto que falló.

Epoxi	1.75	2.12	2.05	1.97
MMA prepolímero	1.77	1.59	1.70	1.69

Obtenga un intervalo de confianza de 90% para la proporción de variaciones aplicando primero el método sugerido en el libro para obtener la fórmula general para un intervalo de confianza.

66. Reconsidere los datos del ejemplo 9.6 y calcule un límite de confianza superior de 95% para la razón de la desviación estándar de la distribución de porosidad en triacetato respecto a la de la distribución de porosidad en algodón.

EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS (67–95)

67. Los datos adjuntos sobre resistencia a la compresión (lb) de cajas de $12 \times 10 \times 8$ pulg aparecieron en el artículo **"Compression of Single–Wall Corrugated Shipping Containers Using Fixed and Floating Test Platens" (*J. Testing and Evaluation*, 1992: 318–320)**. Los autores manifestaron que "la diferencia entre la resistencia a la compresión al utilizar un método de platinas fijas y flotantes es pequeña comparada con la variación normal de la resistencia a la compresión entre cajas idénticas". ¿Está de acuerdo? ¿Su análisis se basa en cualquier suposición?

Método	Tamaño muestral	Media muestral	DE muestral
Fijo	10	807	27
Flotante	10	757	41

68. El artículo **"Supervised Exercise Versus Non–Supervised Exercise for Reducing Weight in Obese Adults" (*The J. Of Sports Med. and Physical Fitness*, 2009: 85–90)** reporta una investigación en la que participantes aleatoriamente seleccionados fueron asignados a un programa de ejercicio supervisado o a un grupo control. Aquellos en el grupo control recibieron la indicación de que deberían tomar medidas para bajar de peso. Después de 4 meses la media muestral de la disminución de grasa corporal para los 17 individuos en el grupo experimental fue de 6.2 kg con una desviación estándar muestral de 4.5 kg, mientras que la media muestral y la desviación estándar muestral para las 17 personas en el grupo control fue de 1.7 y de 3.1 kg, respectivamente. Asuma una distribución normal para ambas pérdidas de peso (como lo hicieron los investigadores).

a. Calcule una predicción en el límite inferior al 99% para la pérdida de peso de un solo individuo, seleccionado al azar,

sujeto al programa de ejercicios supervisado. ¿Podría estar seguro de que dicho individuo realmente perderá peso?

b. ¿Será que la disminución promedio verdadera de grasa corporal es más de dos kg mayor para la condición experimental que para la condición control? Utilice los siguientes datos de Minitab para concluir a un nivel de significancia de .01. [*Nota*: Minitab acepta dichos datos resumidos, así como observaciones individuales. También, dado que la prueba es de cola superior, el software proporciona un límite de confianza inferior en lugar de un intervalo de confianza convencional.]

```
Sample       N     Mean    StDev    SE Mean
Exptl.      17     6.20     4.50        1.1
Control     17     1.70     3.10       0.75
Difference = mu (1) - mu (2)
Estimate for difference:  4.50
95% lower bound for difference: 2.25
T-Test of difference = 2 (vs >):
T-Value = 1.89
P-Value = 0.035 DF = 28
```

69. ¿Se ve afectada la proporción de las respuestas a los cuestionarios si se incluye un incentivo por responder junto con el cuestionario? En un experimento de 110 cuestionarios sin incentivo fueron regresados 75, en tanto que 98 cuestionarios que incluían la oportunidad de ganar un premio de lotería dieron por resultado 66 respuestas (**"Charities, No; Lotteries, No; Cash, Yes"**, ***Public Opinion Quarterly***, **1996: 542–562**). ¿Sugieren estos datos que la inclusión de un incentivo incrementa la probabilidad de una respuesta? Formule y pruebe las hipótesis pertinentes a un nivel de significancia de .10.

70. Trabajar con una pala no es exactamente una actividad de alta tecnología, pero es una actividad que seguirá siendo necesaria aun en la era informática actual. El artículo **"A Shovel with a Perforated Blade Reduces Energy Expenditure Required for Digging Wet Clay"** (***Human Factors***, **2010: 492–502**) reporta un experimento en el que se les dio una pala convencional y una pala con la hoja perforada a 13 diferentes trabajadores distintos. Los autores del artículo citado proporcionan los siguientes datos sobre el gasto de energía estable [kcal/kg(sujeto)/lb(arcilla)]:

Trabajador:	1	2	3	4
Convencional:	.0011	.0014	.0018	.0022
Perforada:	.0011	.0010	.0019	.0013
Trabajador:	5	6	7	
Convencional	.0010	.0016	.0028	
Perforada:	.0011	.0017	.0024	
Trabajador:	8	9	10	
Convencional:	.0020	.0015	.0014	
Perforada:	.0020	.0013	.0013	
Trabajador:	11	12	13	
Convencional:	.0023	.0017	.0020	
Perforada:	.0017	.0015	.0013	

a. Calcule el intervalo de confianza con un nivel de confianza de 95% para la diferencia promedio real entre el gasto de energía para la pala convencional y para la pala perforada (el gráfico de probabilidad normal relevante muestra un patrón razonablemente lineal). Con base en este intervalo, ¿será que las palas difieren respecto al gasto de energía promedio real? Explique.

b. Lleve a cabo una prueba de hipótesis con un nivel de significancia de .05 para ver si el gasto de energía promedio real utilizando la pala convencional excede el gasto cuando se utiliza una pala perforada.

71. El artículo **"Quantitative MRI and Electrophysiology of Preoperative Carpal Tunnel Syndrome in a Female Population"** (***Ergonomics***, **1997: 642–649**) reporta que (−473.3, 1691.9) era un intervalo de confianza de 95% con muestra grande para la diferencia entre el promedio real del volumen del músculo ténar (mm^3) en personas que padecen el síndrome de túnel carpiano y el volumen promedio verdadero en personas que no padecen el síndrome. Calcule un intervalo de confianza de 90% para esta diferencia.

72. Los siguientes datos de resistencia a la flexión (lb-pulg/pulg) de juntas se tomaron del artículo **"Bending Strength of Corner Joints Constructed with Injection Molded Splines"** (***Forest Products J.***, **abril de 1997: 89–92**).

Tipo	Tamaño muestral	Media muestral	DE muestral
Sin recubrimiento lateral	10	80.95	9.59
Con recubrimiento lateral	10	63.23	5.96

a. Calcule un límite de confianza inferior de 95% para la resistencia promedio verdadera de juntas con recubrimiento lateral.

b. Calcule un límite de predicción inferior de 95% para la resistencia de una sola junta con recubrimiento lateral.

c. Calcule un intervalo que, con confianza de 95%, incluya los valores de resistencia de al menos 95% de la población de todas las juntas con recubrimientos laterales.

d. Calcule un intervalo de confianza de 95% para la diferencia entre las resistencias promedio verdaderas de los dos tipos de juntas.

73. El artículo **"Urban Battery Litter"** citado en el ejemplo 8.14 dio el siguiente resumen de datos sobre la masa de zinc (g) para dos marcas diferentes de baterías de tamaño D:

Marca	Tamaño muestral	Media muestral	DE muestral
Duracell	15	138.52	7.76
Energizer	20	149.07	1.52

Suponiendo que ambas distribuciones de masa de zinc son al menos aproximadamente normales, lleve a cabo una prueba al nivel de significancia .05 utilizando el método de valor *P* para decidir si las masas reales de zinc promedio son diferentes para las dos marcas de baterías.

74. El descarrilamiento de un tren de carga provocado por la catastrófica falla de la chumacera de la armadura de un motor de tracción motivó un estudio que se publica en el artículo **"Locomotive Traction Motor Armature Bearing Life Study"** (***Lubrication Engr.***, **agosto de 1997: 12–19**). Se seleccionó una muestra de 17 motores de tracción con alto kilometraje y

se determinó la penetración de cono (mm/10) tanto en la chumacera de piñón como en la chumacera de la armadura del conmutador y se obtuvieron los siguientes datos:

	Motor					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Conmutador	211	273	305	258	270	209
Piñón	226	278	259	244	273	236

	Motor					
	7	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Conmutador	223	288	296	233	262	291
Piñón	290	287	315	242	288	242

	Motor				
	13	**14**	**15**	**16**	**17**
Conmutador	278	275	210	272	264
Piñón	278	208	281	274	268

Calcule la diferencia media de la población entre la penetración en la chumacera de la armadura del conmutador y la penetración en la chumacera de piñón y hágalo de manera que permita obtener información sobre confiabilidad y precisión de la estimación. [*Nota*: Una curva de probabilidad normal valida la suposición de normalidad necesaria.] ¿Diría que la diferencia media de la población ha sido estimada con precisión? ¿Difiere la penetración media de población para los dos tipos de chumacera? Explique.

75. La "*cabezabilidad*" es la capacidad de una pieza cilíndrica de permitir que se le dé la forma de la cabeza de un perno, tornillo u otra parte formada en frío sin rotura. El artículo **"New Methods for Assessing Cold Heading Quality" (*Wire J. Intl.*, octubre de 1996: 66–72)** describe el resultado de una prueba de impacto de cabezabilidad aplicada a 30 especímenes de acero muerto al aluminio y a 30 especímenes de acero muerto al silicio. El número de clasificación de cabezabilidad medio de la muestra para los especímenes de acero fue de 6.43 y la media de la muestra para los especímenes de aluminio fue de 7.09. Suponga que las desviaciones estándar de la muestra fueran de 1.08 y 1.19, respectivamente. ¿Está de acuerdo con los autores del artículo en que la diferencia en las clasificaciones de cabezabilidad es significativa al nivel de 5% (suponiendo que las dos distribuciones de cabezabilidad son normales?

76. El artículo **"Fatigue Testing of Condoms"**, citado en el ejercicio 7.32 informó que para una muestra de 20 condones de látex natural de un cierto tipo, la media muestral y la desviación estándar de la muestra del número de ciclos de rompimiento fueron 4358 y 2218, respectivamente, mientras que una muestra de 20 condones de poliisopreno dio una media y una desviación estándar de la muestra de 5805 y 3990, respectivamente. ¿Será que hay una fuerte evidencia para concluir que el verdadero número promedio de ciclos de ruptura para el preservativo de poliisopreno supera al de los condones de látex natural en más de 1000 ciclos? Lleve a cabo una prueba con un nivel de significancia de .01. [*Nota*: El artículo citado informó valores *P* de las pruebas *t* para comparar las medias de los diversos tipos considerados.]

77. Se requiere información sobre la postura de la mano y las fuerzas generadas por los dedos durante la manipulación de varios objetos cotidianos para diseñar prótesis de alta tecnología para la mano. El artículo **"Grip Posture and Forces During Holding Cylindrical Objects with Circular Grips" (*Ergonomics*, 1996: 1163–1176)** reporta que para una muestra de 11 mujeres, la fuerza media de presión con cuatro dedos (N) fue de 98.1 y la desviación estándar de la muestra fue de 14.2. Para una muestra de 15 hombres, la media de la muestra y la desviación estándar de la muestra fueron de 129.2 y 39.1, respectivamente.

a. Una prueba realizada para ver si las fuerzas promedio verdaderas para los dos géneros eran diferentes dio por resultado $t = 2.51$ y valor $P = .019$. ¿Da el procedimiento de prueba apropiado descrito en este capítulo este valor de *t* y el valor *P* establecido?

b. ¿Existe evidencia sustancial para concluir que la fuerza promedio verdadera para hombres excede la de la fuerza de las mujeres por más de 25 N? Formule y pruebe las hipótesis pertinentes.

78. El artículo **"Pine Needles as Sensors of Atmospheric Pollution" (*Environ. Monitoring*, 1982: 273–286)** reporta sobre el uso de análisis de actividad de neutrones para determinar la concentración de contaminantes en hojas de pino. De acuerdo con los autores del artículo "estas observaciones indican fuertemente que para aquellos elementos bien determinados mediante procedimientos analíticos, la distribución de concentración es log normal. Por consiguiente, en pruebas de significancia se utilizarán logaritmos de concentraciones". Los datos dados se refieren a la concentración de bromo en hojas de pino tomadas del sitio cercano a una planta de vapor alimentada con petróleo y de un sitio relativamente limpio. Los valores dados a continuación son medias y desviaciones estándar de las observaciones logarítmicas transformadas.

Sitio	**Tamaño de muestra**	**Concentración log media**	**DE de concentración log**
Planta de vapor	8	18.0	4.9
Limpia	9	11.0	4.6

Sea μ_1^* la concentración *log* promedio verdadera en el primer sitio y defína μ_2^* análogamente para el segundo sitio.

a. Use la prueba *t* agrupada (basada en la suposición de normalidad *y* desviaciones estándar iguales) para decidir un nivel de significancia de .05 si las dos medias de distribución de concentración son iguales.

b. Si σ_1^* y μ_2^* (las desviaciones estándar de las dos distribuciones log de concentración), no son iguales, ¿serían μ_1 y μ_2 (las medias de las distribuciones de concentración), las mismas si $\mu_1^* = \mu_2^*$? Explique su razonamiento.

79. El artículo **"The Accuracy of Stated Energy Contents of Reduced–Energy, Commercially Prepared Foods" (*J. of the Amer. Dietetic Assoc.*, 2010: 116–123)** presenta los datos que

acompañan a la energía bruta del proveedor indicado y el valor medido (ambos en kcal) para 10 comidas de diferentes supermercados de conveniencia):

Comida:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Declarada:	180	220	190	230	200	370	250	240	80	180
Medida:	212	319	231	306	211	431	288	265	145	228

Lleve a cabo una prueba de hipótesis basada en un valor *P* para decidir si la verdadera diferencia promedio % que se declaró difiere de cero. [*Nota*: El artículo señala: "Aunque los métodos estadísticos formales no se aplican a muestras de conveniencia, se emplearon las pruebas estándar de estadística para resumir los datos con fines de exploración y sugerir direcciones para futuros estudios".]

80. El arsénico es un carcinógeno conocido y un veneno. Los procedimientos estándar de laboratorio para medir la concentración de arsénico ($\mu g/L$) en el agua son caros. Considere el resumen que acompaña los datos de entrada y salida de Minitab para comparar un método de laboratorio con un método de campo relativamente nuevo, rápido y barato (tomado del artículo **"Evaluation of a New Field Measurement Method for Arsenic in Drinking Water Samples", *J. of Envir. Engr.*, 2008: 382–388**).

Two-Sample T-Test and CI

```
Sample    N     Mean     StDev     SE Mean
1         3    19.70      1.10        0.64
2         3    10.90      0.60        0.35
Estimate for difference: 8.800

95% CI for difference: (6.498, 11.102)
T-Test of difference = 0 (vs not =):
T-Value = 12.16 P-Value = 0.001 DF = 3
```

¿Qué conclusión saca usted sobre los dos métodos y por qué? Interprete el intervalo de confianza dado. [*Nota*: Uno de los autores del artículo indica en una comunicación privada que no estaban seguros de por qué los dos métodos no concordaban.]

81. Los datos que acompañan el tiempo de respuesta aparecieron en el artículo **"The Extinguishment of Fires Using Low–Flow Water Hose Streams—Part II" (*Fire Technology*, 1991; 291–320).**

Buena visibilidad							
.43	1.17	.37	.47	.68	.58	.50	2.75
Mala visibilidad							
1.47	.80	1.58	1.53	4.33	4.23	3.25	3.22

Los autores analizaron los datos con la prueba *t* agrupada. ¿Parece justificado el uso de esta prueba? [*Sugerencia*: Compruebe la normalidad. Los percentiles *z* para $n = 8$ son -1.53, $-.89$, $-.49$, $-.15$, .15, .49, .89 y 1.53.]

82. Comúnmente se utiliza cemento para hueso acrílico en la artroplastia total de las articulaciones como un material que permite la transferencia suave de cargas de una prótesis metálica a una estructura ósea. El artículo **"Validation of the Small–Punch Test as a Technique for Characterizing the Mechanical Properties of Acrylic Bone Cement" (*J. of Engr. in Med.*, 2006: 11–21)** proporciona los siguientes datos sobre fuerza de ruptura (N):

Temp	Medio	*n*	$\bar{x}$	*s*
22°	Seco	6	170.60	39.08
37°	Seco	6	325.73	34.97
22°	Húmedo	6	366.36	34.82
37°	Húmedo	6	306.09	41.97

Suponga que todas las distribuciones de población son normales.

a. Estime la fuerza de ruptura promedio verdadera en un medio seco a 37° y hágalo de una forma que dé información sobre precisión y confiabilidad. Luego interprete su estimación.

b. Estime la diferencia entre la fuerza a la ruptura promedio verdadera en un medio seco a 37° y la fuerza promedio verdadera a la misma temperatura en un medio húmedo y hágalo de modo que obtenga información sobre precisión y confiabilidad. Luego interprete su estimación.

c. ¿Existe una fuerte evidencia para concluir que la fuerza promedio verdadera en un medio seco a la temperatura más alta excede a la de la temperatura más baja por más de 100 N?

83. En un experimento para comparar resistencias de apoyo de clavijas insertadas en dos tipos diferentes de soportes de montaje, una muestra de 14 observaciones del límite de esfuerzo de soportes de montaje de roble rojo dieron por resultado una media y desviación estándar muestral de 8.48 MPa y .79 MPa, respectivamente, en tanto que una muestra de 12 observaciones cuando se utilizaron soportes de montaje de abeto Douglas dieron una media de 9.36 y una desviación estándar de 1.52 **("Bearing Strength of White Oak Pegs in Red Oak and Douglas Fir Timbers", *J. of Testing and Evaluation*, 1998, 109–114)**. Considere probar si los límites de esfuerzo promedio verdaderos son o no idénticos para los dos tipos de soporte de montaje. Compare los grados de libertad y valores *P* para las pruebas *t* agrupadas y no agrupadas.

84. ¿Cómo se compara la absorción de energía con el consumo de energía? Un aspecto de este tema se consideró en el artículo **"Measurement of Total Energy Expenditure by the Doubly Labelled Water Method in Professional Soccer Players" (*J. of Sports Sciences*, 2002: 391–397)** el cual contiene los datos adjuntos (MJ/día).

	Jugador						
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Consumo	14.4	12.1	14.3	14.2	15.2	15.5	17.8
Absorción	14.6	9.2	11.8	11.6	12.7	15.0	16.3

Pruebe si existe una diferencia significativa entre absorción y consumo. ¿Depende la conclusión de si se utiliza un nivel de significancia de .05, .01 o .001?

85. Un experimentador desea obtener un intervalo de confianza para la diferencia entre resistencia a la ruptura promedio verdadera para cables fabricados por la compañía I y la compañía II. Suponga que la resistencia a la ruptura está normalmente distribuida para ambos tipos de cable con $\sigma_1 = 30$ lb/pulg^2 y $\sigma_2 = 20$ lb/pulg^2.

a. Si los costos dictan que el tamaño de muestra para el cable de tipo I debe ser tres veces el tamaño de muestra para el cable de tipo II, ¿cuántas observaciones se requieren si

el intervalo de confianza de 99% no debe ser más ancho que 20 lb/pulg^2?

b. Suponga que se tienen que hacer un total de 400 observaciones. ¿Cuántas de ellas deberán ser hechas en muestras de cable de tipo I si el ancho del intervalo resultante tiene que ser mínimo?

86. Se realizó un estudio para comparar dos métodos distintos, la inyección y el aerosol nasal, para administrar la vacuna de influenza a niños menores de 5 años. Todos los 8000 niños en el estudio recibieron tanto la inyección como el aerosol nasal, sin embargo, la vacuna que se les administró a 4000 niños contenía sólo agua de mar, y el aerosol nasal que se les administró a los otros 4000 niños contenía también sólo agua de mar. Al final de la temporada de influenza, se determinó que 3.9% de los niños que recibieron la vacuna real a través de aerosol nasal contrajo influenza, mientras que de los 4000 niños que recibieron la vacuna inyectada 8.6% contrajo influenza.

a. Por qué cree que cada uno de los niños recibió tanto inyección como aerosol nasal?

b. ¿Alguno de los métodos de administración de la vacuna, parece superior al otro? Pruebe la hipótesis adecuada [*Nota*: El estudio se describe en el artículo **"Spray Flu Vaccine May Work Better Than Injections for Tots", *San Luis Obispo Tribune*, mayo 2 de 2006.**]

87. Los meseros en los restaurantes han empleado varias estrategias para incrementar las propinas. Un artículo en el ejemplar del 5 de septiembre de 2005 el ***New Yorker*** reporta que "En un estudio una mesera recibió 50% más en propinas cuando se presentó con su nombre que cuando no lo hizo". Considere los siguientes datos (ficticios) sobre la cantidad de propina como un porcentaje de la cuenta.

Con presentación:	$m = 50$	$\bar{x} = 22.63$	$s_1 = 7.82$
Sin presentación:	$n = 50$	$\bar{y} = 14.15$	$s_2 = 6.10$

¿Sugieren estos datos que una presentación incrementa las propinas en promedio en más de 50%? Formule y pruebe las hipótesis pertinentes. [*Sugerencia*: Considere el parámetro $\theta = \mu_1 - 1.5\mu_2$.]

88. El artículo **"Quantitative Assessment of Glenohumeral Translation in Baseball Players" (*The Amer. J. of Sports Med.*, 2004: 1711–1715)** considera varios aspectos de movimiento del hombro para una muestra de pitchers (lanzadores) y otra muestra de jugadores de campo [*glenohumeral* se refiere a la articulación entre el húmero (bola) y el glenoide (cuenca)]. Los autores amablemente proporcionan los siguientes datos sobre traslación anteroposterior (mm), una medida de la extensión del movimiento anterior y posterior tanto del brazo dominante como del no dominante.

	Pos Dom Tr	Pos ND Tr	Pit Dom Tr	Pit ND Tr
1	30.31	32.54	27.63	24.33
2	44.86	40.95	30.57	26.36
3	22.09	23.48	32.62	30.62
4	31.26	31.11	39.79	33.74
5	28.07	28.75	28.50	29.84
6	31.93	29.32	26.70	26.71
7	34.68	34.79	30.34	26.45
8	29.10	28.87	28.69	21.49
9	25.51	27.59	31.19	20.82
10	22.49	21.01	36.00	21.75
11	28.74	30.31	31.58	28.32
12	27.89	27.92	32.55	27.22
13	28.48	27.85	29.56	28.86
14	25.60	24.95	28.64	28.58
15	20.21	21.59	28.58	27.15
16	33.77	32.48	31.99	29.46
17	32.59	32.48	27.16	21.26
18	32.60	31.61		
19	29.30	27.46		
Media	29.4463	29.2137	30.7112	26.6447
DE	5.4655	4.7013	3.3310	3.6679

a. Estime la diferencia promedio verdadera de traslación entre los brazos dominante y no dominante de los lanzadores en una forma que aporte información sobre confiabilidad y precisión, e interprete la estimación resultante.

b. Repita a) para los jugadores de campo.

c. Los autores señalan que los "lanzadores mostraron una mayor diferencia en la traslación anteroposterior de lado a lado de los hombros en comparación con los jugadores de campo". ¿Está de acuerdo? Explique.

89. Suponga que se tiene que realizar una prueba al nivel .05 de H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ contra H_a: $\mu_1 - \mu_2 > 0$, suponiendo $\sigma_1 = \sigma_2 = 10$ y normalidad para ambas distribuciones, utilizando tamaños de muestra iguales ($m = n$). Evalúe la probabilidad de un tipo de error II cuando $\mu_1 - \mu_2 = 1$ y $n = 25$, 100, 2500 y 10 000. ¿Puede pensar en problemas reales en los cuales la diferencia $\mu_1 - \mu_2 = 1$ tiene poco significado práctico? ¿Serían deseables tamaños de muestra de $n = 10\,000$ en tales problemas?

90. La especie de diatomea invasiva *Didymosphenia geminata* tiene el potencial de infligir daños económicos y ecológicos sustanciales en los ríos. El artículo **"Substrate Characteristics Affect Colonization by the Bloom–Forming Diatom *Didymosphenia geminata*" (*Acquatic Ecology*, 2010:33–40)** describe una investigación sobre el comportamiento de colonización. Un aspecto de interés particular es si la rugosidad de las piedras impacta el grado de colonización. Los autores del artículo citado amablemente proporcionan los siguientes datos sobre la rugosidad (adimensional) para los especímenes de arenisca y esquisto.

Arenisca:		5.74	2.07	3.29	0.75	1.23
		2.95	1.58	1.83	1.61	1.12
		2.91	3.22	2.84	1.97	2.48
		3.45	2.17	0.77	1.44	3.79
Esquisto:	.56	.84	.40	.55	.36	.72
	.29	.47	.66	.48	.28	
	.72	.31	.35	.32	.37	.43
	.60	.54	.43	.51		

Las gráficas de probabilidad normal de ambas muestran un patrón razonablemente linear. Estime la diferencia entre la rugosidad promedio verdadera de la arenisca y la del esquisto de manera que proporcione información sobre la confiabilidad y precisión, e interprete su estimado. ¿Será que el valor promedio de rugosidad difiere de los dos tipos de rocas (una

prueba formal para esto se reportó en el artículo)? [*Nota*: Los investigadores concluyeron que más diatomeas colonizan la superficie rugosa que la superficie lisa.]

91. Los investigadores enviaron 5000 currículos en respuesta a anuncios de trabajo que aparecieron en el *Boston Globe* y en el *Chicago Tribune*. Los currículos eran idénticos excepto que en 2500 de ellos los apellidos "sonaban a apellidos de persona blanca", tales como Brett y Emily, en tanto que los otros 2500 "sonaban a persona negra" tales como Tamika y Rasheed. Los currículos del primer tipo produjeron 250 respuestas y los del segundo tipo sólo 167 respuestas (estos números son muy consistentes con la información que aparece en un reporte del **15 de enero de 2003** de la **Associated Press**). ¿Sugieren fuertemente estos datos que un currículo con un apellido de "negro" es menos probable que dé por resultado una respuesta que un currículo con un apellido de "blanco"?

92. La prueba de McNemar, desarrollada en el ejercicio 56, también puede utilizarse cuando los individuos son reunidos en pares para obtener n pares y luego un miembro de cada par recibe el tratamiento 1 y el otro miembro, el tratamiento 2. Así, X_1 es el número de pares en los que ambos tratamientos fueron exitosos e igualmente para X_2, X_3, X_4. El estadístico de prueba para comprobar la eficacia de los dos tratamientos está dado por $(X_2 - X_3)/\sqrt{(X_2 + X_3)}$, el cual tiene aproximadamente una distribución normal estándar cuando H_0 es verdadera. Úselo para probar si la ergotamina es efectiva en el tratamiento de dolores de cabeza por migraña.

		Ergotamina	
		S	***F***
Placebo	***S***	44	34
	F	46	30

Los datos son ficticios, pero la conclusión concuerda con la del artículo **"Controlled Clinical Trial of Ergotamine Tartrate" (*British Med. J.*, 1970: 325–327)**.

93. El artículo **"Evaluating Variability in Filling Operations" (*Food Tech.*, 1984: 51–55)** describe dos diferentes operaciones de llenado que se realizan en una planta empacadora de carne molida. Ambas operaciones de llenado se ajustaron para llenar paquetes con 1400 g de carne. En una muestra aleatoria de tamaño 30, tomada de cada operación de llenado, las medias y desviaciones estándar resultantes fueron 1402.24 g y 10.97 g para la operación 1; y 1419.63 g y 9.96 g para la operación 2.

a. Con un nivel de significancia de .05, ¿existe suficiente evidencia que indique que el peso medio verdadero de los paquetes difiere para las dos operaciones?

b. ¿Sugieren los datos de la operación 1 que el peso medio verdadero de los paquetes producidos por la operación 1 es más grande en más de 1400 g? Use un nivel de significancia de .05.

94. Sean $X_1, \ldots, X_m$ una muestra aleatoria de una distribución de Poisson con parámetro μ_1 y sean $Y_1, \ldots, Y_n$ una muestra aleatoria de otra distribución de Poisson con parámetro μ_2. Se desea probar H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ contra una de las tres alternativas estándar. Cuando m y n son grandes se puede utilizar la prueba z con muestra grande de la sección 9.1. Sin embargo, el hecho de que $V(\overline{X}) = \mu/n$ sugiere que se debe utilizar un denominador diferente al estandarizar $\overline{X} - \overline{Y}$. Desarrolle un procedimiento de prueba con muestra grande apropiado para este problema y luego aplíquelo a los siguientes datos para probar si las densidades de las plantas de una especie particular son iguales en dos regiones diferentes (donde cada observación es el número de plantas encontradas en un rectángulo de muestreo localizado al azar con área de 1 m^2, por tanto, en la región 1 hubo 40 rectángulos en los que se observó una planta, etc.):

	Frecuencia								
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	
Región 1	28	40	28	17	8	2	1	1	$m = 125$
Región 2	14	25	30	18	49	2	1	1	$n = 140$

95. Remítase al ejercicio 94 y desarrolle una fórmula para el intervalo de confianza con muestra grande para $\mu_1 - \mu_2$. Calcule el intervalo para los datos dados ahí, utilizando un nivel de confianza de 95%.

BIBLIOGRAFÍA

Véase la bibliografía al final del capítulo 7.

Análisis de la varianza

10

INTRODUCCIÓN

Al estudiar los métodos de análisis de datos cuantitativos primero se trataron problemas que implican una sola muestra de números y luego se abordó el análisis comparativo de dos muestras diferentes. En problemas de una muestra, los datos se componían de observaciones sobre los individuos u objetos experimentales seleccionados de una sola población, o sus respuestas. En problemas de dos muestras, las dos muestras se tomaron de dos poblaciones diferentes y los parámetros de interés fueron las medias de población o bien se aplicaron dos tratamientos distintos a las unidades experimentales (individuos u objetos) seleccionadas de una sola población; en el último caso, los parámetros de interés fueron las medias de tratamiento verdaderas.

El **análisis de la varianza** o, más brevemente, **ANOVA** se refiere en general a un conjunto de situaciones experimentales y procedimientos estadísticos para el análisis de respuestas cuantitativas de unidades experimentales. El problema ANOVA más simple se conoce indistintamente como **unifactorial**, de **clasificación única** o **ANOVA unidireccional** e implica el análisis de los datos muestreados de más dos poblaciones (distribuciones) numéricas o de datos de experimentos en los cuales se utilizaron más de dos tratamientos. La característica que diferencia los tratamientos de las poblaciones se llama **factor** en estudio y los distintos tratamientos o poblaciones se conocen como **niveles** del factor. Entre los ejemplos de tales situaciones se incluyen los siguientes:

1. Un experimento para estudiar los efectos de cinco marcas diferentes de gasolina respecto a la eficiencia de operación de un motor automotriz (mpg)
2. Un experimento para estudiar los efectos de la presencia de cuatro soluciones azucaradas diferentes (glucosa, sacarosa, fructosa y una mezcla de las tres) en cuanto a crecimiento de bacterias

3. Un experimento para investigar si la concentración de madera dura en la pulpa (%) afecta la resistencia a la tensión de las bolsas hechas de la misma pulpa a tres diferentes niveles de impacto
4. Un experimento para decidir si la densidad de color de un espécimen de tela depende de la cantidad de tinte utilizado

En el inciso 1) el factor de interés es la marca de la gasolina y existen cinco niveles diferentes del factor. En el inciso 2) el factor es el azúcar con cuatro niveles (o cinco, si se utiliza una solución de control que no contenga azúcar). Tanto en 1) como en 2) el factor es de naturaleza cualitativa y los niveles corresponden a posibles categorías del factor. En los incisos 3) y 4) los factores son la concentración de madera dura y la cantidad de tinte, respectivamente; estos dos factores son de naturaleza cuantitativa, por tanto, los niveles identifican diferentes ajustes del factor. Cuando el factor de interés es cuantitativo también se pueden utilizar técnicas estadísticas de análisis de regresión (discutido en los capítulos 12 y 13) para analizar los datos.

Este capítulo se enfoca en el ANOVA unifactorial. La sección 10.1 presenta la prueba F para demostrar la hipótesis nula de que las medias de población o tratamiento son idénticas. La sección 10.2 considera un análisis adicional de los datos cuando H_0 ha sido rechazada. La sección 10.3 se ocupa de algunos otros aspectos del ANOVA unifactorial. El capítulo 11 introduce experimentos ANOVA que implican más de un factor.

10.1 ANOVA unifactorial

ANOVA unifactorial se centra en la comparación de más de dos medias de población o tratamiento. Sean

I = el número de poblaciones o tratamientos que se están comparando

μ_1 = la media de población 1 o la respuesta promedio verdadera cuando se aplica el tratamiento 1

$\vdots$

μ_I = la media de población I o la respuesta promedio verdadera cuando se aplica el tratamiento I

Las hipótesis pertinentes son

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_I$$

contra

H_a: al menos dos de las μ_i son diferentes

Si $I = 4$, H_0 es verdadera sólo si las cuatro μ_i son idénticas. H_a sería verdadera, por ejemplo, si $\mu_1 = \mu_2 \neq \mu_3 = \mu_4$, si $\mu_1 = \mu_3 = \mu_4 \neq \mu_2$, o si las cuatro μ_i difirieran una de otra.

Una prueba de estas hipótesis requiere que se tenga disponible una muestra aleatoria de cada población o tratamiento.

EJEMPLO 10.1 El artículo **"Compression of Single–Wall Corrugated Shipping Containers Using Fixed and Floating Test Platens" (*J. Testing and Evaluation*, 1992: 318–320)** describe un experimento en el cual se comparan varios tipos diferentes de cajas respecto a la

resistencia a la compresión (lb). La tabla 10.1 presenta los resultados de un experimento ANOVA unifactorial que implica $I = 4$ tipos de cajas (las medias y las desviaciones estándar muestrales concuerdan con los valores dados en el artículo).

Tabla 10.1 Datos y cantidades resumidas para el ejemplo 10.1

Tipo de caja	Resistencia a la compresión (lb)						Media muestral	DE muestral
1	655.5	788.3	734.3	721.4	679.1	699.4	713.00	46.55
2	789.2	772.5	786.9	686.1	732.1	774.8	756.93	40.34
3	737.1	639.0	696.3	671.7	717.2	727.1	698.07	37.20
4	535.1	628.7	542.4	559.0	586.9	520.0	562.02	39.87
						Media grande =	682.50	

Con μ_i denotando la resistencia a la compresión promedio verdadera de las cajas de tipo i ($i = 1, 2, 3, 4$), la hipótesis nula es H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$. La figura 10.1(a) muestra una gráfica de caja comparativa para las cuatro muestras. Existe una cantidad sustancial de traslape entre las observaciones de los primeros tres tipos de cajas, pero las resistencias a la compresión del cuarto tipo parecen considerablemente más pequeñas que para los demás tipos. Esto sugiere que H_0 no es verdadera. La gráfica de caja comparativa que aparece en la figura 10.1(b) está basada en agregar 120 a cada observación en la cuarta muestra (y así se obtiene una media de 682.02 y la misma desviación estándar) y las demás observaciones no cambian. Ya no es obvio si H_0 es verdadera o falsa. En situaciones como esta, se requiere un procedimiento de prueba formal.

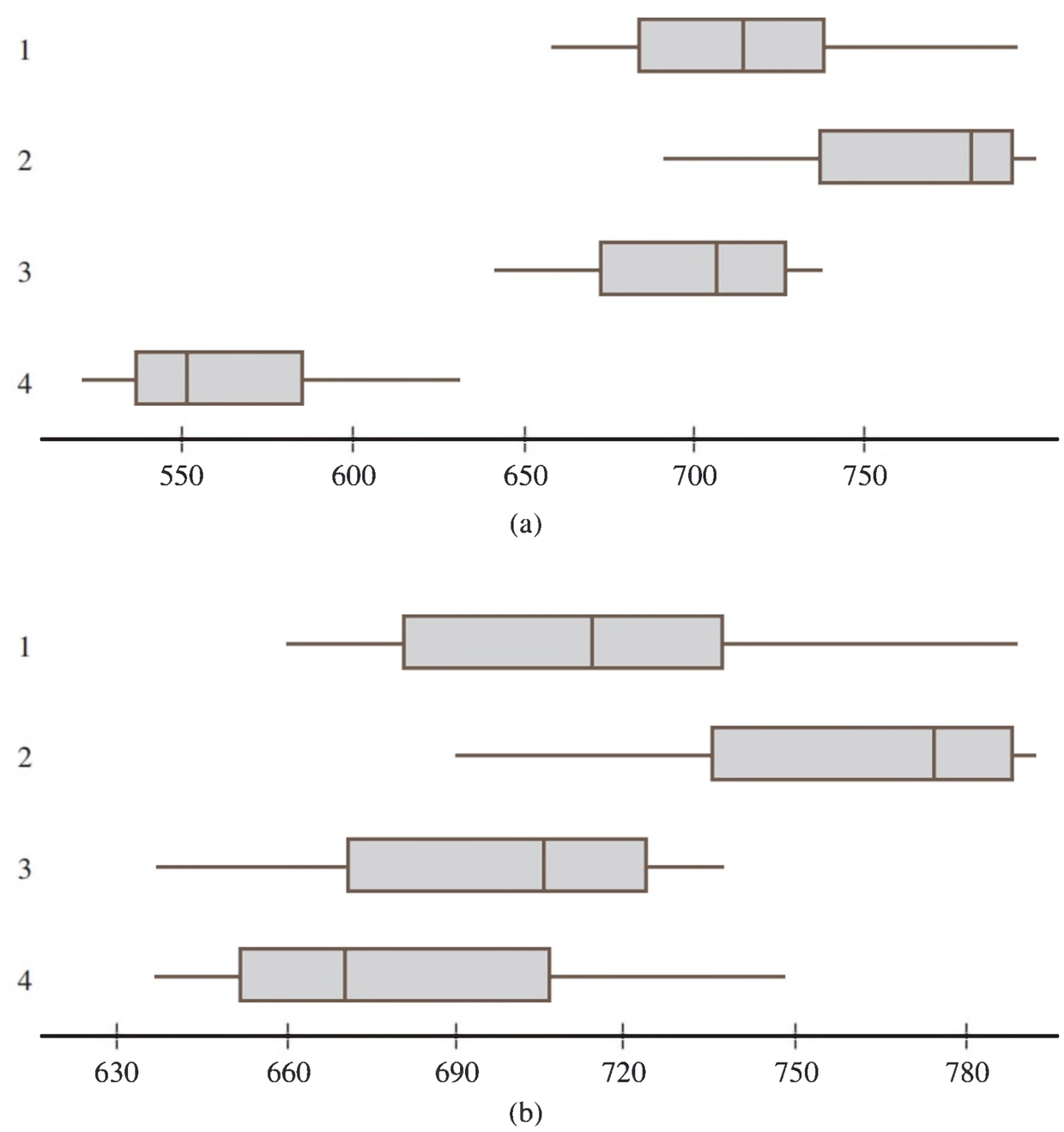


Figura 10.1 Gráficas de caja para el ejemplo 10.1: (a) datos originales; (b) datos modificados ■

Notación y suposiciones

En los problemas de dos muestras se utilizaron las letras X y Y para diferenciar las observaciones en una de ellas en la otra. Como esto es pesado con tres o más muestras, se acostumbra utilizar una sola letra con dos subíndices. El primero identifica el número de la muestra, correspondiente a la población o al tratamiento que se está muestreando y el segundo denota la posición de la observación dentro de dicha muestra. Sean

$X_{i,j}$ = la variable aleatoria (va) que denota la medición $j-$ésima tomada en la población $i-$ésima, o la medición tomada en la $j-$ésima unidad experimental que recibe el tratamiento $i-$ésimo.

$x_{i,j}$ = el valor observado de $X_{i,j}$ cuando se realiza el experimento

Los datos observados normalmente se muestran en una tabla rectangular, tal como la tabla 10.1. En ella las muestras de las diferentes poblaciones aparecen en filas distintas de la tabla, y $x_{i,j}$ es el número $j-$ésimo en la fila $i-$ésima. Por ejemplo, $x_{2,3} = 786.9$ (la tercera observación de la segunda población) y $x_{4,1} = 535.1$. Cuando no hay ambigüedad, se escribirá x_{ij} en lugar de $x_{i,j}$ (p. ej., si se realizaron 15 observaciones en cada uno de 12 tratamientos, x_{112} podría significar $x_{1,12}$ o $x_{11,2}$). Se supone que las X_{ij} dentro de cualquier muestra particular son independientes; una muestra aleatoria de la distribución de población o tratamiento $i-$ésima, y que las diferentes muestras son independientes entre sí.

En algunos experimentos diferentes muestras contienen distintos números de observaciones. Aquí se abordará el caso de tamaños de muestra iguales; la generalización en cuanto a tamaños de muestra desiguales aparece en la sección 10.3. Sea J el número de observaciones en cada muestra ($J = 6$ en el ejemplo 10.1). El conjunto de datos se compone de IJ observaciones. Las medias de muestra individual serán denotadas por $\overline{X}_{1.}, \overline{X}_{2.}, \ldots, \overline{X}_{I.}$. Es decir,

$$\overline{X}_{i.} = \frac{\sum_{j=1}^{J} X_{ij}}{J} \quad i = 1, 2, \ldots, I$$

El punto en lugar del segundo subíndice significa que se sumaron todos los valores de dicho subíndice al mismo tiempo que se mantuvo fijo el valor del otro subíndice; y la raya horizontal indica división entre J para obtener un promedio. Asimismo, el promedio de todas las observaciones IJ, llamada **media grande**, es

$$\overline{X}_{..} = \frac{\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} X_{ij}}{IJ}$$

Con los datos en la tabla 10.1, $\overline{x}_{1.} = 713.00$, $\overline{x}_{2.} = 756.93$, $\overline{x}_{3.} = 698.07$, $\overline{x}_{4.} = 562.02$ y $\overline{x}_{..} = 682.50$. Además, sean $S_1^2, S_2^2, \ldots, S_I^2$ las varianzas muestrales:

$$S_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{J} (X_{ij} - \overline{X}_{i.})^2}{J - 1} \quad i = 1, 2, \ldots, I$$

De acuerdo con el ejemplo 10.1, $s_1 = 46.55$, $s_1^2 = 2166.90$, etcétera.

SUPOSICIONES

Las distribuciones de población o tratamiento I son normales con la misma varianza σ^2. Es decir, cada X_{ij} está normalmente distribuida con

$$E(X_{ij}) = \mu_i \quad V(X_{ij}) = \sigma^2$$

Las desviaciones estándar de la muestra I en general difieren un poco aun cuando las σ correspondientes sean idénticas. En el ejemplo 10.1, la más grande entre s_1, s_2, s_3 y s_4 es aproximadamente 1.25 veces la más pequeña. Una regla empírica preliminar es que si la s más grande no es mucho más de dos veces la más pequeña, es razonable suponer σ^2 iguales.

En capítulos previos se sugirió un diagrama de probabilidad normal para verificar la normalidad. Típicamente los tamaños de muestra individuales en ANOVA son demasiado pequeños como para que los distintos diagramas I sean informativos. Se puede construir un solo diagrama restando de cada observación en la primera muestra, de cada observación en la segunda y así sucesivamente, y luego graficando estas desviaciones IJ contra los percentiles z. La figura 10.2 muestra ese diagrama para los datos del ejemplo 10.1. La linealidad del patrón confirma fuertemente la suposición de normalidad.

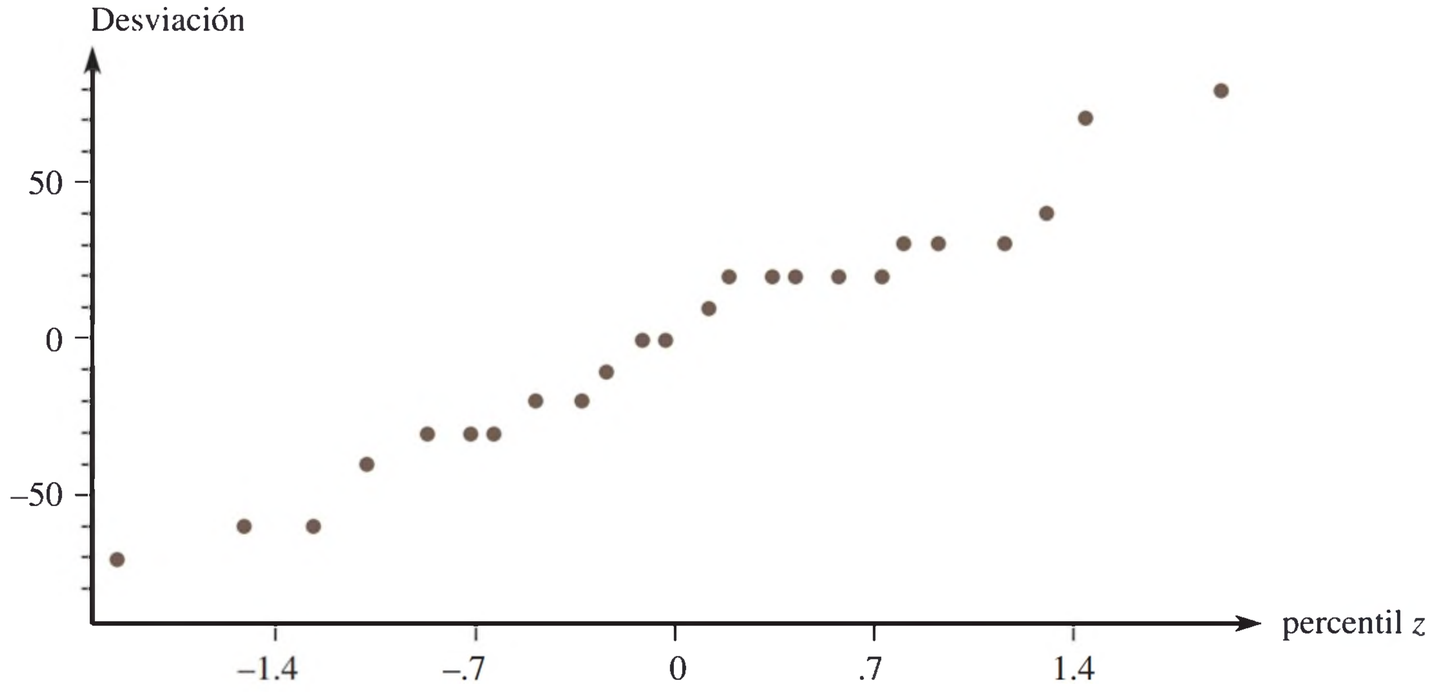


Figura 10.2 Diagrama de probabilidad normal con base en los datos del ejemplo 10.1

Si la suposición de normalidad o la suposición de varianzas iguales se suponen infactibles, habrá que emplear un método de análisis distinto de la prueba F usual. Busque, por favor, asesoría experta en tales situaciones (en la sección 10.3 se sugiere una posibilidad, una transformación de datos, y en la sección 15.4 se desarrolla otra alternativa).

El estadístico de prueba

Si H_0 es verdadera, las J observaciones en cada muestra provienen de una distribución normal con la *misma* media μ, en cuyo caso las medias muestrales deberán ser razonablemente parecidas. El procedimiento de prueba se basa en comparar una medida de diferencias entre las $\bar{x}_{i\cdot}$ (variación "entre muestras") con una medida de variación calculada desde *adentro* de cada una de las muestras.

DEFINICIÓN

La **media de los cuadrados del tratamiento** (MSTr, por sus siglas en inglés) está dada, por

$$\text{MSTr} = \frac{J}{I-1}\left[(\bar{X}_{1\cdot} - \bar{X}_{\cdot\cdot})^2 + (\bar{X}_{2\cdot} - \bar{X}_{\cdot\cdot})^2 + \cdots + (\bar{X}_{I\cdot} - \bar{X}_{\cdot\cdot})^2\right]$$

$$= \frac{J}{I-1}\sum_i (\bar{X}_{i\cdot} - \bar{X}_{\cdot\cdot})^2$$

y la media de los cuadrados del error (MSE, por sus siglas en inglés) es

$$\text{MSE} = \frac{S_1^2 + S_2^2 + \cdots + S_I^2}{I}$$

El estadístico de prueba para ANOVA unifactorial es $F = \text{MSTr/MSE}$.

La terminología "media de los cuadrados" se explicará más adelante. Observe que se utilizan $\overline{X}$ y S^2 mayúsculas, de modo que MSTr y MSE se definen como estadísticos. Se seguirá la tradición y también se utilizarán MSTr y MSE (en lugar de mstr y mse) para denotar los valores calculados de estos estadísticos. Cada S_1^2 evalúa la variación dentro de una muestra particular, así que MSE es una medida de variación dentro de las muestras.

¿Qué clase de valor de F proporciona evidencia en pro o en contra de H_0? Si H_0 es verdadera (todas las μ_i son iguales), los valores de las medias muestrales individuales deberán estar próximos entre sí y, por consiguiente, próximos a la media grande con el resultado de un valor relativamente pequeño de MSTr. Sin embargo, si las μ_i son bastante diferentes, algunas difieren un poco de $\overline{x}$... De modo que el valor de MSTr es afectado por la condición de H_0 (verdadera o falsa). Este no es el caso con MSE, porque las S_i^2 dependen sólo del valor subyacente de σ^2 y no de en dónde están centradas las diversas distribuciones. El siguiente recuadro presenta una propiedad importante de E(MSTr) y E(MSE), los valores esperados de estos dos estadísticos.

PROPOSICIÓN

Cuando H_0 es verdadera,

$$E(\text{MSTr}) = E(\text{MSE}) = \sigma^2$$

mientras que cuando H_0 es falsa,

$$E(\text{MSTr}) > E(\text{MSE}) = \sigma^2$$

Es decir, ambos estadísticos son insesgados para estimar la varianza de población común σ^2 cuando H_0 es verdadera, pero MSTr tiende a sobrestimar σ^2 cuando H_0 es falsa.

La insesgadez de MSE es una consecuencia de $\text{E}(S_1^2) = \sigma^2$ si H_0 es verdadera o falsa. Cuando H_0 es verdadera, cada $\overline{X}_i$ tiene la misma media μ y varianza σ^2/J de modo que $\Sigma(\overline{X}_i - \overline{X}..)^2/(I - 1)$, la "varianza muestral" de las $\overline{X}_i$, estima σ^2/J insesgadamente; al multiplicar esta por J se obtiene MSTr como un estimador insesgado de σ^2 misma. Las $\overline{X}_i$ tienden a dispersarse más cuando H_0 es falsa que cuando es verdadera y, en este caso, tiende a inflar el valor de MSTr. Por consiguiente, un valor de F que excede en gran medida 1, correspondiente a un MSTr mucho más grande que MSE, provoca una duda considerable sobre H_0. Para determinar el valor P se requiere conocer la distribución de F cuando H_0 es verdadera.

Distribuciones F y la prueba F

En la sección 9.5 se introdujo una familia de distribuciones de probabilidad llamada distribuciones F. Una distribución F surge en conexión con una proporción en la cual existe un número de grados de libertad (gl) asociado con el numerador, y otro número de grados de libertad asociado con el denominador. Sean ν_1 y ν_2 el número de grados de libertad asociados con el numerador y el denominador, respectivamente, para una variable con una distribución F. Tanto ν_1 como ν_2 son enteros positivos. La figura 10.3 ilustra una curva de densidad

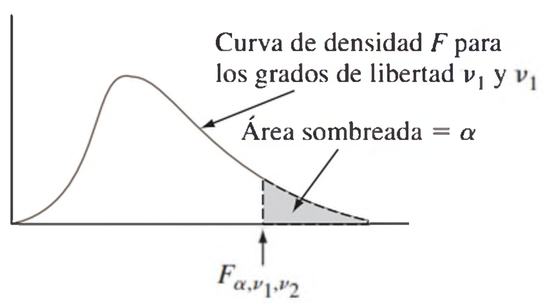


Figura 10.3 Curva de densidad F y valor crítico F_{α,ν_1,ν_2}.

F y el valor crítico de cola superior correspondiente F_{α,ν_1,ν_2}. La tabla A.9 del apéndice da estos valores críticos para $\alpha = .10, .05, .01$ y $.001$. Los valores de ν_1 están identificados con diferentes columnas de la tabla y las filas con varios valores de ν_2. Por ejemplo, el valor crítico F que captura un área de cola superior de .05 bajo la curva F con $\nu_1 = 4$ y $\nu_2 = 6$ es $F_{.05,4,6} = 4.53$ en tanto que $F_{.05,6,4} = 6.16$. El resultado teórico clave es que el estadístico de prueba F tiene una distribución F cuando H_0 es verdadera.

TEOREMA

Sea $F = \text{MSTr/MSE}$ el estadístico de prueba en un problema ANOVA unifactorial que implica poblaciones o tratamientos I con una muestra aleatoria de J observaciones de cada uno. Cuando H_0 es verdadera y las suposiciones básicas de esta sección se satisfacen, F tiene una distribución F con $\nu_1 = I - 1$ y $\nu_2 = I(J - 1)$. Puesto que un f más grande es más contradictorio a H_0 que un f más pequeño, la prueba es de cola superior:

$$\begin{aligned}\text{Valor } P &= P(F \geq f \text{ cuando } H_0 \text{ es verdadera})\\ &= \text{área bajo la curva } F_{I-1,\,I(J-1)} \text{ a la derecha de } f\end{aligned}$$

El software estadístico proporcionará un valor P exacto. Consulte la sección 9.5 para una descripción de cómo se puede utilizar la tabla de nuestro libro de valores críticos de F, tabla A.9, para obtener un límite superior o inferior (o ambos) sobre el valor P.

El razonamiento para $\nu_1 = I - 1$ es que aunque MSTr está basada en las desviaciones I, $\overline{X}_{1\cdot} - \overline{X}_{\cdot\cdot}$, ..., $\overline{X}_{I\cdot} - \overline{X}_{\cdot\cdot}$, $\Sigma(\overline{X}_{i\cdot} - \overline{X}_{\cdot\cdot}) = 0$, de modo que sólo $I - 1$ de estas son libremente determinadas. Debido a que cada muestra contribuye con $J - 1$ grados de libertad a MSE y estas muestras son independientes, $\nu_2 = (J - 1) + \cdots + (J - 1) = I(J - 1)$.

EJEMPLO 10.2 (Continuación del ejemplo 10.1)

Los valores de I y J con los datos de resistencia son 4 y 6, respectivamente, de modo que $\text{gl} = I - 1 = 3$ asociados con el numerador y $\text{gl} = I(J - 1) = 20$ asociados con el denominador. La media grande es $\overline{x}_{\cdot\cdot} = \Sigma\Sigma x_{ij}/(IJ) = 682.50$,

$$\begin{aligned}\text{MSTr} &= \frac{6}{4-1}[(713.00 - 682.50)^2 + (756.93 - 682.50)^2\\ &\qquad + (698.07 - 682.50)^2 + (562.02 - 682.50)^2] = 42\,455.86\end{aligned}$$

$$\text{MSE} = \frac{1}{4}[(46.55)^2 + (40.34)^2 + (37.20)^2 + (39.87)^2] = 1691.92$$

$$f = \text{MSTr/MSE} = 42\,455.86/1691.92 = 25.09$$

El mayor valor crítico de F en la tabla A.9 para $\nu_1 = 3$, $\nu_2 = 20$ es $F_{.001,3,20} = 8.10$. Puesto que $f = 25.09 > 8.10$, el área debajo de la curva $F_{3,20}$ a la derecha de 25.09 es menor a .001. Por tanto, el valor $P \leq .05$, así que la hipótesis nula H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ es rechazada en el nivel de significancia de .05. La resistencia a la compresión promedio verdadera sí parece depender del tipo de caja. De hecho, ya que el valor P es tan pequeño H_0 sería rechazada a cualquier nivel de significancia razonable. ■

EJEMPLO 10.3

El artículo **"Influence of Contamination and Cleaning on Bond Strength to Modified Zirconia" (*Dental Materials*, 2009: 1541–1550)** informa sobre un experimento en el que 50 discos de óxido de circonio se dividieron en cinco grupos de 10 cada uno. A continuación, para cada grupo se utilizó un protocolo diferente de contaminación/limpieza. En el artículo aparece el siguiente resumen de datos sobre la fuerza de cizalla (MPa):

Tratamiento:	1	2	3	4	5	
Media de la muestra	10.5	14.8	15.7	16.0	21.6	Media grande = 15.7
DE muestral	4.5	6.8	6.5	6.7	6.0	

Los autores del artículo citado utilizan la prueba F, por lo que esperamos que hayan examinado una gráfica de probabilidad normal de las desviaciones (o una gráfica independiente de cada muestra, ya que cada tamaño de muestra es de 10) para comprobar la factibilidad de suponer tratamiento normal de las distribuciones respuesta. Las desviaciones estándar de cinco muestras son, sin duda, lo suficientemente cercanas unas de otras para apoyar la hipótesis de σ iguales.

1. μ_i = fuerza adhesiva promedio verdadera para el protocolo i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$).
2. H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$ (la fuerza adhesiva promedio verdadera no depende de cuál protocolo se use)
3. H_a: al menos dos de las μ_i son diferentes
4. El valor del estadístico de prueba es f = MSTr/MSE
5. Los grados de libertad del numerador y del denominador son $I - 1 = 4$ e $I(J - 1) = 5(9) = 45$. Las medias de los cuadrados son

$$\text{MSTr} = \frac{10}{5-1}[(10.5 - 15.7)^2 + (14.8 - 15.7)^2 + (15.7 - 15.7)^2 + (16.0 - 15.7)^2 + (21.6 - 15.7)^2] = 156.875$$

$$\text{MSE} = [(4.5)^2 + (6.8)^2 + (6.5)^2 + (6.7)^2 + (6.0)^2]/5 = 37.926$$

   Así el valor del estadístico de prueba es $f = 156.875/37.926 = 4.14$.
6. La tabla A.9 da $F_{.01,4,40} = 3.83$, $F_{.01,4,50} = 3.72$, $F_{.001,4,40} = 5.70$ y $F_{.001,4,50} = 5.46$. Por tanto, $F_{.01,4,45} \approx 3.77$ y $F_{.001,4,45} \approx 5.56$. Debido a que $f = 4.14$ está entre estos últimos dos valores críticos, el área debajo de la curva $F_{4,45}$ a la derecha de 4.14 (es decir, el valor P) está entre .001 y .01 (con el software se obtiene .0061).
7. Puesto que el valor $P < .01$, la hipótesis nula debe rechazarse en este nivel de significancia. La fuerza adhesiva promedio verdadera parece depender del protocolo que se utiliza. ■

Cuando la hipótesis nula es rechazada por la prueba de F, como ocurrió en los ejemplos 10.2 y 10.3, el experimentador suele estar interesado en el análisis posterior de los datos para decidir cuáles μ_i difieren unas de las otras. Los métodos para hacer esto se llaman *procedimientos de comparación múltiple*, que es el tema de la sección 10.2. El artículo citado en el ejemplo 10.3 resume los resultados de dicho análisis.

Sumas de cuadrados

La introducción de las *sumas de cuadrados* facilita el desarrollo de una apreciación intuitiva para el razonamiento que fundamenta los ANOVA unifactoriales y multifactoriales. Sea $x_{i.}$ la *suma* (no el promedio, puesto que no tienen barra) de las x_{ij} con i fija (suma de los números en la i−ésima fila de la tabla) y sea que $x..$ denote la suma de *todas* las x_{ij} (el **gran total**).

DEFINICIÓN

La **suma total de cuadrados (SST, por sus siglas en inglés),** la **suma de los cuadrados del tratamiento (SSTr, por sus siglas en inglés)** y la **suma de los cuadrados del error (SSE, por sus siglas en inglés)** están dadas por

$$\text{SST} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(x_{ij} - \bar{x}..)^2 = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}x_{ij}^2 - \frac{1}{IJ}x_{..}^2$$

$$\text{SSTr} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(\bar{x}_{i.} - \bar{x}..)^2 = \frac{1}{J}\sum_{i=1}^{I}x_{i.}^2 - \frac{1}{IJ}x_{..}^2$$

$$\text{SSE} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(x_{ij} - \bar{x}_{i.})^2 \quad \text{donde } x_{i.} = \sum_{j=1}^{J}x_{ij} \quad x.. = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}x_{ij}$$

La suma de los cuadrados SSTr aparece en el numerador de F y SSE lo hace en el denominador de F; la razón para definir la SST se pondrá de manifiesto más adelante.

Las expresiones a la extrema derecha de SST y SSTr son convenientes si los cálculos de ANOVA se realizan a mano, aunque la amplia disponibilidad de programas estadísticos hace que esto sea innecesario. Tanto SST como SSTr implican $x_{..}^2/(IJ)$ (el cuadrado del gran total dividido entre IJ), lo que normalmente se llama **factor de corrección para la media** (FC). Una vez que se calcula el factor de corrección, la SST se obtiene elevando al cuadrado cada número que aparece en la tabla, sumando los cuadrados y restando el factor de corrección. SSTr se obtiene al elevar al cuadrado cada total de fila, sumándolos, dividiendo entre J y restando el factor de corrección. SSE se calcula fácilmente como una consecuencia de la siguiente relación.

Identidad fundamental

$$\text{SST} = \text{SSTr} + \text{SSE} \tag{10.1}$$

Por consiguiente, si se calculan cualesquiera dos de las sumas de los cuadrados, la tercera se obtiene con (10.1); SST y SSTr son las más fáciles de calcular y en ese caso SSE = SST − SSTr. La comprobación se desprende de elevar al cuadrado ambos lados de la relación

$$x_{ij} - \bar{x}_{..} = (\bar{x}_{ij} - \bar{x}_{i.}) + (\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..}) \tag{10.2}$$

y sumando todas las i y j. Esto da la SST a la izquierda y SSTr y SSE como los dos términos extremos a la derecha. Es fácil ver que el término del producto cruzado es cero.

La interpretación de la identidad fundamental es una importante ayuda para entender el ANOVA. SST mide la variación total de los datos: la suma de todas las desviaciones al cuadrado respecto a la media grande. La identidad dice que esta variación total puede dividirse en dos partes. SSE mide la variación que estaría presente (en las filas) aun cuando H_0 fuera verdadera o falsa y es, por consiguiente, la parte de la variación total que *no es explicada* por la veracidad o la falsedad de H_0. SSTr es la cantidad de variación (entre filas) que *puede ser explicada* por las posibles diferencias en las μ_i. H_0 es rechazada si la variación explicada es grande respecto a la variación no explicada.

Una vez que SSTr y SSE son calculadas, cada una se divide por su número de grados de libertad asociado para obtener una media de cuadrados (*media* en el sentido de promedio). Entonces F es la proporción de los dos cuadrados de la media.

$$\text{MSTr} = \frac{\text{SSTr}}{I-1} \qquad \text{MSE} = \frac{\text{SSE}}{I(J-1)} \qquad F = \frac{\text{MSTr}}{\text{MSE}} \tag{10.3}$$

Con frecuencia, los cálculos se resumen en un formato tabular, llamado **tabla ANOVA,** como se ilustra en la tabla 10.2. Las tablas producidas por programas estadísticos comúnmente incluyen una columna de valor P a la derecha de f.

Tabla 10.2 Tabla ANOVA

Origen de la variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Media de cuadrados	f
Tratamientos	$I - 1$	SSTr	MSTr = SSTr/$(I - 1)$	MSTr/MSE
Error	$I(J - 1)$	SSE	MSE = SSE/$[I(J - 1)]$	
Total	$IJ - 1$	SST		

EJEMPLO 10.4 De acuerdo con el artículo **"Evaluating Fracture Behavior of Brittle Polymeric Materials Using an IASCB Specimen" (*J. of Engr. Manuf.*, 2013: 133–140)**, los investigadores han propuesto recientemente una prueba mayor para la investigación de la resistencia a la fractura de los materiales poliméricos frágiles. Esta nueva prueba de fractura se aplicó para el polímero frágil polimetacrilato de metilo (PMMA), más popularmente conocido como plexiglás, que es ampliamente utilizado en productos comerciales. La prueba se realizó aplicando cargas de flexión asimétricas de tres puntos en muestras PMMA. Entonces se varió la ubicación de uno de los puntos de carga de los tres para determinar su efecto sobre la carga de fractura. En un experimento se seleccionaron tres ubicaciones de punto basados en diferentes distancias desde el centro de base de la muestra de carga, dando por resultado los siguientes datos de carga de fractura (kN):

						$x_{i\cdot}$
Distancia	42 mm:	2.62	2.99	3.39	2.86	11.86
	36 mm:	3.47	3.85	3.77	3.63	14.72
	31.2 mm:	4.78	4.41	4.91	5.06	19.16
						$x_{\cdot\cdot} = 45.74$

Sea μ_i la media verdadera de la fractura de carga cuando se usa la distancia i ($i = 1, 2, 3$). La hipótesis nula asegura que estas tres μ_i son idénticas, mientras que la hipótesis alternativa afirma que no todas las μ_i son iguales. Antes de usar la prueba de F en el nivel de significancia .01 debemos comprobar la factibilidad de las hipótesis subyacentes. Las tres desviaciones estándar de la muestra son .322, .167 y .278, respectivamente. Efectivamente, el mayor de estos tres es no más de dos veces el más pequeño. Por tanto, es factible la suposición de varianzas iguales. La figura 10.4 muestra una gráfica de probabilidad normal de los 12 residuos obtenidos restando la media de cada muestra de las cuatro observaciones de la misma. ¡No forman algo más recto que esto! Es razonable suponer que las distribuciones de carga de tres fracturas son normales.

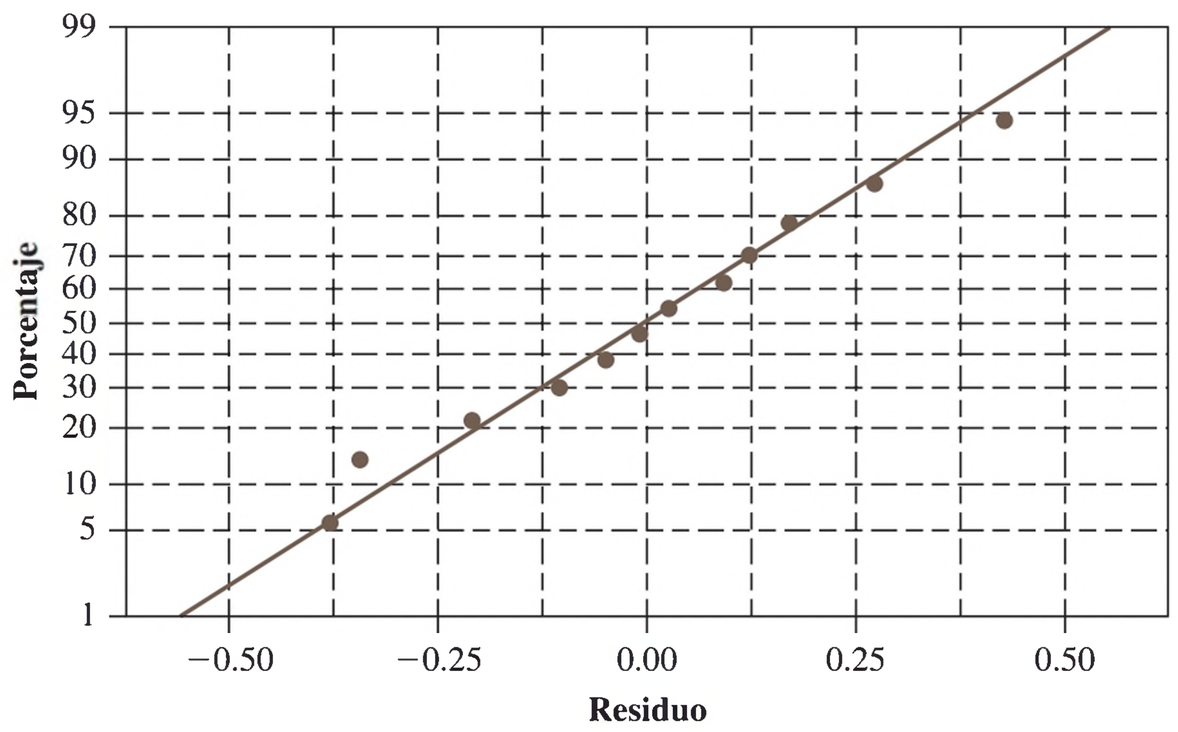


Figura 10.4 Gráfica de probabilidad normal de los residuos del ejemplo 10.4

Elevando al cuadrado cada una de las 12 observaciones y sumando se obtiene $\Sigma\Sigma x_{ij}^2 = (2.62)^2 + \cdots + (5.06)^2 = 181.7376$. Los valores de las tres sumas de cuadrados son

$$\text{SST} = 181.7376 - (45.74)^2/12 = 181.7376 - 174.3456 = 7.3920$$
$$\text{SSTr} = \tfrac{1}{4}[(11.86)^2 + (14.72)^2 + (19.16)^2] - 174.3456 = 6.7653$$
$$\text{SSE} = 7.3920 - 6.7653 = .6267$$

La siguiente tabla ANOVA de Minitab resume los cálculos. Con un valor *P* de .000, la hipótesis nula puede ser rechazada en cualquier nivel de significancia razonable y en particular en el nivel elegido .01. Existe evidencia convincente para concluir que la carga de fractura promedio verdadera no es la misma para todas las tres distancias.

Source	DF	SS	MS	F	P
Dist	2	6.7653	3.3826	48.58	0.000
Error	9	0.6267	0.0696		
Total	11	7.3920			

EJERCICIOS Sección 10.1 (1–10)

1. En un experimento para comparar las resistencias a la tensión de $I = 5$ tipos diferentes de alambre de cobre, se utilizaron $J = 4$ muestras de cada tipo. Las estimaciones entre las muestras y dentro de las muestras de σ^2 se calcularon como MSTr = 2673.3 y MSE = 1094.2, respectivamente. Use la prueba *F* a un nivel de .05 para probar H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$ contra H_a: al menos dos μ_i son desiguales.

2. Suponga que las observaciones de resistencia a la compresión del cuarto tipo de caja del ejemplo 10.1 hubieran sido 655.1, 748.7, 662.4, 679.0, 706.9 y 640.0 (obtenidas sumando 120 a cada previa x_{4j}). Suponiendo que las observaciones restantes no cambian, realice una prueba *F* con $\alpha = .05$.

3. Se determinó el rendimiento en lúmenes de cada uno de los $I = 3$ marcas diferentes de focos de luz blanca de 60 watts, con $J = 8$ focos de cada marca probados. Las sumas de los cuadrados se calcularon como SSE = 4773.3 y SSTr = 591.2. Formule las hipótesis de interés (incluidas definiciones en palabras de los parámetros) y use la prueba *F* de ANOVA (con $\alpha = .05$) para decidir si existen diferencias en los rendimientos de lúmenes promedio verdaderos entre las tres marcas de este tipo de foco, obteniendo tanta información como sea posible sobre el valor *P*.

4. Es una práctica común en muchos países destruir (fragmentar) refrigeradores al final de su vida útil. En este proceso el material de espuma de aislamiento puede ser liberado a la atmósfera. El artículo **"Release of Fluorocarbons from Insulation Foam in Home Appliances during Shredding"** (***J. of the Air and Waste Mgmt. Assoc.*, 2007: 1452–1460**) dio los siguientes datos sobre la densidad de la espuma (g/L) para cada uno de dos refrigeradores producidos por cuatro distintos fabricantes:

1. 30.4, 29.2 **2.** 27.7, 27.1
3. 27.1, 24.8 **4.** 25.5, 28.8

¿Será que el promedio real de densidad de la espuma no es el mismo para todos estos fabricantes? Lleve a cabo una prueba adecuada de las hipótesis mediante la obtención de una mayor cantidad de información del valor *P* como sea posible y un resumen de su análisis en una tabla de ANOVA.

5. Considere los siguientes datos del módulo de elasticidad ($\times 10^6$ lb/pulg^2) de madera de tres grados diferentes (en concordancia con los valores que aparecen en el artículo **"Bending Strength and Stiffness of Second–Growth Douglas–Fir Dimension Lumber"** (***Forest Products J.*, 1991: 35–43**), excepto que los tamaños de muestra allí eran más grandes):

Grado	J	$\bar{x}_{i\cdot}$	s_i
1	10	1.63	.27
2	10	1.56	.24
3	10	1.42	.26

Use estos datos y un nivel de significancia de .01 para probar la hipótesis nula de no diferencia en el módulo medio de elasticidad para los tres grados.

6. El artículo **"Origin of Precambrian Iron Formations"** (***Econ. Geology*, 1964: 1025–1057**) reporta los siguientes datos sobre Fe total para cuatro tipos de formación de hierro (1 = carbonato, 2 = silicato, 3 = magnetita, 4 = hematita).

1:	20.5	28.1	27.8	27.0	28.0
	25.2	25.3	27.1	20.5	31.3
2:	26.3	24.0	26.2	20.2	23.7
	34.0	17.1	26.8	23.7	24.9
3:	29.5	34.0	27.5	29.4	27.9
	26.2	29.9	29.5	30.0	35.6
4:	36.5	44.2	34.1	30.3	31.4
	33.1	34.1	32.9	36.3	25.5

Analice una prueba *F* de varianza a un nivel de significancia de .01 y resuma los resultados en una tabla ANOVA.

7. Se realizó un experimento para comparar la resistencia eléctrica de seis diferentes mezclas de hormigón de baja permeabilidad para la cubierta de un puente. Hubo 26 mediciones en cilindros de hormigón para cada mezcla, los cuales se obtuvieron 28 días después de la fundición. Las entradas de la siguiente tabla de ANOVA se basan en la información del artículo **"In–Place Resistivity of Bridge Deck Concrete Mixtures"** (***ACI Materials J.*, 2009: 114–122**). Complete el resto de las entradas y la prueba de hipótesis adecuada.

Fuente	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Media de cuadrados	*f*
Mezcla				
Error			13.929	
Total		5664.415		

8. Un estudio de las propiedades de las estructuras conectadas con placas metálicas para soportar techos (**"Modeling Joints Made with Light–GaugeMetal Connector Plates", *Forest Products J.*, 1979: 39–44**) arroja las siguientes observaciones de índice de rigidez axial (libras/pulg^2) de tramos de placa de 4, 6, 8, 10 y 12 pulg:

4:	309.2	409.5	311.0	326.5	316.8	349.8	309.7
6:	402.1	347.2	361.0	404.5	331.0	348.9	381.7
8:	392.4	366.2	351.0	357.1	409.9	367.3	382.0
10:	346.7	452.9	461.4	433.1	410.6	384.2	362.6
12:	407.4	441.8	419.9	410.7	473.4	441.2	465.8

¿Tiene algún efecto la variación de la longitud de placas en la rigidez axial promedio verdadera? Formule y pruebe las hipótesis pertinentes mediante un análisis de varianza con $\alpha = .01$. Muestre sus resultados en una tabla ANOVA. [*Sugerencia*: $\Sigma\Sigma x_{ij}^2 = 5\ 241\ 420.79$.]

9. Se analizaron seis muestras de cada uno de los cuatro tipos de crecimiento de los granos de cereal en una región para determinar el contenido de tiamina y se obtuvieron los siguientes resultados (μg/g):

Trigo	5.2	4.5	6.0	6.1	6.7	5.8
Cebada	6.5	8.0	6.1	7.5	5.9	5.6
Maíz	5.8	4.7	6.4	4.9	6.0	5.2
Avena	8.3	6.1	7.8	7.0	5.5	7.2

¿Sugieren estos datos que al menos dos de los granos difieren respecto al contenido de tiamina promedio verdadero? Use una prueba con nivel $\alpha = .05$.

10. En ANOVA unifactorial con tratamientos I y observaciones J por cada tratamiento, sea $\mu = (1/I)\Sigma\mu_i$.

a. Exprese $E(\overline{X}_{\cdot\cdot})$ en función de μ. [*Sugerencia*: $\overline{X}_{\cdot\cdot} = (1/I)\,\Sigma\,\overline{X}_{i\cdot}$]

b. Calcule $E(\overline{X}_{i\cdot}^2)$. [*Sugerencia*: con cualquier variable aleatoria Y, $E(Y^2) = V(Y) + [E(Y)]^2$.]

c. Calcule $E(\overline{X}_{\cdot\cdot}^2)$

d. Calcule $E(\text{SSTr})$ y luego demuestre que

$$E(\text{MSTr}) = \sigma^2 + \frac{J}{I-1}\sum(\mu_i - \mu)^2$$

e. Con el resultado del inciso d), ¿cuál es la $E(\text{MSTr})$ cuando H_0 es verdadera? Cuando H_0 es falsa, ¿se compara la $E(\text{MSTr})$ con σ^2?

10.2 Comparaciones múltiples en ANOVA

Cuando el valor calculado del estadístico F en un ANOVA unifactorial no es significativo, el análisis se termina porque no se han identificado diferencias entre las μ_i. Pero cuando H_0 es rechazada, el investigador normalmente deseará saber cuáles de las μ_i son diferentes una de otra. Un método para realizar este análisis adicional se llama **procedimiento de comparaciones múltiples**.

Muchos de los procedimientos que se utilizan con más frecuencia están basados en la siguiente idea central. Primero se calcula un intervalo de confianza para cada diferencia $\mu_i - \mu_j$ con $i < j$. Por consiguiente, si $I = 4$, los seis intervalos de confianza requeridos serían para $\mu_1 - \mu_2$ (pero no para $\mu_2 - \mu_1$), $\mu_1 - \mu_3$, $\mu_1 - \mu_4$, $\mu_2 - \mu_3$, $\mu_2 - \mu_4$ y $\mu_3 - \mu_4$. Por tanto, si el intervalo para $\mu_1 - \mu_2$ no incluye 0, se concluye que μ_1 y μ_2 *difieren significativamente* una de otra; si el intervalo sí incluye 0, se considera que las dos μ no difieren de manera significativa. Si se sigue la misma línea de razonamiento para cada uno de los demás intervalos, finalmente se es capaz de juzgar si cada par de μ difiere o no en forma significativa uno de otro.

Los procedimientos basados en esta idea difieren en el método utilizado para calcular los diferentes intervalos de confianza. Aquí se presenta un método popular que controla el nivel de confianza *simultáneo* para todos los intervalos $I(I-1)/2$.

Procedimiento de Tukey (el método *T*)

El procedimiento de Tukey implica utilizar otra distribución de probabilidad llamada **distribución de rango estudentizado.** La distribución depende de dos parámetros: m grados de libertad asociados con el numerador y ν grados de libertad asociados con el denominador. Sea $Q_{\alpha,m,\nu}$ el valor crítico α de cola superior de la distribución de rango estudentizado con m grados de libertad asociados con el numerador y ν grados de libertad asociados con el denominador (análogo a F_{α,ν_1,ν_2}). En la tabla A.10 del apéndice se muestran los valores de $Q_{\alpha,m,\nu}$.

PROPOSICIÓN

Con la probabilidad $1 - \alpha$,

$$\bar{X}_{i\cdot} - \bar{X}_{j\cdot} - Q_{\alpha,I,I(J-1)}\sqrt{\text{MSE}/J} \le \mu_i - \mu_j \le \bar{X}_{i\cdot} - \bar{X}_{j\cdot} + Q_{\alpha,I,I(J-1)}\sqrt{\text{MSE}/J} \quad (10.4)$$

para *cada* i ($i = 1,..., I$ y $j = 1,..., I$) con $i < j$.

Observe que los grados de libertad asociados con el numerador para el valor crítico Q_α apropiado es I, el número de medias de la población o tratamiento que se están comparando, y no $I - 1$ como en la prueba F. Cuando las $\bar{x}_{i\cdot}$, $\bar{x}_{j\cdot}$ son calculadas y el MSE se sustituye en (10.4), el resultado es un conjunto de intervalos de confianza con nivel de confianza *simultáneo* de $100(1 - \alpha)\%$ para todas las diferencias de la forma $\mu_i - \mu_j$ con $i < j$. Cada intervalo que no incluye 0 da lugar a la conclusión de que los valores correspondientes de μ_i y μ_j difieren significativamente uno de otro.

Puesto que en realidad no interesan los límites inferior y superior de los diversos intervalos, sino únicamente cuál incluye 0 y cuál no, se puede evitar mucha de la aritmética asociada con (10.4). El siguiente recuadro proporciona detalles y describe cómo se pueden identificar las diferencias de modo visual con un "patrón de subrayado".

Método *T* para identificar μ_i significativamente diferentes

Se selecciona α, se extrae $Q_{\alpha\, I,I(J-1)}$ de la tabla A.10 del apéndice y se calcula $w = Q_{\alpha,\, I,\, I(J-1)} \cdot \sqrt{\text{MSE}/J}$. Luego se hace una lista de las medias muestrales en orden creciente y se subrayan los pares que menos difieren de w. Cualquier par de medias muestrales no subrayado por la misma raya corresponde a un par de medias de población o tratamiento juzgadas significativamente diferentes.

Suponga, por ejemplo, que $I = 5$ y que

$$\bar{x}_{2\cdot} < \bar{x}_{5\cdot} < \bar{x}_{4\cdot} < \bar{x}_{1\cdot} < \bar{x}_{3\cdot}$$

Por tanto,

1. Considere en primer lugar la media más pequeña $\bar{x}_{2\cdot}$. Si $\bar{x}_{5\cdot} - \bar{x}_{2\cdot} \ge w$, prosiga al paso 2. Sin embargo, si $\bar{x}_{5\cdot} - \bar{x}_{2\cdot} < w$, conecte estas primeras dos medias con un segmento de recta. Luego, si es posible, extienda este segmento de recta más a la derecha de la más grande $\bar{x}_{i\cdot}$ que difiera de $\bar{x}_{2\cdot}$ en menos de w (de modo que la recta pueda conectar dos, tres, incluso más medias).
2. Ahora siga con $\bar{x}_{5\cdot}$ y otra vez extienda el segmento de línea hasta la derecha de la más grande que difiera de $\bar{x}_{5\cdot}$ en menos de w (quizá no sea posible trazar esta línea o de manera alternativa pueden subrayarse sólo dos medias, o tres, o incluso las cuatro medias restantes).
3. Continúe con $\bar{x}_{4\cdot}$ y repita, y finalmente continúe con $\bar{x}_{1\cdot}$.

Para resumir, al comenzar en cada media que aparece en la lista ordenada, un segmento de recta se extiende a la derecha tan lejos como sea posible, siempre y cuando la diferencia entre las medias sea menor que w. Es fácil verificar que un intervalo particular de la forma (10.4) contendrá 0 si y sólo si el par correspondiente de medias muestrales está subrayado por el mismo segmento de recta.

EJEMPLO 10.5 Se realizó un experimento para comparar cinco marcas diferentes de filtros de aceite para automóviles respecto a su capacidad de atrapar materia extraña. Sea μ_i la cantidad promedio verdadera de material atrapado por los filtros marca i ($i = 1,..., 5$) en condiciones

controladas. Se utilizó una muestra de nueve filtros de cada marca y se obtuvieron las siguientes cantidades medias muestrales: $\bar{x}_{1\cdot} = 14.5$, $\bar{x}_{2\cdot} = 13.8$, $\bar{x}_{3\cdot} = 13.3$, $\bar{x}_{4\cdot} = 14.3$ y $\bar{x}_{5\cdot} = 13.1$. La tabla 10.3 es una tabla ANOVA que resume la primera parte del análisis.

Tabla 10.3 Tabla ANOVA para el ejemplo 10.5

Origen de la variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Media de cuadrados	f
Tratamientos (marcas)	4	13.32	3.33	37.84
Error	40	3.53	.088	
Total	44	16.85		

Puesto que $F_{.001,4,40} = 5.70$, el valor P es menor a .001. Por tanto, H_0 se rechaza (con decisión) al nivel .05. Ahora utilizamos el procedimiento de Tukey para buscar diferencias significativas entre las μ_i. De la tabla A.10 del apéndice, $Q_{.05,5,40} = 4.04$ (el segundo subíndice en el Q es I no $I - 1$ como en F), por tanto, $w = 4.04\sqrt{.088/9} = .4$. Después de arreglar las cinco medias de la muestra en orden creciente, se pueden conectar las dos más pequeñas mediante un segmento de recta debido a que difieren en menos de .4. Sin embargo, este segmento no puede extenderse más a la derecha, ya que 13.8 – 13.1 = .7 ≥ .4. Moviéndose una media a la derecha, el par $\bar{x}_{3\cdot}$ y $\bar{x}_{2\cdot}$ no puede ser subrayado porque estas medias difieren en más de .4. De nuevo, moviéndose a la derecha, la siguiente media, 13.8, no se puede conectar a cualquiera que esté más a la derecha. Las dos últimas medias pueden ser subrayadas con el mismo segmento de recta.

$\bar{x}_{5\cdot}$	$\bar{x}_{3\cdot}$	$\bar{x}_{2\cdot}$	$\bar{x}_{4\cdot}$	$\bar{x}_{1\cdot}$
13.1	13.3	13.8	14.3	14.5

Así pues las marcas 1 y 4 no son significativamente diferentes una de otra, pero sí son más altas de manera significativa que las otras tres marcas en sus contenidos promedio verdaderos. La marca 2 es significativamente mejor que la 3 y la 5, pero peor que la 1 y la 4, y las marcas 3 y 5 no difieren en modo significativo.

Si $\bar{x}_{2\cdot} = 14.15$ en lugar de 13.8 con el mismo valor w calculado, entonces la configuración de medias subrayadas sería

$\bar{x}_{5\cdot}$	$\bar{x}_{3\cdot}$	$\bar{x}_{2\cdot}$	$\bar{x}_{4\cdot}$	$\bar{x}_{1\cdot}$
13.1	13.3	14.15	14.3	14.5

■

EJEMPLO 10.6 Un biólogo deseaba estudiar los efectos del etanol en el periodo de sueño. Se seleccionó una muestra de 20 ratas coincidentes por edad y otras características y a cada rata se le administró una inyección oral con una concentración particular de etanol por peso corporal. Luego se registró el movimiento rápido de los ojos (REM, por sus siglas en inglés) durante el periodo de sueño de cada rata durante 24 horas, con los siguientes resultados:

Tratamiento (concentración de etanol)						$x_{i\cdot}$	$\bar{x}_{i\cdot}$
0 (control)	88.6	73.2	91.4	68.0	75.2	396.4	79.28
1 g/kg	63.0	53.9	69.2	50.1	71.5	307.7	61.54
2 g/kg	44.9	59.5	40.2	56.3	38.7	239.6	47.92
4 g/kg	31.0	39.6	45.3	25.2	22.7	163.8	32.76

$x_{\cdot\cdot} = 1107.5$ $\bar{x}_{\cdot\cdot} = 55.375$

¿Será que los datos indican datos que el promedio real del periodo de sueño REM depende de la concentración de etanol? (Este ejemplo está basado en el experimento reportado en **"Relationship of Ethanol Blood Level to REM and Non2REM Sleep Time and Distribution in the Rat"**, ***Life Sciences*****, 1978: 839–846.**)

Las $\bar{x}_{i\cdot}$ difieren sustancialmente una de otra, aunque también existe una gran cantidad de variabilidad dentro de cada muestra, por lo que para responder la pregunta con precisión se debe realizar el ANOVA. Las más pequeña y la más grande de las desviaciones estándar de la muestra cuatro son 9.34 y 10.18, respectivamente, lo cual apoya la hipótesis de varianzas iguales. Una gráfica de probabilidad normal de los 20 residuos muestra un patrón razonablemente lineal, justificando la suposición de que las cuatro distribuciones de tiempo de sueño REM son normales. Por tanto, es legítimo emplear la prueba F.

La tabla 10.4 es una tabla ANOVA SAS. La última columna da el valor P como .0001. Con un nivel de significancia de .05 se rechaza la hipótesis nula H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$, puesto que valor $P = .0001 < .05 = \alpha$. Al parecer el promedio real del periodo de sueño REM depende del nivel de concentración.

Tabla 10.4 Tabla ANOVA SAS

```
                    Analysis of Variance Procedure
Dependent Variable: TIEMPO
                                 Sum of          Mean
Source              DF          Squares        Square     F Value     Pr > F
Model                3       5882.35750   1960.78583       21.09     0.0001
Error               16       1487.40000     92.96250
Corrected
Total               19       7369.75750
```

Existen $I = 4$ tratamientos y 16 grados de libertad asociados con el error, por tanto, $Q_{.05,4,16} = 4.05$ y $w = 4.05\sqrt{93.0/5} = 17.47$. Ordenando las medias y subrayándolas se obtiene

$\bar{x}_{4\cdot}$	$\bar{x}_{3\cdot}$	$\bar{x}_{2\cdot}$	$\bar{x}_{1\cdot}$
32.76	47.92	61.54	79.28

La interpretación de este subrayado debe hacerse con cuidado, puesto que al parecer se ha concluido que los tratamientos 2 y 3 no difieren, 3 y 4 no difieren; no obstante, 2 y 4 sí difieren. Para expresar esto se sugiere decir que, aunque la evidencia permite concluir que los tratamientos 2 y 4 difieren uno de otro, no se ha demostrado que alguno sea significativamente diferente del 3. El tratamiento 1 tiene un periodo de sueño REM promedio verdadero más alto de manera significativa que cualquiera de los demás tratamientos.

La figura 10.5 muestra resultados obtenidos con SAS a partir de la aplicación del procedimiento de Tukey.

```
Alpha =0.05 df =16 MSE = 92.9625
Critical Value of Studentized Range = 4.046
Minimum Significant Difference = 17.446

Means with the same letter are not significantly different.

Tukey Grouping          Mean          N    TREATMENT
             A          79.280        5    0(control)

             B          61.540        5    1 gm/kg
             B
        C    B          47.920        5    2 gm/kg
        C
        C               32.760        5    4 gm/kg
```

Figura 10.5 Método de Turkey usando SAS ■

Interpretación de α en el método de Tukey

Previamente se manifestó que el método de Tukey controla el nivel de confianza *simultáneo*. Por tanto, ¿qué significa "simultáneo" en este caso? Calcule un intervalo de confianza de 95% para una media de población μ, basada en una muestra de dicha población, y

luego un intervalo de confianza de 95% para una proporción de población p basado en otra muestra seleccionada independientemente de la primera. Antes de obtener los datos, la probabilidad de que el primer intervalo incluya μ es de .95 y esta también es la probabilidad de que el segundo intervalo incluya p. Puesto que las dos muestras se seleccionan de manera independiente una de otra, la probabilidad de que ambos intervalos incluyan los valores de los parámetros respectivos es $(.95)(.95) = (.95)^2 \approx .90$. Por consiguiente, el nivel de confianza *simultáneo* o *conjunto* para los dos intervalos es aproximadamente de 90%; si se calculan pares de intervalos una y otra vez con muestras independientes, a la larga aproximadamente 90% de las veces el primer intervalo capturará μ y el segundo incluirá p. Asimismo, si se calculan tres intervalos de confianza basados en muestras independientes, el nivel de confianza simultáneo será de $100(.95)^3\% \approx 86\%$. Claramente, a medida que se incrementa el número de intervalos, se reducirá el nivel de confianza simultáneo de que todos los intervalos capturen sus respectivos parámetros.

Ahora suponga que se desea mantener el nivel de confianza simultáneo en 95%. Así, para dos muestras independientes, el nivel de confianza individual para cada una tendría que ser $100\sqrt{.95}\,\% \approx 97.5\%$. Mientras más grande es el número de intervalos, más alto tendría que ser el nivel de confianza individual para mantener el nivel simultáneo en 95%.

El truco, en relación con los intervalos Tukey, es que no están basados en muestras independientes: MSE aparece en todos y varios intervalos comparten las mismas $\bar{x}_{i\cdot}$ (p. ej., en el caso $I = 4$, tres intervalos diferentes utilizan $\bar{x}_{1\cdot}$). Esto implica que no existe un argumento de probabilidad directo para discernir el nivel de confianza simultáneo de los niveles de confianza individuales. No obstante, se puede demostrar que, si se utiliza $Q_{.05}$, el nivel de confianza simultáneo se controla a 95%; en tanto que si se utiliza $Q_{.01}$ se obtiene un nivel simultáneo de 99%. Para obtener un nivel simultáneo de 95%, el nivel individual de cada intervalo debe ser considerablemente más grande que 95%. Expresado de forma un poco diferente, para obtener una proporción de error de 5% asociada con un *experimento* o *familia*, la proporción de error por comparación o individual para cada intervalo debe ser considerablemente más pequeña que .05. Minitab le pide al usuario que especifique la proporción de error asociado con la familia (p. ej., 5%) y luego incluye en los datos de salida la proporción de error individual (véase el ejercicio 16).

Intervalos de confianza para otras funciones paramétricas

En algunas situaciones se desea un intervalo de confianza para una función de las μ_i más complicada que una diferencia $\mu_i - \mu_j$. Sea $\theta = \Sigma c_i \mu_i$, donde las c_i son constantes. Una función como esa es $1/2(\mu_1 + \mu_2) - 1/3(\mu_3 + \mu_4 + \mu_5)$ la cual, en el contexto del ejemplo 10.5, mide la diferencia entre el grupo compuesto de las dos primeras marcas y la de las últimas tres. Puesto que las X_{ij} están normalmente distribuidas con $E(X_{ij}) = \mu_i$ y $V(X_{ij}) = \sigma^2$, $\hat{\theta} = \Sigma c_i \bar{X}_{i\cdot}$, está normalmente distribuida, insesgada para θ, y

$$V(\hat{\theta}) = V\Big(\sum_i c_i \bar{X}_{i\cdot}\Big) = \sum_i c_i^2 V(\bar{X}_{i\cdot}) = \frac{\sigma^2}{J}\sum_i c_i^2$$

La estimación de σ^2 mediante MSE y la formación de $\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}$, da por resultado una variable $t(\hat{\theta} - \hat{\theta})/\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}$, la cual puede ser manipulada para obtener el siguiente intervalo de confianza de $100(1 - \alpha)\%$ para $\Sigma c_i \mu_i$.

$$\sum c_i \bar{x}_{i\cdot} \pm t_{\alpha/2,I(J-1)} \sqrt{\frac{\text{MSE}\Sigma c_i^2}{J}} \tag{10.5}$$

EJEMPLO 10.7 La función paramétrica para comparar las primeras dos marcas de filtro de aceite (tienda) con las últimas tres marcas (nacionales) es $\theta = 1/2(\mu_1 + \mu_2) - 1/3(\mu_3 + \mu_4 + \mu_5)$ con la cual

$$\sum c_i^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{6}$$

Con $\hat{\theta} = 1/2(\bar{x}_{1\cdot} + \bar{x}_{2\cdot}) - 1/3(\bar{x}_{3\cdot} + \bar{x}_{4\cdot} + \bar{x}_{5\cdot}) = .583$ y MSE =.088, un intervalo de 95% es

$$.583 \pm 2.021\sqrt{5(.088)/[(6)(9)]} = .583 \pm .182 = (.401, .765)$$ ■

En ocasiones se realiza un experimento para comparar cada uno de los varios tratamientos "nuevos" con un tratamiento de control. En tales situaciones es apropiada una técnica de comparaciones múltiples llamada método de Dunnett.

EJERCICIOS Sección 10.2 (11–21)

11. En un experimento para comparar las proporciones de cobertura de cinco marcas diferentes de pintura amarilla de látex para interiores, disponibles en un área particular, se utilizaron 4 galones ($J = 4$) de cada pintura. Las proporciones de cobertura promedio de las muestras (pies^2/gal) de las cinco marcas fueron $\bar{x}_{1\cdot} = 462.0, \bar{x}_{2\cdot} = 512.8, \bar{x}_{3\cdot} = 437.5, \bar{x}_{4\cdot} = 469.3$ y $\bar{x}_{5\cdot} = 532.1$. Se encontró que el valor calculado de F es significativo a un nivel de $\alpha = .05$. Con MSE = 272.8 use el procedimiento de Tukey para investigar diferencias significativas en las proporciones de cobertura promedio verdaderas entre marcas.

12. En el ejercicio 11 suponga $\bar{x}_{3\cdot} = 427.5$. Ahora, ¿cuáles proporciones de cobertura promedio verdaderas difieren significativamente una de otra? Asegúrese de utilizar el método de subrayar para ilustrar sus conclusiones y escriba un párrafo que resuma sus resultados.

13. Repita el ejercicio 12 suponiendo que $\bar{x}_{2\cdot} = 502.8$ además de $\bar{x}_{3\cdot} = 427.5$.

14. Use el procedimiento de Tukey con los datos del ejemplo 10.3 para identificar diferencias en la fuerza adhesiva real promedio entre los cinco protocolos.

15. El ejercicio 10.7 describe un experimento en el que se realizaron 26 observaciones de resistencia en cada una de seis diferentes mezclas de hormigón. El artículo citado dio las siguientes medias muestrales: 14.18, 17.94, 18.00, 18.00, 25.74, 27.67. Aplique el método de Tukey con un nivel de confianza simultáneo de 95% para identificar diferencias significativas, así como de sus resultados (use MSE = 13.929).

16. Reconsidere los datos de rigidez axial dados en el ejercicio 8. Los siguientes son datos ANOVA obtenidos con Minitab.

```
Analysis of Variance de rigidez axial
Source    DF       SS       MS        F       P
Length     4    43993    10998    10.48   0.000
Error     30    31475     1049
Total     34    75468

Level      N     Mean    StDev
4          7   333.21    36.59
6          7   368.06    28.57
8          7   375.13    20.83
10         7   407.36    44.51
12         7   437.17    26.00

Pooled StDev = 32.39

Tukey's pairwise comparisons

    Family error rate = 0.0500
Individual error rate = 0.00693

Critical value = 4.10

Intervals for (column level mean) - (row level mean)
           4           6           8          10
6       -85.0
         15.4
8       -92.1       -57.3
          8.3        43.1
10     -124.3       -89.5       -82.4
        -23.9        10.9        18.0
12     -154.2      -119.3      -112.2       -80.0
        -53.8       -18.9       -11.8        20.4
```

a. ¿Será factible que las varianzas de las cinco distribuciones de índices de rigidez axial sean idénticas? Explique.

b. Use los resultados (sin referencia a la tabla F) para probar las hipótesis pertinentes.

c. Use los intervalos de Tukey dados en los resultados para determinar cuáles medias difieren y construya el patrón de subrayado correspondiente.

17. Remítase al ejercicio 5. Calcule un intervalo de confianza t de 95% con $\theta = 1/2(\mu_1 + \mu_2) - \mu_3$.

18. Considere los datos adjuntos sobre el crecimiento de las plantas después de la aplicación de cinco diferentes tipos de la hormona del crecimiento

1:	13	17	7	14
2:	21	13	20	17
3:	18	15	20	17
4:	7	11	18	10
5:	6	11	15	8

a. Realice una prueba F al nivel $\alpha = .05$.

b. ¿Qué sucede cuando se aplica el procedimiento de Tukey?

19. Considere un experimento ANOVA unifactorial en el cual $I = 3, J = 5, \bar{x}_{1\cdot} = 10, \bar{x}_{2\cdot} = 12$ y $\bar{x}_{3\cdot} = 20$. Encuentre un valor de SSE con el cual $f > F_{.05,2,12}$ de modo que H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ sea rechazada, aunque cuando se aplica el procedimiento de Tukey se puede decir que ninguna de las μ_i difieren significativamente una de otra.

20. Remítase al ejercicio 19 y suponga $\bar{x}_{1\cdot} = 10$, $\bar{x}_{2\cdot} = 15$ y $\bar{x}_{3\cdot} = 20$. ¿Puede hallar ahora un valor de SSE que produzca semejante contradicción entre la prueba F y el procedimiento de Tukey?

21. El artículo **"The Effect of Enzyme Inducing Agents on the Survival Times of Rats Exposed to Lethal Levels of Nitrogen Dioxide" (*Toxicology and Applied Pharmacology*, 1978: 169–174)** reporta los siguientes datos sobre los tiempos de sobrevivencia de ratas expuestas a bióxido de nitrógeno (70 ppm) mediante diferentes regímenes de inyección. Hubo $J = 14$ ratas en cada grupo.

Régimen	$\bar{x}_{i\cdot}$ (mín)	s_i
1. Control	166	32
2. 3-Metilcolantreno	303	53
3. Alilisopropilacetamida	266	54
4. Fenobarbital	212	35
5. Cloropromazina	202	34
6. Ácido *p*-Aminobenzoico	184	31

a. Pruebe las hipótesis nulas de que el tiempo de sobrevivencia promedio verdadero no depende del régimen de inyección contra la alternativa de que existe alguna dependencia del régimen de inyección con $\alpha = .01$.

b. Suponga que se calculan intervalos de confianza de $100(1 - \alpha)\%$ para k funciones paramétricas diferentes con el mismo conjunto de datos ANOVA. Entonces es fácil verificar que el nivel de confianza simultáneo es al menos de $100(1 - k\alpha)\%$. Calcule los intervalos de confianza con nivel de confianza simultáneo de al menos 98% para
$\mu_1 - 1/5(\mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5 + \mu_6)$ y
$1/4\ (\mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5) - \mu_6$

10.3 Más sobre ANOVA unifactorial

A continuación se consideran brevemente algunos temas adicionales relacionados con ANOVA unifactorial. Estos incluyen una descripción alternativa de los parámetros modelo, β para la prueba F, la relación de la prueba con los procedimientos previamente considerados, la transformación de datos, un modelo de efectos aleatorios y las fórmulas para el caso de tamaños de muestra desiguales.

Modelo ANOVA

Las suposiciones de ANOVA unifactorial pueden ser descritas sucintamente mediante la "ecuación modelo"

$$X_{ij} = \mu_{i+} \epsilon_{ij}$$

donde ϵ_{ij} representa una desviación aleatoria de la población o de la media de tratamiento verdadera μ_i. Se supone que las ϵ_{ij} son variables aleatorias independientes normalmente distribuidas (lo que implica que las X_{ij} también lo son) con $E(\epsilon_{ij}) = 0$ [de modo que $E(X_{ij}) = \mu_i$] y $V(\epsilon_{ij}) = \sigma^2$ [de donde $V(X_{ij}) = \sigma^2$ para toda i y j]. Una descripción alternativa de ANOVA unifactorial dará una idea adicional y sugerirá generalizaciones apropiadas de modelos que implican más de un factor. Defínase el parámetro μ como

$$\mu = \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} \mu_i$$

y los parámetros $\alpha_1, \ldots, \alpha_I$ como

$$\alpha_i = \mu_i - \mu (i = 1, \ldots, I)$$

Entonces la media del tratamiento μ_i se escribe como $\mu + \alpha_i$, donde μ representa la respuesta total promedio verdadera en el experimento y α_i es el efecto, medido como un alejamiento de μ, debido al i-ésimo tratamiento. Mientras que inicialmente se tenían I parámetros, ahora se tienen $I + 1$ parámetros ($\mu, \alpha_1, \ldots, \alpha_I$). Sin embargo, debido a que $\Sigma\alpha_i = 0$ (el alejamiento promedio de la respuesta media total es cero) sólo I de estos nuevos parámetros están

determinados de manera independiente, así que existen muchos parámetros independientes como los hubo antes. En función de μ y de las α_i, el modelo se vuelve

$$X_{ij} = \mu + \alpha_i + \epsilon_{ij} \quad (i = 1,..., I; \quad j = 1,..., J)$$

En el capítulo 11 se desarrollarán modelos análogos para ANOVA multifactorial. La afirmación de que las μ_i son idénticas es equivalente a la igualdad de las α_i y debido a que $\Sigma\alpha_i = 0$ la hipótesis nula se vuelve

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 0$$

Recuerde que MSTr es un estimador insesgado de σ^2 cuando H_0 es verdadera aunque de otro modo tiende a sobrestimar σ^2. Más precisamente:

$$E(\text{MSTr}) = \sigma^2 + \frac{J}{I-1}\sum \alpha_i^2$$

Cuando H_0 es verdadera $\Sigma\alpha_i^2 = 0$, de modo que $E(\text{MSTr}) = \sigma^2$ (MSE es insesgada, sea H_0 verdadera o no). Si $\Sigma\alpha_i^2$ se utiliza como medida del grado al cual H_0 es falsa, entonces un valor más grande de $\Sigma\alpha_i^2$ provocará una mayor tendencia de que MSTr sobrestime σ^2. En el siguiente capítulo se utilizarán fórmulas para la media esperada de los cuadrados en modelos multifactoriales a fin de sugerir cómo formar proporciones F para probar varias hipótesis.

Prueba de la fórmula para E(MSTr) Para cualquier variable aleatoria Y, $E(Y^2) = V(Y) + [E(Y)]^2$, por tanto,

$$\begin{aligned}
E(\text{SSTr}) &= E\left(\frac{1}{J}\sum_i X_{i\cdot}^2 - \frac{1}{IJ}X_{\cdot\cdot}^2\right) = \frac{1}{J}\sum_i E\left(X_{i\cdot}^2\right) - \frac{1}{IJ}E(X_{\cdot\cdot}^2) \\
&= \frac{1}{J}\sum_i \{V(X_{i\cdot}) + [E(X_{i\cdot})^2]\} - \frac{1}{IJ}\{V(X_{\cdot\cdot}) + [E(X_{\cdot\cdot})]^2\} \\
&= \frac{1}{J}\sum_i \{J\sigma^2 + [J(\mu + \alpha_i)]^2\} - \frac{1}{IJ}[IJ\sigma^2 + (IJ\mu)^2] \\
&= I\sigma^2 + IJ\mu^2 + 2\mu J\sum_i \alpha_i + J\sum_i \alpha_i^2 - \sigma^2 - IJ\mu^2 \\
&= (I-1)\sigma^2 + J\sum_i \alpha_i^2 \quad (\text{dado que } \sum \alpha_i = 0)
\end{aligned}$$

El resultado se deduce entonces de la relación MSTr = SSTr/(I – 1). ■

β para la prueba F

Considere un conjunto de valores de parámetro α_1, α_2,..., α_I con los cuales H_0 no es verdadera. La probabilidad de un error de tipo II, β, es la probabilidad de que H_0 no sea rechazada cuando ese conjunto es el conjunto de valores verdaderos. Se podría pensar que β tiene que ser determinada por separado para cada configuración diferente de α_i. Afortunadamente, dado que β para la prueba F depende de las α_i y σ^2 únicamente mediante $\Sigma\alpha_i^2/\sigma^2$, se puede evaluar al mismo tiempo para muchas alternativas diferentes. Por ejemplo, $\Sigma\alpha_i^2 = 4$ para cada uno de los siguientes conjuntos de α_i con los cuales H_0 es falsa, así que β es idéntica para las tres alternativas:

1. $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 1$
2. $\alpha_1 = -\sqrt{2}, \alpha_2 = \sqrt{2}, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = 0$
3. $\alpha_1 = -\sqrt{3}, \alpha_2 = \sqrt{1/3}, \alpha_3 = \sqrt{1/3}, \alpha_4 = \sqrt{1/3}$

La cantidad $J\Sigma\alpha_i^2/\sigma^2$ se llama **parámetro de no centralidad** para ANOVA unidireccional (debido a que cuando H_0 es falsa, el estadístico de prueba tiene una distribución *F no centralizada* con esto como uno de sus parámetros) y β es una función decreciente del valor de este parámetro. Por tanto, con valores fijos de σ^2 y J, es más probable que la

hipótesis nula sea rechazada para alternativas alejadas de H_0 ($\Sigma\alpha_i^2$ grande) que para alternativas próximas a H_0. Con un valor fijo de $\Sigma\alpha_i^2$, β se reduce a medida que el tamaño de muestra J en cada tratamiento se incrementa y aumenta a medida que la varianza σ^2 se incrementa (puesto que una variabilidad subyacente más grande dificulta detectar cualquier alejamiento dado respecto a H_0).

Debido a que el cálculo a mano de β y la determinación del tamaño de muestra para la prueba F son bastante difíciles (como en el caso de las pruebas t), los estadísticos han construido conjuntos de curvas donde se puede obtener β. En las figuras 10.6* y 10.7* se muestran conjuntos de curvas para $\nu_1 = 3$ y $\nu_1 = 4$ grados de libertad asociados con el numerador, respectivamente. Una vez que se especifican los valores de σ^2 y las α_i para los cuales se desea β, estos se utilizan para calcular el valor de ϕ, donde $\phi^2 = (J/I)\Sigma\alpha_i^2/\sigma^2$. Luego se localiza el valor de ϕ en el conjunto de curvas apropiado sobre el eje horizontal,

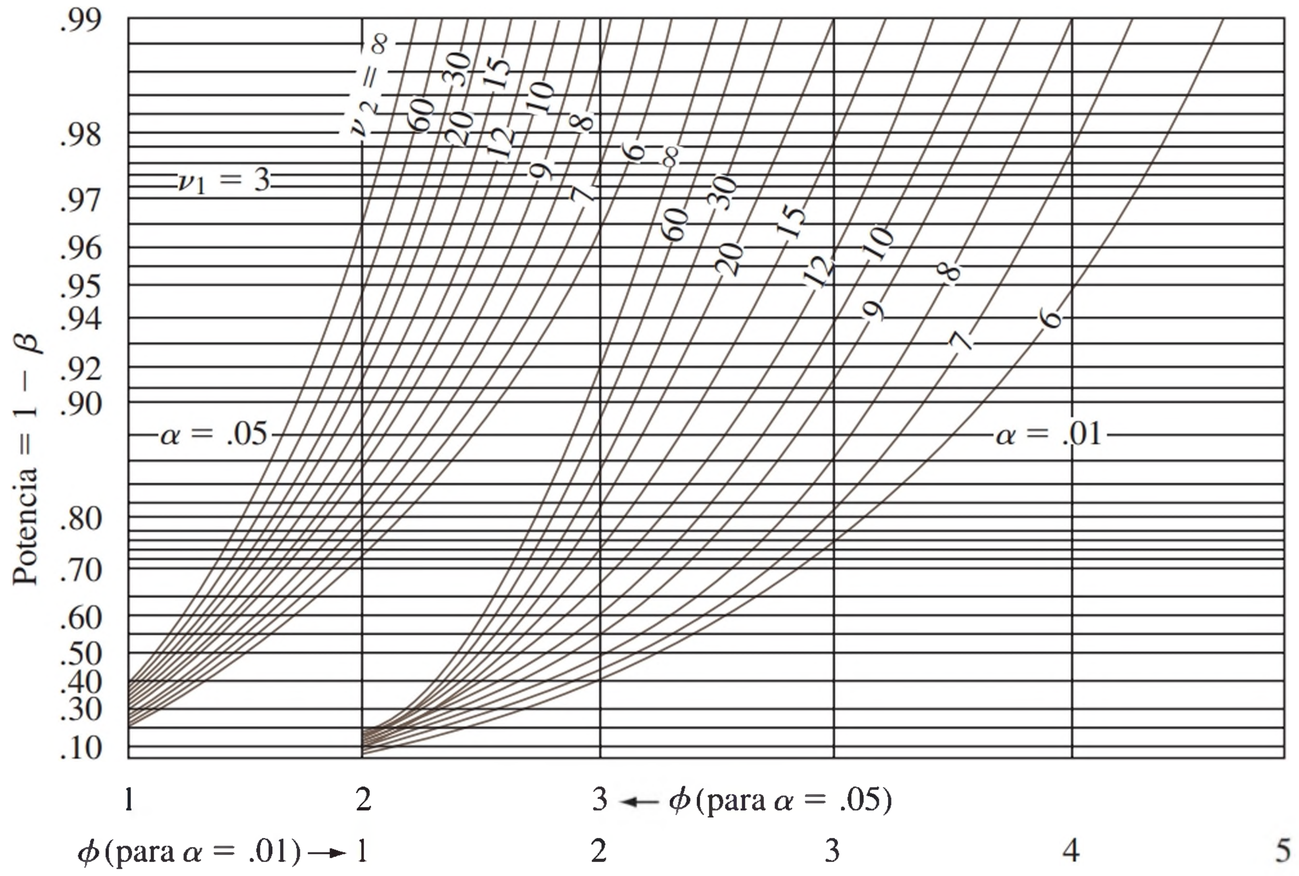


Figura 10.6 Curvas de potencia para la prueba F ANOVA ($\nu_1 = 3$)

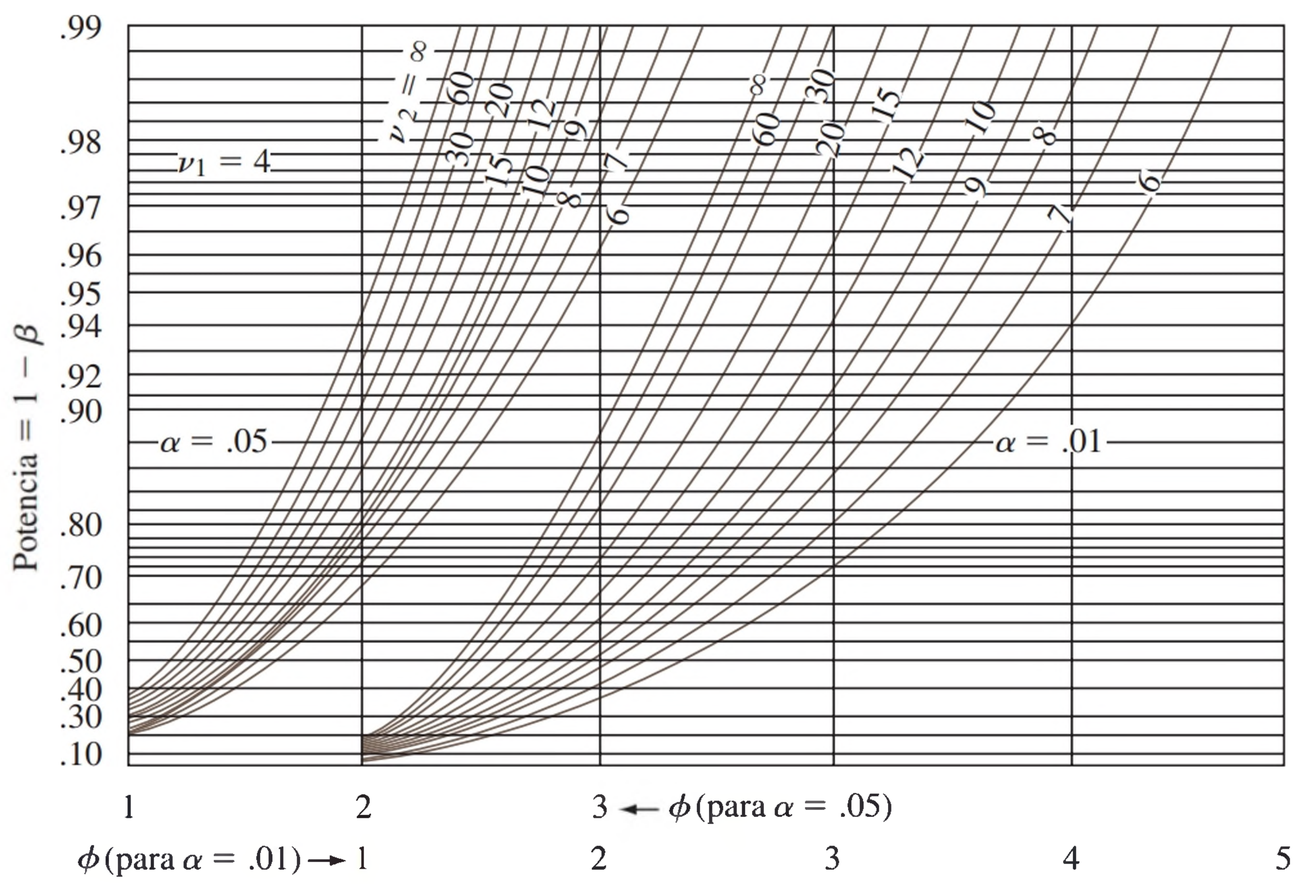


Figura 10.7 Curvas de potencia para la prueba F ANOVA ($\nu_1 = 4$)

* Tomado de E. S. Pearson y H. O. Hartley, "Charts of the Power Function for Analysis of Variance Tests, Derived from the Non−central F Distribution", *Biometrika*, vol. 38, 1951: 112.

se sube hasta la curva asociada con los ν_2 grados de libertad asociados con el error y se localiza el valor de la potencia sobre el eje vertical. Finalmente, $\beta = 1 -$ potencia.

EJEMPLO 10.8 Se tienen que investigar los efectos de cuatro tratamientos térmicos diferentes en el punto de cedencia (tons/pulg^2) de lingotes de acero. Se fundirá un total de ocho lingotes utilizando cada tratamiento. Suponga que la desviación estándar verdadera del punto de cedencia con cualquiera de los cuatro tratamientos es $\sigma = 1$. ¿Qué tan probable es que H_0 no será rechazada a un nivel de .05, si tres de los tratamientos tienen el mismo punto de cedencia esperado y el otro tiene un punto de cedencia esperado que es 1 ton/pulg^2 más grande que el valor común de los otros tres (es decir, la cuarta cedencia está en promedio a 1 desviación estándar por encima de aquellas con los primeros tres tratamientos)?

Suponga que $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ y $\mu_4 = \mu_1 + 1$, $\mu = (\Sigma\mu_i)/4 = \mu_1 + 1/4$. Entonces $\alpha_1 = \mu_1 - \mu = -1/4$, $\alpha_2 = -1/4$, $\alpha_3 = -1/4$, $\alpha_4 = 3/4$, por tanto,

$$\phi^2 = \frac{8}{4}\left[\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2\right] = \frac{3}{2}$$

y $\phi = 1.22$. Los grados de libertad para la prueba F son $\nu_1 = I - 1 = 3$ y $\nu_2 = I(J - 1) = 28$, si se interpola visualmente entre $\nu_2 = 20$ y $\nu_2 = 30$ se obtiene una potencia $\approx .47$ y $\beta = .53$. Esta β es algo grande, así que se podría incrementar el valor de J. ¿Cuántos lingotes de cada tipo se requerirían para dar $\beta = .05$ para la alternativa considerada? Probando diferentes valores de J se puede verificar que $J = 24$ satisfará el requerimiento, pero cualquier J más pequeño no lo hará. ■

Como una alternativa del uso de curvas de potencia, el programa estadístico SAS incluye una función que calcula el área acumulada bajo una curva F no centralizada (se ingresa F_α, grados de libertad asociados con el numerador, grados de libertad asociados con el denominador y ϕ^2) y esta área es β. Minitab hace esto y también algo un tanto diferente. Se le pide al usuario que especifique la diferencia máxima entre las μ_i y no entre las medias individuales. Por ejemplo, quizá desee calcular la potencia de la prueba cuando $I = 4$, $\mu_1 = 100$, $\mu_2 = 101$, $\mu_3 = 102$ y $\mu_4 = 106$. Entonces la diferencia máxima es $106 - 100 = 6$. Sin embargo, la potencia no sólo depende de esta diferencia máxima, sino de los valores de todas las μ_i. En esta situación Minitab calcula el valor de potencia más pequeño posible sujeto a $\mu_1 = 100$ y $\mu_4 = 106$, lo cual ocurre cuando las otras dos μ se encuentran a la mitad entre 100 y 106. Si esta potencia es de .85, entonces se puede decir que la potencia es de al menos .85 y β es, cuando mucho, de .15 cuando las dos μ más extremas están separadas por 6 (el tamaño de muestra común, α, y σ también deben ser especificados). El programa determinará también el tamaño de muestra común requerido si la diferencia máxima y la potencia mínima están especificadas.

Relación de la prueba F con la prueba t

Cuando el número de tratamientos o poblaciones es $I = 2$, todas las fórmulas y resultados conectados con la prueba F siguen teniendo sentido, así que se puede utilizar ANOVA para probar H_0: $\mu_1 = \mu_2$ contra H_a: $\mu_1 \neq \mu_2$. En este caso, también se puede utilizar una prueba t con dos muestras de dos colas. En la sección 9.3 se mencionó la prueba t agrupada, la cual requiere varianzas iguales, como alternativa del procedimiento t con dos muestras. Se puede demostrar que la prueba F ANOVA unifactorial y la prueba t agrupada de dos colas son equivalentes; con cualquier conjunto de datos dado, los valores P para las dos pruebas serán idénticos, así que se llegará a la misma conclusión con cualquier prueba.

La prueba t con dos muestras es más flexible que la prueba F cuando $I = 2$ por dos razones. En primer lugar, es válida sin la suposición de que $\sigma_1 = \sigma_2$; en segundo lugar, puede ser utilizada para probar H_a: $\mu_1 > \mu_2$ (una prueba t de cola superior) o H_a: $\mu_1 < \mu_2$, así como también H_a: $\mu_1 \neq \mu_2$. En el caso de $I \geq 3$, desafortunadamente no existe un procedimiento de prueba general que tenga buenas propiedades sin la suposición de varianzas iguales.

Tamaños de muestra desiguales

Cuando los tamaños de muestra de cada población o tratamiento no son iguales, sean J_1, J_2,..., J_I los tamaños de muestra I y sea $n = \Sigma_i J_i$ el número total de observaciones. El recuadro adjunto da fórmulas ANOVA y el procedimiento de prueba.

$$\text{SST} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i}(X_{ij} - \overline{X}..)^2 = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i}X_{ij}^2 - \frac{1}{n}X_{..}^2 \qquad \text{df} = n - 1$$

$$\text{SSTr} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i}(\overline{X}_{i\cdot} - \overline{X}..)^2 = \sum_{i=1}^{I}\frac{1}{J_i}X_{i\cdot}^2 - \frac{1}{n}X_{..}^2 \quad \text{df} = I - 1$$

$$\text{SSE} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i}(X_{ij} - \overline{X}_{i\cdot})^2 = \sum_{i=1}^{I}(J_i - 1)S_i^2 \qquad \text{gl} = \sum(J_i - 1) = n - I$$

$$= \text{SST} - \text{SSTr}$$

Estadístico de prueba:

$$F = \frac{\text{MSTr}}{\text{MSE}} \quad \text{donde MSTr} = \frac{\text{SSTr}}{I - 1} \quad \text{MSE} = \frac{\text{SSE}}{n - I}$$

La teoría estadística dice que el estadístico de prueba tiene una distribución F con $I - 1$ grados de libertad en el numerador y con $n - I$ grados de libertad en el denominador cuando H_0 es verdadera. Tal como en el caso de los tamaños de muestra iguales, entre mayor sea el valor de F, más fuerte es la evidencia contra H_0. Por tanto, la prueba es de cola superior; el valor P es el área bajo la curva $F_{I-1,n-I}$ a la derecha de f.

EJEMPLO 10.9 El artículo **"On the Development of a New Approach for the Determination of Yield Strength in Mg–based Alloys" (*Light Metal Age*, octubre de 1998: 51–53)** presentó los siguientes datos sobre módulo elástico (GPa) obtenidos por medio de un nuevo método ultrasónico con especímenes de cierta aleación producida mediante tres procesos de fundición diferentes.

									J_i	$x_{i\cdot}$	$\overline{x}_{i\cdot}$
Moldeado permanente	45.5	45.3	45.4	44.4	44.6	43.9	44.6	44.0	8	357.7	44.71
Fundición a troquel	44.2	43.9	44.7	44.2	44.0	43.8	44.6	43.1	8	352.5	44.06
Moldeado en yeso	46.0	45.9	44.8	46.2	45.1	45.5			6	273.5	45.58
									22	983.7	

Sean μ_1, μ_2 y μ_3 los módulos elásticos promedio verdaderos con los tres procesos diferentes en las circunstancias dadas. Las hipótesis pertinentes son H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ contra H_a: al menos dos de las μ_i son diferentes. El estadístico de prueba es, desde luego, $F = \text{MSTr}/\text{MSE}$, basado en $I - 1 = 2$ grados de libertad asociados con el numerador y $n - I = 22 - 3 = 19$ grados de libertad asociados con el denominador. Las cantidades pertinentes incluyen

$$\sum\sum x_{ij}^2 = 43\,998.73 \quad \text{CF} = \frac{983.7^2}{22} = 43\,984.80$$

$$\text{SST} = 43\,998.73 - 43\,984.80 = 13.93$$

$$\text{SSTr} = \frac{357.7^2}{8} + \frac{352.5^2}{8} + \frac{273.5^2}{6} - 43\,984.84 = 7.93$$

$$\text{SSE} = 13.93 - 7.93 = 6.00$$

Los cálculos restantes se muestran en la siguiente tabla ANOVA. Como $F_{.001,2,a19} = 10.16 < 12.56 = f$, el valor P es más pequeño que .001. Por consiguiente, la hipótesis nula deberá

ser rechazada a cualquier nivel de significancia razonable; existe evidencia convincente para concluir que el módulo elástico promedio verdadero en cierta forma depende del proceso de fundición que se utilice.

Origen de la variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Media de los cuadrados	f
Tratamientos	2	7.93	3.965	12.56
Error	19	6.00	.3158	
Total	21	13.93		

Hay más controversia entre estadísticos respecto a qué procedimiento de comparaciones múltiples utilizar cuando los tamaños de muestra son desiguales que la que existe en el caso de los tamaños de muestra iguales. El procedimiento que aquí se presenta lo recomienda el excelente libro *Beyond ANOVA*: *Basics of Applied Statistics* (véase la bibliografía del capítulo) para usarse cuando los I tamaños de muestra $J_1, J_2, \ldots, J_I$ están razonablemente cerca uno de otro ("desequilibrio leve"). Modifica el método de Tukey mediante promedios de pares $1/J_i$ en lugar de $1/J$.

Sea

$$w_{ij} = Q_{\alpha,I,n-I} \cdot \sqrt{\frac{\text{MSE}}{2}\left(\frac{1}{J_i} + \frac{1}{J_j}\right)}$$

Entonces la probabilidad es *aproximadamente* $1 - \alpha$ que

$$\bar{X}_{i\cdot} - \bar{X}_{j\cdot} - w_{ij} \le \mu_i - \mu_j \le \bar{X}_{i\cdot} - \bar{X}_{j\cdot} + w_{ij}$$

Para cada i y j ($i = 1,\ldots, I$ y $j = 1,\ldots, I$) con $i \neq j$.

El nivel de confianza simultáneo de $100(1 - \alpha)\%$ es sólo aproximado y no exacto, ya que se determinó con tamaños de muestra iguales. El método de subrayado puede seguir siendo utilizado, pero ahora el factor w_{ij} que se usa para decidir si $\bar{x}_{i\cdot}$ y $\bar{x}_{j\cdot}$ pueden ser conectadas dependerá de J_i y J_j.

EJEMPLO 10.10 (Continuación del ejemplo 10.9)

Los tamaños de muestra para los datos de módulo elástico fueron $J_1 = 8$, $J_2 = 8$, $J_3 = 6$ e $I = 3$, $n - I = 19$, MSE = .316. Un nivel de confianza simultáneo aproximadamente de 95% requiere $Q_{.05,3,19} = 3.59$, de donde

$$w_{12} = 3.59\sqrt{\frac{.316}{2}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)} = .713, \quad w_{13} = .771 \quad w_{23} = .771$$

Dado que $\bar{x}_{1\cdot} - \bar{x}_{2\cdot} = 44.71 - 44.06 = .65 < w_{12}$, μ_1 y μ_2 se consideran no significativamente diferentes. El esquema de subrayado adjunto muestra que en apariencia μ_1 y μ_3 difieren de manera significativa, como lo hacen μ_2 y μ_3.

2. Troquel	1. Permanente	3. Yeso
44.06	44.71	45.58

Transformación de datos

El uso de métodos ANOVA puede ser invalidado por diferencias sustanciales en las varianzas $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_I^2$ las que hasta ahora han sido supuestas iguales con valor común de σ^2). En ocasiones sucede que $V(X_{ij}) = \sigma_1^2 = g(\mu_i)$, una función conocida de μ_i (de modo que cuando H_0 es falsa, las varianzas no son iguales). Por ejemplo, si X_{ij} tiene una distribución

de Poisson con parámetro λ_i (aproximadamente normal si $\lambda_i \geq 10$), entonces $\mu_i = \lambda_i$ y $\sigma_i^2 = \lambda_i$, de modo que $g(\mu_i) = \mu_i$ es la función conocida. En tales casos, a menudo se pueden transformar las X_{ij} en $h(X_{ij})$ de modo que tengan varianzas iguales de manera aproximada (al mismo tiempo que las variables transformadas permanecen aproximadamente normales) y luego se puede utilizar la prueba F con las observaciones transformadas. La idea clave al seleccionar $h(\cdot)$ es que con frecuencia $V[h(X_{ij})] \approx V(X_{ij}) \cdot [h'(\mu_i)]^2 = g(\mu_i) \cdot [h'(\mu_i)]^2$. Se desea determinar la función $h(\cdot)$ con la cual $g(\mu_i) \cdot [h'(\mu_i)]^2 = c$ (una constante) con cada i.

PROPOSICIÓN

Si $V(X_{ij}) = g(\mu_i)$, una función conocida de μ_i, entonces una transformación $h(X_{ij})$ que "estabilice la varianza" de modo que $V[h(X_{ij})]$ sea aproximadamente la misma con cada i está dada por $h(x) \propto \int [g(x)]^{-1/2}\, dx$.

En el caso de Poisson, $g(x) = x$, de modo que $h(x)$ deberá ser proporcional a $\int x^{-1/2}\, dx = 2x^{1/2}$. Así pues los datos de Poisson deberán ser cambiados a $h(x_{ij}) = \sqrt{x_{ij}}$ antes del análisis.

Un modelo de efectos aleatorios

Se ha supuesto que los problemas unifactoriales considerados hasta ahora son ejemplos de un modelo ANOVA de **efectos fijos.** Con esto se quiere decir que los niveles elegidos del factor en estudio son los únicos considerados pertinentes por el experimentador. El modelo de efectos fijos unifactoriales es

$$X_{ij} = \mu + \alpha_i + \epsilon_{ij} \qquad \sum \alpha_i = 0 \tag{10.6}$$

donde las ϵ_{ij} son aleatorias y tanto μ como las α_i son parámetros fijos.

En algunos problemas unifactoriales los niveles particulares estudiados por el experimentador se seleccionan, mediante diseño o mediante muestreo, de una gran población de niveles. Por ejemplo, para estudiar los efectos en tiempo de desempeño de una tarea por la utilización de diferentes operarios en una máquina particular se podría seleccionar una muestra de cinco operarios de un gran conjunto de operarios. Asimismo, se podría estudiar el efecto del pH del suelo en la cosecha de plantas de maíz utilizando suelos con cuatro valores de pH específicos seleccionados de entre los muchos niveles de pH posibles. Cuando los niveles utilizados se seleccionan al azar de entre una gran población de niveles posibles, se dice que el factor es aleatorio y no fijo, y el modelo de efectos fijos (10.6) ya no es apropiado. Un modelo de efectos **aleatorios análogos** se obtiene reemplazando las α_i fijas en (10.6) por variables aleatorias.

$$X_{ij} = \mu + A_i + \epsilon_{ij} \qquad \text{con} \quad E(A_i) = E(\epsilon_{ij}) = 0$$

$$V(\epsilon_{ij}) = \sigma^2 \qquad V(A_i) = \sigma_A^2 \tag{10.7}$$

todas las A_i y ϵ_{ij} normalmente distribuidas e independientes una de otra.

La condición $E(A_i) = 0$ en (10.7) es similar a la condición $\Sigma\alpha_i$ en (10.6); manifiesta que el efecto esperado o promedio del i-ésimo nivel medido como un alejamiento de μ es cero.

Para el modelo de efectos aleatorios (10.7), la hipótesis de ningún efecto debido a los diferentes niveles es H_0: $\sigma_A^2 = 0$, la cual expresa que los diferentes niveles del factor contribuyen con nada a la variabilidad de la respuesta. *Aunque las hipótesis en los modelos de efectos fijos unifactoriales y aleatorios son diferentes, se prueban exactamente de la misma manera*; valor P = área bajo la curva $F_{I-1,n-I}$ a la derecha de f = MSTr/MSE, donde

$J_1, J_2, \ldots, J_I$ son los tamaños de la muestra y $n = \Sigma J_i$. Esto se justifica de manera intuitiva al observar que $E(\text{MSE}) = \sigma^2$ y

$$E(\text{MSTr}) = \sigma^2 + \frac{1}{I-1}\left(n - \frac{\sum J_i^2}{n}\right)\sigma_A^2 \tag{10.8}$$

El factor entre paréntesis en el lado derecho de (10.8) es no negativo, de modo que de nuevo $E(\text{MSTr}) = \sigma^2$ si H_0 es verdadera y $E(\text{MSTr}) > \sigma^2$ si H_0 es falsa.

EJEMPLO 10.11 El estudio de fuerzas y esfuerzos no destructivos en materiales aporta información importante para el diseño de ingeniería eficiente. El artículo **"Zero–Force Travel–Time Parameters for Ultrasonic Head–Waves in Railroad Rail" (*Materials Evaluation*, 1985: 854–858)** reporta sobre un estudio del tiempo de recorrido de cierto tipo de onda que produce el esfuerzo longitudinal de los rieles utilizados en las vías de ferrocarril. Se realizaron tres mediciones en cada uno de seis rieles seleccionados al azar de una población de rieles. Los investigadores utilizaron ANOVA de efectos aleatorios para decidir si algo de la variación del tiempo de recorrido podía ser atribuido a la "variabilidad entre rieles". Los datos se dan en la tabla siguiente (cada valor, en nanosegundos, se obtuvo de restar 36.1 μ de la observación original) junto con la tabla ANOVA que se deriva. El valor de la proporción f es altamente significativo, H_0: $\sigma_A^2 = 0$ es rechazada en favor de la conclusión de que las diferencias entre los rieles provocan la variabilidad del tiempo de recorrido.

				x_i
1:	55	53	54	162
2:	26	37	32	95
3:	78	91	85	254
4:	92	100	96	288
5:	49	51	50	150
6:	80	85	83	248
				$x_{..} = 1197$

Origen de la variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Media de los cuadrados	f
Tratamientos	5	9310.5	1862.1	115.2
Error	12	194.0	16.17	
Total	17	9504.5		

EJERCICIOS Sección 10.3 (22–34)

22. Los datos siguientes se refieren a la cosecha de tomates (kg/parcela) con cuatro niveles de salinidad diferentes; el *nivel de salinidad* aquí se refiere a la conductividad eléctrica (CE), donde los niveles seleccionados fueron CE = 1.6, 3.8, 6.0 y 10.2 nmhos/cm.

1.6:	59.5	53.3	56.8	63.1	58.7
3.8:	55.2	59.1	52.8	54.5	
6.0:	51.7	48.8	53.9	49.0	
10.2:	44.6	48.5	41.0	47.3	46.1

Use la prueba F al nivel $\alpha = .05$ para probar para cualquier diferencia en la cosecha promedio verdadera debido a los distintos niveles de salinidad.

23. Aplique el método de Tukey modificado a los datos del ejercicio 22 para identificar diferencias significativas entre las μ_i.

24. En el artículo **"Impact of Lifelong Sedentary Behavior on Mitochondrial Function of Mice Skeletal Muscle" (*J. of Gerontology*, 2009: 927–939)** aparecen los datos que resumen la actividad del músculo esquelético CS (nmol/min/mg)

	Jóvenes	Adultos sedentarios	Adultos activos
Tamaño muestral	10	8	10
Media muestral	46.68	47.71	58.24
DE muestral	7.16	5.59	8.43

Lleve a cabo una prueba para decidir si la actividad promedio real es diferente para los tres grupos. En su caso, analice las diferencias entre las medias con un método de comparaciones múltiples.

25. Los lípidos aportan mucha de la energía dietética en los cuerpos de bebés y niños. Existe un interés creciente en la calidad del suministro de lípido dietético durante la infancia como un importante determinante del crecimiento, del desarrollo visual y nervioso y de la salud a largo plazo. El artículo **"Essential Fat Requirements of Preterm Infants" (*Amer. J. of Clinical Nutrition*, 2000: 245S–250S)** reporta los siguientes datos sobre grasas poliinsaturadas (%) para bebés que fueron asignados al azar a cuatro regímenes de alimentación diferentes: leche materna, fórmula basada en aceite de maíz (CO), fórmula basada en aceite de soya (SO) o fórmula basada en aceite de soya y marino (SMO).

Régimen	Tamaño de muestra	Media muestral	DE muestral
Leche materna	8	43.0	1.5
CO	13	42.4	1.3
SO	17	43.1	1.2
SMO	14	43.5	1.2

a. ¿Qué suposiciones se deben hacer sobre las cuatro distribuciones de grasa poliinsaturada, antes de realizar un ANOVA unifactorial para decidir si existen diferencias en el contenido de grasa promedio verdadero?

b. Realice la prueba sugerida en el inciso a). ¿Qué se puede decir sobre el valor *P*?

26. Se analizaron muestras de seis marcas diferentes de margarina dietética/imitación para determinar el nivel de ácidos grasos poliinsaturados fisiológicamente activos (PAPFUA, por sus siglas en inglés, en porcentajes) y se obtuvieron los siguientes resultados:

Imperial	14.1	13.6	14.4	14.3	
Parkay	12.8	12.5	13.4	13.0	12.3
Blue Bonnet	13.5	13.4	14.1	14.3	
Chiffon	13.2	12.7	12.6	13.9	
Mazola	16.8	17.2	16.4	17.3	18.0
Fleischmann's	18.1	17.2	18.7	18.4	

(Los números precedentes son ficticios, aunque las medias muestrales concuerdan con los datos reportados en el ejemplar de enero de 1975 de ***Consumer Reports***.)

a. Use ANOVA para probar las diferencias entre los porcentajes de ácidos grasos poliinsaturados fisiológicamente activos para las distintas marcas.

b. Calcule intervalos de confianza para todas las $(\mu_i - \mu_j)$.

c. Mazola y Fleischmann's son aceites de maíz, en tanto que los demás son de soya. Calcule un intervalo de confianza para

$$\frac{(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4)}{4} - \frac{(\mu_5 + \mu_6)}{2}$$

[*Sugerencia*: Modifique la expresión para $V(\hat{\theta})$ que condujo a (10.5) en la sección previa.]

27. Aunque el té es la bebida que más se consume en el mundo después del agua, se sabe poco sobre su valor nutricional. La folacina es la única vitamina B presente en cualquier cantidad significativa de té y avances recientes en los métodos de ensayo han determinado con precisión el contenido de folacina factible. Considere los siguientes datos sobre contenido de folacina en especímenes seleccionados al azar de las cuatro marcas líderes de té verde.

1:	7.9	6.2	6.6	8.6	8.9	10.1	9.6
2:	5.7	7.5	9.8	6.1	8.4		
3:	6.8	7.5	5.0	7.4	5.3	6.1	
4:	6.4	7.1	7.9	4.5	5.0	4.0	

(Los datos están basados en **"Folacin Content of Tea", *J. of the Amer. Dietetic Assoc.*, 1983: 627–632.)** ¿Sugieren estos datos que el contenido de folacina promedio verdadero es el mismo para todas las marcas?

a. Realice una prueba con $\alpha = .05$.

b. Evalúe la factibilidad de cualquier suposición requerida para su análisis en el inciso a).

c. Realice un análisis de comparaciones múltiples para identificar diferencias significativas entre marcas.

28. Para un ANOVA unifactorial con tamaños de muestra J_i ($i = 1, 2,...I$) demuestre que $\text{SSTr} = \Sigma J_i(\overline{X}_{i\cdot} - \overline{X}_{\cdot\cdot})^2 = \Sigma J_i \overline{X}_{i\cdot}^2 - \overline{X}_{\cdot\cdot}^2$, donde $n = \Sigma J_i$.

29. Cuando los tamaños de muestra son iguales ($J_i = J$), los parámetros $\alpha_1, \alpha_2,...\alpha_I$ de la parametrización alternativa están restringidos por $\Sigma\alpha_i = 0$. Con tamaños de muestra desiguales, la restricción más natural es $\Sigma J_i\alpha_i = 0$. Use esto para demostrar que

$$E(\text{MSTr}) = \sigma^2 + \frac{1}{I-1}\sum J_i\alpha_i^2$$

¿Cuál es E(MSTr) cuando H_0 es verdadera? [Esta expectativa es correcta si $\Sigma J_i\alpha_i = 0$ es reemplazada por la restricción $\Sigma\alpha_i = 0$ (o por cualquier otra restricción lineal sobre las α_i utilizadas para reducir el modelo a I parámetros independientes), pero $\Sigma J_i\alpha_i = 0$ simplifica el álgebra y produce estimaciones naturales para los parámetros del modelo (en particular $\hat{\alpha}_i = \overline{x}_{i\cdot} - \overline{x}_{\cdot\cdot}$).]

30. Reconsidere el ejemplo 10.8 que implica una investigación de los efectos de diferentes tratamientos térmicos sobre el punto de cedencia de los lingotes de acero.

a. Si $J = 8$ y $\sigma = 1$, ¿cuál es β para una prueba F a un nivel de .05, cuando $\mu_1 = \mu_2$, $\mu_3 = \mu_1 - 1$, y $\mu_4 = \mu_1 + 1$?

b. Con la alternativa del inciso a), ¿qué valor de J es necesario para obtener $\beta = .05$?

c. Si existen $I = 5$ tratamientos térmicos, $J = 10$ y $\sigma = 1$, ¿cuál es β para la prueba F a un nivel de .05, cuando cuatro de las μ_i son iguales y la quinta difiere en 1 de las otras cuatro?

31. Cuando los tamaños de muestra no son iguales el parámetro de no centralidad es $\Sigma J_i\alpha_i^2/\sigma^2$ y $\phi^2 = (1/I)\Sigma J_i\alpha_i^2/\sigma^2$. Remitiéndose al ejercicio 22, ¿cuál es la potencia de la prueba cuando $\mu_2 = \mu_3$, $\mu_1 = \mu_2 - \sigma$ y $\mu_4 = \mu_2 + \sigma$?

32. En un experimento para comparar la calidad de cuatro marcas diferentes de cinta para grabar de carrete a carrete, se seleccionaron cinco carretes de 2400 pies de cada marca (A–D) y se determinó el número de imperfecciones en cada uno.

A:	10	5	12	14	8
B:	14	12	17	9	8
C:	13	18	10	15	18
D:	17	16	12	22	14

Se cree que el número de imperfecciones tiene aproximadamente una distribución Poisson para cada marca. Analice los datos al nivel .01 con objeto de ver si el número esperado de imperfecciones por carrete es el mismo para cada marca.

33. Suponga que X_{ij} es una variable binomial con parámetros n y p_i (por tanto, es aproximadamente normal cuando $np_i \geq 10$ y $nq_i \geq 10$). Entonces $\mu_i = np_i$, $V(X_{ij}) = \sigma_i^2 = np_i(1 - p_i) = \mu_i(1 - \mu_i/n)$. ¿Cómo se deberán transformar las X_{ij} de modo que se estabilice la varianza? [*Sugerencia*: $g(\mu_i) = \mu_i(1 - \mu_i/n)$.]

34. Simplifique $E(\text{MSTr})$ para el modelo de efectos aleatorios cuando $J_1 = J_2 = \cdots = J_I = J$.

EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS (35–46)

35. Se realizó un experimento para comparar las velocidades de flujo de cuatro tipos diferentes de boquillas.

a. Los tamaños de muestra fueron 5, 6, 7 y 6, respectivamente, y los cálculos dieron $f = 3.68$. Formule y pruebe las hipótesis pertinentes con $\alpha = .01$.

b. El análisis de los datos con un programa estadístico dio el valor $P = .029$. Al nivel .01, ¿qué concluiría y por qué?

36. El cortisol es una hormona que desempeña un papel importante en la mediación del estrés. Hay una creciente conciencia de que la exposición de los trabajadores al aire libre a los contaminantes puede afectar sus niveles de cortisol. El artículo **"Plasma Cortisol Concentration and Lifestyle in a Population of Outdoor Workers" (*Intl. J. of Envir. Health Res.*, 2011: 62–71)** reporta un estudio con tres grupos de agentes de la policía: 1) policía de tránsito (PT), 2) conductores (C) y 3) otras obligaciones (O). A continuación se presentan datos del resumen sobre la concentración de cortisol (ng/ml) para un subconjunto de oficiales que ni bebían ni fumaban.

Grupo	Tamaño muestral	Media	DE
TP	47	174.7	50.9
D	36	160.2	37.2
O	50	153.5	45.9

Asumiendo que se cumplen las suposiciones estándar para ANOVA unidireccional, efectúe una prueba en el nivel de significancia .05 para decidir si la concentración de cortisol promedio verdadero es diferente para los tres grupos. [*Nota*: Los investigadores utilizan métodos estadísticos más sofisticados (regresión múltiple) para evaluar el impacto de la edad, la duración del empleo, beber y fumar en el estado de concentración de cortisol; considerando estos factores, la concentración parece significativamente mayor en el grupo PT que en los otros dos grupos.]

37. Numerosos factores contribuyen al suave funcionamiento de un motor eléctrico (**"Increasing Market Share Through Improved Product and Process Design: An Experimental Approach", *Quality Engineering*, 1991: 361–369**). En particular, es deseable mantener el ruido del motor y las vibraciones a un mínimo. Para estudiar el efecto que la marca de los cojinetes ejerce en la vibración del motor, se examinaron cinco marcas diferentes de cojinetes, y se instaló cada tipo de cojinete en muestras aleatorias distintas de seis motores. Se registró la cantidad de vibración del motor (medida en micrones) cuando cada uno de los 30 motores estaba funcionando. Los datos de este estudio se dan a continuación. Formule y pruebe las hipótesis pertinentes a un nivel de significancia de .05 y luego realice un análisis de comparaciones múltiples, si es apropiado.

							Media
1:	13.1	15.0	14.0	14.4	14.0	11.6	13.68
2:	16.3	15.7	17.2	14.9	14.4	17.2	15.95
3:	13.7	13.9	12.4	13.8	14.9	13.3	13.67
4:	15.7	13.7	14.4	16.0	13.9	14.7	14.73
5:	13.5	13.4	13.2	12.7	13.4	12.3	13.08

38. Un artículo publicado en el diario científico británico *Nature* **("Sucrose Induction of Hepatic Hyperplasia in the Rat", 25 de agosto de 1972: 461)** reporta sobre un experimento en el cual cada uno de cinco grupos compuestos de seis ratas fue puesto a dieta con un carbohidrato diferente. Al final del experimento se determinó el contenido de ADN del hígado de cada rata (mg/g hígado), con los siguientes resultados:

Carbohidrato	$\bar{x}_i$
Almidón	2.58
Sucrosa	2.63
Fructosa	2.13
Glucosa	2.41
Maltosa	2.49

Suponiendo también que $\Sigma\Sigma x_{ij}^2 = 183.4$, ¿indicarán estos datos que el tipo de carbohidrato presente en la dieta afecta el contenido de ADN promedio verdadero? Construya una tabla ANOVA y use un nivel de significancia de .05.

39. Remítase al ejercicio 38 y construya un intervalo de confianza t para

$$\theta = \mu_1 - (\mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5)/4$$

que mide la diferencia entre el contenido de ADN promedio para la dieta de almidón y el promedio combinado para las otras cuatro dietas. ¿Incluye cero el intervalo resultante?

40. Remítase al ejercicio 38. ¿Cuál es β para la prueba cuando el contenido de ADN promedio verdadero es idéntico para las tres dietas y queda a 1 desviación estándar (σ) por debajo de este valor común para las otras dos dietas?

41. Se seleccionan al azar cuatro laboratorios (1–4) de una población grande y a cada uno se le pide que realice tres determinaciones del porcentaje de alcohol metílico en especímenes de un compuesto tomado de un solo lote. Basado en los datos adjuntos, ¿serán las diferencias entre los laboratorios una causa de variación del porcentaje de alcohol metílico? Formule y pruebe las hipótesis pertinentes con un nivel de significancia de .05.

1:	85.06	85.25	84.87
2:	84.99	84.28	84.88
3:	84.48	84.72	85.10
4:	84.10	84.55	84.05

42. La frecuencia de parpadeo crítica (cff, por sus siglas en inglés) es la frecuencia más alta (en ciclos/s) a la que una persona puede advertir el parpadeo en una fuente luminosa parpadeante. A frecuencias por encima de la frecuencia de parpadeo crítica, la fuente luminosa parece ser continua aun cuando en realidad parpadee. Una investigación para ver si la frecuencia de parpadeo crítica promedio verdadera depende del color del iris arrojó los siguientes datos (con base en el artículo **"The Effects of Iris Color in Critical Flicker Frequency", *J. of General Psych.*, 1973: 91–95**):

	Color del iris		
	1. Café	**2. Verde**	**3. Azul**
	26.8	26.4	25.7
	27.9	24.2	27.2
	23.7	28.0	29.9
	25.0	26.9	28.5
	26.3	29.1	29.4
	24.8		28.3
	25.7		
	24.5		
J_i	8	5	6
$x_{i\cdot}$	204.7	134.6	169.0
$\bar{x}_{i\cdot}$	25.59	26.92	28.17

$n = 19 \quad x_{\cdot\cdot} = 508.3$

a. Formule y pruebe las hipótesis pertinentes a un nivel de significancia de .05. [*Sugerencia*: $\Sigma\Sigma x_{ij}^2 = 13659.67$ y CF = 13 598.36.]

b. Investigue las diferencias entre colores del iris respecto a la frecuencia de parpadeo crítica media.

43. Sean $c_1, c_2, \ldots, c_I$ los números que satisfacen la expresión $\Sigma c_i = 0$. Entonces $\Sigma c_i\mu_i = c_1\mu_1 + \cdots + c_I\mu_I$ se llama *contraste* en las μ_i. Observe que con $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $c_3 = \cdots = c_I = 0$, $\Sigma c_i\mu_i = \mu_1 - \mu_2$ la cual implica que toda diferencia tomada por pares entre las μ_i es un contraste (también lo es, p. ej., $\mu_1 - .5\mu_2 - .5\mu_3$). Un método atribuido a Scheffé da intervalos de confianza simultáneos con nivel de confianza simultáneo de $100(1 - \alpha)\%$ para *todos* los contrastes posibles (¡un número infinito de ellos!) El intervalo para $\Sigma c_i\mu_i$ es

$$\sum c_i \bar{x}_{i\cdot} \pm \left(\sum c_i^2/J_i\right)^{1/2} \cdot [(I-1) \cdot \text{MSE} \cdot F_{\alpha,I-1,n-I}]^{1/2}$$

Usando los datos del ejercicio 42, acerca de la frecuencia crítica del parpadeo, calcule los intervalos de Scheffé para los contrastes $\mu_1 - \mu_2$, $\mu_1 - \mu_3$, $\mu_2 - \mu_3$ y $.5\mu_1 + .5\mu_2 - \mu_3$ (este último contraste compara azul con el promedio de café y verde). ¿Cuál contraste parece diferir significativamente de 0 y por qué?

44. Cuatro tipos de morteros: de cemento ordinario (OCM), impregnado de polímero (PIM), con resina (RM) y mortero con cemento y polímero (PCM) se sometieron a una prueba de compresión para medir su resistencia (MPa). En el artículo **"Polymer Mortar Composite Matrices for Maintenance–Free Highly Durable Ferrocement" (*J. of Ferrocement*, 1984: 337–345)** se dan tres observaciones de resistencia de cada tipo de mortero y las reproducimos aquí. Construya una tabla ANOVA. Con un nivel de significancia de .05, determine si los datos sugieren que la resistencia media verdadera no es la misma para los cuatro tipos de mortero. Si determina que las resistencias medias verdaderas no son iguales use el método de Tukey para identificar las diferencias significativas.

OCM	32.15	35.53	34.20
PIM	126.32	126.80	134.79
RM	117.91	115.02	114.58
PCM	29.09	30.87	29.80

45. Suponga que las x_{ij} están "codificadas" por $y_{ij} = cx_{ij} + d$. ¿Cómo se compara el valor del estadístico F calculado con las y_{ij} con el valor calculado con las x_{ij}? Justifique su argumentación.

46. En el ejemplo 10.11, reste $\bar{x}_{i\cdot}$ de cada observación en la i-ésima muestra ($i = 1, \ldots, 6$) para obtener un conjunto de 18 residuos. Después construya una gráfica de probabilidad normal y comente sobre la factibilidad de la suposición de normalidad.

BIBLIOGRAFÍA

Miller, Rupert, *Beyond ANOVA: The Basics of Applied Statistics*, Wiley, Nueva York, 1986. Una excelente fuente de información sobre comprobación de suposiciones y métodos de análisis alternativos.

Montgomery, Douglas, *Design and Analysis of Experiments* (8a. ed.), Wiley, Nueva York, 2013. Una presentación muy al día de modelos y metodología ANOVA.

Neter, John, William Wasserman y Michael Kutner, *Applied Linear Statistical Models* (5a. ed.), Irwin, Homewood, IL., 2004. La segunda mitad de este libro contiene un estudio muy bien presentado de ANOVA; el nivel es comparable al del presente texto, aunque la discusión es más amplia, lo que hace del libro una excelente referencia.

Ott, R. Lyman y Michael Longnecker. *An Introduction to Statistical Methods and Data Analysis* (6a. ed.), Duxbury Press, Belmont, CA, 2010. Incluye varios capítulos sobre metodología ANOVA que pueden aprovechar los estudiantes que desean una exposición no muy matemática; incluye un capítulo muy bueno sobre varios métodos de comparaciones múltiples.

Análisis multifactorial de la varianza

11

INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior se utilizó el análisis de la varianza (ANOVA) para probar tanto la igualdad de I medias de población diferentes como las respuestas promedio verdaderas asociadas con I niveles diferentes de un solo factor (alternativamente conocidos como I tratamientos diferentes). En muchas situaciones experimentales existen dos o más factores que son de interés simultáneo. Este capítulo amplía los métodos del capítulo 10 para investigar tales situaciones multifactoriales.

En las dos primeras secciones nos centramos en el caso de dos factores. Se utilizará I para denotar el número de niveles del primer factor (A) y J para denotar el número de niveles del segundo factor (B). Entonces existen IJ combinaciones posibles compuestas de un nivel del factor A y uno del factor B. Cada una de tales combinaciones se conoce como tratamiento, de ahí que existen IJ tratamientos diferentes. El número de observaciones realizadas en el tratamiento (i, j) serán denotadas por K_{ij}. En la sección 11.1 se considera $K_{ij} = 1$. Un caso especial importante de este tipo es un diseño de bloque aleatorizado, en el cual un solo factor A es de primordial interés pero se crea otro factor, "bloques", para controlar la variabilidad externa en unidades o sujetos experimentales. En la sección 11.2 se aborda el caso $K_{ij} = K > 1$ y se mencionan brevemente las dificultades asociadas con K_{ij} desiguales.

La sección 11.3 considera experimentos que implican más de dos factores. Cuando el número de factores es grande, un experimento compuesto de al menos una observación por cada tratamiento sería caro y consumiría mucho tiempo. Una situación que se presenta con frecuencia, misma que se discute en la sección 11.4, es aquella en la que existen p factores cada uno de los cuales tiene dos niveles. Existen entonces 2^p tratamientos diferentes. Se consideran el caso en el cual las observaciones se realizan en todos estos tratamientos (un diseño completo) y el caso en el que las observaciones se realizan en sólo un subconjunto seleccionado de tratamientos (un diseño incompleto).

11.1 ANOVA bifactorial con $K_{ij} = 1$

Cuando el factor A consta de I niveles y el factor B de J niveles, existen IJ combinaciones diferentes (pares) de niveles de los dos factores, cada uno llamado tratamiento. Con $K_{ij} =$ el número de observaciones en el tratamiento compuesto del factor A al nivel i y del factor B a nivel j, esta sección se enfoca en el caso $K_{ij} = 1$, de modo que los datos se componen de IJ observaciones. Primero se discutirá el modelo de efectos fijos, en el que los únicos niveles de interés con los dos factores son aquellos que en realidad están representados en el experimento. Al final de la sección se analizan brevemente las situaciones en las que al menos un factor es aleatorio.

EJEMPLO 11.1 ¿Realmente es fácil eliminar manchas en telas producidas por plumas de tinta borrable tal como la palabra *borrable* podría implicar? Considere los siguientes datos de un experimento para comparar tres marcas diferentes de plumas y cuatro tratamientos de lavado diferentes respecto a su capacidad de eliminar manchas en un tipo particular de tela (basado en **"An Assessment of the Effects of Treatment, Time, and Heat on the Removal of Erasable Pen Marks from Cotton and Cotton/Poliester Blend Fabrics", *J. of Testing and Evaluation*, 1991: 394–397**). La variable de respuesta es un indicador cuantitativo del cambio de color total de un espécimen de tela; mientras más bajo fue este valor, más manchas fueron eliminadas.

		Tratamiento de lavado					
		1	**2**	**3**	**4**	**Total**	**Promedio**
Marca de pluma	**1**	.97	.48	.48	.46	2.39	.598
	2	.77	.14	.22	.25	1.38	.345
	3	.67	.39	.57	.19	1.82	.455
	Total	2.41	1.01	1.27	.90	5.59	
	Promedio	.803	.337	.423	.300		.466

¿Existe alguna diferencia en la cantidad de cambio de color promedio verdadero debido a las diferentes marcas de pluma o a los diferentes tratamientos de lavado? ■

Tal como en el ANOVA unifactorial, se utilizan subíndices dobles para identificar variables aleatorias y valores observados. Sea

X_{ij} = la variable aleatoria (va) que denota la medición cuando el factor A se mantiene al nivel i y el factor B al nivel j

x_{ij} = el valor observado de X_{ij}

Las x_{ij} normalmente se presentan en una tabla rectangular en la que varios renglones son identificados con los niveles del factor A y varias columnas con los niveles del factor B. En el experimento de la pluma de tinta borrable del ejemplo 11.1, el número de niveles del factor A es $I = 3$, el número de niveles del factor B es $J = 4$, $x_{13} = .48$, $x_{22} = .14$, etcétera.

Mientras que en el ANOVA unifactorial lo que interesaba eran las medias que aparecían en los renglones y la media grande, en este caso también existe interés en las medias que aparecen en las columnas. Sean

$$\overline{X}_{i\cdot} = \text{el promedio de las mediciones obtenidas cuando el factor } A \text{ se mantiene al nivel } i = \frac{\sum_{j=1}^{J} X_{ij}}{J}$$

$$\overline{X}_{\cdot j} = \text{el promedio de las mediciones obtenidas cuando el factor } B \text{ se mantiene al nivel } j = \frac{\sum_{i=1}^{I} X_{ij}}{I}$$

$$\overline{X}_{\cdot\cdot} = \text{la media grande} = \frac{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} X_{ij}}{IJ}$$

con los valores observados $\overline{x}_{i\cdot}$, $\overline{x}_{\cdot j}$ y $\overline{x}_{\cdot\cdot}$. Los totales en lugar de los promedios se denotan omitiendo la raya horizontal (por tanto $x_{\cdot j} = \Sigma_i x_{ij}$, etc.). Intuitivamente, para ver si existe algún efecto debido a los niveles del factor A, se deberán comparar las $\overline{x}_{i\cdot}$ observadas una con otra y se deberá sacar información de las $\overline{x}_{\cdot j}$ respecto a los diferentes niveles del factor B.

El modelo de efectos fijos

Procediendo por analogía con el ANOVA unifactorial, la primera tendencia al especificar un modelo es hacer que μ_{ij} = la respuesta promedio verdadera cuando el factor A se encuentra al nivel i y el factor B, al nivel j para obtener parámetros medios IJ. En ese caso sea

$$X_{ij} = \mu_{ij} + \epsilon_{ij}$$

donde ϵ_{ij} es la cantidad aleatoria en la cual el valor observado difiere de su expectativa y las ϵ_{ij} se suponen normales e independientes con varianza común σ^2. Desafortunadamente, no existe un procedimiento de prueba válido para esta selección de parámetros. Esto es porque hay $IJ + 1$ parámetros (las μ_{ij} y σ^2) pero sólo observaciones IJ, por lo cual después de usar cada x_{ij} como una estimación de μ_{ij}, no hay manera de estimar σ^2.

El modelo siguiente alternativo es realista pero implica relativamente pocos parámetros.

Suponga la existencia de I parámetros $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_I$ y J parámetros $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_J$, de tal suerte que

$$X_{ij} = \alpha_i + \beta_j + \epsilon_{ij} \quad (i = 1, \ldots, I, \quad j = 1, \ldots, J) \tag{11.1}$$

de modo que

$$\mu_{ij} = \alpha_i + \beta_j \tag{11.2}$$

Incluida σ^2, ahora hay $I + J + 1$ parámetros de modelo, así que si $I \geq 3$ y $J \geq 3$, entonces habrá menos parámetros que observaciones (de hecho, más adelante se modificará (11.2) de modo que incluso $I = 2$ y $J = 2$ tendrán cabida).

El modelo especificado en (11.1) y (11.2) se llama **modelo aditivo** porque cada respuesta media μ_{ij} es la suma de un efecto debido al factor A al nivel i (α_i) y un efecto debido al factor B al nivel j (β_j). La diferencia entre las respuestas medias con el factor A

al nivel i y al nivel i' cuando B se mantiene al nivel j es $\mu_{ij} - \mu_{i'j}$. Cuando el modelo es aditivo,

$$\mu_{ij} - \mu_{i'j} = (\alpha_i + \beta_j) - (\alpha_{i'} + \beta_j) = \alpha_i - \alpha_{i'}$$

la cual es independiente del nivel j del segundo factor. Un resultado similar prevalece para $\mu_{ij} - \mu_{ij'}$. Así pues aditividad significa que la diferencia en las respuestas medias a dos niveles de uno de los factores es la misma a todos los niveles del otro factor. La figura 11.1(a) muestra un conjunto de respuestas medias que satisfacen la condición de aditividad y la figura 11.1(b) muestra una configuración no aditiva.

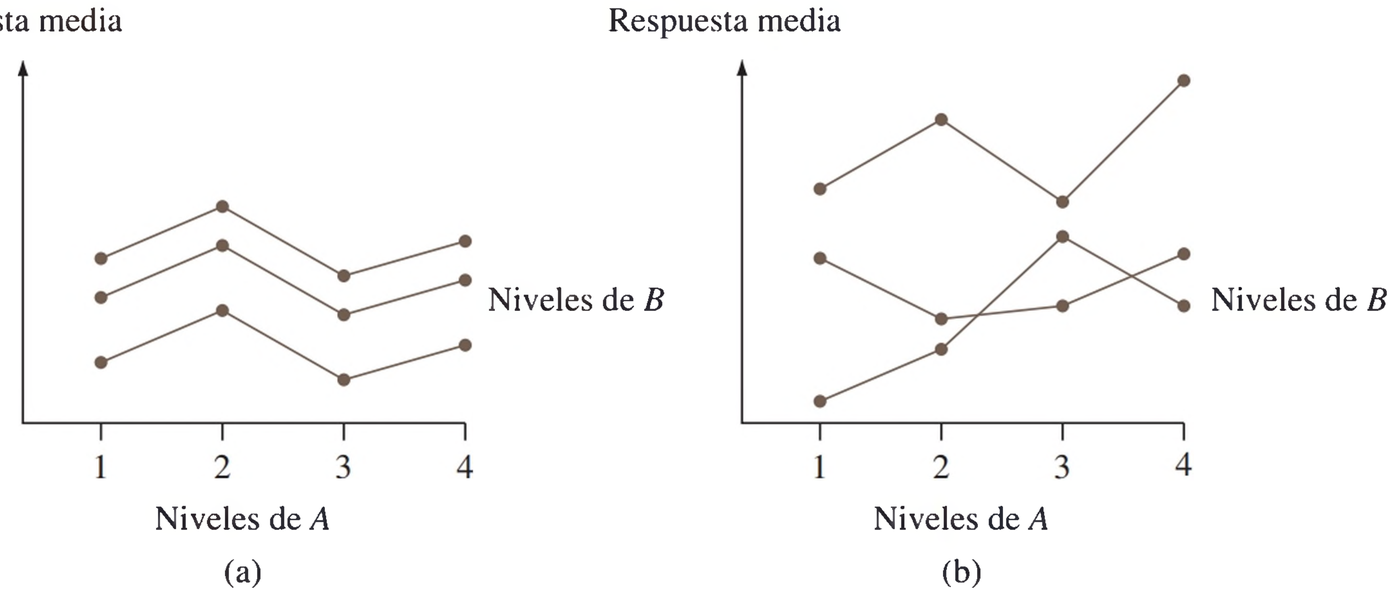


Figura 11.1 Respuestas medias de dos tipos de modelo: (a) aditivo; (b) no aditivo

EJEMPLO 11.2 (Continuación del ejemplo 11.1)

Grafique de manera análoga a la de la figura 11.1 las x_{ij} observadas para obtener el resultado que muestra la figura 11.2. Aunque existe algo de "cruzamiento" en las x_{ij} observadas, la configuración es razonablemente representativa de lo que se esperaría bajo aditividad con sólo una observación por tratamiento.

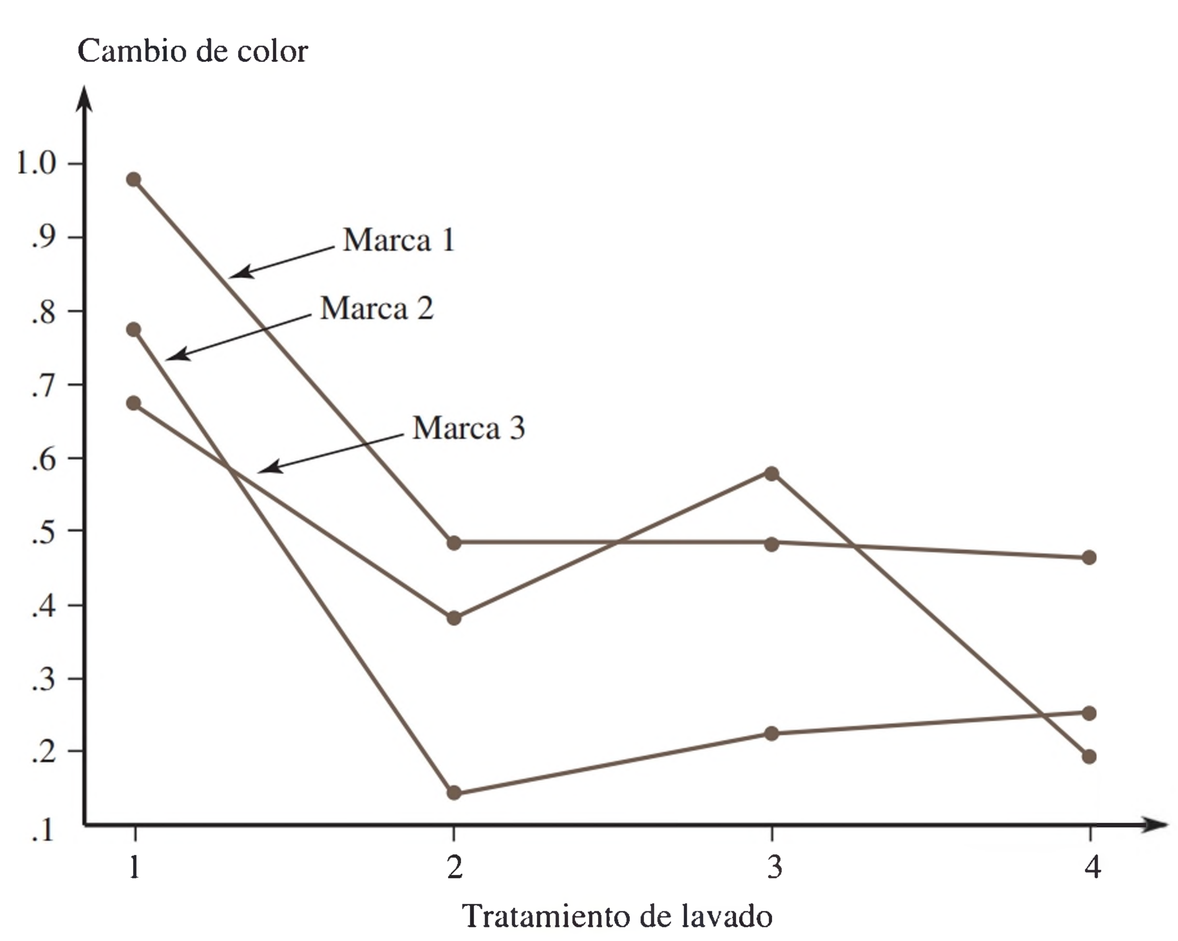


Figure 11.2 Gráfica de los datos del ejemplo 11.1 ■

La expresión (11.2) no describe del todo el modelo final porque las α_i y las β_j no están determinadas de forma única. A continuación se dan configuraciones diferentes de las α_i y β_j que dan las mismas μ_{ij} aditivas.

	$\beta_1 = 1$	$\beta_2 = 4$
$\alpha_1 = 1$	$\mu_{11} = 2$	$\mu_{12} = 5$
$\alpha_2 = 2$	$\mu_{21} = 3$	$\mu_{22} = 6$

	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 5$
$\alpha_1 = 0$	$\mu_{11} = 2$	$\mu_{12} = 5$
$\alpha_2 = 1$	$\mu_{21} = 3$	$\mu_{22} = 6$

Si se resta cualquier constante c de todas las α_i y si se suman a c todas las β_j se obtienen otras configuraciones correspondientes al mismo modelo aditivo. Esta no singularidad se elimina mediante el uso del siguiente modelo.

$$X_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \epsilon_{ij} \qquad \textbf{(11.3)}$$

donde $\sum_{i=1}^{I} \alpha_i = 0$, $\sum_{j=1}^{J} \beta_j = 0$, y las ϵ_{ij} se suponen independientes, normalmente distribuidas con media 0 y varianza común σ^2.

Esto es análogo a la selección alternativa de parámetros para el método ANOVA unifactorial que se analizó en la sección 10.3. No es difícil verificar que (11.3) es un modelo aditivo en el cual los parámetros están determinados de forma única (por ejemplo, para las μ_{ij} previamente mencionadas, $\mu = 4$, $\alpha_1 = -.5$, $\alpha_2 = .5$, $\beta_1 = -1.5$ y $\beta_2 = 1.5$). Observe que hay sólo $I - 1$ α_i independientemente determinadas y $J - 1$ β_j independientemente determinadas, así que (incluida μ) (11.3) especifica $I + J - 1$ parámetros medios.

La interpretación de los parámetros en (11.3) es directa: **μ es la media grande verdadera** (respuesta media promediada a todos los niveles de ambos factores) **α_i es el efecto del factor *A* al nivel *i*** (medido como una desviación respecto a μ) y **β_j es el efecto del factor *B* al nivel *j***. Estimadores insesgados (y la máxima probabilidad) de estos parámetros son

$$\hat{\mu} = \overline{X}_{..} \quad \hat{\alpha}_i = \overline{X}_{i.} - \overline{X}_{..} \quad \hat{\beta}_j = \overline{X}_{.j} - \overline{X}_{..}$$

Existen dos hipótesis nulas diferentes de interés en un experimento de dos factores con $K_{ij} = 1$. La primera, denotada por H_{0A}, establece que los diferentes niveles del factor A no tienen efecto en la respuesta promedio verdadera. La segunda, denotada por H_{0B} asevera que el factor B no tiene ningún efecto.

$$\begin{aligned} &H_{0A}\text{: } \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 0 \\ &\qquad \text{contra } H_{aA}\text{: al menos una } \alpha_i \neq 0 \\ &H_{0B}\text{: } \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_J = 0 \\ &\qquad \text{contra } H_{aB}\text{: al menos una } \beta_J \neq 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(11.4)}$$

(Ningún efecto del factor A implica que todas las α_i sean iguales, así que todas deben ser 0 puesto que suman 0, y de igual modo para las β_j.)

Procedimientos de prueba

La descripción y el análisis ahora siguen de cerca a los del ANOVA unifactorial. Ahora hay cuatro sumas de cuadrados, cada una con un número de grados de libertad asociados:

DEFINICIÓN

$$\text{SST} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(X_{ij} - \bar{X}_{..})^2 \qquad \text{gl} = IJ - 1$$

$$\text{SSA} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})^2 = J\sum_{i=1}^{I}(\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})^2 \qquad \text{gl} = I - 1$$

$$\text{SSB} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(\bar{X}_{.j} - \bar{X}_{..})^2 = I\sum_{j=1}^{J}(\bar{X}_{.j} - \bar{X}_{..})^2 \qquad \text{gl} = J - 1 \qquad \textbf{(11.5)}$$

$$\text{SSE} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(X_{ij} - \bar{X}_{i.} - \bar{X}_{.j} + \bar{X}_{..})^2 \qquad \text{gl} = (I - 1)(J - 1)$$

La identidad fundamental es

$$\text{SST} = \text{SSA} + \text{SSB} + \text{SSE} \qquad \textbf{(11.6)}$$

Existen fórmulas para SST, SSA y SSB análogas a las que aparecen en el capítulo 10 para el ANOVA unifactorial. Pero la amplia disponibilidad de programas estadísticos casi ha vuelto obsoletas estas fórmulas.

La expresión para SSE se obtiene al reemplazar μ, α_i y β_j por sus estimadores en $\Sigma[X_{ij} - (\mu + \alpha_i + \beta_j)]^2$. El grado de libertad asociado con el error es IJ − número de parámetros medios estimado $= IJ - [1 + (I - 1) + (J - 1)] = (I - 1)(J - 1)$. La variación total se divide en una parte (SSE) que no está explicada por lo verdadero o lo falso de H_{0A} o H_{0B} y en dos partes que pueden ser explicadas por la posible falsedad de las dos hipótesis nulas.

La teoría estadística ahora estipula que si se forman proporciones F como en el ANOVA unifactorial, cuando H_{0A} (H_{0B}) es verdadera, la proporción F correspondiente tiene una distribución F con grados de libertad asociados con el numerador $= I - 1$ ($J - 1$ y grados de libertad asociados con el denominador $= (I - 1)(J - 1)$.

Hipótesis	Valor del estadístico de prueba	Determinación del valor *P*
H_{0A} contra H_{aA}	$f_A = \dfrac{\text{MSA}}{\text{MSE}}$	Área bajo la curva $F_{I-1,(I-1)(J-1)}$ a la derecha de f_A
H_{0B} contra H_{aB}	$f_B = \dfrac{\text{MSB}}{\text{MSE}}$	Área bajo la curva $F_{J-1,(I-1)(J-1)}$ a la derecha de f_B

EJEMPLO 11.3 (Continuación del ejemplo 11.2)

Las $\bar{x}_{i.}$ y $\bar{x}_{.j}$ para los datos de cambio de color se muestran a lo largo de los márgenes de la tabla de datos dada previamente. La tabla 11.1 resume los cálculos.

Tabla 11.1 Tabla ANOVA para el ejemplo 11.3

Fuente de variación	gl	Suma de cuadrados	Media de los cuadrados	f
Factor A (marca)	$I - 1 = 2$	SSA = .1282	MSA = .0641	$f_A = 4.43$
Factor B (tratamiento de lavado)	$J - 1 = 3$	SSB = .4797	MSB = .1599	$f_B = 11.05$
Error	$(I - 1)(J - 1) = 6$	SSE = .0868	MSE = .01447	
Total	$IJ - 1 = 11$	SST = .6947		

Debido a que $F_{.10,2,6} = 3.46 < 4.43 < 5.14 = F_{.05,2,6}$ el valor P para probar H_{0A} está entre .05 y .10. Por tanto H_{0A} no puede ser rechazada a un nivel de significancia de .05. Aparentemente el cambio de color promedio verdadero no depende de la marca de la pluma. Dado que $F_{.01,3,6} = 9.78$ y $F_{.001,3,6} = 23.70$, $.001 <$ valor $P < .01$ para probar H_{0B}. Por tanto, esta hipótesis nula es rechazada a un nivel de significancia de .05 en favor de la aseveración de que el cambio de color varía con el tratamiento de lavado. Un programa estadístico proporciona valores P de .066 y .007 con estas dos pruebas. ■

La factibilidad de las suposiciones de normalidad y varianza constante puede ser investigada gráficamente. Se definen los valores pronosticados (también llamados valores ajustados) $\hat{x}_{ij} = \hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j = \bar{x}_{..} + (\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..}) + (\bar{x}_{.j} - \bar{x}_{..}) = \bar{x}_{i.} + \bar{x}_{.j} - \bar{x}_{..}$ y los residuos las diferencias entre las observaciones y los valores pronosticados) $x_{ij} - \hat{x}_{ij} = x_{ij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{x}_{..}$. Se puede verificar la suposición de normalidad con una gráfica de probabilidad normal de los residuos; y la suposición de varianza constante, con una gráfica de los residuos contra los valores ajustados. La figura 11.3 muestra estas gráficas para los datos del ejemplo 11.3.

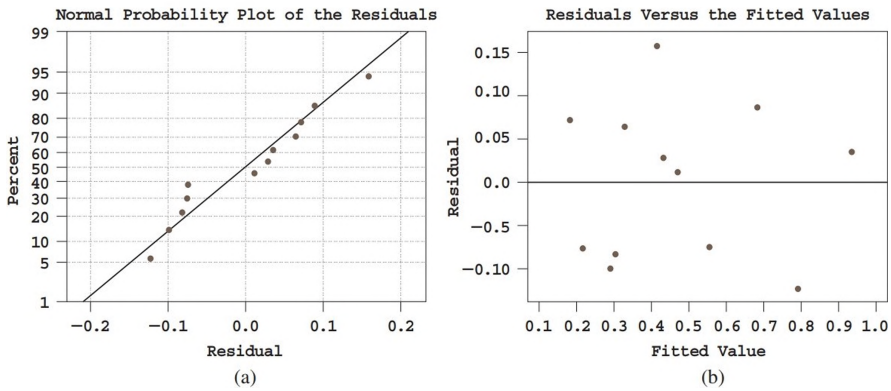


Figura 11.3 Gráficas de diagnóstico obtenidas con MINITAB para el ejemplo 11.3

La gráfica de probabilidad normal es razonablemente lineal, de modo que no existe ninguna razón para cuestionar la normalidad de este conjunto de datos. En la gráfica de residuos contra valores ajustados se buscan diferencias en dispersión vertical conforme se recorre la gráfica horizontalmente de un lado a otro. Por ejemplo, si hubiera un rango angosto de valores ajustados pequeños y un rango amplio de valores ajustados altos, esto sugeriría que la varianza es más grande con respuestas grandes (esto sucede a menudo y en ocasiones se soluciona reemplazando cada observación por su logaritmo). La gráfica 11.3(b) muestra que no existe evidencia en contra de la suposición de varianza constante.

Media esperada de los cuadrados

Lo razonable de utilizar las pruebas F que se acaban de describir sevademuestra calculando la media esperada de los cuadrados. Para el modelo aditivo,

$$E(\text{MSE}) = \sigma^2$$

$$E(\text{MSA}) = \sigma^2 + \frac{J}{I-1}\sum_{i=1}^{I}\alpha_i^2$$

$$E(\text{MSB}) = \sigma^2 + \frac{I}{J-1}\sum_{j=1}^{J}\beta_j^2$$

Si H_{0A} es verdadera, MSA es un estimador no sesgado de σ^2, así que F es una razón de dos estimadores de σ^2 no sesgados. Cuando H_{0A} es falsa, MSA tiende a sobrestimar σ^2, de tal suerte que H_{0A} deberá ser rechazada cuando la proporción F_A es demasiado grande. Comentarios similares se aplican a MSB y H_{0B}.

Comparaciones múltiples

Cuando H_{0A} o H_{0B} han sido rechazadas se puede utilizar el procedimiento de Tukey para identificar diferencias significativas entre los niveles del factor investigado.

1. Para comparar niveles del factor A, se obtiene $Q_{\alpha,I,(I-1)(J-1)}$.
   Para comparar niveles del factor B, se obtiene $Q_{\alpha,J,(I-1)(J-1)}$.
2. Se calcula

$$w = Q \cdot (\text{(la desviación estándar estimada de las medias muestrales comparadas)}$$
$$= \begin{cases} Q_{\alpha,I,(I-1)(J-1)} \cdot \sqrt{\text{MSE}/J} & \text{para comparaciones del factor } A \\ Q_{\alpha,J,(I-1)(J-1)} \cdot \sqrt{\text{MSE}/I} & \text{para comparaciones del factor } B \end{cases}$$

   (porque, p. ej., la desviación estándar de $\overline{X}_{i\cdot}$ es $\sigma/\sqrt{J}$).
3. Se ordenan las medias muestrales en orden creciente, se subrayan los pares que difieren por menos de w y se identifican los pares no subrayados por la misma línea como correspondientes a niveles significativamente diferentes del factor dado.

EJEMPLO 11.4 (Continuación del ejemplo 11.3)

La identificación de diferencias significativas entre los cuatro tratamientos de lavado requiere $Q_{.05,4,6} = 4.90$ y $w = 4.90\sqrt{(.01447)/3} = .340$. Las cuatro medias muestrales correspondientes al factor B (promedios en columnas) ahora aparecen listadas en orden creciente y cualquier par que difiere por menos de .340 aparece subrayado por un segmento de recta:

$\overline{x}_{4\cdot}$	$\overline{x}_{2\cdot}$	$\overline{x}_{3\cdot}$	$\overline{x}_{1\cdot}$
.300	337	.423	.803

Al parecer el tratamiento de lavado 1 difiere significativamente de los otros tres, aunque no se identifican otras diferencias importantes. En concreto, no es evidente cuál de los tratamientos 2, 3 y 4 es mejor para eliminar manchas. ■

Experimentos de bloque aleatorizado

Cuando se utiliza el ANOVA unifactorial para probar la presencia de efectos debidos a los diferentes I tratamientos estudiados, una vez que los IJ sujetos o unidades experimentales han sido seleccionados, el tratamiento se asignará de forma completamente al azar. Es decir, se deberán seleccionar al azar J sujetos para el primer tratamiento, luego otra muestra de J sujetos seleccionados al azar de los $IJ - J$ sujetos restantes para el segundo tratamiento y así sucesivamente.

Sucede con frecuencia, no obstante, que los sujetos o unidades experimentales exhiben heterogeneidad respecto a otras variables que pueden afectar las respuestas observadas. Cuando es este el caso, la presencia o ausencia de un valor F significativo puede deberse a esta variación externa y no a la presencia o ausencia de efectos factoriales. Esta fue la razón para introducir experimentos apareados en el capítulo 9. La analogía para un experimento apareado cuando $I > 2$ se llama experimento de **bloque aleatorizado**. Un factor externo "bloques", se construye dividiendo las IJ unidades en J grupos con I unidades en

cada grupo. Este agrupamiento o formación de bloques se realiza de tal modo que dentro de cada bloque las I unidades son homogéneas respecto a otros factores que se piensa que afectan las respuestas. Entonces dentro de cada bloque homogéneo, los I tratamientos se asignan al azar a las I unidades o sujetos.

EJEMPLO 11.5 Una organización de prueba de productos de consumo desea comparar el consumo de energía anual de cinco marcas diferentes de deshumidificadores. Como el consumo de energía depende del nivel de humedad prevaleciente, se decidió monitorear cada marca a cuatro niveles diferentes desde humedad moderada hasta intensa (formando así un bloque con el nivel de humedad). Dentro de cada nivel, se asignaron las marcas al azar a los cinco lugares seleccionados. Las observaciones resultantes (kWh anuales) aparecen en la tabla 11.2 y los cálculos ANOVA se resumen en la tabla 11.3.

Tabla 11.2 Datos de consumo de energía del ejemplo 11.5

Tratamientos (marcas)	Bloques (nivel de humedad) 1	2	3	4	$x_{i\cdot}$	$\bar{x}_{i\cdot}$
1	685	792	838	875	3190	797.50
2	722	806	893	953	3374	843.50
3	733	802	880	941	3356	839.00
4	811	888	952	1005	3656	914.00
5	828	920	978	1023	3749	937.25
$x_{\cdot j}$	3779	4208	4541	4797	17 325	
$\bar{x}_{\cdot j}$	755.80	841.60	908.20	959.40		866.25

Tabla 11.3 Tabla ANOVA para el ejemplo 11.5

Fuente de variación	gl	Suma de cuadrados	Media de cuadrados	f
Tratamientos (marcas)	4	53 231.00	13 307.75	$f_A = 95.57$
Bloques	3	116 217.75	38 739.25	$f_B = 278.20$
Error	12	1671.00	139.25	
Total	19	171 119.75		

El cociente de F para los tratamientos excede considerablemente a $F_{.001,4,12} = 9.63$, de tal manera que el valor $P < .001$. Por tanto, H_0 es rechazada en favor de H_a a un nivel de significancia de .05 y se concluye que el consumo de energía sí depende de la marca del humidificador. Para identificar marcas significativamente diferentes, se utiliza el procedimiento de Tukey, $Q_{.05,5,12} = 4.51$ y $w = 4.51\sqrt{(139.25)/4} = 26.6$.

$\bar{x}_{1\cdot}$	$\bar{x}_{3\cdot}$	$\bar{x}_{2\cdot}$	$\bar{x}_{4\cdot}$	$\bar{x}_{5\cdot}$
797.50	839.00	843.50	914.00	937.25

El subrayado indica que las marcas pueden dividirse en tres grupos de acuerdo con el consumo de energía.

Debido a que el factor de bloque es de interés secundario, no se necesita el valor P, aun cuando el valor calculado de F_B es claramente muy significativo. La figura 11.4 muestra los resultados generados por SAS con estos datos. Observe que en la primera parte de la tabla ANOVA, las sumas de cuadrados (SS, por sus siglas en inglés) para tratamientos (marcas) y bloques (niveles de humedad) se combinan en una sola suma de cuadrados "modelo" SS.

Analysis of Variance Procedure

Dependent Variable: CONSUMODEENERGÍA

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	7	169448.750	24206.964	173.84	0.0001
Error	12	1671.000	139.250		
Corrected Total	19	171119.750			

R-Square	C.V.	Root MSE	CONSUMODEENERGÍA Mean
0.990235	1.362242	11.8004	866.25000

Source	DF	Anova SS	Mean Square	F Value	PR > F
MARCA	4	53231.000	13307.750	95.57	0.0001
HUMEDAD	3	116217.750	38739.250	278.20	0.0001

Alpha = 0.05 df = 12 MSE = 139.25
Critical Value of Studentized Range = 4.508
Minimum Significant Difference = 26.597

Means with the same letter are not significantly different.

Tukey Grouping	Mean	N	MARCA
A	937.250	4	5
A			
A	914.000	4	4
B	843.500	4	2
B			
B	839.000	4	3
C	797.500	4	1

Figura 11.4 Resultados obtenidos con SAS con los datos de consumo de energía ■

En muchas situaciones experimentales en las que los tratamientos tienen que ser aplicados a sujetos, uno solo de ellos puede recibir todos los I tratamientos. La formación de bloques se realiza entonces con los sujetos mismos para controlar la variabilidad entre ellos; se dice entonces que cada sujeto actúa como su propio control. Los científicos sociales en ocasiones se refieren a tales experimentos como diseños de medidas repetidas. Las "unidades" dentro de un bloque son entonces las diferentes "instancias" de aplicación del tratamiento. Del mismo modo, los bloques se consideran lapsos de tiempo, ubicaciones u observadores diferentes.

EJEMPLO 11.6 La tensión de las cuerdas de las raquetas de tenis ¿cómo afecta la velocidad de la pelota que golpea contra la raqueta? El artículo **"Elite Tennis Player Sensitivity to Changes in String Tension and the Effect on Resulting Ball Dynamics" (*Sports Engr.*, 2008: 31–36)** describe un experimento en el que cuatro diferentes tensiones de cuerda (N) fueron utilizadas y las bolas proyectadas desde una máquina fueron golpeadas por 18 jugadores diferentes. La velocidad de rebote (km/h) se determinó para cada combinación tensión-jugador. Considere los siguientes datos en la tabla 11.4 de un experimento similar con sólo seis jugadores (el resultado ANOVA está en concordancia con lo reportado en el artículo).

Los cálculos ANOVA de análisis de varianza se resumen en la tabla 11.5. El valor P para la prueba para ver si la velocidad promedio real de rebote depende de la tensión de las cuerdas es .049. Por tanto, H_0: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ es apenas rechazada al nivel de significancia .05 en favor de la conclusión de que la velocidad promedio real varía con la tensión ($F_{.05,3,15} = 3.29$). La aplicación del procedimiento de Tukey para identificar diferencias significativas entre las tensiones requiere $Q_{.05,4,15} = 4.08$. Entonces $w = 7.464$. La diferencia entre la media de las muestras mayor y menor de las tensiones es 6.87. Así, aunque la prueba F es significativa, el método de Tukey no identifica ninguna.

Tabla 11.4 Datos de velocidad de rebote del ejemplo 11.6

	Jugador						
Tensión	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	$\bar{x}_{i\cdot}$
210	105.7	116.6	106.6	113.9	119.4	123.5	114.28
235	113.3	119.9	120.5	119.3	122.5	124.0	119.92
260	117.2	124.4	122.3	120.0	115.1	127.9	121.15
285	110.0	106.8	110.0	115.3	122.6	128.3	115.50
$\bar{x}_{\cdot j}$	111.55	116.93	114.85	117.13	119.90	125.93	

Tabla 11.5 Tabla ANOVA del ejemplo 11.6

Fuente	**gl**	**SS**	**MS**	***f***	***P***
Tensión	3	199.975	66.6582	3.32	0.049
Jugador	5	477.464	95.4928	4.76	0.008
Error	15	301.188	20.0792		
Total	23	978.626			

En ocasiones, esto sucede cuando la hipótesis nula es apenas rechazada. La configuración de la media muestral en el artículo citado es similar a la nuestra. Los autores comentan que los resultados eran contrarios a las anteriores pruebas de laboratorio, donde el aumento de las velocidades de rebote están típicamente asociadas con baja tensión de las cuerdas. ■

En la mayoría de los experimentos de bloques aleatorizados en los cuales los sujetos se desempeñan como bloques, los sujetos que en realidad participan en el experimento se seleccionan de una gran población. Los sujetos contribuyen entonces con efectos aleatorios en lugar de fijos. Esto no afecta el procedimiento de comparar los tratamientos cuando $K_{ij} = 1$ (una observación por "celda" como en esta sección), pero el procedimiento cambia si $K_{ij} = K > 1$. Más adelante se considerarán modelos de dos factores en los cuales los efectos son aleatorios.

Más sobre formación de bloques Cuando $I = 2$ se puede utilizar la prueba F o la prueba t de diferencias apareadas para analizar los datos. La conclusión resultante no dependerá de cuál procedimiento se utilice, puesto que $T^2 = F$ y $t_{\alpha/2,\nu} = F_{\alpha,1,\nu}$.

Al igual que con la formación de pares, la formación de bloques implica tanto una ganancia como una pérdida potencial de precisión. Si existe gran cantidad de heterogeneidad en las unidades experimentales, el valor del parámetro de varianza σ^2 en el modelo unidireccional será grande. El efecto de la formación de bloques es filtrar la variación representada por σ^2 en el modelo bidireccional apropiado para un experimento de bloques aleatorizados. Con las demás cosas iguales, un valor de σ^2 más pequeño da por resultado una prueba que es más probable que detecte alejamientos de H_0 (es decir, una prueba con mayor potencia).

Sin embargo, otras cosas no son iguales aquí, puesto que la prueba F unifactorial está basada en $I(J - 1)$ grados de libertad (gl) para el error, mientras que la prueba F bifactorial está basada en $(I - 1)(J - 1)$ grados de libertad en el caso de error. Pocos grados de libertad en el caso de error reducen la potencia, en esencia porque el estimador asociado con el denominador de σ^2 no es tan preciso. Esta pérdida de grados de libertad puede ser especialmente seria si el experimentador sólo puede permitirse un pequeño número de observaciones. No obstante, si aparece que la formación de bloques reduce significativamente la variabilidad, el sacrificio del grado de libertad del error es sensible.

Modelos de efectos aleatorios y combinados

En muchos experimentos los niveles reales de un factor que se utilizan en el experimento, y no los que interesan al experimentador, se seleccionan de una población mucho más grande de niveles posibles del factor. Si esto es cierto para ambos factores en un experimento bifactorial, un **modelo de efectos aleatorios** es apropiado. El caso en el cual los niveles de un factor son los únicos de interés y los niveles del otro factor se seleccionan de una población de niveles conduce a un **modelo de efectos combinados**. El modelo de efectos aleatorios bifactorial cuando $K_{ij} = 1$ es

$$X_{ij} = \mu + A_i + B_j + \epsilon_{ij} \quad (i = 1,\ldots, I, \quad j = 1,\ldots, J)$$

Las A_i, B_j y ϵ_{ij} son variables aleatorias independientes normalmente distribuidas con media 0 y varianzas σ_A^2, σ_B^2 y σ^2, respectivamente. Las hipótesis de interés son entonces H_{0A}: $\sigma_A^2 = 0$ (el nivel del factor A no contribuye a la variación de la respuesta) contra H_{aA}: $\sigma_A^2 > 0$ y H_{0B}: $\sigma_B^2 = 0$ contra H_{aB}: $\sigma_B^2 > 0$. En tanto que $E(\text{MSE}) = \sigma^2$ como antes, los cuadrados medios esperados para los factores A y B ahora son

$$E(\text{MSA}) = \sigma^2 + J\sigma_A^2 \qquad E(\text{MSB}) = \sigma^2 + I\sigma_B^2$$

Por consiguiente cuando H_{0A} (H_{0B}) es verdadera, F_A(F_B) sigue siendo la razón de dos estimadores insesgados de σ^2. Se puede demostrar que el valor de P para la prueba H_{0A} contra H_{aA} se calcula igual que para el caso de efectos fijos; se aplica un argumento similar para probar H_{0B} contra H_{aB}.

Para el caso en el cual el factor A es fijo y el B es aleatorio, el modelo combinado es

$$X_{ij} = \mu + \alpha_i + B_j + \epsilon_{ij} \quad (i = 1,\ldots, I, \quad j = 1,\ldots, J)$$

donde $\Sigma\alpha_i = 0$ y las B_j y ϵ_{ij} están normalmente distribuidas con media 0 y varianzas σ_B^2 y σ^2, respectivamente. Ahora las dos hipótesis nulas son

$$H_{0A}: \alpha_1 = \cdots = \alpha_I = 0 \quad \text{y} \quad H_{0B}: \sigma_B^2 = 0$$

con medias esperadas de los cuadrados

$$E(\text{MSE}) = \sigma^2 \qquad E(\text{MSA}) = \sigma^2 + \frac{J}{I-1}\sum\alpha_i^2 \qquad E(\text{MSB}) = \sigma^2 + I\sigma_B^2$$

Los procedimientos de prueba para H_{0A} contra H_{aA} y H_{0B} contra H_{aB} son exactamente como antes. Por ejemplo, en el análisis de los datos de cambio de color en el ejemplo 11.1, si los cuatro tratamientos de lavado fueron seleccionados al azar, y debido a que $f_B = 11.05$ y $F_{.05,3,6} = 4.76$, H_{0B}: $\sigma_B^2 = 0$ es rechazada en favor de H_{aB}: $\sigma_B^2 > 0$. Así, $(\text{MSB} - \text{MSE})/I = .0485$ da una estimación del "componente de varianza" σ_B^2.

En resumen, cuando $K_{ij} = 1$, aunque las hipótesis y las medias de los cuadrados esperadas difieren con ambos efectos fijos, los procedimientos de prueba son idénticos.

EJERCICIOS Sección 11.1 (1–15)

1. Se llevó a cabo un experimento para investigar el efecto de la especie (factor A, con $I = 4$) y el grado (factor B, con $J = 3$) sobre la fuerza de quiebre de un grupo de especímenes de madera. Se hizo una observación para cada combinación especie-grado, que dio como resultado los valores de SSA = 442.0, SSB = 428.6 y SSE = 123.4. Asuma que lo apropiado es un modelo aditivo.

a. Pruebe H_0: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ (o hay diferencias en la fuerza verdadera promedio debida a la especie) contra H_a: al menos una $\alpha_i \neq 0$ utilizando una prueba con nivel de .05.

b. Pruebe H_0: $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ (no hay diferencias en la fuerza promedio verdadera debida al grado) contra H_a: al menos una $\beta_j \neq 0$ utilizando una prueba con nivel de .05.

2. Se están considerando cuatro recubrimientos diferentes como protección contra la corrosión de tubería de metal. Esta se entierra en tres tipos diferentes de suelo. Para investigar si la cantidad de corrosión depende del recubrimiento o del tipo de suelo, se seleccionan 12 tramos de tubería. A cada tramo se le

aplica uno de los cuatro recubrimientos y se entierra en uno de los tres tipos de suelo durante un tiempo fijo, después del cual se determina la cantidad de corrosión (profundidad máxima de las picaduras, en .0001 pulg). Los datos aparecen en la tabla.

		Tipo de suelo (B)		
		1	**2**	**3**
Recubrimiento (A)	**1**	64	49	50
	2	53	51	48
	3	47	45	50
	4	51	43	52

a. Suponiendo la validez del modelo aditivo realice el análisis ANOVA mediante una tabla ANOVA para ver si la cantidad de corrosión depende del tipo de recubrimiento utilizado o del tipo de suelo. Use $\alpha = .05$.

b. Calcule $\hat{\mu}$, $\hat{\mu}_1$, $\hat{\alpha}_2$, $\hat{\alpha}_3$, $\hat{\alpha}_4$, $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ y $\hat{\beta}_3$.

3. Una investigación sobre la facilidad de construir máquinas con una aleación berilio-cobre utilizando dos medios dieléctricos y cuatro corrientes de trabajo, arrojó los siguientes datos sobre la velocidad de remoción de material (este es un subconjunto de los datos que aparecieron en el artículo **"Statistical Analysis and Optimization Study on the Machinability of Beryllium–Copper Alloy in Electro Discharge Machining", *J. of Engr. Manufacture*, 2012: 1847-1861**).

		Corriente de trabajo			
		10	**15**	**20**	**25**
Medio	**Aceite**	.2433	.3830	.5625	.7258
	Agua	.1590	.2649	.3609	.4773

a. Después de construir una tabla ANOVA pruebe, con un nivel de .05, tanto la hipótesis de que no hay efecto del medio contra la alternativa apropiada y la hipótesis de que no hay efecto de la corriente de trabajo contra la alternativa apropiada.

b. Use el procedimiento de Tukey para investigar las diferencias en la velocidad de remoción de material esperada debida a las diferencias en las corrientes de trabajo ($Q_{.05,4,3} = 6.825$).

4. En un experimento para saber si la cantidad de cobertura de pintura de látex de color azul claro para interiores depende de la marca de la pintura o de la marca del rodillo utilizado, se aplicó 1 galón de cada una de las cuatro marcas de pintura utilizando cada una de tres marcas de rodillo y se obtuvieron los siguientes datos (número de pies cuadrados cubiertos).

		Marca de rodillo		
		1	**2**	**3**
Marca de pintura	**1**	454	446	451
	2	446	444	447
	3	439	442	444
	4	444	437	443

a. Construya la tabla ANOVA. [*Sugerencia*: Los cálculos se pueden acelerar restando 400 (o cualquier otro número conveniente) de cada observación. Esto no afecta los resultados finales.]

b. Formule y pruebe las hipótesis apropiadas para decidir si la marca de la pintura tiene algún efecto en la cobertura. Use $\alpha = .05$.

c. Repita el inciso b) para la marca de rodillo.

d. Use el método de Tukey para identificar diferencias significativas entre las marcas. ¿Hay alguna marca que parezca claramente preferible a las demás?

5. En un experimento para evaluar el efecto del ángulo de la tensión requerida para separar conectores eléctricos, se utilizaron cuatro ángulos diferentes (factor A) y cada conector de una muestra de cinco (factor B) fue tirado hacia cada ángulo una vez (**"A Mixed Model Factorial Experiment in Testing Electrical Connectors", *Industrial Quality Control*, 1960: 12–16**). Los datos se presentan en la siguiente tabla.

		B				
		1	**2**	**3**	**4**	**5**
A	**0°**	45.3	42.2	39.6	36.8	45.8
	2°	44.1	44.1	38.4	38.0	47.2
	4°	42.7	42.7	42.6	42.2	48.9
	6°	43.5	45.8	47.9	37.9	56.4

¿Será que los datos sugieren que la fuerza de separación promedio verdadera es afectada por el ángulo de la tensión? Formule y pruebe las hipótesis apropiadas a un nivel .01 construyendo primero una tabla ANOVA (SST= 396.13, SSA= 58.16 y SSB= 246.97).

6. Un condado particular emplea tres valuadores que son responsables de determinar el valor de las residencias en el condado. Para ver si estos valuadores difieren sistemáticamente en sus avalúos, se seleccionan 5 casas y a cada valuador se le pide que determine el valor de mercado de cada casa. Con el factor A denotando valuadores ($I = 3$) y el factor B denotando casas ($J = 5$), suponga SSA= 11.7, SSB= 113.5 y SSE= 25.6.

a. Pruebe H_0: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ al nivel .05 (H_0 manifiesta que no existen diferencias sistemáticas entre los valuadores.)

b. Explique por qué se utilizó un experimento de bloques aleatorizados con sólo 5 casas en lugar de un experimento ANOVA unidireccional que implique un total de 15 casas diferentes con 5 casas diferentes valuadas por cada asesor (un grupo distinto de 5 para cada valuador).

7. Los siguientes datos son el resultado de un experimento que involucra tres diferentes marcas de tornos en combinación con tres diferentes operadores (el factor de bloqueo). La variable de respuesta es el porcentaje de producto aceptable producido durante un turno de trabajo completo (todo el día) (de **"A Software–Based Resource Selection Process in Competitive Network Environment Using ANOVA", *Intl. J. of Computer Applications*, 2012: 17–21**).

		Operador		
		1	**2**	**3**
Marca	1	86	85	82
	2	86	86	83
	3	88	91	85

a. Construya la tabla ANOVA y haga una prueba con nivel .05 para demostrar si la marca de tornos tiene un efecto en la aceptación del producto.

b. Juzgando por el cociente F de sujetos (factor B), ¿piensa que el factor de bloqueo de los operadores fue efectivo en este experimento? Explique.

8. El artículo **"Exercise Thermoregulation and Hiperprolactinaemia" (*Ergonomics*, 2005: 1547–1557)** analiza cómo varios aspectos de la capacidad de hacer ejercicio podrían depender de la temperatura del ambiente. Los datos adjuntos sobre pérdida de masa corporal (kg) después de ejercitarse en un ergómetro de ciclos semirrecostado en tres diferentes temperaturas ambiente (6°, 18° y 30°C) fueron proporcionados por los autores del artículo.

		Frío	Neutro	Caliente
Sujeto	1	.4	1.2	1.6
	2	.4	1.5	1.9
	3	1.4	.8	1.0
	4	.2	.4	.7
	5	1.1	1.8	2.4
	6	1.2	1.0	1.6
	7	.7	1.0	1.4
	8	.7	1.5	1.3
	9	.8	.8	1.1

a. ¿Afecta la temperatura la pérdida de masa corporal promedio verdadera? Realice una prueba usando un nivel de significancia .01 (como hicieron los autores en el artículo).

b. Investigue las diferencias significativas entre las temperaturas.

c. Los residuos son .20, .30, −.40, −.07, .30, .00, .03, −.20, −.14, .13, .23, −.27, −.04, .03, −.27, −.04, .33, −.10, −.33, −.53, .67, .11, −.33, .27, .01, −.13, .24. Úselos como base para investigar la factibilidad de las suposiciones que fundamentan su análisis en a).

9. El artículo **"The Effects of a Pneumatic Stool and a One–Legged Stool on Lower Limb Joint Load and Muscular Activity During Sitting and Rising" (*Ergonomics*, 1993: 519–535)** proporciona lo siguientes datos sobre el esfuerzo que requiere un sujeto para levantarse de cuatro tipos diferentes de taburete (escala de Borg). Analice la varianza con $\alpha = .05$ y continúe con un análisis de comparaciones múltiples si es lo apropiado.

		Sujeto									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\bar{x}_{i\cdot}$
Tipo de taburete	1	12	10	7	7	8	9	8	7	9	8.56
	2	15	14	14	11	11	11	12	11	13	12.44
	3	12	13	13	10	8	11	12	8	10	10.78
	4	10	12	9	9	7	10	11	7	8	9.22

10. La resistencia del concreto utilizado en construcciones comerciales tiende a variar de un lote a otro. Por consiguiente, se "curan" pequeños cilindros de prueba de concreto muestreado de un lote durante periodos de hasta 28 días en ambientes con temperatura y humedad controladas antes de realizar mediciones de resistencia. El concreto es entonces "comprado y vendido con base en los cilindros para prueba de resistencia" (ASTM C 31 Standard Test Method for Making and Curing Concrete Test Specimens in the Field [Norma estadounidense]). Se obtuvieron siguientes los datos con un experimento realizado para comparar tres métodos de curado diferentes respecto a la resistencia a la compresión (MPa). Analice estos datos.

Lote	Método A	Método B	Método C
1	30.7	33.7	30.5
2	29.1	30.6	32.6
3	30.0	32.2	30.5
4	31.9	34.6	33.5
5	30.5	33.0	32.4
6	26.9	29.3	27.8
7	28.2	28.4	30.7
8	32.4	32.4	33.6
9	26.6	29.5	29.2
10	28.6	29.4	33.2

11. Para los datos del ejemplo 11.5 compruebe la factibilidad de las suposiciones mediante la construcción de una gráfica de probabilidad normal de los residuales y una gráfica de los residuos contra los valores pronosticados y comente sobre lo aprendido.

12. Suponga que en el experimento descrito en el ejercicio 6 las cinco casas en realidad se seleccionaron al azar de entre aquellas de una cierta edad y tamaño, de modo que el factor B es aleatorio y no fijo. Pruebe H_0: $\sigma_B^2 = 0$ contra H_a: $\sigma_B^2 > 0$ utilizando una prueba a nivel de .01.

13. **a.** Demuestre que una constante d puede ser sumada a (o restada de) cada x_{ij} sin afectar cualquiera de las sumas de los cuadrados ANOVA.

b. Suponga que cada x_{ij} se multiplica por una constante no cero c. ¿Cómo afecta esto las sumas de los cuadrados ANOVA? ¿Cómo afecta esto los valores de los estadísticos de F, F_A y F_B? ¿Qué efecto tiene la "codificación" de los datos mediante $y_{ij} = cx_{ij} + d$ en las conclusiones que se derivan de los procedimientos ANOVA?

14. Use el hecho de que $E(X_{ij}) = \mu + \alpha_i + \beta_j$ con $\Sigma\alpha_i = \Sigma\beta_j = 0$ para demostrar que $E(\bar{X}_{i\cdot} - \bar{X}_{\cdot\cdot}) = \alpha_i$, de modo que $\hat{\alpha}_i = \bar{X}_{i\cdot} - \bar{X}_{\cdot\cdot}$ sea un estimador insesgado para α_i.

15. Las curvas de potencia de las figuras 10.5 y 10.6 pueden ser utilizadas para obtener $\beta = P$(error de tipo II) para la prueba F en ANOVA bifactorial. Con valores fijos de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_I$, se calcula la cantidad $\phi^2 = (J/I)\Sigma\alpha_i^2/\sigma^2$. Entonces la cifra correspondiente a $\nu_1 = I - 1$ se ingresa en el eje horizontal en el valor de ϕ, se lee la potencia en el eje vertical de la curva marcada $\nu_2 = (I - 1)(J - 1)$ y $\beta = 1 -$ potencia.

a. En el experimento de corrosión descrito en el ejercicio 2, determine β cuando $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = \alpha_4 = -2$ y $\sigma = 4$. Repita con $\alpha_1 = 6$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = \alpha_4 = -3$ y $\sigma = 4$.

b. Por simetría, ¿cuál es β para la prueba H_{0B} contra H_{aB} en el ejemplo 11.1 cuando $\beta_1 = .3$, $\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = -.1$ y $\sigma = .3$

11.2 ANOVA bifactorial con $K_{ij} > 1$

En la sección 11.1, se analizaron datos obtenidos de un experimento de dos factores en el cual había una observación por cada una de las IJ combinaciones de niveles de los factores. Se supuso que las μ_{ij} tienen una estructura aditiva con $\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j$, $\Sigma\alpha_i = \Sigma\beta_j = 0$. Aditividad significa que la diferencia en las respuestas promedio verdaderas para dos niveles cualesquiera de los factores es la misma para cada nivel del otro factor. Por ejemplo, $\mu_{ij} - \mu_{i'j} = (\mu + \alpha_i + \beta_j) - (\mu + \alpha_{i'} + \beta_j) = \alpha_i - \alpha_{i'}$, independiente del nivel j del segundo factor. Esto se muestra en la figura 11.1(a), donde las rectas que conectan respuestas promedio verdaderas son paralelas.

La figura 11.1(b) ilustra un conjunto de respuestas promedio verdaderas que no tienen estructura aditiva. Las rectas que conectan estas μ_{ij} no son paralelas, lo que significa que la diferencia en las respuestas promedio verdaderas para diferentes niveles de un factor sí dependen del nivel del otro factor. Cuando la aditividad no prevalece se dice que hay **interacción** entre los diferentes niveles de los factores. La suposición de aditividad permitió en la sección 11.1 obtener un estimador de la varianza del error aleatorio σ^2 (MSE) que resultó ser insesgado, fuera verdadera o no cualquier hipótesis nula de interés. Cuando $K_{ij} > 1$ para al menos un par (i, j), se puede obtener un estimador válido de σ^2 sin suponer aditividad. Se abordará el caso $K_{ij} = K > 1$, de modo que el número de observaciones por "celda" (por cada combinación de niveles) es constante.

Parámetros de efectos fijos e hipótesis

En lugar de utilizar las μ_{ij} como parámetros de modelo, se acostumbra utilizar un conjunto equivalente que revela con más claridad el rol de interacción.

NOTACIÓN

$$\mu = \frac{1}{IJ}\sum_i\sum_j \mu_{ij} \qquad \mu_{i\cdot} = \frac{1}{J}\sum_j \mu_{ij} \qquad \mu_{\cdot j} = \frac{1}{I}\sum_i \mu_{ij} \tag{11.7}$$

Por consiguiente μ es la respuesta esperada promedio a todos los niveles de ambos factores (la media grande real) $\mu_{i\cdot}$ es la respuesta esperada promediada a todos los niveles del segundo factor cuando el primer factor A se mantiene en el nivel i y, asimismo, para $\mu_{\cdot j}$.

DEFINICIÓN

$$\begin{aligned}
&\alpha_i = \mu_{i\cdot} - \mu = \textbf{efecto del factor } \boldsymbol{A} \textbf{ al nivel } \boldsymbol{i}\\
&\beta_j = \mu_{\cdot j} - \mu = \textbf{ efecto del factor } \boldsymbol{B} \textbf{ al nivel } \boldsymbol{j}\\
&\gamma_{ij} = \mu_{ij} - (\mu + \alpha_i + \beta_j) = \textbf{interacción entre el factor } \boldsymbol{A} \textbf{ al nivel } \boldsymbol{i}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textbf{y el factor } \boldsymbol{B} \textbf{ al nivel } \boldsymbol{j}
\end{aligned} \tag{11.8}$$

de donde

$$\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} \tag{11.9}$$

El modelo es aditivo si y sólo si todas las $\gamma_{ij} = 0$. Las γ_{ij} se conocen como **parámetros de interacción**. Las α_i se llaman **efectos principales para el factor A** y las β_j son los **efectos principales para el factor B**. Aunque existen I α_i, J β_i e IJ γ_{ij} además de μ, las condiciones $\Sigma\alpha_i = 0$, $\Sigma\beta_j = 0$, $\Sigma_j\gamma_{ij} = 0$ con cualquier i, y $\Sigma_i\gamma_{ij} = 0$ para cualquier j [todas en virtud de (11.7) y (11.8) implican que sólo IJ de estos nuevos parámetros están independientemente determinados: μ, $I - 1$ de las α_i, $J - 1$ de las β_j e $(I - 1)(J - 1)$ de las γ_{ij}.

Ahora hay tres conjuntos de hipótesis que se considerarán:

H_{0AB}: $\gamma_{ij} = 0$ para todas las i, j	contra	H_{aAB}: al menos una $\gamma_{ij} \neq 0$
H_{0A}: $\alpha_1 = \cdots = \alpha_1 = 0$	contra	H_{aA}: al menos una $\alpha_i \neq 0$
H_{0B}: $\beta_1 = \cdots = \beta_J = 0$	contra	H_{aB}: al menos una $\beta_j \neq 0$

Normalmente primero se prueba la hipótesis de no interacción H_{0AB}. Si H_{0AB} no es rechazada, entonces se prueban las otras dos hipótesis para ver si los efectos principales son significativos. Si H_{0AB} es rechazada y H_{0A} se prueba y no es rechazada, el modelo resultante $\mu_{ij} = \mu + \beta_j + \gamma_{ij}$ no se presta para la interpretación directa. En ese caso, es mejor construir un esquema similar a la figura 11.1(b) para tratar de visualizar una forma en la cual interaccionen los factores.

El modelo y los procedimientos de prueba

Ahora se utilizan subíndices triples tanto para variables aleatorias como para valores observados, con X_{ijk} y x_{ijk} refiriéndose a la k-ésima observación (replicación) cuando el factor A está al nivel i y el factor B al nivel j.

El modelo de efectos fijos es entonces

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \epsilon_{ijk} \qquad (11.10)$$
$$i = 1,\ldots, I, j = 1,\ldots, J, k = 1,\ldots, K$$

donde las ϵ_{ijk} son independientes y normalmente distribuidas, cada una con media 0 y varianza σ^2.

De nueva cuenta, un punto en lugar de un subíndice denota la suma de todos los valores del subíndice, y una raya horizontal indica promediar. Por consiguiente, $X_{ij.}$ es el total de todas las K observaciones realizadas para el factor A al nivel i y el factor B al nivel j [todas las observaciones en la celda (i, j)-ésima] y $\overline{X}_{ij.}$ es el promedio de estas K observaciones. Los procedimientos de prueba se basan en las siguientes sumas de cuadrados:

DEFINICIÓN

$$\text{SST} = \sum_i \sum_j \sum_k (X_{ijk} - \overline{X}_{...})^2 \qquad \text{gl} = IJK - 1$$

$$\text{SSE} = \sum_i \sum_j \sum_k (X_{ijk} - \overline{X}_{ij.})^2 \qquad \text{gl} = IJ(K - 1)$$

$$\text{SSA} = \sum_i \sum_j \sum_k (\overline{X}_{i..} - \overline{X}_{...})^2 \qquad \text{gl} = I - 1$$

$$\text{SSB} = \sum_i \sum_j \sum_k (\overline{X}_{.j.} - \overline{X}_{...})^2 \qquad \text{gl} = J - 1$$

$$\text{SSAB} = \sum_i \sum_j \sum_k (\overline{X}_{ij.} - \overline{X}_{i..} - \overline{X}_{.j.} + \overline{X}_{...})^2 \qquad \text{gl} = (I - 1)(J - 1)$$

La identidad fundamental es

$$\text{SST} = \text{SSA} + \text{SSB} + \text{SSAB} + \text{SSE}$$

SSAB se conoce como **interacción de las sumas de cuadrados.**

La variación total se divide por consiguiente en cuatro partes; no explicada (SSE; la cual estaría presente si cualquiera de las tres hipótesis nulas fuera verdadera o no) y en tres partes que pueden ser explicadas por la verdad o falsedad de las tres H_0. Cada una de las cuatro medias de cuadrados se define como MS = SS/gl. Las medias esperadas de cuadrados sugieren que cada conjunto de hipótesis deberá ser probado utilizando la proporción apropiada de medias de cuadrados con MSE en el denominador:

$$E(\text{MSE}) = \sigma^2$$

$$E(\text{MSA}) = \sigma^2 + \frac{JK}{I-1}\sum_{i=1}^{I}\alpha_i^2 \qquad E(\text{MSB}) = \sigma^2 + \frac{IK}{J-1}\sum_{j=1}^{J}\beta_j^2$$

$$E(\text{MSAB}) = \sigma^2 + \frac{K}{(I-1)(J-1)}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\gamma_{ij}^2$$

Se puede demostrar que cada uno de los tres cocientes de las medias de cuadrados tiene una distribución F cuando la H_0 asociada es verdadera. Si H_{0AB} es falsa, el valor esperado de la media de cuadrados del numerador en F_{AB} excede a la media de cuadrados del denominador. Mientras más grande sea el valor de este cociente F, habrá mayor evidencia en contra de la hipótesis nula, de nuevo implicando una prueba de cola superior. Para efectos prácticos aplican comentarios análogos a las pruebas.

Hipótesis	Valor estadístico de prueba	Determinación del valor *P*
H_{0A} contra H_{aA}	$f_A = \dfrac{\text{MSA}}{\text{MSE}}$	Área bajo la curva $F_{I-1,IJ(K-1)}$ a la derecha de f_A
H_{0B} contra H_{aB}	$f_B = \dfrac{\text{MSB}}{\text{MSE}}$	Área bajo la curva $F_{J-1,IJ(K-1)}$ a la derecha de f_B
H_{0AB} contra H_{aAB}	$f_B = \dfrac{\text{MSB}}{\text{MSE}}$	Área bajo la curva $F_{(I-1)(J-1),IJ(K-1)}$ a la derecha de f_{AB}

EJEMPLO 11.7 Se ha encontrado que una mezcla de agregado ligero de asfalto tiene una menor conductividad térmica que una mezcla convencional, lo cual es deseable. El artículo **"Influence of Selected Mix Design Factors on the Thermal Behavior of Lightweight Aggregate Asphalt Mixes"** (***J. of Testing and Eval.*, 2008: 1–8**) informó de un experimento en el que se determinaron varias propiedades térmicas de las mezclas. Tres grados diferentes de carpeta asfáltica fueron usados en combinación con tres diferentes contenidos de agregado grueso (%), con dos observaciones para cada combinación, resultando en los datos de conductividad (W/m.°K) que aparecen en la tabla 11.6.

Tabla 11.6 Datos de conductividad para el ejemplo 11.7

	Contenido de agregado grueso (%)			
Grados de carpeta asfáltica	**38**	**41**	**44**	$\bar{x}_{i\cdot\cdot}$
PG58	.835, .845	.822, .826	.785, .795	.8180
PG64	.855, .865	.832, .836	.790, .800	.8297
PG70	.815, .825	.800, .820	.770, .790	.8033
$\bar{x}_{\cdot j\cdot}$	.8400	.8227	.7883	

En este caso, $I = J = 3$ y $K = 2$, para un total de $IJK = 18$ observaciones. Los resultados del análisis se resumen en la tabla ANOVA que aparece como tabla 11.7 (una tabla con información adicional aparece en el artículo citado).

Tabla 11.7 Tabla para el ejemplo 11.7

Fuente	GL	SS	MS	*f*	*P*
Grcarp	2	.0020893	.0010447	14.12	0.002
Contagr	2	.0082973	.0041487	56.06	0.000
Interacción	4	.0003253	.0000813	1.10	0.414
Error	9	.0006660	.0000740		
Total	17	.0113780			

El valor de *P* para la prueba de la presencia de efectos de interacción es .414, que es claramente más grande que cualquier nivel de significancia razonable, por lo cual la hipótesis nula de interacción no puede ser rechazada. Así pues, al parecer no hay interacción entre los dos factores. Sin embargo, ambos efectos principales son significativos en el nivel de significancia de 5% (.002 ≤ .05 y .000 ≤ .05. alternativamente). Por tanto, parece que la conductividad promedio real depende de qué grado se utiliza, así como del nivel del contenido de agregado grueso.

La figura 11.5 (a) muestra una gráfica de interacción para los datos de conductividad. Advierta los conjuntos de segmentos de recta casi paralelos para los tres diferentes grados de asfalto, de acuerdo con la prueba *F,* que no muestra efectos de interacción significativos. La conductividad promedio real parece disminuir a medida que disminuye el contenido de agregado. La figura 11.5(b) muestra un diagrama de interacción para la *difusividad térmica* cuyos valores aparecen en el artículo citado. Los dos conjuntos de segmentos de recta de la parte inferior están a punto de ser paralelos, pero difieren marcadamente para PG64; de hecho, aquí es muy importante la razón *F* para los efectos de interacción.

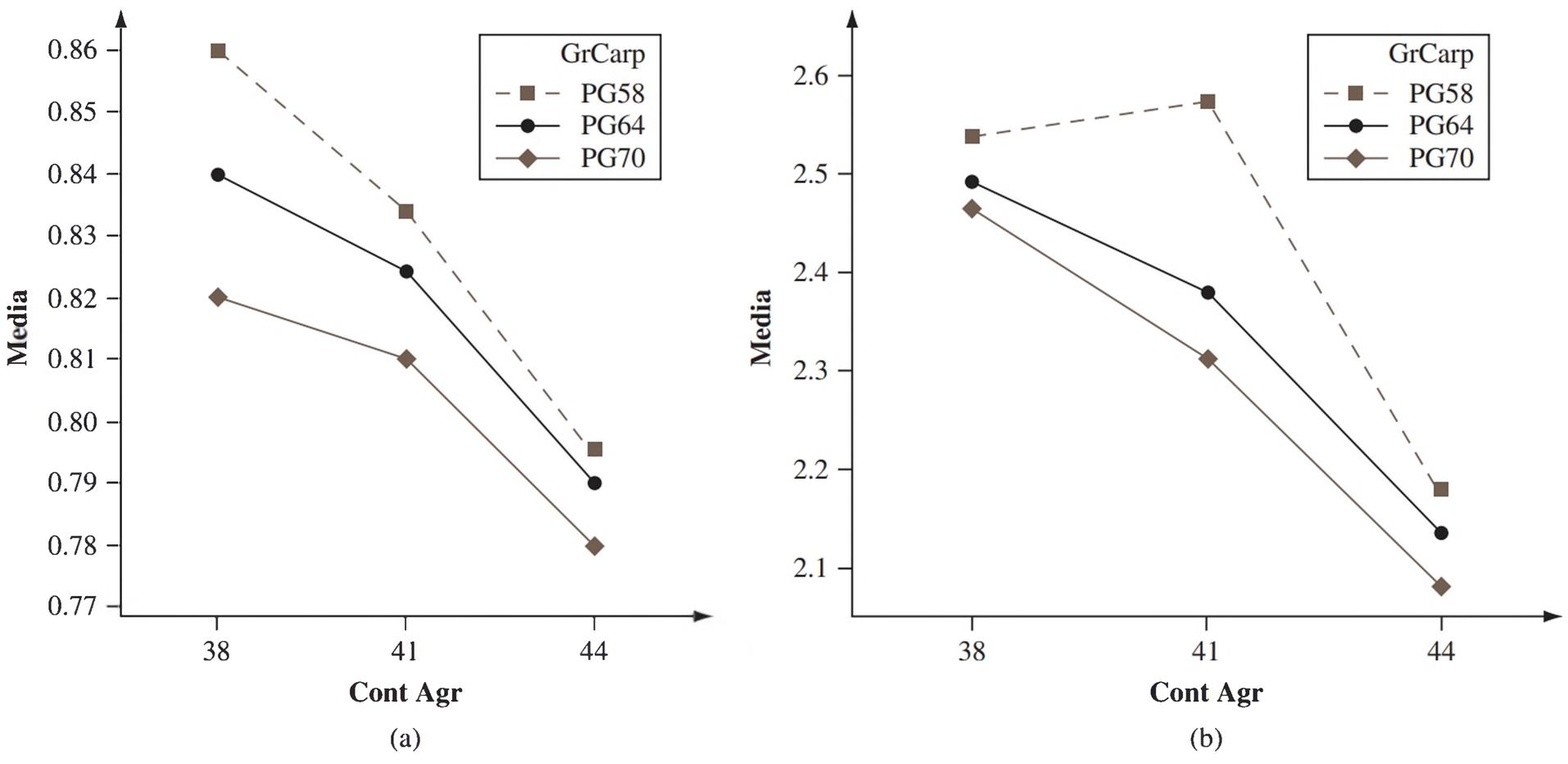


Figura 11.5 Gráficas de interacción para los datos de asfalto del ejemplo 11.7. (a) La variable de respuesta es conductividad. (b) La variable de respuesta es difusividad.

Para verificar la factibilidad de las suposiciones de normalidad y varianza constante se pueden construir gráficas similares a aquellas de la sección 11.1. Defínanse los valores pronosticados (valores ajustados) como las medias de celdas $\hat{x}_{ijk} = \bar{x}_{ij\cdot}$. Por ejemplo, el valor predicho para el grado PG58 y un contenido de agregado 38 es $\hat{x}_{11k} = (.835 + .845)/2 = .840$ para $k = 1, 2$. Los residuos son las diferencias entre las observaciones y los valores pronosticados correspondientes: $x_{ijk} - \bar{x}_{ij\cdot}$. En la figura 11.6(a) se muestra la gráfica de probabilidad normal de los residuos.

El patrón es suficientemente lineal por lo que no hay que preocuparse por la suposición de normalidad. La gráfica de residuos contra los valores ajustados en la figura 11.6(b) muestra una dispersión un poco menor en el lado derecho que en el izquierdo, pero no suficiente para ser una diferencial preocupante, por lo que una varianza constante es una suposición razonable.

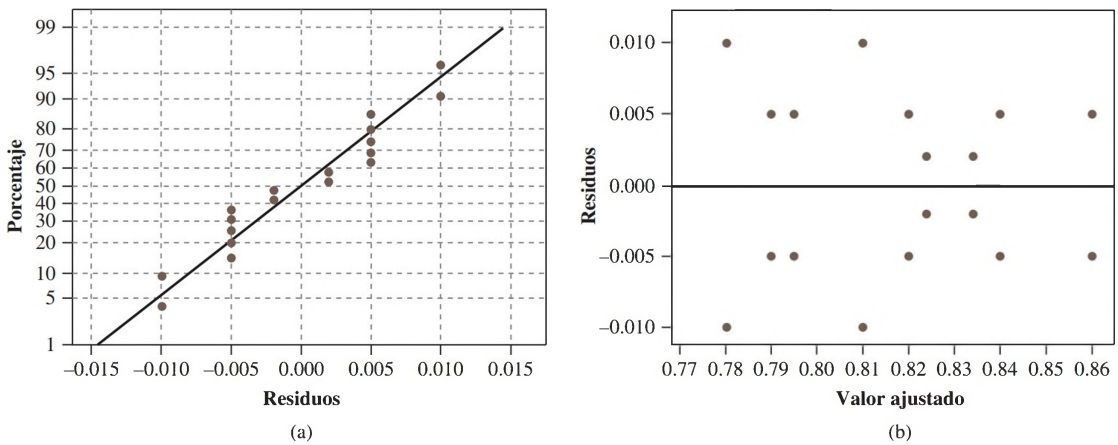


Figura 11.6 Gráficas para verificar las suposiciones de normalidad y varianza constante para el ejemplo 11.7 ■

Comparaciones múltiples

Cuando la hipótesis de no interacción H_{0AB} no es rechazada y al menos una de las dos hipótesis nulas de efecto principal es rechazada, se puede utilizar el método de Tukey para identificar diferencias significativas en los niveles. Para identificar diferencias entre las α_i cuando H_{0A} es rechazada,

1. Se obtiene $Q_{a,IJJ(K-1)}$, donde el segundo subíndice J identifica el número de niveles que se están comparando y el tercero se refiere al número de grados de libertad del error.
2. Se calcula $w = Q\sqrt{\text{MSE}/(JK)}$, donde JK es el número de observaciones promediadas para obtener cada una de las $\bar{x}_{i\cdot\cdot}$ en el paso 3.
3. Se ordenan las $\bar{x}_{i\cdot\cdot}$ desde la más pequeña hasta la más grande, se subrayan todos los pares que difieren por menos de w. Los pares no subrayados corresponden a niveles del factor A significativamente diferentes.

Para identificar niveles diferentes del factor B cuando H_{0B} es rechazada, se reemplaza el segundo subíndice en Q por J, se reemplaza JK por IK en w y se reemplaza $\bar{x}_{i\cdot\cdot}$ por $\bar{x}_{\cdot j\cdot}$.

EJEMPLO 11.8 (Continuación del ejemplo 11.7)

$I = J = 3$, tanto para el factor A (grado) como para el factor B (contenido de agregado). Con $\alpha = 0.05$ y gl del error $= IJ(K-1) = 9$, $Q_{.05,3,9} = 3.95$. El criterio para la identificación de diferencias significativas es entonces $w = 3.95\sqrt{.0000740/6} = .00139$. El *grado* de la media muestral en orden creciente es .8033, .8180 y .8297. Sólo la diferencia entre las dos principales medias es menor que w. Esto da la pauta para subrayar

PG70 PG58 PG64

Los grados PG58 y PG64 no parecen diferir significativamente uno de otro en el efecto sobre la conductividad promedio real, pero ambos difieren de la calificación PG70.

Las medias ordenadas para el factor B son .7883, .8227 y .8400. Los tres pares de medias difieren en más de .00139, por lo que no hay líneas de subrayado. La conductividad promedio real parece ser diferente para los tres niveles de contenido agregado. ■

Modelos con efectos combinados y aleatorios

En algunos problemas es posible que los niveles de uno u otro factor hayan sido seleccionados de una gran población de posibles niveles, así que los efectos aportados por el factor son aleatorios en lugar de fijos. Tal como en la sección 11.1, si ambos factores aportan efectos aleatorios, el modelo se conoce como modelo de efectos aleatorios, en tanto que si un factor es fijo y el otro es aleatorio, resulta un modelo de efectos combinados. Ahora consideraremos el análisis de un modelo de efectos combinados en el cual el factor A (renglones) es el factor fijo y el factor B (columnas) es el factor aleatorio. El caso en el cual ambos factores son aleatorios se aborda en el ejercicio 26.

DEFINICIÓN

El **modelo de efectos combinados** cuando el factor A es fijo y el B es aleatorio es

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + B_j + G_{ij} + \epsilon_{ijk}$$

$$i = 1,\ldots,I, \quad j = 1,\ldots,J, \quad k = 1,\ldots,K$$

Aquí μ y α_i son constantes con $\Sigma\alpha_i = 0$ y las B_j, G_{ij} y ϵ_{ijk} son variables aleatorias independientes normalmente distribuidas con valor esperado 0 y varianzas σ_B^2, σ_G^2 y σ^2, respectivamente.* Las hipótesis relevantes en este caso son algo diferentes de las del modelo de efectos fijos.

H_{0A}: $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 0$	contra	H_{aA}: al menos un $\alpha_i \neq 0$
H_{0B}: $\sigma_B^2 = 0$	contra	H_{aB}: $\sigma_B^2 > 0$
H_{0G}: $\sigma_G^2 = 0$	contra	H_{aG}: $\sigma_G^2 > 0$

Se acostumbra probar H_{0A} y H_{0B} sólo si la hipótesis de no interacción H_{0G} no puede ser rechazada.

Las sumas de cuadrados y medias de cuadrados requeridas para los procedimientos de prueba se definen y calculan con exactitud como en el caso de efectos fijos. Las medias esperadas de cuadrados para el modelo combinado son

$$E(\text{MSE}) = \sigma^2$$

$$E(\text{MSA}) = \sigma^2 + K\sigma_G^2 + \frac{JK}{I-1}\sum\alpha_i^2$$

$$E(\text{MSB}) = \sigma^2 + K\sigma_G^2 + IK\sigma_B^2$$

$$E(\text{MSAB}) = \sigma^2 + K\sigma_G^2$$

El cociente $f_{AB} = \text{MSAB/MSE}$ es de nuevo aplicable para probar la hipótesis de no interacción, con el valor P determinado como en el caso de los efectos fijos. Sin embargo, para probar H_{0A} contra H_{aA}, las medias esperadas de los cuadrados sugieren que aunque el numerador de la razón F debe seguir siendo MSA, el denominador debe ser MSAB en lugar de MSE. MSAB también es el denominador de la razón F para probar H_{0B}.

* A esto se le llama modelo "no restringido". Un modelo "restringido" alternativo requiere que $\Sigma_i G_{ij} = 0$ para toda j (así las G_{ij} dejan de ser independientes). Las medias esperadas de cuadrados y los cocientes F apropiadas para probar ciertas hipótesis dependen del modelo seleccionado. La opción por defecto de Minitab da respuesta al modelo no restringido.

Para probar H_{0A} contra H_{aA} (los factores A fijo, B aleatorio), el valor del estadístico de prueba es f_A = MSA/MSAB y el valor P es el área bajo la curva $F_{I-1,(I-1)(J-1)}$ a la derecha de f_A. La prueba de H_{0B} contra H_{aB} utiliza f_B = MSB/MSAB y el valor P es el área bajo la curva $F_{J-1,(I-1)(J-1)}$ a la derecha de f_B.

EJEMPLO 11.9 Un ingeniero de procesos ha identificado dos causas potenciales de vibración de motores eléctricos, el material utilizado para la carcasa del motor (factor A) y el proveedor de cojinetes utilizados en el motor (factor B). Los siguientes datos sobre la cantidad de vibración (micrones) se obtuvieron mediante un experimento en el cual se construyeron motores con carcasas de acero, aluminio y plástico y cojinetes suministrados por cinco proveedores seleccionados al azar.

		Proveedor				
		1	**2**	**3**	**4**	**5**
Material	**Acero**	13.1 13.2	16.3 15.8	13.7 14.3	15.7 15.8	13.5 12.5
	Aluminio	15.0 14.8	15.7 16.4	13.9 14.3	13.7 14.2	13.4 13.8
	Plástico	14.0 14.3	17.2 16.7	12.4 12.3	14.4 13.9	13.2 13.1

Sólo los tres materiales para carcasas utilizados en el experimento se están considerando para usarse en la producción, de ahí que el factor A sea fijo. Sin embargo, los cinco proveedores fueron seleccionados al azar de una población mucho más grande, de modo que el factor B es aleatorio. Las hipótesis nulas relevantes son

$$H_{0A}: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \qquad H_{0B}: \sigma_B^2 = 0 \qquad H_{0AB}: \sigma_G^2 = 0$$

En la figura 11.7 aparecen los resultados generados por Minitab. La columna de valor P en la tabla ANOVA indica que las últimas dos hipótesis nulas deberán ser rechazadas a un nivel de significancia .05. Los diferentes materiales para carcasas por sí mismos no parecen afectar la vibración, pero la interacción entre el material y el proveedor es una causa significativa de la variación de la vibración.

```
Factor                 Type    Levels    Values
matcarcasas           fixed         3         1    2    3
source               random         5         1    2    3    4    5

Source                   DF           SS           MS           F           P
matcarcasas               2       0.7047       0.3523        0.24       0.790
source                    4      36.6747       9.1687        6.32       0.013
matcarcasas*source        8      11.6053       1.4507       13.03       0.000
Error                    15       1.6700       0.1113
Total                    29      50.6547

Source                    Variance  Error  Expected Mean Square for Each Term
                          component  term  (using unrestricted model)
1 matcarcasas                             3  (4)+2(3)+Q[1]
2 source                     1.2863       3  (4)+2(3)+6(2)
3 matcarcasas*source         0.6697       4  (4)+2(3)
4 Error                      0.1113          (4)
```

Figura 11.7 Salida de Minitab para la opción ANOVA balanceado para los datos del ejemplo 11.9 ■

Cuando al menos dos de las K_{ij} son desiguales, los cálculos ANOVA son mucho más complejos que en el caso $K_{ij} = K$, y existe controversia en cuanto a cuáles procedimientos de prueba deben ser utilizados. Para más información puede consultarse una de las referencias del capítulo.

EJERCICIOS Sección 11.2 (16–26)

16. En un experimento para evaluar los efectos del tiempo de fraguado (factor A) y el tipo de mezcla (factor B) en la resistencia a la compresión de cubos de cemento endurecido, se utilizaron tres tiempos de fraguado diferentes en combinación con cuatro mezclas diferentes, con tres observaciones obtenidas para cada una de las 12 combinaciones de mezcla–tiempo de fraguado. Las sumas de cuadrados resultantes fueron SSA= 30 763.0, SSB= 34 185.6, SSE = 97 436.8 y SST= 205 966.6.

a. Construya una tabla ANOVA.

b. Pruebe al nivel .05 la hipótesis nula H_{0AB}: todas las $\gamma_{ij}= 0$ (ninguna interacción de factores) contra H_{aAB}: al menos una $\gamma_{ij} \neq 0$.

c. Pruebe al nivel .05 la hipótesis nula H_{0A}: $\alpha_1= \alpha_2= \alpha_3= 0$ (efectos principales del factor A ausentes) contra H_{aA}: al menos una $\alpha_i \neq 0$.

d. Pruebe H_{0B}: $\beta_1= \beta_2= \beta_3= \beta_4= 0$ contra H_{aB}: al menos una $\beta_j \neq 0$ utilizando una prueba al nivel .05.

e. Los valores de las $\bar{x}_{i\cdot\cdot}$ fueron $\bar{x}_{1\cdot\cdot} = 4010.88$, $\bar{x}_{2\cdot\cdot} = 4029.10$ y $\bar{x}_{3\cdot\cdot} = 3960.02$. Use el procedimiento de Tukey para investigar diferencias significativas entre los tres tiempos de fraguado.

17. El artículo **"Towards Improving the Properties of Plaster Moulds and Castings" (*J. Engr. Manuf.*, 1991: 265–269)** describe varios ANOVA realizados para estudiar cómo la cantidad de fibra de carbón y las adiciones de arena afectan las diversas características del proceso de moldeo. A continuación se dan datos sobre dureza de la pieza moldeada y la resistencia del molde húmedo.

Adición de arena	Adición de fibra de carbón (%)	Dureza de la pieza fundida	Resistencia de molde húmedo
0	0	61.0	34.0
0	0	63.0	16.0
15	0	67.0	36.0
15	0	69.0	19.0
30	0	65.0	28.0
30	0	74.0	17.0
0	.25	69.0	49.0
0	.25	69.0	48.0
15	.25	69.0	43.0
15	.25	74.0	29.0
30	.25	74.0	31.0
30	.25	72.0	24.0
0	.50	67.0	55.0
0	.50	69.0	60.0
15	.50	69.0	45.0
15	.50	74.0	43.0
30	.50	74.0	22.0
30	.50	74.0	48.0

a. Un ANOVA para la resistencia del molde húmedo da Arena SS = 705, FibraSS = 1278, SSE = 843 y SST = 3105. Pruebe en busca de cualquier otros efecto con $\alpha = .05$.

b. Realice un ANOVA de las observaciones de dureza de la pieza fundida con $\alpha = .05$.

c. Grafique la dureza media muestral contra el porcentaje de arena con niveles diferentes de fibra de carbón. ¿Será consistente la gráfica con su análisis en el inciso b)?

18. Los siguientes datos se obtuvieron mediante un experimento para investigar si el rendimiento con un cierto proceso químico dependía de la formulación de una entrada particular o de la velocidad del mezclador.

		Velocidad		
		60	**70**	**80**
Formulación	**1**	189.7	185.1	189.0
		188.6	179.4	193.0
		190.1	177.3	191.1
	2	165.1	161.7	163.3
		165.9	159.8	166.6
		167.6	161.6	170.3

Un programa estadístico dio SS(Forma)= 2253.44, SS(Velocidad) = 230.81, SS(Forma*Velocidad)= 18.58 y SSE= 71.87.

a. ¿Parece haber interacción entre los factores?

b. ¿Será que el rendimiento depende de la formulación o la velocidad?

c. Calcule las estimaciones de los efectos principales.

d. Los *valores ajustados* son $\hat{x}_{ijk} = \hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j + \hat{\gamma}_{ij}$ y los *residuos* son $x_{ijk} - \hat{x}_{ijk}$. Verifique que los residuos sean .23, −.87, .63, 4.50, −1.20, −3.30, −2.03, 1.97, .07, −1.10, −.30, 1.40, .67, −1.23, .57, −3.43, −.13, y 3.57.

e. Construya una gráfica de probabilidad normal con los residuos dados en el inciso d). ¿Parecen estar normalmente distribuidas las ϵ_{ijk}?

19. Se llevó a cabo un ANOVA de dos vías para determinar el impacto del tipo de granja (gubernamental agrícola, establecida, individual) y el método de manutención de tractores (preventivo, predictivo, de corrimiento, correctivo, reacondicionamiento, avería) sobre la variable de respuesta *contribución de las prácticas de mantenimiento.* Se hicieron dos observaciones para el nivel de cada combinación de factores. Las sumas de cuadrados resultantes fueron SSA = 35.75 (A = tipo de granja), SSB = 861.20, SSAB = 603.51 y SSE = 341.82 **("Appraisal of Farm Practice Maintenance and Costs in Nigeria, "*J. Of Quality in maintenance Engr.*, 2005: 152–168)**. Asumiendo que los efectos de ambos factores son fijos, construya una tabla de prueba de ANOVA para la presencia de interacciones, y posteriormente pruebe la presencia de los efectos principales por cada factor (todo usando un nivel de .01).

20. El artículo **"Fatigue Limits of Enamel Bonds with Moist and Dry Techniques" (*Dental Materials*, 2009: 1527–1531)** describe un experimento para investigar la capacidad de los sistemas adhesivos para unir las estructuras mineralizadas de los dientes. La respuesta variable es la fuerza de cizalla (MPa) y dos diferentes adhesivos (Adper Single Bond Plus (SBP) y OptiBond Solo Plus (OBP)) se utilizan en combinación con dos diferentes condiciones de la superficie. Los siguientes datos fueron suministrados por los autores del artículo. Las primeras 12 observaciones provienen del tratamiento SBP-seco, los siguientes 12 del tratamiento SBP-húmedo, los siguientes 12 del tratamiento OBP-seco y los últimos 12 proceden del tratamiento OBP-húmedo.

56.7	57.4	53.4	54.0	49.9	49.9
56.2	51.9	49.6	45.7	56.8	54.1
49.2	47.4	53.7	50.6	62.7	48.8
41.0	57.4	51.4	53.4	55.2	38.9
38.8	46.0	38.0	47.0	46.2	39.8
25.9	37.8	43.4	40.2	35.4	40.3
40.6	35.5	58.7	50.4	43.1	61.7
33.3	38.7	45.4	47.2	53.3	44.9

a. Construya un diagrama de caja comparativo de los datos de los cuatro tratamientos diferentes y coméntelo.

b. Lleve a cabo un análisis adecuado de la varianza y exprese sus conclusiones (utilice un nivel de significancia de .01 para las pruebas). Incluya todos las gráficas que permitan apreciarlo.

c. Si se utiliza un nivel de significancia .05 para el ANOVA de dos vías, el efecto de la interacción es significativo (al igual que en general los pegamentos diferentes funcionan mejor con unos materiales que con otros). Así que ahora tiene sentido llevar a cabo un ANOVA unidireccional en los cuatro tratamientos SBP-S, SBP-H, OBP-S y OBP-H. Haga esto y determine las diferencias significativas entre los tratamientos.

21. En un experimento para investigar el efecto del "factor cemento" (número de sacos de cemento por yarda cúbica) en la resistencia a la flexión del concreto resultante **("Studies of Flexural Strength of Concrete, Part 3: Effects of Variation in Testing Procedure", *Proceedings* ASTM, 1957: 1127–1139)** se utilizaron $I = 3$ valores de factor diferentes, se seleccionaron $J = 5$ lotes diferentes de cemento y se vaciaron $K = 2$ vigas con cada combinación de factor cemento/lote. Las sumas de cuadrados incluyen SSA= 22 941.80, SSB= 22 765.53, SSE = 15 253.50 y SST = 64 954.70. Construya la tabla ANOVA. Después, suponiendo un modelo combinado con factor de cemento (A) fijo y lotes (B) aleatorios, pruebe los tres pares de hipótesis de interés al nivel .05.

22. Se realizó un estudio para comparar las vidas útiles de escritura de cuatro marcas premium de plumas. Se pensaba que la superficie de escritura podría afectar la vida útil, así que se seleccionaron al azar tres superficies diferentes. Se utilizó una máquina de escritura para asegurar que las condiciones permanecieran homogéneas (p. ej., presión constante y un ángulo fijo). La tabla siguiente muestra las dos vidas útiles (min) obtenidas con cada combinación de marca–superficie.

		Superficie de escritura			
		1	**2**	**3**	$x_{i\cdot\cdot}$
Marca de pluma	**1**	709 659	713 726	660 645	4112
	2	668 685	722 740	692 720	4227
	3	659 685	666 684	678 750	4122
	4	698 650	704 666	686 733	4137
	$x_{\cdot j\cdot}$	5413	5621	5564	16 598

Realice un ANOVA apropiado y exprese su conclusión.

23. Los siguientes datos se obtuvieron mediante un experimento para investigar si la resistencia a la compresión de cilindros de concreto depende del tipo de material de remate utilizado o de la variabilidad de los diferentes lotes **("The Effect of Type of Capping Material on the Compressive Strength of Concrete Cilinders", *Proceedings* ASTM, 1958: 1166–1186)**. Cada número es un total de celda ($x_{ij\cdot}$) basado en $K = 3$ observaciones.

		Lote				
		1	**2**	**3**	**4**	**5**
Material de remate	**1**	1847	1942	1935	1891	1795
	2	1779	1850	1795	1785	1626
	3	1806	1892	1889	1891	1756

Además, $\Sigma\Sigma\Sigma x_{ijk}^2 = 16\,815\,853$ y $\Sigma\Sigma\Sigma x_{ij\cdot}^2 = 50\,443\,409$. Obtenga la tabla ANOVA y luego pruebe al nivel .01 las hipótesis H_{0G} contra H_{aG}, H_{0A} contra H_{aA} y H_{0B} contra H_{aB}, suponiendo que el remate es un efecto fijo y los lotes son un efecto aleatorio.

24. **a.** Demuestre que $E(\overline{X}_{i\cdot\cdot} - \overline{X}_{\cdot\cdot\cdot}) = \alpha_i$, de modo que $\overline{X}_{i\cdot\cdot} - \overline{X}_{\cdot\cdot\cdot}$ es un estimador insesgado de α_i (en el modelo de efectos fijos.

b. Con $\hat{\gamma}_{ij} = \overline{X}_{ij\cdot} - \overline{X}_{i\cdot\cdot} - \overline{X}_{\cdot j\cdot} + \overline{X}_{\cdot\cdot\cdot}$, demuestre que $\hat{\gamma}_{ij}$ es un estimador insesgado de γ_{ij} (en el modelo de efectos fijos).

25. Demuestre cómo se puede obtener un intervalo de confianza t de $100(1 - \alpha)\%$ para $\alpha_i - \alpha_{i'}$. Luego calcule un intervalo de 95% para $\alpha_2 - \alpha_3$ con los datos del ejercicio 19. [*Sugerencia*: Con $\theta = \alpha_2 - \alpha_3$, el resultado del ejercicio 24(a) indica cómo obtener $\hat{\theta}$. En seguida calcule $V(\hat{\theta})$ y $\sigma_{\hat{\theta}}$, y obtenga una estimación de $\sigma_{\hat{\theta}}$ con $\sqrt{\text{MSE}}$ para estimar σ (la cual identifica el número de grados de libertad apropiado).]

26. Cuando ambos factores son aleatorios en un experimento ANOVA bidireccional con K réplicas por cada combinación de niveles de factor, los cuadrados medios esperados $E(\text{MSE}) = \sigma^2$, $E(\text{MSA}) = \sigma^2 + K\sigma_G^2 + JK\sigma_A^2$, $E(\text{MSB}) = \sigma^2 + K\sigma_G^2 + IK\sigma_B^2$ y $E(\text{MSAB}) = \sigma^2 + K\sigma_G^2$.

a. ¿Qué cociente F es apropiado para probar H_{0G}: $\sigma_G^2 = 0$ contra H_{aG}: $\sigma_G^2 > 0$?

b. Responda el inciso a) para probar H_{0A}: $\sigma_A^2 = 0$ contra H_{aA}: $\sigma_A^2 > 0$ y H_{0B}: $\sigma_B^2 = 0$ contra H_{aB}: $\sigma_B^2 > 0$.

11.3 ANOVA con tres factores

Para indicar la naturaleza de los modelos y análisis cuando los experimentos ANOVA implican más de dos factores, aquí se abordará el caso de tres factores fijos: A, B y C. Los números de niveles de los tres factores se denotarán por I, J y K, respectivamente y L_{ijk} = el número de observaciones realizadas con el factor A al nivel i, el factor B al nivel j y el factor C al nivel k. El análisis es bastante complicado cuando las L_{ijk} no son iguales, por lo que se hace $L_{ijk} = L$. En ese caso X_{ijkl} y x_{ijkl} denotan el valor observado, antes y después de que se realiza el experimento de la l-ésima réplica ($l = 1, 2,..., L$) cuando los tres factores están fijos en los niveles i, j y k.

Para entender los parámetros que aparecerán en el modelo ANOVA trifactorial, primero recuerde que en el ANOVA bifactorial con réplicas, $E(X_{ijk}) = \mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij}$, donde las restricciones $\Sigma_i\alpha_i = \Sigma_j\beta_j = 0$, $\Sigma_i\gamma_{ij} = 0$ por cada j y $\Sigma_j\gamma_{ij} = 0$ por cada i eran necesarias para obtener un conjunto único de parámetros. Si se utilizan subíndices puntuales en las μ_{ij} para denotar el cálculo de promedios (en lugar de suma), entonces

$$\mu_{i\cdot} - \mu_{\cdot\cdot} = \frac{1}{J}\sum_j \mu_{ij} - \frac{1}{IJ}\sum_i\sum_j \mu_{ij} = \alpha_i$$

es el efecto del factor A al nivel i promediado a todos los niveles del factor B, mientras que

$$\mu_{ij} - \mu_{\cdot j} = \mu_{ij} - \frac{1}{I}\sum_i \mu_{ij} = \alpha_i + \gamma_{ij}$$

es el efecto del factor A al nivel i específico del factor B al nivel j. Si el efecto de A al nivel i depende del nivel de B, entonces existe interacción entre los factores y las γ_{ij} no son todas cero. En particular,

$$\mu_{ij} - \mu_{\cdot j} - \mu_{i\cdot} + \mu_{\cdot\cdot} = \gamma_{ij} \tag{11.11}$$

Modelo de efectos fijos y procedimientos de prueba

El **modelo de efectos fijos para ANOVA con tres factores** con $L_{ijk} = L$ es

$$X_{ijkl} = \mu_{ijk} + \varepsilon_{ijkl} \quad i = 1,\ldots,I, \quad j = 1,\ldots,J, \quad k = 1,\ldots,K, \quad l = 1,\ldots,L \tag{11.12}$$

donde las ϵ_{ijkl} están normalmente distribuidas con media 0 y varianza σ^2 y

$$\mu_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_i + \delta_k + \gamma_{ij}^{AB} + \gamma_{ik}^{AC} + \gamma_{jk}^{BC} + \gamma_{ijk} \tag{11.13}$$

Las restricciones necesarias para obtener parámetros unívocamente definidos son que la suma para cualquier subíndice de cualquier parámetro a la derecha de (11.13) sea igual a cero.

Los parámetros γ_{ij}^{AB}, γ_{ik}^{AC} y γ_{jk}^{BC} se llaman interacciones de dos factores y γ_{ijk} se llama interacción de tres factores; las α_i, β_j y δ_k son los parámetros de los efectos principales. A cualquier nivel fijo k del tercer factor, análogo a (11.11),

$$\mu_{ijk} - \mu_{i\cdot k} - \mu_{\cdot jk} + \mu_{\cdot\cdot k} = \gamma_{ij}^{AB} + \gamma_{ijk}$$

es la interacción del i-ésimo nivel de A con el j-ésimo nivel de B específico del k-ésimo nivel de C, mientras que

$$\mu_{ij\cdot} - \mu_{i\cdot\cdot} - \mu_{\cdot j\cdot} + \mu_{\cdots} = \gamma_{ij}^{AB}$$

es la interacción entre A al nivel i y B al nivel j promediada a todos los niveles de C. Si la interacción de A al nivel i y B al nivel j no depende de k, entonces todas las γ_{ijk} son iguales a 0. Por tanto las γ_{ijk} diferentes de cero representan no aditividad de las γ_{ij}^{AB} para dos factores a los varios niveles del tercer factor C. Si el experimento incluyó más de tres factores, habría términos de interacción de mayor grado correspondientes con interpretaciones análogas. Observe que en el argumento previo, si se hubiera considerado fijar el nivel de A o B (en lugar del de C, como se hizo) y examinando las γ_{ijk} su interpretación sería la misma; si cualquiera de las interacciones de dos factores dependen del nivel del tercer factor, entonces hay γ_{ijk} no nulas.

Cuando $L > 1$ existe una suma de cuadrados por cada efecto principal, por cada interacción de dos factores y por la interacción de tres factores. Para escribirlas en una forma que indique cómo se definen las sumas de cuadrados cuando existen más de tres factores, observe que cualquiera de los parámetros de modelo en (11.13) puede ser estimado insesgadamente promediando X_{ijkl} para los subíndices apropiados y considerando las diferencias. Por tanto,

$$\hat{\mu} = \overline{X}_{....} \qquad \hat{\alpha}_i = \overline{X}_{i...} - \overline{X}_{....} \qquad \hat{\gamma}_{ij}^{AB} = \overline{X}_{ij..} - \overline{X}_{i...} - \overline{X}_{.j..} + \overline{X}_{....}$$

$$\hat{\gamma}_{ijk} = \overline{X}_{ijk.} - \overline{X}_{ij..} - \overline{X}_{i\cdot k.} - \overline{X}_{.jk.} + \overline{X}_{i...} + \overline{X}_{.j..} + \overline{X}_{..k.} - \overline{X}_{....}$$

con los demás efectos principales y estimadores de interacción obtenidos por simetría.

DEFINICIÓN

Las **sumas de cuadrados** apropiadas son,

$$\text{SST} = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l (X_{ijkl} - \overline{X}_{....})^2 \qquad \text{gl} = IJKL - 1$$

$$\text{SSA} = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \hat{\alpha}_i^2 = JKL \sum_i (\overline{X}_{i...} - \overline{X}_{....})^2 \qquad \text{gl} = I - 1$$

$$\text{SSAB} = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l (\hat{\gamma}_{ij}^{AB})^2 \qquad \text{gl} = (I-1)(J-1)$$

$$= KL \sum_i \sum_j (\overline{X}_{ij..} - \overline{X}_{i...} - \overline{X}_{.j..} + \overline{X}_{....})^2$$

$$\text{SSABC} = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \hat{\gamma}_{ijk}^2 = L \sum_i \sum_j \sum_k \hat{\gamma}_{ijk}^2 \qquad \text{gl} = (I-1)(J-1)(K-1)$$

$$\text{SSE} = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l (X_{ijkl} - \overline{X}_{ijk.})^2 \qquad \text{gl} = IJK(L-1)$$

con los demás efectos principales y las sumas de cuadrados de interacción de dos factores obtenidos por simetría. SST es la suma de las otras ocho sumas de cuadrados (SS).

Cada suma de cuadrados (excepto SST) cuando se divide entre sus grados de libertad da un cuadrado medio. Las medias esperadas de los cuadrados son

$$E(\text{MSE}) = \sigma^2$$

$$E(\text{MSA}) = \sigma^2 + \frac{JKL}{I-1} \sum_i \alpha_i^2$$

$$E(\text{MSAB}) = \sigma^2 + \frac{KL}{(I-1)(J-1)} \sum_i \sum_j (\gamma_{ij}^{AB})^2$$

$$E(\text{MSABC}) = \sigma^2 + \frac{L}{(I-1)(J-1)(K-1)} \sum_i \sum_j \sum_k (\gamma_{ijk})^2$$

con expresiones similares para las demás medias esperadas de cuadrados. El efecto principal y las hipótesis de interacción se prueban formando razones F con MSE en cada denominador.

Hipótesis nula	Valor estadístico de prueba	Determinación del valor *P*
H_{0A}: todas las $\alpha_i = 0$	$f_A = \dfrac{\text{MSA}}{\text{MSE}}$	Área bajo la curva $F_{I-1,IJK(L-1)}$ a la derecha de f_A
H_{0AB}: todas las $\gamma_{ij}^{AB} = 0$	$f_{AB} = \dfrac{\text{MSAB}}{\text{MSE}}$	Área bajo la curva $F_{(I-1)(J-1),IJK(L-1)}$ a la derecha de f_{AB}
H_{0ABC}: todas las $\gamma_{ijk} = 0$	$f_{ABC} = \dfrac{\text{MSABC}}{\text{MSE}}$	Área bajo la curva $F_{(I-1)(J-1)(K-1),IJK(L-1)}$ a la derecha de f_{ABC}

Normalmente las hipótesis de efecto principal se prueban sólo si todas las interacciones no son significativas.

Este análisis asume que $L_{ijk} = L > 1$. Si $L = 1$, entonces tal como en el caso de dos factores, las interacciones de alto grado deben suponerse iguales a 0 para obtener un MSE que estime σ^2. Con $L = 1$ y haciendo caso omiso de la suma para el cuarto subíndice l, las fórmulas anteriores para las sumas de cuadrados continúan siendo válidas y la suma de cuadrados en cuanto a error es $\text{SSE} = \Sigma_i\Sigma_j\Sigma_k\hat{\gamma}_{ijk}^2$ con $\overline{X}_{ijk\cdot} = X_{ijk}$ en la expresión para $\hat{\gamma}_{ijk}$.

EJEMPLO 11.10 En años recientes ha incrementado el interés en los combustibles renovables como el biodiesel, una forma de diesel derivada de aceites vegetales y grasas animales. Las ventajas de este último sobre el diesel de petróleo incluyen la ausencia de toxicidad, su biodegradabilidad y la baja emisión de gases invernadero. El artículo **"Application of the Full Factorial Design to Optimization of Base–Catalyzed Sunflower Oil Ethanolysis" (*Fuel*, 2013: 433–442)** reporta una investigación de tres factores sobre la pureza (%) del biodiesel *etil éster de ácidos grasos* (FAEE, por sus siglas en inglés). Los factores y niveles son los siguientes:

A:	Temperatura de reacción	25°C, 50°C, 75°C
B:	Relación molar etanol-aceite	6:1, 9:1, 12:1
C:	Sobrecarga de catalizador	.75 wt.%, 1.00 wt.%, 1.25 wt. %

Los datos aparecen en la tabla 11.8, donde $I = J = K = 3$ y $L = 2$

Tabla 11.8 Datos de pureza (%) para el ejemplo 11.10

	B_1			B_2			B_3		
	C_1	C_2	C_3	C_1	C_2	C_3	C_1	C_2	C_3
A_1	81.07	88.71	95.42	81.54	89.12	96.32	86.07	92.05	97.02
	82.22	87.61	94.06	82.82	86.49	95.45	87.73	91.72	96.16
A_2	87.31	89.52	94.68	87.99	90.05	96.44	89.61	90.32	98.30
	87.94	88.75	95.45	88.98	90.42	96.47	89.02	90.61	96.62
A_3	90.66	91.60	93.65	92.14	92.55	97.41	92.88	96.12	97.66
	91.87	92.34	95.73	92.22	97.06	97.08	93.30	97.41	97.59

La tabla de ANOVA resultante se muestra en la tabla 11.9. el valor crítico para probar H_{0ABC} es .165, el cual es mayor que cualquier nivel de significancia sensible. Esta hipótesis nula, por tanto, no puede ser rechazada; al parecer el grado de interacción entre cualquier par de factores es el mismo para cualquier nivel del factor restante.

La figura 11.8 muestra gráficas de interacción de dos factores. Por ejemplo, los puntos que aparecen en la línea *C* y la columna *B* representan los $\overline{x}_{\cdot jk\cdot}$ correspondientes, esto es,

Tabla 11.9 Tabla de Anova para los datos de pureza del ejemplo 11.10

Origen	GL	SS	MS	F	P
A	2	215.385	107.692	112.07	0.000
B	2	74.506	37.253	38.77	0.000
C	2	602.717	301.358	313.60	0.000
A*B	4	13.452	3.363	3.50	0.020
A*C	4	107.409	26.852	27.94	0.000
B*C	4	4.374	1.094	1.14	0.360
A*B*C	8	12.472	1.559	1.62	0.165

las observaciones promediadas de los niveles del primer factor para cada combinación de niveles del segundo y tercer factores. Los tres puntos inferiores conectados por segmentos sólidos de una recta representan el tercer nivel del factor C en cada nivel del factor B. El hecho de que los segmentos de recta conectados estén bastante cerca para ser paralelos es evidencia de la ausencia de interacciones BC, y de hecho, el valor crítico en la tabla 11.9 para probar esta hipótesis nula es de .360. Sin embargo, los valores críticos para probar H_{0AB} y H_{0AC} son .020 y .000, respectivamente. Por lo que a un nivel de significancia de .05, estamos obligados a concluir que las interacciones AB y AC están presentes. Los segmentos de recta en la gráfica de interacción AC claramente no están lo suficientemente cerca para ser paralelos. Al parecer, a partir de las gráficas de interacción, la pureza esperada será maximizada cuando todos los factores estén en sus niveles más altos. Como suele suceder, esto también ocurre en las gráficas de los efectos principales, pero no es generalmente confiable cuando hay interacciones presentes.

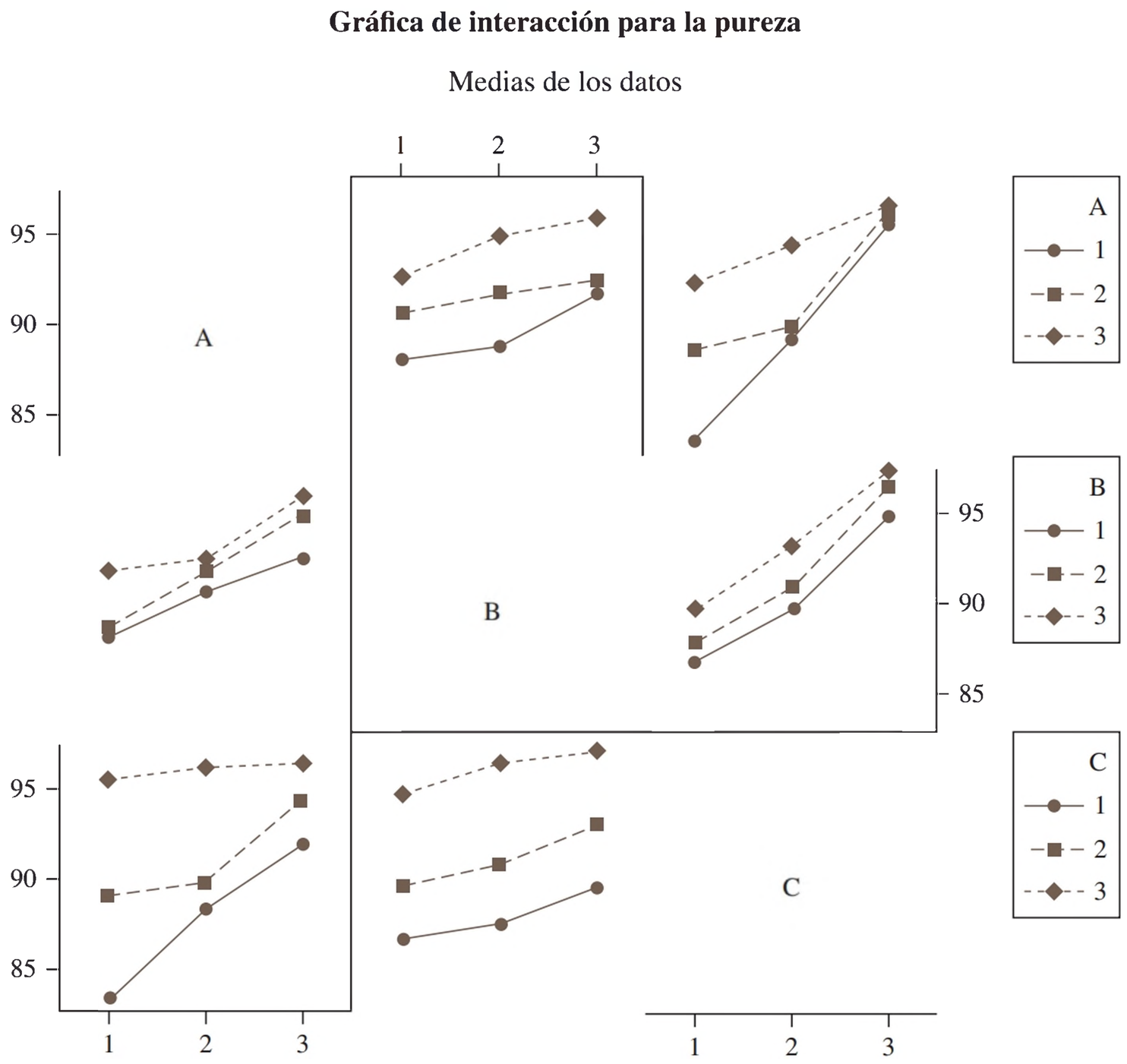


Figura 11.8 Gráfica de interacción y efectos principales de MINITAB para el ejemplo 11.10

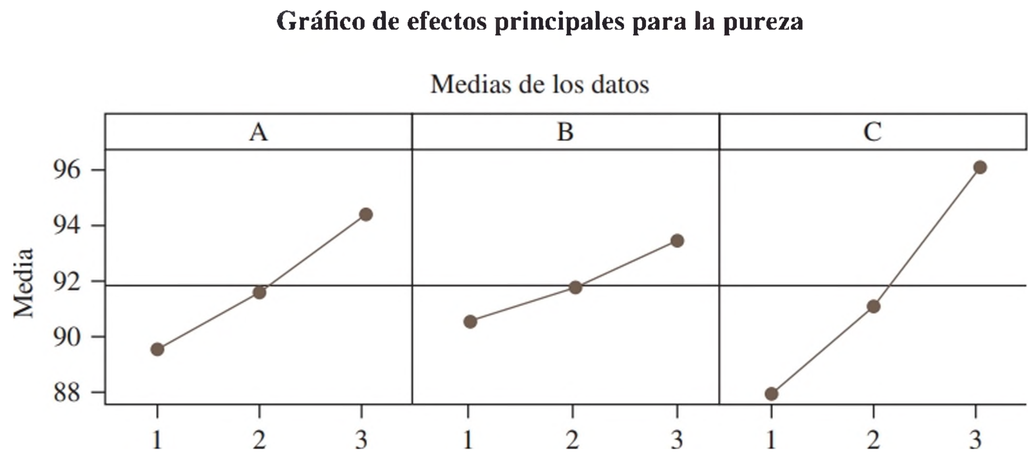


Figura 11.8 (continuación)

Se pueden construir gráficas de diagnóstico para verificar las suposiciones de normalidad y varianza constante tal como se describió en secciones previas. Se puede utilizar el procedimiento de Tukey en ANOVA de tres factores (o más). El segundo subíndice en Q es el número de medias muestrales que se están comparando y el tercero es grados de libertad para error.

Los modelos con efectos aleatorios y combinados en ocasiones también son apropiados. Las sumas de cuadrados y grados de libertad son idénticas al caso de efectos fijos, pero las medias esperadas de los cuadrados son, desde luego, diferentes para los efectos principales aleatorios o interacciones. Una buena referencia es el librvao de Douglas Montgomery que aparece en la bibliografía del capítulo.

Diseños de cuadrados latinos

Cuando varios factores tienen que ser estudiados al mismo tiempo, un experimento en el cual existe al menos una observación por cada combinación posible de niveles se conoce como **diseño completo**. Si los factores son A, B y C con I, J y K niveles, respectivamente, un diseño completo requiere al menos IJK observaciones. Con frecuencia un experimento de este tamaño es impracticable debido a las restricciones de costo, tiempo o espacio, o literalmente imposible. Por ejemplo, si la variable de respuesta es ventas de un cierto producto y los factores son configuraciones de exhibición diferentes, diferentes tiendas y diferentes lapsos de tiempo, entonces sólo una configuración de exhibición puede ser usada de manera realista en una tienda dada en un lapso de tiempo dado.

Un experimento con tres factores en el cual se realizan menos de IJK observaciones se llama **diseño incompleto**. Existen algunos diseños incompletos en los cuales el patrón de combinaciones de factores es tal que el análisis es directo. Un diseño de tres factores como ese se llama diseño de **cuadrado latino**. Este es apropiado cuando $I = J = K$ (p. ej., cuatro configuraciones de exhibición, cuatro tiendas y cuatro lapsos de tiempo) y todos los efectos de interacción de dos y tres factores se suponen ausentes. Si los niveles del factor A están identificados con los renglones de una tabla bidireccional y los niveles de B, con las columnas de la tabla, entonces la característica definitoria de un diseño de cuadrado latino es que *cada nivel del factor C aparece exactamente una vez en cada renglón y exactamente una vez en cada columna*. La figura 11.9 ilustra ejemplos de cuadrados latinos de 3×3, 4×4 y 5×5. Existen 12 cuadrados latinos

		B		
	C	1	2	3
A	1	1	2	3
	2	2	3	1
	3	3	1	2

		B			
	C	1	2	3	4
A	1	3	4	2	1
	2	4	2	1	3
	3	2	1	3	4
	4	1	3	4	2

		B				
	C	1	2	3	4	5
A	1	4	3	5	2	1
	2	3	1	4	5	2
	3	1	5	2	3	4
	4	5	2	1	4	3
	5	2	4	3	1	5

Figura 11.9 Ejemplos de cuadrados latinos

diferentes de 3×3 y el número de cuadrados latinos diferentes se incrementa con rapidez con el número de niveles (p. ej., cada permutación de los renglones de un cuadrado latino dado produce un cuadrado latino y, de igual forma, en el caso de permutaciones de columnas). Se recomienda que el cuadrado utilizado en realidad en un experimento particular se elija al azar del conjunto de todos los cuadrados posibles de la dimensión deseada; para más detalles consulte una de las referencias del capítulo.

Se utilizará la letra N para denotar el valor común de I, J y K. Entonces un diseño completo con una observación por cada combinación requerirá N^3 observaciones, en tanto que un cuadrado latino requiere sólo N^2 observaciones. Una vez que se selecciona un cuadrado particular, el valor de k (el nivel del factor C) queda determinado por completo por los valores de i y j. Para recalcar esto, se utiliza $x_{ij(k)}$ para denotar el valor observado cuando los tres factores están a los niveles i, j y k, respectivamente, con k tomando sólo un valor por cada par i, j.

La ecuación modelo para un diseño de cuadrado latino es

$$X_{ij(k)} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \delta_k + \epsilon_{ij(k)} \quad i, j, k = 1, \ldots, N$$

donde $\Sigma\alpha_i = \Sigma\beta_j = \Sigma\delta_k = 0$ y las $\epsilon_{ij(k)}$ son independientes y normalmente distribuidas con media 0 y varianza σ^2.

Para los totales y promedios se emplea la siguiente notación:

$$X_{i\cdot\cdot} = \sum_j X_{ij(k)} \qquad X_{\cdot j\cdot} = \sum_i X_{ij(k)} \qquad X_{\cdot\cdot k} = \sum_{i,j} X_{ij(k)} \qquad X_{\ldots} = \sum_i \sum_j X_{ij(k)}$$

$$\bar{X}_{i\cdot\cdot} = \frac{X_{i\cdot\cdot}}{N} \qquad \bar{X}_{\cdot j\cdot} = \frac{X_{\cdot j\cdot}}{N} \qquad \bar{X}_{\cdot\cdot k} = \frac{X_{\cdot\cdot k}}{N} \qquad \bar{X}_{\ldots} = \frac{X_{\ldots}}{N^2}$$

Observe que aunque $X_{i\cdot\cdot}$ previamente sugería una suma doble, ahora corresponde a una sola suma para todas las j (y los valores asociados de k).

DEFINICIÓN

Las **sumas de cuadrados** para un experimento de cuadrado latino son

$$\text{SST} = \sum_i \sum_j (X_{ij(k)} - \bar{X}_{\ldots})^2 \qquad \text{gl} = N^2 - 1$$

$$\text{SSA} = \sum_i \sum_j (\bar{X}_{i\cdot\cdot} - \bar{X}_{\ldots})^2 \qquad \text{gl} = N - 1$$

$$\text{SSB} = \sum_i \sum_j (\bar{X}_{\cdot j\cdot} - \bar{X}_{\ldots})^2 \qquad \text{gl} = N - 1$$

$$\text{SSC} = \sum_i \sum_j (\bar{X}_{\cdot\cdot k} - \bar{X}_{\ldots})^2 \qquad \text{gl} = N - 1$$

$$\text{SSE} = \sum_i \sum_j [X_{ij(k)} - (\hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j + \hat{\delta}_k)]^2 \qquad \text{gl} = N - 1$$

$$= \sum_i \sum_j (X_{ij(k)} - \bar{X}_{i\cdot\cdot} - \bar{X}_{\cdot j\cdot} - \bar{X}_{\cdot\cdot k} + 2\bar{X}_{\ldots})^2 \qquad \text{gl} = (N-1)(N-2)$$

$$\text{SST} = \text{SSA} + \text{SSB} + \text{SSC} + \text{SSE}$$

Cada media de cuadrados es, por supuesto, la razón SS/gl. Para probar H_{0C}: $\delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_N = 0$, el valor del estadístico de prueba es $f_C = \text{MSC/MSE}$, y el valor P es el área bajo la curva $F_{N-1,(N-1)(N-2)}$ a la derecha de f_C. Las otras dos hipótesis nulas para efectos principales también se prueban de manera similar.

Si cualquiera de las hipótesis nulas es rechazada, las diferencias significativas pueden ser identificadas mediante el procedimiento de Tukey. Después de calcular

$w = Q_{\alpha,N,(N-1)(N-2)} \cdot \sqrt{\text{MSE/N}}$, los pares de medias muestrales (las $\overline{x}_{i\cdot\cdot}$, $\overline{x}_{\cdot j\cdot}$ o $\overline{x}_{\cdot\cdot k}$) que difieren por más de w corresponden a diferencias significativas entre los efectos del factor asociado (las α_i, β_j o δ_k).

La hipótesis H_{0C} es con frecuencia la de interés central. Se utiliza un diseño de cuadrado latino para controlar la variación externa de los factores A y B, como se hizo mediante un diseño de bloques aleatorizados en el caso de un factor externo único. Así pues en el ejemplo de ventas de productos previamente mencionado, la variación debida tanto a las tiendas como a los lapsos de tiempo es controlada por un diseño de cuadrado latino, lo que permite que un investigador probar la presencia de efectos producidos por las diferentes configuraciones de exhibición de los productos.

EJEMPLO 11.11 En un experimento para investigar el efecto de la humedad relativa en la resistencia a la abrasión de piel recortada de un patrón rectangular (**"The Abrasion of Leather", *J. Inter. Soc. Leather Trades' Chemists*, 1946: 287**), se utilizó un cuadrado latino de 6 × 6 para controlar la posible variabilidad a causa de la posición en los renglones y columnas del patrón. Los seis niveles de humedad relativa estudiados fueron 1 = 25%, 2 = 37%, 3 = 50%, 4 = 62%, 5 = 75% y 6 = 87% con los siguientes resultados:

		***B* (columnas)**						
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	$x_{i\cdot\cdot}$
***A* (renglones)**	**1**	$^{3}7.38$	$^{4}5.39$	$^{6}5.03$	$^{2}5.50$	$^{5}5.01$	$^{1}6.79$	35.10
	2	$^{2}7.15$	$^{1}8.16$	$^{5}4.96$	$^{4}5.78$	$^{3}6.24$	$^{6}5.06$	37.35
	3	$^{4}6.75$	$^{6}5.64$	$^{3}6.34$	$^{5}5.31$	$^{1}7.81$	$^{2}8.05$	39.90
	4	$^{1}8.05$	$^{3}6.45$	$^{2}6.31$	$^{6}5.46$	$^{4}6.05$	$^{5}5.51$	37.83
	5	$^{6}5.65$	$^{5}5.44$	$^{1}7.27$	$^{3}6.54$	$^{2}7.03$	$^{4}5.96$	37.89
	6	$^{5}6.00$	$^{2}6.55$	$^{4}5.93$	$^{1}8.02$	$^{6}5.80$	$^{3}6.61$	38.91
	$x_{\cdot j\cdot}$	40.98	37.63	35.84	36.61	37.94	37.98	

Además, $x_{\cdot\cdot 1} = 46.10$, $x_{\cdot\cdot 2} = 40.59$, $x_{\cdot\cdot 3} = 39.56$, $x_{\cdot\cdot 4} = 35.86$, $x_{\cdot\cdot 5} = 32.23$, $x_{\cdot\cdot 6} = 32.64$, $x\ldots = 226.98$. En la tabla 11.10 aparecen más cálculos.

Tabla 11.10 Tabla ANOVA para el ejemplo 11.11

Fuente de variación	**gl**	**Suma de cuadrados**	**Media de cuadrados**	***f***
A (filas)	5	2.19	.438	2.50
B (columnas)	5	2.57	.514	2.94
C (tratamientos)	5	23.53	4.706	26.89
Error	20	3.49	.175	
Total	35	31.78		

Puesto que $F_{.05,\,5,\,20} = 6.46 < 26.89$, valor $P < .001$. Por tanto, H_{0C}, es rechazada a cualquier nivel de significancia en favor de la hipótesis de que la humedad relativa sí afecta en promedio la resistencia a la abrasión.

Para aplicar el procedimiento de Tukey, $w = Q_{.05,6,20} \cdot \sqrt{\text{MSE}/6} = 4.45\sqrt{.175/6} = .76$. Después de ordenar las $\overline{x}_{\cdot\cdot k}$ y subrayarlas se obtiene

75%	87%	62%	50%	37%	25%
5.37	5.44	5.98	6.59	6.77	7.68

En particular, la humedad relativa más baja aparentemente produce una resistencia a la abrasión promedio verdadera significativamente más alta que cualquier otra humedad relativa estudiada. ■

EJERCICIOS Sección 11.3 (27–37)

27. Se estudió el rendimiento de una máquina de extrusión continua que recubre tubos de acero con plástico como una función del perfil de temperatura del termostato (A, a tres niveles), el tipo de plástico (B, a tres niveles) y la velocidad de tornillo rotatorio que hace que el plástico pase a través del troquel formador de tubos (C, a tres niveles). Hubo dos réplicas ($L = 2$) con cada combinación de niveles de los factores, lo que produjo un total de 54 observaciones del rendimiento. Las sumas de cuadrados fueron SSA = 14 144.44, SSB = 5511.27, SSC = 244 696.39, SSAB = 1069.62, SSAC = 62.67, SSBC = 331.67, SSE = 3127.50 y SST = 270 024.33.

a. Construya la tabla ANOVA.

b. Use pruebas F apropiadas para demostrar que ninguna de las razones F para interacción de dos o tres factores es significativa al nivel .05.

c. ¿Qué efectos principales parecen significativos?

d. Con $x_{\cdot\cdot 1\cdot} = 8242$, $x_{\cdot\cdot 2\cdot} = 9732$ y $x_{\cdot\cdot 3\cdot} = 11\,210$, use el procedimiento de Tukey para identificar diferencias significativas entre los niveles del factor C.

28. Para ver si la fuerza de empuje al taladrar es afectada por la velocidad de taladrado (A), coeficiente de alimentación (B) o material utilizado (C), se realizó un experimento utilizando cuatro velocidades, tres coeficientes y dos materiales, con dos muestras ($L = 2$) taladradas con cada combinación de niveles de los tres factores. Las sumas de cuadrados se calcularon como sigue: SSA = 19 149.73, SSB = 2 589 047.62, SSC = 157 437.52, SSAB = 53 238.21, SSAC = 9033.73, SSBC = 91 880.04, SSE = 56 819.50 y SST = 2 983 164.81. Construya la tabla ANOVA e identifique interacciones significativas con $\alpha = .01$. ¿Existe algún factor que parezca no tener efecto en la fuerza de empuje? (En otras palabras, alguno de los factores parece ser no significativo en cada uno de los efectos en los que aparece?

29. El artículo **"Effects of Household Fabric Softeners on Thermal Comfort of Cotton and Polyester Fabrics After Repeated Launderings" (*Family and Consumer Science Research J.*, 2009: 535–549)** reporta los resultados de un ANOVA de tres factores llevado a cabo para investigar el impacto de un tratamiento con suavizante de telas (A: sin suavizante, ciclo de enjuague con suavizante, suavizante en toallas para secadora), tipo de tela (B: 100% algodón, 100% poliéster) y el número de ciclos de lavado (C: 1, 5, 25) sobre la permeabilidad al aire de la tela, lo cual es un determinante muy importante del confort térmico.

a. Se hicieron cinco observaciones para cada combinación de niveles de factor. Las sumas de cuadrados resultantes fueron SSA = 1043.27, SSB = 112 148.10, SSC = 3020.97, SSAB = 373.52, SSAC = 392.71, SSBC = 145.95, SSABC = 54.13 y SSE = 339.30. Cree una tabla ANOVA y lleve a cabo pruebas para todas las hipótesis relevantes utilizando un nivel de significancia de .01.

b. Ya que la prueba para la presencia de interacciones de tres factores es insignificante, no tiene sentido investigar las interacciones de dos factores. Utilice los siguientes valores de varias medias muestrales para crear gráficos de interacción, y comente si son consistentes con los resultados de la prueba en a).

	$A1$	$A2$	$A3$
$B1$	67.10	56.50	65.93
$B2$	138.00	131.93	131.40
$C1$	110.25	105.55	103.30
$C2$	101.80	90.45	97.10
$C3$	95.60	86.65	95.60

(El artículo citado incluye una gráfica y comentarios basados en las medias AC.)

30. Se calcularon las siguientes cantidades mediante un experimento que implicó cuatro niveles de nitrógeno (A), dos tiempos de plantación (B) y dos niveles de potasio (C) **("Use and Misuse of Multiple Comparison Procedures", *Agronomy J.*, 1977: 205–208)**. Se realizó sólo una observación (contenido de N, en porcentaje, de granos de maíz) por cada una de las 16 combinaciones de niveles.

SSA = .22625 SSB = .000025 SSC = .0036
SSAB = .004325 SSAC = .00065
SSBC = .000625 SST = .2384.

a. Construya la tabla ANOVA.

b. Suponga que no existen efectos de interacción en tres direcciones, de modo que MSABC es una estimación válida de σ^2 y pruebe al nivel .05 en cuanto a interacción y efectos principales.

c. Los promedios de nitrógeno son $\bar{x}_{1\cdot\cdot\cdot} = 1.1200$, $\bar{x}_{2\cdot\cdot\cdot} = 1.3025$, $\bar{x}_{3\cdot\cdot\cdot} = 1.3875$ y $\bar{x}_{4\cdot\cdot\cdot} = 1.4300$. Use el método de Turkey para examinar las diferencias de porcentaje N entre los niveles de nitrógeno ($Q_{.05,4,3} = 6.82$).

31. La aleación con memoria de forma (SMA) de níquel titanio (NiTi) ha sido muy utilizada en dispositivos médicos. Esto es atribuible en gran parte al efecto de memoria de forma de la aleación (materiales que vuelven a su forma original después de deformación por calor), a la superelasticidad y la biocompatibilidad. Una aleación de elementos está generalmente cubierta en la superficie por una SMA de NiTi para evitar la liberación tóxica del Ni.

El artículo **"Parametrical Optimization of Laser Surface Alloyed NiTi Shape Memory Alloy with Co and Nb by the Taguchi Method" (*J. of Engr. Manuf.*, 2012: 969–979)** describe una investigación para determinar si el porcentaje en peso de níquel en una cubierta de aleación se ve afectada por la acción del grosor de la pasta en polvo de monóxido de carbono (C, en tres niveles), la velocidad de escaneo (B, en tres niveles) y la intensidad del láser (A, en tres niveles). Se realizó una observación en cada combinación factor-nivel [*Nota*: Los títulos de la columna del grosor están citados incorrectamente en el artículo]:

		Grosor de la pasta		
Intensidad	**Velocidad**	**.2**	**.3**	**.4**
600	600	38.64	35.13	19.20
	900	38.16	34.24	26.23
	1200	37.54	33.46	30.44
700	600	36.56	35.91	34.62
	900	39.16	33.10	28.71
	1200	37.06	31.78	21.50
800	600	39.44	40.42	37.21
	900	39.34	37.64	35.65
	1200	39.30	34.97	32.50

a. Asumiendo que no hay interacciones entre los tres factores (como hicieron los investigadores) SSE = SSABC puede utilizarse para obtener una estimación de σ^2. Construya una tabla ANOVA con base en estos datos.

b. Utilice las relaciones F apropiadas para mostrar que ninguna de las interacciones de dos factores son significativas a $\alpha = .05$.

c. Cuáles de los efectos principales serán significativos a $\alpha = .05$?

d. Utilice el procedimiento de Tukey con un nivel de confianza simultáneo de 95% para identificar diferencias significativas entre los niveles del grosor de la pasta.

32. Cuando los factores A y B son fijos pero el factor C es aleatorio y se utiliza el modelo restringido (véase la nota al pie de la página 438; existe una complicación técnica con el modelo no restringido en este caso), y $E(\text{MSE}) = \sigma^2$

$$E(\text{MSA}) = \sigma^2 + JL\sigma^2_{AC} + \frac{JKL}{I-1}\sum \alpha_i^2$$

$$E(\text{MSB}) = \sigma^2 + IL\sigma^2_{BC} + \frac{IKL}{J-1}\sum \beta_j^2$$

$$E(\text{MSC}) = \sigma^2 + IJL\sigma^2_C$$

$$E(\text{MSAB}) = \sigma^2 + L\sigma^2_{ABC} + \frac{KL}{(I-1)(J-1)}\sum_i\sum_j (\gamma_{ij}^{AB})^2$$

$$E(\text{MSAC}) = \sigma^2 + JL\sigma^2_{AC}$$

$$E(\text{MSBC}) = \sigma^2 + IL\sigma^2_{BC}$$

$$E(\text{MSABC}) = \sigma^2 + \sigma^2_{ABC}$$

a. Basado en estas medias esperadas de los cuadrados, ¿qué razones F utilizaría para probar H_0: $\sigma^2_{ABC} = 0$; H0: $\sigma^2_C = 0$; H0: $\gamma_{ij}^{AB} = 0$ para todas las i, j; y H_0: $\alpha_1 = \cdots = \alpha_I = 0$?

b. En un experimento para evaluar los efectos de la edad, el tipo de suelo y el día de la producción en la resistencia a la compresión de mezclas de cemento/suelo, se utilizaron dos edades (A), cuatro tipos de suelo (B) y 3 días (C, supuesto aleatorio), con $L = 2$ observaciones realizadas por cada combinación de niveles de factor. Las sumas de cuadrados resultantes fueron SSA = 14 318.24, SSB = 9656.40, SSC = 2270.22, SSAB= 3408.93, SSAC= 1442.58, SSBC= 3096.21, SSABC= 2832.72, Y SCE= 8655.60. Obtenga la tabla ANOVA y realice todas las pruebas al nivel .01.

33. Debido a la potencial variabilidad del envejecimiento causado por las diferentes piezas fundidas y los segmentos en estas, se utilizó un diseño de cuadrado latino con $N = 7$ para investigar el efecto del tratamiento térmico en el envejecimiento. Con A piezas fundidas, B = segmentos, C = tratamientos térmicos, los estadísticos resumidos incluyen $x_{\cdots} = 3815.8$, $\Sigma x^2_{i\cdot\cdot} = 297\,216.90$, $\Sigma x^2_{\cdot j\cdot} = 297\,200.64$, $\Sigma x^2_{\cdot\cdot k} = 297\,155.01$ y $\Sigma\Sigma x^2_{ij(k)} = 297\,317.65$. Obtenga la tabla ANOVA y pruebe al nivel .05 la hipótesis de que el tratamiento térmico no afecta el envejecimiento.

34. El artículo **"The Responsiveness of Food Sales to Shelf Space Requirements"** (***J. Marketing Research*, 1964: 63–67**) reporta el uso de un diseño de cuadrado latino para investigar el efecto del espacio en anaqueles en la venta de alimentos. El experimento se realizó a lo largo de un periodo de 6 semanas con seis tiendas diferentes y se obtuvieron los siguientes resultados sobre ventas de crema en polvo para café (con el índice del espacio en anaquel entre paréntesis):

		Semana		
		1	**2**	**3**
	1	27 (5)	14 (4)	18 (3)
	2	34 (6)	31 (5)	34 (4)
	3	39 (2)	67 (6)	31 (5)
Tienda	**4**	40 (3)	57 (1)	39 (2)
	5	15 (4)	15 (3)	11 (1)
	6	16 (1)	15 (2)	14 (6)

		Semana		
		4	**5**	**6**
	1	35 (1)	28 (6)	22 (2)
	2	46 (3)	37 (2)	23 (1)
	3	49 (4)	38 (1)	48 (3)
Tienda	**4**	70 (6)	37 (4)	50 (5)
	5	9 (2)	18 (5)	17 (6)
	6	12 (5)	19 (3)	22 (4)

Construya la tabla ANOVA y formule y pruebe al nivel .01 la hipótesis de que el espacio en anaquel no afecta las ventas contra la alternativa apropiada.

35. El artículo **"Variation in Moisture and Ascorbic Acid Content from Leaf to Leaf and Plant to Plant in Turnip Greens"** (***Southern Cooperative Services Bull.*, 1951: 13–17**) usa un diseño de cuadrado latino en el cual el factor A es la planta, el factor B es el tamaño de hoja (desde la más pequeña hasta la más grande), el factor C (entre paréntesis) es el tiempo de pesada y la variable de respuesta es el contenido de humedad.

		Tamaño de hoja (B)		
		1	**2**	**3**
Planta (A)	**1**	6.67 (5)	7.15 (4)	8.29 (1)
	2	5.40 (2)	4.77 (5)	5.40 (4)
	3	7.32 (3)	8.53 (2)	8.50 (5)
	4	4.92 (1)	5.00 (3)	7.29 (2)
	5	4.88 (4)	6.16 (1)	7.83 (3)

		Tamaño de hoja (B)	
		4	**5**
Planta (A)	**1**	8.95 (3)	9.62 (2)
	2	7.54 (1)	6.93 (3)
	3	9.99 (4)	9.68 (1)
	4	7.85 (5)	7.08 (4)
	5	5.83 (2)	8.51 (5)

Cuando los tres factores son aleatorios, las medias esperadas de los cuadrados son $E(\text{MSA}) = \sigma^2 + N\sigma_A^2$, $E(\text{MSB}) = \sigma^2 + N\sigma_B^2$, $E(\text{MSC}) = \sigma^2 + N\sigma_C^2$, y $E(\text{MSE}) = \sigma^2$. Esto implica que las razones F para probar que H_{0A}: $\sigma_A^2 = 0$, H_{0B}: $\sigma_B^2 = 0$ y H_{0C}: $\sigma_C^2 = 0$ son idénticas a aquellas para efectos fijos. Obtenga la tabla ANOVA y pruebe al nivel .05 para ver si existe alguna variación en el contenido de humedad debido a los factores.

36. El artículo **"An Assessment of the Effects of Treatment, Time and Heat on the Removal of Erasable Pen Marks from Cotton and Cotton/Poliester Blend Fabrics"** (***J. of Testing and Eval.*, 1991: 394–397**) reporta las siguientes sumas de cuadrados para la variable de respuesta *grado de eliminación de marcas*: SSA = 39.171, SSB = .665, SSC = 21.508, SSAB = 1.432, SSAC = 15.953, SSBC = 1.382, SSABC = 9.016 y SSE = 115.820. Se utilizaron cuatro tratamientos de lavado diferentes, tres tipos diferentes de pluma y seis telas diferentes en el experimento y se realizaron tres observaciones por cada combinación pluma-tela. Analice la varianza con $\alpha = .01$ por cada prueba y exprese sus conclusiones (suponga efectos fijos para los tres factores).

37. Se realizó un experimento ANOVA con cuatro factores para investigar los efectos de la tela (A), el tipo de exposición (B), el nivel de exposición (C) y la dirección de la tela (D) en el grado de cambio de color en telas expuestas medido mediante un espectrocolorímetro. Se realizaron dos observaciones por cada una de las tres telas, dos tipos, tres niveles y dos direcciones con los siguientes resultados: MSA = 2207.329, MSB = 47.255, MSC = 491.783, MSD = .044, MSAB = 15.303, MSAC = 275.446, MSAD = .470, MSBC = 2.141, MSBD = .273, MSCD = .247, MSABC = 3.714, MSABD= 4.072, MSABD = 4.072, MSACD = .767, MSBCD = .280, MSE = .977 y MST = 93.621. (**"Accelerated Weathering of Marine Fabrics", *J. Testing and Eval.*, 1992: 139–143**). Suponiendo efectos fijos con todos los factores, analice la varianza con $\alpha = .01$ con todas las pruebas y resuma sus conclusiones.

11.4 Experimentos 2^p factoriales

Si un experimentador desea estudiar al mismo tiempo el efecto de p factores diferentes en una variable de respuesta y los factores tienen $I_1, I_2, \ldots, I_p$ niveles, respectivamente, entonces un experimento completo requiere al menos $I_1 \cdot I_2 \cdots I_p$ observaciones. En tales situaciones el experimentador a menudo puede realizar un "experimento de filtración" con cada factor a sólo dos niveles para obtener información preliminar sobre los efectos del factor. Un experimento en el cual existen p factores, cada uno a dos niveles, se conoce como **experimento 2^p factorial**.

Experimentos 2^3

Tal como en la sección 11.3, X_{ijkl} y x_{ijkl} se refieren a la observación de la l-ésima réplica con los factores A, B y C a los niveles i, j y k, respectivamente. El modelo en esta situación es

$$X_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \delta_k + \gamma_{ij}^{AB} + \gamma_{ik}^{AC} + \gamma_{jk}^{BC} + \gamma_{ijk} + \epsilon_{ijkl} \qquad (11.14)$$

para $i = 1, 2$; $j = 1, 2$; $k = 1, 2$; $l = 1, \ldots, n$. Las $\boldsymbol{\epsilon}_{ijkl}$ se suponen independientes, normalmente distribuidas, con media 0 y varianza σ^2. Debido a que existen sólo dos niveles de cada factor, las condiciones laterales en relación con los parámetros de (11.14) que especifican de manera única el modelo, simplemente se formulan como $\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \ldots,$ $\gamma_{11}^{AB} + \gamma_{21}^{AB} = 0$, $\gamma_{12}^{AB} + \gamma_{22}^{AB} = 0$, $\gamma_{11}^{AB} + \gamma_{12}^{AB} = 0$, $\gamma_{21}^{AB} + \gamma_{22}^{AB} = 0$ y similares. Estas condiciones implican que existe sólo un parámetro funcionalmente independiente de cada tipo

(por cada efecto principal e interacción). Por ejemplo, $\alpha_2 = -\alpha_1$, mientras que $\gamma_{21}^{AB} = -\gamma_{11}^{AB}$, $\gamma_{12}^{AB} = -\gamma_{11}^{AB}$ y $\gamma_{22}^{AB} = \gamma_{11}^{AB}$. Debido a esto, cada suma de cuadrados en el análisis tendrá 1 grado de libertad.

Los parámetros del modelo pueden ser estimados sacando promedios para todos los subíndices de las X_{ijkl} y luego formando combinaciones lineales apropiadas de los promedios. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_1 &= \overline{X}_{1\ldots} - \overline{X}_{\ldots\ldots} \\ &= \frac{(X_{111\cdot} + X_{121\cdot} + X_{112\cdot} + X_{122\cdot} - X_{211\cdot} - X_{212\cdot} - X_{221\cdot} - X_{222\cdot})}{8n}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_{11}^{AB} &= \overline{X}_{11\cdot\cdot} - \overline{X}_{1\ldots} - \overline{X}_{\cdot 1\cdot\cdot} + \overline{X}_{\ldots\ldots} \\ &= \frac{(X_{111\cdot} - X_{121\cdot} - X_{211\cdot} + X_{221\cdot} + X_{112\cdot} - X_{122\cdot} - X_{212\cdot} + X_{222\cdot})}{8n}\end{aligned}$$

Cada estimador es, con excepción del factor $1/(8n)$, una función lineal de los totales de celda ($X_{ijk\cdot}$) donde cada coeficiente es $+1$ o -1, con un número igual de cada uno; tales funciones se llaman **contrastes** en las X_{ijk}. Además, los estimadores satisfacen las mismas condiciones laterales satisfechas por los parámetros mismos. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 &= \overline{X}_{1\ldots} - \overline{X}_{\ldots\ldots} + \overline{X}_{2\ldots} - \overline{X}_{\ldots\ldots} = \overline{X}_{1\ldots} + \overline{X}_{2\ldots} - 2\overline{X}_{\ldots\ldots} \\ &= \frac{1}{4n}X_{1\ldots} + \frac{1}{4n}X_{2\ldots} - \frac{2}{8n}X_{\ldots\ldots} = \frac{1}{4n}X_{\ldots\ldots} - \frac{1}{4n}X_{\ldots\ldots} = 0\end{aligned}$$

EJEMPLO 11.12 En un experimento para investigar las propiedades de resistencia a la compresión de mezclas cemento-tierra, se utilizaron dos periodos de añejamiento en combinación con dos temperaturas diferentes y dos tierras distintas. Se hicieron dos réplicas por cada combinación de niveles de los tres factores y se obtuvieron los siguientes resultados:

		Suelo	
Edad	**Temperatura**	**1**	**2**
1	**1**	471 413	385 434
	2	485 552	530 593
2	**1**	712 637	770 705
	2	712 789	741 806

Los totales de celda calculados son $x_{111\cdot} = 884$, $x_{211\cdot} = 1349$, $x_{121\cdot} = 1037$, $x_{221\cdot} = 1501$, $x_{112\cdot} = 819$, $x_{212\cdot} = 1475$, $x_{122\cdot} = 1123$ y $x_{222\cdot} = 1547$, por tanto $x_{\ldots\ldots} = 9735$. Entonces

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_1 &= (884 - 1349 + 1037 - 1501 + 819 - 1475 + 1123 - 1547)/16 \\ &= -125.5625 = -\hat{\alpha}_2 \\ \hat{\gamma}_{11}^{AB} &= (884 - 1349 - 1037 + 1501 + 819 - 1475 - 1123 + 1547)/16 \\ &= -14.5625 = -\hat{\gamma}_{12}^{AB} = -\hat{\gamma}_{21}^{AB} = \hat{\gamma}_{22}^{AB}\end{aligned}$$

Las estimaciones de los demás parámetros se calculan de la misma manera. ■

Análisis de un experimento 2^3 Las sumas de cuadrados para los varios efectos son fáciles de obtener a partir de los parámetros estimados. Por ejemplo,

$$\text{SSA} = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \hat{\alpha}_i^2 = 4n\sum_{i=1}^{2} \hat{\alpha}_i^2 = 4n[\hat{\alpha}_1^2 + (-\hat{\alpha}_1)^2] = 8n\hat{\alpha}_1^2$$

y

$$\begin{aligned}\text{SSAB} &= \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l (\hat{\gamma}_{ij}^{AB})^2 \\ &= 2n \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} (\hat{\gamma}_{ij}^{AB})^2 = 2n[(\hat{\gamma}_{11}^{AB})^2 + (-\hat{\gamma}_{11}^{AB})^2 + (-\hat{\gamma}_{11}^{AB})^2 + (\hat{\gamma}_{11}^{AB})^2] \\ &= 8n(\hat{\gamma}_{11}^{AB})^2\end{aligned}$$

Puesto que cada estimación es un contraste en los totales de celda multiplicado por $1/(8n)$, cada suma de cuadrados tiene la forma $(\text{contraste})^2/(8n)$. Por tanto, para calcular las diversas sumas de cuadrados se tienen que conocer los coeficientes ($+1$ o -1) de los contrastes apropiados. Los signos ($+$ o $-$) de cada $x_{ijk\cdot}$ en cada contraste de efecto se muestran de manera más adecuada en una tabla. Se utilizará la notación (1) para la condición experimental $i = 1, j = 1, k = 1$, a para $i = 2, j = 1, k = 1$, ab para $i = 2, j = 2, k = 1$, y así sucesivamente. Si el nivel 1 se considera "bajo" y el nivel 2, "alto" cualquier letra que aparezca denota un nivel alto del factor asociado. En la tabla 11.10 cada columna da los signos para un contraste de efecto particular en las x_{ijk} asociadas con las diferentes condiciones experimentales.

Tabla 11.11 Signos para calcular contrastes de efecto

Condición experimental	**Total de celda**	**Efecto factorial**						
		A	***B***	***C***	***AB***	***AC***	***BC***	***ABC***
(1)	$x_{111\cdot}$	−	−	−	+	+	+	−
a	$x_{211\cdot}$	+	−	−	−	−	+	+
b	$x_{121\cdot}$	−	+	−	−	+	−	+
ab	$x_{221\cdot}$	+	+	−	+	−	−	−
c	$x_{112\cdot}$	−	−	+	+	−	−	+
ac	$x_{212\cdot}$	+	−	+	−	+	−	−
bc	$x_{122\cdot}$	−	+	+	−	−	+	−
abc	$x_{222\cdot}$	+	+	+	+	+	+	+

En cada una de las tres primeras columnas, el signo es $+$ si el factor correspondiente está al nivel alto y $-$ si está al nivel bajo. Cada signo que aparece en la columna AB es entonces el "producto" de los signos presentes en las columnas A y B *con* $(+)(+) = (-)(-) = +$ y $(+)(-) = (-)(+) = -$, y del mismo modo para las columnas AC y BC. Por último, los signos que aparecen en la columna ABC son los productos de AB con C (o B con AC o A con BC). Así pues, por ejemplo,

$$\text{Contraste } AC = + x_{111\cdot} - x_{211\cdot} + x_{121\cdot} - x_{221\cdot} - x_{112\cdot} + x_{212\cdot} - x_{122\cdot} + x_{222\cdot}$$

Una vez que se calculan los siete contrastes de efecto,

$$\text{SS(efecto)} = \frac{(\text{contraste de efecto})^2}{8n}$$

El software para realizar los cálculos necesarios para analizar datos de experimentos factoriales se haya ampliamente disponible (Minitab, por ejemplo). De manera alternativa, existe un método eficiente de cálculo manual creado por Yates. Se escriben en una columna los ocho totales de celda en el **orden estándar**, tal como aparecen en la tabla de signos, y se establecen tres columnas adicionales. En cada una de estas tres columnas las primeras cuatro entradas son las sumas de las entradas 1 y 2, 3 y 4, 5 y 6, 7 y 8 de las columnas pre-

vias. Las últimas cuatro entradas son las diferencias entre las entradas 2 y 1, 4 y 3, 6 y 5 y 8 y 7 de la columna previa. La última columna contiene entonces $x_{....}$ y los siete contrastes de efecto, en orden estándar. Si se eleva al cuadrado cada contraste y se divide entre $8n$ se obtienen entonces las siete sumas de cuadrados.

EJEMPLO 11.13 (Continuación del ejemplo 11.12)

Dado que $n = 2$, $8n = 16$. El método de Yates se ilustra en la tabla 11.12.

Tabla 11.12 Método de cálculo de Yates

Tratamiento condición	$x_{ijk\cdot}$	1	2	Efecto contraste	$SS = (\text{contraste})^2/16$
$(1) = x_{111\cdot}$	884	2233	4771	9735	
$a = x_{211\cdot}$	1349	2538	4964	2009	252 255.06
$b = x_{121\cdot}$	1037	2294	929	681	28 985.06
$ab = x_{221\cdot}$	1501	2670	1080	−233	3 393.06
$c = x_{112\cdot}$	819	465	305	193	2 328.06
$ac = x_{212\cdot}$	1475	464	376	151	1 425.06
$bc = x_{122\cdot}$	1123	656	−1	71	315.06
$abc = x_{222\cdot}$	1547	424	−232	−231	3 335.06
					292 036.42

Con los datos originales, $\Sigma_i\Sigma_j\,\Sigma_g\Sigma_l x^2_{ijkl} = 6\,232\,289$, y

$$\frac{x^2_{....}}{16} = 5\,923\,139.06$$

por tanto,

$$\begin{aligned}\text{SST} &= 6\,232\,289 - 5\,923\,139.06 = 309\,149.94\\ \text{SSE} &= \text{SST} - [\text{SSA} + \cdots + \text{SSABC}] = 309\,149.94 - 292\,036.42\\ &= 17\,113.52\end{aligned}$$

Los cálculos ANOVA se resumen en la tabla 11.13.

Tabla 11.13 Tabla ANOVA para el ejemplo 11.13

Fuente de variación	gl	Suma de cuadrados	Media cuadrática	f
A	1	252 255.06	252 255.06	117.92
B	1	28 985.06	28 985.06	13.55
C	1	2 328.06	2 328.06	1.09
AB	1	3 393.06	3 393.06	1.59
AC	1	1 425.06	1 425.06	.67
BC	1	315.06	315.06	.15
ABC	1	3 335.06	3 335.06	1.56
Error	8	17 113.52	2 139.19	
Total	15	309 149.94		

La figura 11.10 muestra los resultados generados por SAS para este ejemplo. Sólo los valores P correspondientes a la edad (A) y temperatura (B) son menores que .01, así que sólo estos efectos son considerados significativos.

```
Analysis of Variance Procedure
Dependent Variable: RESISTENCIA

                                Sum of          Mean
Source              DF         Squares        Square    F Value    Pr > F
Model                7     292036.4375    41719.4911      19.50    0.0002
Error                8      17113.5000     2139.1875
Corrected Total     15     309149.9375

                R-Square          C.V.      Root MSE      POWERUSE Mean

                0.944643      7.601660      46.25135         608.437500

Source                DF      Anova SS   Mean Square   F Value   Pr > F

AGE                    1   252255.0625   252255.0625    117.92   0.0001
TEMP                   1    28985.0625    28985.0625     13.55   0.0062
AGE*TEMP               1     3393.0625     3393.0625      1.59   0.2434
SOIL                   1     2328.0625     2328.0625      1.09   0.3273
AGE*SOIL               1     1425.0625     1425.0625      0.67   0.4380
TEMP*SOIL              1      315.0625      315.0625      0.15   0.7111
AGE*TEMP*SOIL          1     3335.0625     3335.0625      1.56   0.2471
```

Figura 11.10 Resultados obtenidos mediante SAS con los datos de resistencia del ejemplo 11.13 ■

Experimentos 2^p con $p > 3$

El análisis de los datos de un experimento 2^p con $p > 3$ es paralelo al del caso de tres factores. Por ejemplo, si existen cuatro factores A, B, C y D, existen 16 condiciones experimentales diferentes. Las primeras 8 en orden estándar son exactamente las que ya aparecen en lista para un experimento con tres factores. Las segundas 8 se obtienen colocando la letra d al lado de cada condición en el primer grupo. El método de Yates se inicia entonces calculando totales a través de las réplicas, poniendo en lista estos totales en orden estándar y procediendo como antes; con p factores, la p-ésima columna a la derecha de los totales de tratamiento dará los contrastes de efecto.

Con $p > 3$, no suele haber réplicas del experimento (así que sólo está disponible una réplica completa). Una posible forma de probar hipótesis es asumir que ciertos efectos de alto grado están ausentes y luego agregar las sumas correspondientes de cuadrados para obtener un SSE. Tal suposición, sin embargo, puede ser engañosa si no se tiene un conocimiento previo (véase el libro de Montgomery que aparece en la bibliografía del capítulo). Un método alternativo implica trabajar directamente con los contrastes de efecto. Cada contraste tiene una distribución normal con la misma varianza. Cuando un efecto particular está ausente, el valor esperado del contraste correspondiente es 0, pero esto no es así cuando el efecto está presente. El método de análisis sugerido es construir una gráfica de probabilidad normal de los contrastes de efecto (o, de forma equivalente, las estimaciones de los parámetros de efecto, puesto que estimación = contraste/2^p cuando $n = 1$). Los puntos correspondientes a efectos ausentes tenderán a acercarse a una línea recta, mientras que los puntos asociados con efectos sustanciales en general se alejarán de esta línea.

EJEMPLO 11.14 Los siguientes datos se tomaron del artículo **"Quick and Easy Analysis of Unreplicated Factorials" (*Technometrics*, 1989: 469–473)**. Los cuatro factores son A = resistencia al ácido, B = tiempo, C = cantidad de ácido y D = temperatura, y la variable de respuesta es el rendimiento de isatina. Las observaciones, en orden estándar, son .08, .04, .53, .43, .31, .09, .12, .36, .79, .68, .73, .08, .77, .38, .49 y .23. La tabla 11.14 muestra las estimaciones de efecto como aparecen en el artículo (las cuales utilizaron contraste/8 en lugar de contraste/16).

Tabla 11.14 Estimaciones de efecto para el ejemplo 11.14

Efecto	*A*	*B*	*AB*	*C*	*AC*	*BC*	*ABC*	*D*
Estimación	−.191	−.021	−.001	−.076	.034	−.066	.149	.274
Efecto	*AD*	*BD*	*ABD*	*CD*	*ACD*	*BCD*	*ABCD*	
Estimación	−.161	−.251	−.101	−.026	−.066	.124	.019	

La figura 11.11 es una gráfica de probabilidad normal de las estimaciones de efecto. Todos los puntos en la gráfica quedan cerca de la misma línea recta, lo que sugiere la ausencia completa de cualquier efecto (más adelante se dará un ejemplo en el cual este no es el caso).

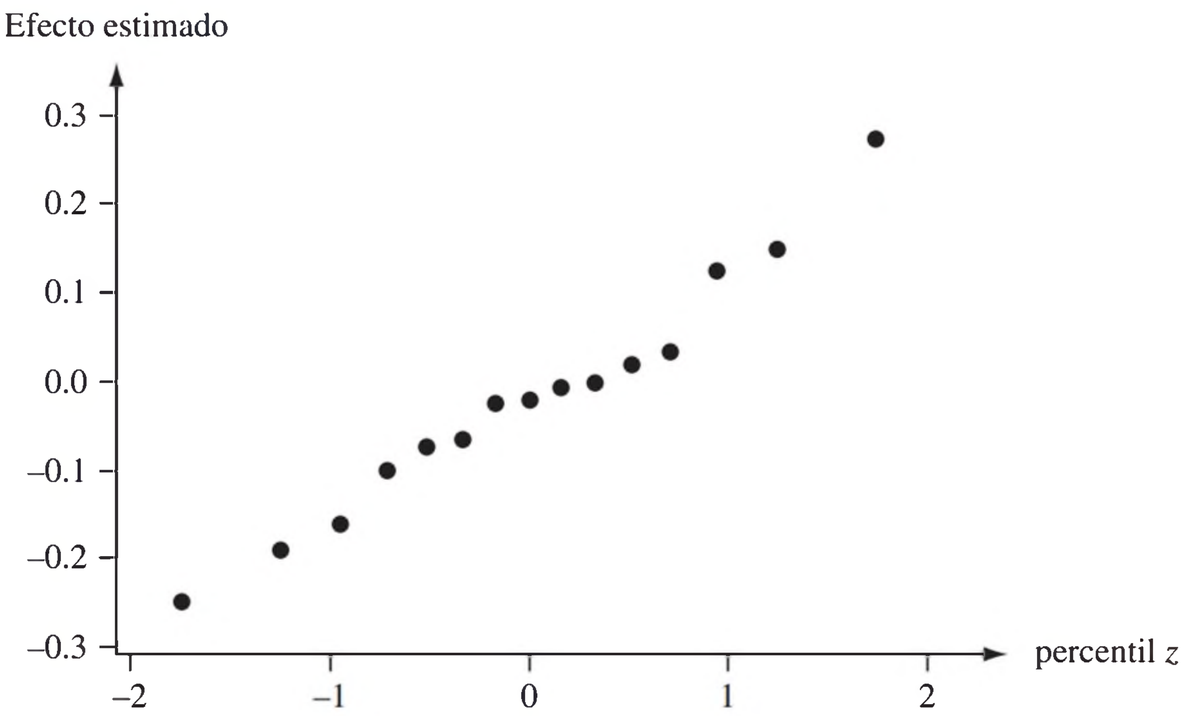


Figura 11.11 Curva de probabilidad normal de estimaciones de efecto del ejemplo 11.14 ■

Los juicios visuales de la desviación lineal en una gráfica de probabilidad normal son más bien subjetivos. El artículo citado en el ejemplo 11.14 describe una técnica más objetiva de identificar efectos significativos en un experimento no replicado.

Confusión

Frecuentemente no es posible realizar todas las 2^p condiciones experimentales de un experimento 2^p factorial en un entorno experimental homogéneo. En tales situaciones puede ser posible separar las condiciones experimentales en 2^r bloques homogéneos ($r < p$), de modo que existen 2^{p-r} condiciones experimentales en cada bloque. Los bloques pueden, por ejemplo, corresponder a laboratorios diferentes, lapsos de tiempo diferentes u operadores o cuadrillas de trabajo diferentes. En el caso más simple, $p = 3$ y $r = 1$, de modo que existen dos bloques, con cada uno compuesto de cuatro de las ocho condiciones experimentales.

Como siempre, la formación de bloques es efectiva al reducir la variación asociada con fuentes externas. Sin embargo, cuando las 2^p condiciones experimentales se colocan en 2^r bloques, el precio pagado por esta formación de bloques es que $2^r - 1$ de los efectos de factor no pueden ser estimados. Esto es porque los $2^r - 1$ efectos de factor (efectos principales o interacciones) se mezclan o se **confunden** con los efectos de bloque. La asignación de condiciones experimentales a bloques normalmente se hace de modo que sólo las interacciones de más alto nivel sean confundidas, mientras que los efectos principales y las interacciones de orden más bajo permanecen estimables y las hipótesis pueden ser probadas.

Para ver cómo se logra la asignación de bloques, considérese primero un experimento 2^3 con dos bloques ($r = 1$) y cuatro tratamientos por bloque. Suponga que se selecciona ABC como el efecto que ha de ser confundido con bloques. Entonces cualquier condición experimental que tenga un número impar de letras en común con ABC, tal como b (una letra) o abc (tres letras) se coloca en un bloque, mientras que cualquier condición que tenga un número par de letras en común con ABC (donde 0 es par) va en el otro bloque. La figura 11.12 muestra esta asignación de tratamientos a los dos bloques.

Bloque 1	*Bloque 2*
(1), *ab*, *ac*, *bc*	*a*, *b*, *c*, *abc*

Figura 11.12 Confusión de ABC en un experimento 2^3

Sin réplicas, los datos de semejante experimento normalmente se analizarían suponiendo que no hubo interacciones de dos factores (aditividad) y utilizando SSE = SSAB + SSAC + SSBC con 3 grados de libertad para probar la presencia de efectos principales. Alternativamente, podría examinarse una gráfica de probabilidad normal de contrastes de efecto o estimaciones de parámetros de efecto. Con más frecuencia, no obstante, existen réplicas cuando sólo tres factores están siendo estudiados. Suponga que existen u réplicas, que dan un total de $2^r \cdot u$ bloques en el experimento. Entonces después de restar de SST todas las sumas de cuadrados asociadas con efectos no confundidos con bloques (calculados con el método de Yates), el bloque de la suma de cuadrados se calcula con los $2^r \cdot u$ totales de bloque y luego se restan para obtener SSE (de modo que existen $2^r \cdot u - 1$ grados de libertad para los bloques).

EJEMPLO 11.15 El artículo **"Factorial Experiments in Pilot Plant Studies" (*Industrial and Eng. Chemistry*, 1951: 1300–1306)** reporta los resultados de un experimento para evaluar los efectos de temperatura de reactor (A), rendimiento de gas (B) y concentración de constituyente activo (C) en la concentración de la solución producto (medida en unidades arbitrarias) en una unidad de recirculación. Se utilizaron dos bloques, con el efecto ABC confundido con bloques y hubo dos réplicas, y los resultados se muestran en la figura 11.13. Los cuatro totales de bloque × el total de réplicas son 288, 212, 88 y 220 con un gran total de 808, por tanto,

$$\text{SSB1} = \frac{(288)^2 + (212)^2 + (88)^2 + (220)^2}{4} - \frac{(808)^2}{16} = 5204.00$$

Réplica 1

Bloque 1		*Bloque 2*	
(1)	99	*a*	18
ab	52	*b*	51
ac	42	*c*	108
bc	95	*abc*	35

Réplica 2

Bloque 1		*Bloque 2*	
(1)	46	*a*	18
ab	−47	*b*	62
ac	22	*c*	104
bc	67	*abc*	36

Figura 11.13 Datos para el ejemplo 11.15

Las demás sumas de cuadrados se calculan con el método de Yates utilizando los ocho totales de condición experimental, y el resultado es la tabla ANOVA dada como tabla 11.15. Por comparación con $F_{.05,1,6} = 5.99$, se concluye que sólo los efectos principales para A y C difieren significativamente de cero (valor $P < .05$ sólo para f_A y f_C)

Tabla 11.15 Tabla ANOVA para el ejemplo 11.15

Fuente de variación	gl	Suma de cuadrados	Media cuadrática	f
A	1	12 996	12 996	39.82
B	1	702.25	702.25	2.15
C	1	2 756.25	2 756.25	8.45
AB	1	210.25	210.25	.64
AC	1	30.25	30.25	.093
BC	1	25	25	.077
Bloques	3	5 204	1 734.67	5.32
Error	6	1 958	326.33	
Total	15	23 882		

Confusión cuando se utilizan más de dos bloques

En el caso $r = 2$ (cuatro bloques), tres efectos se confunden con bloques. El experimentador primero selecciona dos efectos definitorios que han de ser confundidos. Por ejemplo, en un experimento con cinco factores (A, B, C, D y E), las dos interacciones de tres factores BCD y CDE podrían ser elegidas para confundirse. El tercer efecto confundido es entonces la **interacción generalizada** de los dos, que se obtiene al escribir los dos efectos seleccionados uno al lado del otro y luego eliminando cualesquiera letras comunes a ambos: $(BCD)(CDE) = BE$. Observe que si ABC y CDE se eligen para confundirse, su interacción generalizada es $(ABC)(CDE) = ABDE$, de modo que no se confundan ningún efecto principal o interacción de dos factores.

Una vez que los dos efectos definitorios han sido seleccionados para confundirse, un bloque se compone de todas las condiciones de tratamiento que tienen un número par de letras en común con ambos efectos definitorios. El segundo bloque se compone de todas las condiciones que tienen un número par de letras en común con el primer contraste definido y un número impar de letras en común con el segundo contraste, y los bloques tercero y cuarto se componen de los contrastes "impar/par" e "impar/impar". En un experimento con cinco factores con efectos definitorios ABC y CDE esto da por resultado la asignación de bloques tal como se muestra en la figura 11.14 (con el número de letras en común con cada contraste definitorio que aparece junto a cada condición experimental).

Bloque 1		*Bloque 2*		*Bloque 3*		*Bloque 4*	
(1)	(0, 0)	*d*	(0, 1)	*a*	(1, 0)	*c*	(1, 1)
ab	(2, 0)	*e*	(0, 1)	*b*	(1, 0)	*ad*	(1, 1)
de	(0, 2)	*ac*	(2, 1)	*cd*	(1, 2)	*ae*	(1, 1)
acd	(2, 2)	*bc*	(2, 1)	*ce*	(1, 2)	*bd*	(1, 1)
ace	(2, 2)	*abd*	(2, 1)	*ade*	(1, 2)	*be*	(1, 1)
bcd	(2, 2)	*abe*	(2, 1)	*bde*	(1, 2)	*abc*	(3, 1)
bce	(2, 2)	*acde*	(2, 3)	*abcd*	(3, 2)	*cde*	(1, 3)
abde	(2, 2)	*bcde*	(2, 3)	*abce*	(3, 2)	*abcde*	(3, 3)

Figura 11.14 Cuatro bloques en un experimento 2^5 factorial con efectos definitorios ABC y CDE

El bloque que contiene (1) se llama **bloque principal.** Una vez construido, se puede obtener un segundo bloque seleccionando cualquier condición experimental no incluida en el bloque principal y obteniendo su interacción generalizada con cada condición presente en el bloque principal. Se construyen entonces los demás bloques del mismo modo

seleccionando primero una condición no incluida en un bloque ya construido y localizando interacciones generalizadas con el bloque principal.

En situaciones experimentales con $p > 3$, frecuentemente no existe ninguna réplica, así que las sumas de cuadrados asociadas con interacciones de alto grado no confundidas normalmente se agrupan para obtener una suma de cuadrados para error que pueda ser utilizada en el denominador de los varios estadísticos F. Todos los cálculos se realizan de nuevo con la técnica de Yates, con SSB1 como la suma de las sumas de cuadrados asociadas con efectos confundidos.

Cuando $r > 2$ primero se seleccionan r efectos definitorios que han de ser confundidos con bloques, asegurándose de que ninguno de los efectos elegidos sea la interacción generalizada de cualesquiera otros dos seleccionados. Los $2^r - r - 1$ efectos adicionales confundidos con los bloques son entonces interacciones generalizadas de todos los efectos presentes en el conjunto definitorio (incluidas no sólo las interacciones generalizadas de pares de efectos, sino también conjuntos de tres, cuatro y así sucesivamente).

Réplica fraccionaria

Cuando el número p de factores es grande, incluso una sola réplica de un experimento 2^p puede ser cara y consumidora de tiempo. Por ejemplo, una réplica de un experimento 2^6 factorial implica una observación por cada una de las 64 condiciones experimentales diferentes. Una estrategia atractiva en tales situaciones es observar sólo una fracción de las 2^p condiciones. Siempre que se tenga cuidado en la elección de la condición que ha de ser observada, aún se puede obtener mucha información sobre los efectos de factor.

Suponga que se decide incluir sólo 2^{p-1} (la mitad) de las 2^p condiciones posibles en el experimento; esto normalmente se conoce como **media réplica**. El precio pagado por este ahorro es doble. Primero, la información sobre un solo efecto (determinada por las 2^{p-1} condiciones seleccionadas para observación) se pierde por completo para el experimentador, en el sentido de que ninguna estimación razonable del efecto es posible. Segundo, los $2^p - 2$ efectos principales remanentes e interacciones se parean de modo que cualquier efecto en un par particular se confunde con el otro efecto en el mismo par. Por ejemplo, un par como ese puede ser $\{A, BCD\}$, de modo que las estimaciones separadas del efecto principal A y de la interacción BCD no son posibles. Es deseable, entonces, seleccionar una media réplica con la cual los efectos principales y las interacciones de bajo grado sean pareadas (confundidas) sólo con interacciones de alto grado en lugar de una con la otra.

El primer paso al especificar una media réplica es seleccionar un efecto definitorio como el efecto no estimable. Suponga que en un experimento con cinco factores, se elige $ABCDE$ como el efecto definitorio. Ahora las $2^5 = 32$ posibles condiciones de tratamiento se dividen en dos grupos con 16 condiciones cada uno, uno compuesto de todas las condiciones que tienen un número impar de letras en común con $ABCDE$ y el otro que contiene un número par de letras en común con el contraste definido. Entonces se utiliza como media réplica cualquier grupo de 16 condiciones El grupo "impar" es

$$a, b, c, d, e, abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde, abcde$$

Cada efecto principal e interacción diferente de $ABCDE$ entonces se confunde (se distorsiona) en su interacción generalizada con $ABCDE$. Por tanto $(AB)(ABCDE) = CDE$, de tal suerte que la interacción AB y la interacción CDE se confunden entre sí. Los **pares distorsionados** resultantes son

$\{A, BCDE\}$	$\{B, ACDE\}$	$\{C, ABDE\}$	$\{D, ABCE\}$	$\{E, ABCD\}$
$\{AB, CDE\}$	$\{AC, BDE\}$	$\{AD, BCE\}$	$\{AE, BCD\}$	$\{BC, ADE\}$
$\{BD, ACE\}$	$\{BE, ACD\}$	$\{CD, ABE\}$	$\{CE, ABD\}$	$\{DE, ABC\}$

Observe particularmente que cada efecto principal se confunde con una interacción de cuatro factores. Suponiendo que estas interacciones son insignificantes se puede probar la presencia de efectos principales.

Para especificar un cuarto de réplica de un experimento 2^p factorial (2^{p-2} de las 2^p posibles condiciones de tratamiento), deben ser seleccionados dos efectos definitorios. Estos y su interacción generalizada se transforman en efectos no estimables. En lugar de pares distorsionados como en la media réplica, cada efecto restante ahora se confunde con otros tres efectos, y cada uno es su interacción generalizada con uno de los tres efectos no estimables.

EJEMPLO 11.16 El artículo **"More on Planning Experiments to Increase Research Efficiency" (*Industrial and Eng. Chemistry*, 1970: 60–65)** reporta sobre los resultados de un cuarto de réplica de un experimento 2^5 en el cual los cinco factores fueron A = temperatura de condensación, B = cantidad de material B, C = volumen de solvente, D = tiempo de condensación y E = cantidad de material E. La variable de respuesta fue el rendimiento del proceso químico. Los contrastes definitorios seleccionados fueron ACE y BDE, con interacción generalizada $(ACE)(BDE) = ABCD$. Los 28 efectos principales e interacciones restantes ahora pueden ser divididos en siete grupos de cuatro efectos cada uno, de modo que los efectos dentro de un grupo no pueden ser valorados por separado. Por ejemplo, las interacciones generalizadas de A con efectos no estimables son $(A)(ACE) = CE$, $(A)(BDE) = ABDE$ y $(A)(ABCD) = BCD$, de modo que un grupo distorsionado es $\{A, CE, ABDE, BCD\}$. El conjunto completo de grupos distorsionados es

$$\{A, CE, ABDE, BCD\}\ \{B, ABCE, DE, ACD\}\ \{C, AE, BCDE, ABD\}$$
$$\{D, ACDE, BE, ABC\}\ \{E, AC, BD, ABCDE\}\ \{AB, BCE, ADE, CD\}$$
$$\{AD, CDE, ABE, BC\}$$

■

Una vez que se eligen los contrastes definitorios para un cuarto de réplica, se utilizan en la discusión de confusión para dividir las 2^p condiciones de tratamiento en cuatro grupos de 2^{p-2} condiciones cada uno. Entonces se selecciona uno de los cuatro grupos como el conjunto de condiciones en las cuales los datos serán recolectados. Comentarios similares aplican a una $1/2^r$ réplica de un experimento 2^p factorial.

Habiendo realizado observaciones para las combinaciones de tratamiento seleccionadas se construye una tabla de signos similar a la tabla 11.11. La tabla contiene sólo un renglón por cada una de las combinaciones de tratamiento observadas en realidad en lugar de 2^p renglones y existe sólo una columna por cada grupo distorsionado (puesto que cada efecto en el grupo tendría el mismo conjunto de signos en las condiciones de tratamiento seleccionadas para la observación). Los signos en cada columna indican como siempre cómo se calculan los contrastes para las diversas sumas de cuadrados. También se puede utilizar el método de Yates, pero la regla para disponer las condiciones observadas en orden estándar debe ser modificada.

La parte difícil del análisis de réplica fraccionaria en general implica decidir cuál utilizar para la suma de cuadrados de error. Puesto que normalmente no habrá réplica (aunque se podrían observar, por ejemplo, dos réplicas de un cuarto de réplica), algunas sumas de cuadrados para efectos deben ser agrupadas para obtener una suma de cuadrados para error. En una media réplica de un experimento 2^8, por ejemplo, se puede elegir una estructura distorsionada de modo que cada uno de los ocho efectos principales y cada una de las 28 interacciones de dos factores se confundan sólo con interacciones de alto grado, y que existan 27 grupos distorsionados adicionales que impliquen sólo interacciones de alto grado. Suponiendo la ausencia de efectos de interacción de alto grado las 27 sumas de cuadrados resultantes pueden entonces ser sumadas para dar una suma de cuadrados para error, lo que permite pruebas de 1 grado de libertad de todos los efectos principales e interacciones de dos factores. Sin embargo, en muchos casos se pueden obtener pruebas de efectos principales sólo mediante la agrupación de algunas o todas las sumas de cuadrados asociadas con grupos distorsionados que impliquen interacciones de dos factores, y las correspondientes interacciones de dos factores no pueden ser investigadas.

EJEMPLO 11.17 (Continuación del ejemplo 11.16)

El conjunto de condiciones de tratamiento seleccionadas y los resultados producidos para el cuarto de réplica del experimento 2^5 fueron

e	*ab*	*ad*	*bc*	*cd*	*ace*	*bde*	*abcde*
23.2	15.5	16.9	16.2	23.8	23.4	16.8	18.1

La tabla de signos abreviada se muestra en la tabla 11.16.

Con SSA denotando la suma de cuadrados para los efectos en el grupo distorsionado $\{A, CE, ABDE, BCD\}$

$$\text{SSA} = \frac{(-23.2 + 15.5 + 16.9 - 16.2 - 23.8 + 23.4 - 16.8 + 18.1)^2}{8} = 4.65$$

Tabla 11.16 Tabla de signos para el ejemplo 11.17

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*AB*	*AD*
e	−	−	−	−	+	+	+
ab	+	+	−	−	−	+	−
ad	+	−	−	+	−	−	+
bc	−	+	+	−	−	−	+
cd	−	−	+	+	−	+	−
ace	+	−	+	−	+	−	−
bde	−	+	−	+	+	−	−
abcde	+	+	+	+	+	+	+

Asimismo SSB = 53.56, SSC = 10.35, SSD = .91, SSE′ = 10.35 (el ′ distingue esta cantidad de la suma de cuadrados para error SSE), SSAB = 6.66 y SSAD = 3.25 y se obtiene SST = 4.65 + 53.56 + ··· + 3.25 = 89.73. Para probar efectos principales, se utiliza SSE = SSAB + SSAD = 9.91 con 2 grados de libertad. La tabla ANOVA aparece en la tabla 11.17.

Tabla 11.17 Tabla ANOVA para el ejemplo 11.17

Fuente	gl	Suma de cuadrados	Media cuadrática	*f*
A	1	4.65	4.65	.94
B	1	53.56	53.56	10.80
C	1	10.35	10.35	2.09
D	1	.91	.91	.18
E	1	10.35	10.35	2.09
Error	2	9.91	4.96	
Total	7	89.73		

Dado que $F_{.05,1,2} = 18.51$, ninguno de los cinco efectos principales puede ser juzgado como significativo. Desde luego, con sólo dos grados de libertad para error, la prueba no es muy poderosa (es decir, es bastante probable que no detecte la presencia de efectos). El artículo de *Industrial and Engineering Chemistry,* de donde se tomaron los datos, en realidad da una estimación independiente del error estándar de los efectos de tratamiento basado en experiencias previas, de modo que utilizó un análisis algo diferente. El análisis aquí realizado fue sólo para propósitos ilustrativos, puesto que en general se desearía mucho más que 2 grados de libertad para error. ■

Tal como una alternativa de las pruebas *F* basadas en el agrupamiento de sumas de cuadrados para obtener SSE, se puede examinar una gráfica de probabilidad normal de contrastes de efecto.

EJEMPLO 11.18 Se realizó un experimento para investigar la contracción de material plástico utilizado para fundas de cables de velocímetro (**"An Explanation and Critique of Taguchi's Contribution to Quality Engineering", *Quality and Reliability Engr. Intl.*, 1988: 123–131**). Los ingenieros comenzaron con 15 factores: diámetro externo del forro, troquel de forro, material de forro, velocidad de la línea de forrar, tipo de trenzado del alambre, tensión de trenzado, diámetro del alambre, tensión del forro, temperatura del forro, material de recubrimiento, tipo de troquel de recubrimiento, temperatura de fusión, paquete de pantalla, método de enfriamiento y velocidad de la línea. Se sospechaba que sólo algunos de estos factores eran importantes, así que se realizó un experimento de selección en la forma de un factorial 2^{15-11} (una $1/2^{11}$ fracción de un experimento 2^{15} factorial). La estructura alias resultante es bastante complicada; en particular, cada efecto principal se confunde con interacciones de dos factores. La variable de respuesta fue el porcentaje de contracción de un espécimen de cable producido a niveles diseñados de los factores.

La figura 11.15 muestra una gráfica de probabilidad normal de los contrastes de efecto. Todos excepto dos de los puntos se aproximan bastante a una línea recta. Los puntos discrepantes corresponden a los efectos E = tipo de trenzado del alambre y G = diámetro del alambre, lo que sugiere que esos dos factores son los únicos que afectan la cantidad de contracción.

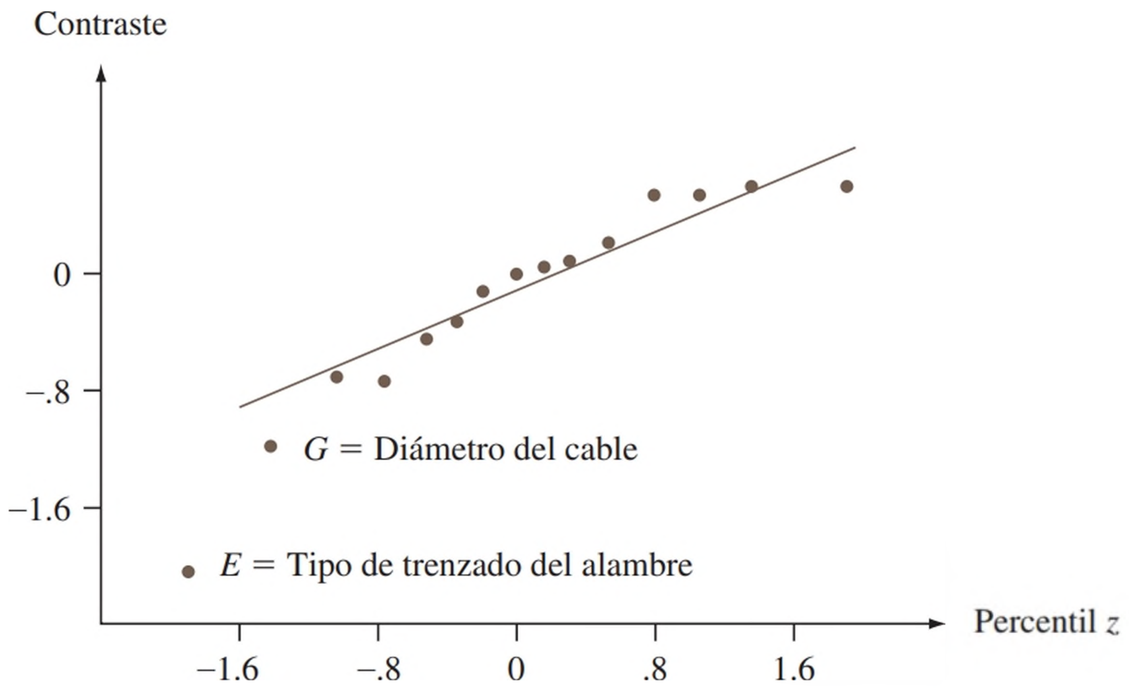


Figura 11.15 Gráfica de probabilidad normal de contrastes del ejemplo 11.18 ■

Los temas de la experimentación factorial, confusión y la replicación fraccionaria abarcan muchos modelos y técnicas que no hemos analizado. Por favor, consulte las referencias del capítulo para obtener más información.

EJERCICIOS Sección 11.4 (38–49)

38. Los siguientes datos se obtuvieron con un experimento para estudiar la naturaleza de dependencia de la corriente de soldar en tres factores: voltaje de soldar, velocidad de alimentación del alambre y distancia de la punta del cautín a la pieza de trabajo. Hubo dos niveles de cada factor (un experimento 2^3) con dos réplicas por cada combinación de niveles (los promedios a través de las réplicas concuerdan con los valores dados en el artículo **"A Study on Prediction of Welding Current in Gas Metal Arc Welding", *J. Engr. Manuf.*, 1991: 64–69**). Los dos primeros números dados son para el tratamiento (1), los dos siguientes para a y así sucesivamente en orden estándar: 200.0, 204.2, 215.5, 219.5, 272.7, 276.9, 299.5, 302.7, 166.6, 172.6, 186.4, 192.0, 232.6, 240.8, 253.4, 261.6.

a. Verifique que las sumas de cuadrados son las que se dan en la tabla ANOVA adjunta generada por Minitab.

b. ¿Cuáles efectos parecen ser importantes y por qué?

```
Analysis of Variance for current
Source              DF       SS       MS        F      P
Volt                 1   1685.1   1685.1   102.38  0.000
Velocidad            1  21272.2  21272.2  1292.37  0.000
Dist                 1   5076.6   5076.6   308.42  0.000
Volt*velocidad       1     36.6     36.6     2.22  0.174
Volt*dist            1      0.4      0.4     0.03  0.877
velocidad*dist       1    109.2    109.2     6.63  0.033
Volt*velocidad
*dist                1     23.5     23.5     1.43  0.266
Error                8    131.7     16.5
Total               15  28335.3
```

39. Los siguientes datos se obtuvieron con un experimento 2^3 con tres réplicas por combinación de tratamientos diseñado para estudiar los efectos de concentración de detergente (A), concentración de carbonato de sodio (B) y concentración de carboximetil celulosa de sodio (C) en el poder limpiador de una solución en pruebas de lavado (un número grande indica un mejor poder limpiador que uno pequeño):

Niveles de factor				
A	***B***	***C***	**Condición**	**Observaciones**
1	1	1	(1)	106, 93, 116
2	1	1	*a*	198, 200, 214
1	2	1	*b*	197, 202, 185
2	2	1	*ab*	329, 331, 307
1	1	2	*c*	149, 169, 135
2	1	2	*ac*	243, 247, 220
1	2	2	*bc*	255, 230, 252
2	2	2	*abc*	383, 360, 364

a. Luego de obtener los totales de celda $x_{ijk.}$, calcule las estimaciones de β_1, γ_{11}^{AC}, y γ_{21}^{AC}

b. Use los totales de celda junto con el método de Yates para calcular los contrastes de efecto y las sumas de cuadrados. Luego construya una tabla ANOVA y pruebe todas las hipótesis apropiadas con $\alpha = .05$.

c. Suponga que se utiliza agua a baja temperatura para obtener los datos. El experimento completo se repite entonces con una temperatura de agua mayor para obtener los siguientes datos. Utilice el algoritmo de Yates sobre el conjunto completo de 48 observaciones para obtener la suma de cuadrados y la tabla de ANOVA, y posteriormente pruebe la hipótesis apropiada a un nivel de .05.

Condición	**Observaciones**
d	144, 154, 158
ad	239, 227, 244
bd	232, 242, 246
abd	364, 362, 346
cd	194, 162, 203
acd	284, 295, 291
bcd	291, 287, 297
abcd	411, 406, 395

40. En un estudio de procesos utilizados para eliminar impurezas de artículos de celulosa (**"Optimization of Rope–Range Bleaching of Cellulosic Fabrics"**, ***Textile Research J.*****, 1976: 493–496**) se obtuvieron los siguientes datos con un experimento 2^4 que implica el proceso de desencolado. Los cuatro factores fueron concentración de enzima (A), pH (B), temperatura (C) y tiempo (D).

Tratamiento	**Enzima (g/L)**	**pH**	**Temp. (°C)**	**Tiempo (hr)**	**% de almidón en peso 1a. répl.**	**% de almidón en peso 2a. répl.**
(1)	.50	6.0	60.0	6	9.72	13.50
a	.75	6.0	60.0	6	9.80	14.04
b	.50	7.0	60.0	6	10.13	11.27
ab	.75	7.0	60.0	6	11.80	11.30
c	.50	6.0	70.0	6	12.70	11.37
ac	.75	6.0	70.0	6	11.96	12.05
bc	.50	7.0	70.0	6	11.38	9.92
abc	.75	7.0	70.0	6	11.80	11.10
d	.50	6.0	60.0	8	13.15	13.00
ad	.75	6.0	60.0	8	10.60	12.37
bd	.50	7.0	60.0	8	10.37	12.00
abd	.75	7.0	60.0	8	11.30	11.64
cd	.50	6.0	70.0	8	13.05	14.55
acd	.75	6.0	70.0	8	11.15	15.00
bcd	.50	7.0	70.0	8	12.70	14.10
abcd	.75	7.0	70.0	8	13.20	16.12

a. Use el algoritmo de Yates para obtener sumas de cuadrados y la tabla ANOVA.

b. ¿Parecen estar presentes los efectos de interacción de segundo, tercero y cuarto orden? Explique su razonamiento. ¿Qué efectos principales parecen ser significativos?

41. Como con muchos productos deshidratados, los tomates deshidratados pueden presentar una decoloración indeseable durante el proceso de deshidratado y almacenamiento. Un experimento replicado tipo 2^3 se llevó a cabo como un esfuerzo para relacionar la calidad del color a los factores *tiempo de almacenamiento, temperatura* y *tipo de empaque* (**"Use of Factorial Experimental Design for Analyzing the Effect of Storage Conditions on Color Quality of Sun–Dried Tomatoes"**, ***Sci. Res. and Essays*****, 2012: 477–489**). En la siguiente tabla los valores más altos de la variable de respuesta (con base en mediciones cromáticas) están asociadas a una calidad de color más alta:

Tiempo de almacenamiento	**Temperatura de almacenamiento**	**Empaque**	**Calidad del color Réplica 1**	**Calidad del color Réplica 2**
−	−	−	2.38	2.40
+	−	−	2.38	2.40
−	+	−	2.42	2.40
+	+	−	2.31	2.29
−	−	+	2.38	2.40
+	−	+	2.38	2.40
−	+	+	1.94	1.94
+	+	+	1.93	1.92

Construya una tabla ANOVA y úsela como base para decidir cuáles efectos son significativos.

42. Los siguientes datos de consumo de energía en los calores de hornos eléctricos (kW consumidos por tonelada de producto

fundido) se obtuvieron con un experimento factorial 2^4 con tres réplicas (**"Studies on a 10-cwt Arc Furnace", *J. of the Iron and Steel Institute*, 1956: 22**). Los factores fueron la naturaleza del techo A (bajo, alto), el ajuste de energía B (bajo, alto), chatarra utilizada C (tubo, placa) y carga D (700 lb/1000 lb).

Tratamiento	x_{ijklm}	Tratamiento	x_{ijklm}
(1)	866, 862, 800	d	988, 808, 650
a	946, 800, 840	ad	966, 976, 876
b	774, 834, 746	bd	702, 658, 650
ab	709, 789, 646	abd	784, 700, 596
c	1017, 990, 954	cd	922, 808, 868
ac	1028, 906, 977	acd	1056, 870, 908
bc	817, 783, 771	bcd	798, 726, 700
abc	829, 806, 691	$abcd$	752, 714, 714

Construya la tabla ANOVA y pruebe todas las hipótesis de interés con $\alpha = .01$.

43. El artículo **"Statistical Design and Analysis of Qualification Test Program for a Small Rocket Engine" (*Industrial Quality Control*, 1964: 14–18)** presenta datos deducidos de un experimento para evaluar los efectos de vibración (A), ciclos de temperatura (B), ciclos de altitud (C) y temperatura para ciclos de altitud y encendido (D) sobre duración del empuje. Aquí se da un subconjunto de los datos. (En el artículo hubo cuatro niveles de D en lugar de sólo dos.) Use el método de Yates para obtener sumas de cuadrados y la tabla ANOVA. Luego asuma que no existen interacciones de tres y cuatro factores, agrupe las sumas de cuadrados correspondientes para obtener una estimación de σ^2 y pruebe todas las hipótesis apropiadas al nivel .05.

		D_1		D_2	
		C_1	C_2	C_1	C_2
A_1	B_1	21.60	21.60	11.54	11.50
	B_2	21.09	22.17	11.14	11.32
A_2	B_1	21.60	21.86	11.75	9.82
	B_2	19.57	21.85	11.69	11.18

44. **a.** En un experimento 2^4, suponga que se van a utilizar dos bloques y que se decide confundir la interacción $ABCD$ con el efecto de bloque. ¿Qué tratamientos deben realizarse en el primer bloque [el que contiene el tratamiento (1)] y qué tratamientos se asignan al segundo bloque?

b. En un experimento para investigar la retención de niacina en vegetales en función de la temperatura de cocción (A), tamaño de cedazo (B), tipo de procesamiento (C) y tiempo de cocción (D), cada factor se mantuvo en dos niveles. Se utilizaron dos bloques, con la asignación de bloques como se da en el inciso a) para confundir sólo la interacción $ABCD$ con los bloques. Use el procedimiento de Yates para obtener la tabla ANOVA para los siguientes datos.

Tratamiento	x_{ijkl}	Tratamiento	x_{ijkl}
(1)	91	d	72
a	85	ad	78
b	92	bd	68
ab	94	abd	79
c	86	cd	69
ac	83	acd	75
bc	85	bcd	72
abc	90	$abcd$	71

c. Suponga que no existen efectos tridireccionales, de modo que las sumas de cuadrados asociadas pueden ser combinadas para producir un estimado de σ^2, y realice todas las pruebas adecuadas al nivel .05.

45. **a.** Se realizó un experimento para investigar los efectos en la sensibilidad al audio de resistencia variable (A), dos capacitancias (B, C) e inductancia de una bobina (D) en una parte de un circuito de televisión. Si se utilizaron cuatro bloques con cuatro tratamientos por bloque y los efectos definitorios para confusión fueron AB y CD, ¿cuáles tratamientos aparecieron en cada bloque?

b. Suponga que se realizaron dos réplicas del experimento descrito en el inciso a) y que se obtuvieron los siguientes datos. Obtenga la tabla ANOVA y pruebe todas las hipótesis pertinentes al nivel .01.

Tratamiento	x_{ijkl1}	x_{ijkl2}	Tratamiento	x_{ijkl1}	x_{ijkl2}
(1)	618	598	d	598	585
a	583	560	ad	587	541
b	477	525	bd	480	508
ab	421	462	abd	462	449
c	601	595	cd	603	577
ac	550	589	acd	571	552
bc	505	484	bcd	502	508
abc	452	451	$abcd$	449	455

46. En un experimento que implica cuatro factores (A, B, C y D) y cuatro bloques, demuestre que al menos un efecto principal o un efecto de interacción de dos factores debe ser confundido con el efecto de bloque.

47. **a.** En un experimento de siete factores (A,..., G), suponga que en realidad se realiza un cuarto de réplica. Si los efectos definitorios son $ABCDE$ y $CDEFG$, ¿cuál es el tercer efecto no estimable y qué tratamientos están en el grupo que contiene (1)? ¿Cuáles son los grupos distorsionados de los siete efectos principales?

b. Si el cuarto de réplica se tiene que realizar con cuatro bloques (con ocho tratamientos por bloque), ¿cuáles son los bloques si los efectos a ser confundidos son ACF y BDG?

48. El artículo **"Applying Design of Experiments to Improve a Laser Welding Process" (*J. of Engr. Manufacture*, 2008: 1035–1042)** incluye los resultados de una media réplica de un experimento 2^4. Los cuatro factores fueron: A. Potencia (2900

W, 3300 W), *B*. Corriente (2400 mV, 3600 mV), *C*. Limpieza de laterales (no, sí) y *D*. Limpieza de techo (no, sí).

a. Si el efecto *ABCD* es elegido como el efecto de definición para la réplica y el grupo de los ocho tratamientos para los que se obtienen los datos incluye el tratamiento (1), ¿qué otros tratamientos se observaron en el grupo y cuáles son los pares distorsionados?

b. El artículo citado presentó datos sobre dos variables de respuesta diferentes, el porcentaje de uniones defectuosas, para el cordón derecho de soldadura láser y el cordón de soldadura a la izquierda. Aquí consideramos sólo la última respuesta. Las observaciones figuran en esta lista en orden estándar después de eliminar la mitad no observada. Suponiendo que las interacciones de dos y tres factores son insignificantes, pruebe un nivel de .05 para la presencia de efectos principales. También construya una gráfica de probabilidad normal.

8.936 9.130 4.314 7.692
.415 6.061 1.984 3.830

49. Una media réplica de un experimento 2^5 para investigar el efecto del tiempo de tratamiento térmico (*A*), tiempo de temple (*B*), tiempo de estirado (*C*), posición de los serpentines calentadores (*D*) y posición de medición (*E*) en la dureza de piezas fundidas de acero, dio los datos adjuntos. Construya la tabla ANOVA y (suponiendo que las interacciones de segundo orden y orden más alto son insignificantes) pruebe al nivel .01 la presencia de efectos principales. Construya también una gráfica de probabilidad normal.

Tratamiento	Observación	Tratamiento	Observación
a	70.4	*acd*	66.6
b	72.1	*ace*	67.5
c	70.4	*ade*	64.0
d	67.4	*bcd*	66.8
e	68.0	*bce*	70.3
abc	73.8	*bde*	67.9
abd	67.0	*cde*	65.9
abe	67.8	*abcde*	68.0

EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS (50–61)

50. Los resultados de un estudio de la efectividad del secado en tendedero en la suavidad de las telas se resumen en el artículo **"Line–Dried vs. Machine–Dried Fabrics: Comparison of Appearance, Hand, and Consumer Acceptance" (*Home Econ. Research J.*, 1984: 27–35)**. Se dieron calificaciones de suavidad para nueve tipos diferentes de telas y cinco métodos de secado diferentes: 1) secado en máquina, 2) secado colgado, 3) secado colgado seguido por 15 min de secado en centrífuga, 4) secado colgado con suavizante y 5) secado colgado con viento. Considerando los diferentes tipos de tela como bloques, construya una tabla ANOVA. Con un nivel de significancia de .05, pruebe si hay diferencia entre la calificación de suavidad media real según los métodos de secado.

		Métodos de secado				
		1	2	3	4	5
Tela	Crepé	3.3	2.5	2.8	2.5	1.9
	Doble punto	3.6	2.0	3.6	2.4	2.3
	Asargada	4.2	3.4	3.8	3.1	3.1
	Asargada combinada	3.4	2.4	2.9	1.6	1.7
	Tela esponja	3.8	1.3	2.8	2.0	1.6
	Paño fino	2.2	1.5	2.7	1.5	1.9
	Tela para sábanas	3.5	2.1	2.8	2.1	2.2
	Pana	3.6	1.3	2.8	1.7	1.8
	Mezclilla	2.6	1.4	2.4	1.3	1.6

51. La absorción de agua de dos tipos de mortero utilizados para reparar cemento dañado se analiza en el artículo **"Polymer Mortar Composite Matrices for Maintenance-Free, Highly Durable Ferrocement" (*J. of Ferrocement*, 1984: 337–345)**. Se sumergieron especímenes de mortero para cemento común (OCM, por sus siglas en inglés) y mortero para cemento con polímero (PCM) durante lapsos de tiempo variables (5, 9, 24 o 48 horas) y se registró la absorción de agua (% por peso). Con el tipo de mortero como factor *A* (con dos niveles) y el periodo de inmersión como factor *B* (con cuatro niveles) se realizaron tres observaciones por cada combinación de nivel de factor. Se utilizaron los datos incluidos en el artículo para calcular las sumas de cuadrados, las cuales fueron SSA = 322.667, SSB = 35.623, SSAB = 8.557 y STC = 372.113. Use esta información para construir una tabla ANOVA. Pruebe las hipótesis apropiadas a un nivel de significancia de .05.

52. Se dispuso de cuatro parcelas para un experimento para comparar la acumulación de tréboles con cuatro tipos de sembrado **("Performance of Overdrilled Red Clover with Different Sowing Rates and Initial Grazing Managements", *N. Zeal. J. of Exp. Ag.*, 1984: 71–81)**. Puesto que las cuatro parcelas habían sido rozadas de forma diferente antes del experimento y se pensaba que esto podía afectar la acumulación de tréboles, se utilizó un experimento de bloques aleatorizados con los cuatro tipos de sembrado probados en una sección de cada parcela. Use los datos dados para probar la hipótesis nula de ninguna diferencia en la acumulación de trébol media verdadera (kg DM/ha) con los diferentes tipos de sembrado.

		Coeficiente de sembrado (kg/ha)			
		3.6	6.6	10.2	13.5
Parcela	1	1155	2255	3505	4632
	2	123	406	564	416
	3	68	416	662	379
	4	62	75	362	564

53. En un proceso de control químico automatizado, la velocidad con la cual los objetos colocados sobre una banda transportadora pasan a través de un rociado químico (velocidad de banda), la cantidad de químico rociado (volumen rociado) y la marca del químico utilizado (marca) son factores que pueden afectar la uniformidad del recubrimiento aplicado. Se condujo un experimento 2^3 replicado en un esfuerzo por incrementar la uniformidad del recubrimiento. En la tabla siguiente los valores altos de la variable de respuesta están asociados con la alta uniformidad superficial:

				Uniformidad superficial	
Corrida	**Volumen de rocío**	**Velocidad de banda**	**Marca**	**Réplica 1**	**Réplica 2**
1	−	−	−	40	36
2	+	−	−	25	28
3	−	+	−	30	32
4	+	+	−	50	48
5	−	−	+	45	43
6	+	−	+	25	30
7	−	+	+	30	29
8	+	+	+	52	49

Analice estos datos y exponga sus conclusiones.

54. Las plantas de energía de carbón utilizadas en la industria eléctrica han captado la atención del público debido a los problemas ambientales asociados con los desechos sólidos generados por la combustión a gran escala (**"Fly Ash Binders in Stabilization of FGD Wastes", *J. of Environmental Engineering*, 1998: 43–49**). Se realizó un estudio para analizar la influencia de tres factores: tipo de aglutinante (A), cantidad de agua (B) y escenario de disposición en la tierra (C), que afectan ciertas características de lixiviación de los desechos sólidos resultantes de la combustión. Cada factor se estudió a dos niveles. Se realizó un experimento 2^3 no replicado y se midió un valor de respuesta EC50 (la concentración efectiva, en mg/L, que reduce 50% de la luz en un bioensayo de luminiscencia) por cada combinación de niveles de factor. Los datos experimentales se dan en la siguiente tabla:

	Factor			Respuesta
Corrida	***A***	**B**	***C***	**EC50**
1	−1	−1	−1	23 100
2	1	−1	−1	43 000
3	−1	1	−1	71 400
4	1	1	−1	76 000
5	−1	−1	1	37 000
6	1	−1	1	33 200
7	−1	1	1	17 000
8	1	1	1	16 500

Lleve a cabo un ANOVA apropiado y establezca sus conclusiones.

55. Las impurezas en forma de óxidos de hierro reducen el valor económico y la utilidad de minerales industriales tales como caolines, en las industrias de la cerámica y en el procesamiento de papel. Se realizó un experimento 2^4 para evaluar los efectos de cuatro factores en el porcentaje de hierro extraído de muestras de caolín (**"Factorial Experiments in the Development of a Kaolin Bleaching Process Using Thiourea in Sulphuric Acid Solutions", *Hydrometallurgy*, 1997: 181–197**). Los factores y sus niveles aparecen en la siguiente tabla:

Factor	**Descripción**	**Unidades**	**Nivel bajo**	**Nivel alto**
A	H_2SO_4	M	.10	.25
B	Tiourea	g/L	0.0	5.0
C	Temperatura	°C	70	90
D	Tiempo	min	30	150

Los datos obtenidos de un experimento 2^4 no replicado se dan en la tabla siguiente.

Hornada de prueba	**Extracción de hierro (%)**	**Hornada de prueba**	**Extracción de hierro (%)**
(1)	7	*d*	28
a	11	*ad*	51
b	7	*bd*	33
ab	12	*abd*	57
c	21	*cd*	70
ac	41	*acd*	95
bc	27	*bcd*	77
abc	48	*abcd*	99

a. Calcule las estimaciones de los efectos principales y los efectos de interacción de dos factores para este experimento.

b. Cree una gráfica de probabilidad de los efectos. ¿Cuáles efectos parecen ser importantes?

56. Se han utilizado diseños factoriales en la silvicultura para evaluar los efectos de varios factores en el comportamiento de crecimiento de árboles. En el experimento, los investigadores pensaban que los retoños de abetos sanos debían abotonar más pronto que los retoños de abetos enfermos (**"Practical Analysis of Factorial Experiments in Forestry", *Canadian J. of Forestry*, 1995: 446–461**). Además, antes de plantarlos, los retoños fueron expuestos a tres niveles de pH para ver si este factor tenía algún efecto en la captación de virus por las raíces. La tabla siguiente muestra datos de un experimento de 2×3 para estudiar ambos factores

	pH		
Estado de salud	**3**	**5.5**	**7**
Enfermo	1.2, 1.4, 1.0, 1.2, 1.4	.8, .6, .8, 1.0, .8	1.0, 1.0, 1.2, 1.4, 1.2
Saludable	1.4, 1.6, 1.6, 1.6, 1.4	1.0, 1.2, 1.2, 1.4, 1.4	1.2, 1.4, 1.2, 1.2, 1.4

La variable de respuesta es una calificación promedio de cinco botones de un retoño. Las calificaciones son 0 (botón no abierto) 1 (botón parcialmente abierto) y 2 (botón totalmente abierto). Analice estos datos.

57. Una propiedad de las bolsas de aire de los automóviles que contribuye a su capacidad de absorber energía es la permeabilidad (pie^3/pie^2/min) del material tejido que se utiliza para su manufactura. Entender cómo la permeabilidad es influenciada por varios factores es importante para incrementar la efectividad de las bolsas de aire. En un estudio se analizaron los efectos de tres factores, cada uno a tres niveles. (**"Analysis of Fabrics Used in Passive Restraint Systems—Airbags", *J. of the Textile Institute*, 1996: 554–571**):

A (Temperatura): 8°C, 50°C, 75°C

B (Denier de la tela): 420−D, 630−D, 840−D

C (Presión del aire): 17.2 kPa, 34.4 kPa, 103.4 kPa

Temperatura 8°

	Presión		
Denier	**17.2**	**34.4**	**103.4**
420-D	73	157	332
	80	155	322
630-D	35	91	288
	43	98	271
840-D	125	234	477
	111	233	464

Temperatura 50°

	Presión		
Denier	**17.2**	**34.4**	**103.4**
420-D	52	125	281
	51	118	264
630-D	16	72	169
	12	78	173
840-D	90	149	338
	100	155	350

Temperatura 75°

	Presión		
Denier	**17.2**	**34.4**	**103.4**
420-D	37	95	276
	31	106	281
630-D	30	91	213
	41	100	211
840-D	102	170	307
	98	160	311

Analice estos datos y exprese sus conclusiones (suponga que todos los factores son fijos).

58. Un ingeniero químico ha realizado un experimento para estudiar los efectos de los factores fijos de presión del tanque (*A*), tiempo de cocción de la pulpa (*B*) y concentración de madera dura (*C*) en la resistencia del papel. El experimento implicó dos presiones, cuatro tiempos de cocción, tres concentraciones y dos observaciones con cada combinación de estos niveles. Las sumas calculadas de los cuadrados son SSA = 6.94, SSB = 5.61, SSC = 12.33, SSAB = 4.05, SSAC = 7.32, SSBC = 15.80, SSE = 14.40 y SST = 70.82. Construya la tabla ANOVA y realice pruebas apropiadas a un nivel de significancia.05.

59. Se estudió la resistencia de adhesión cuando se monta un circuito integrado en un sustrato de vidrio metalizado como una función del factor *A* = tipo de adhesivo, factor *B* = curva tiempo y factor *C* = material conductor (cobre y níquel). Los datos se dan a continuación junto con una tabla ANOVA generada por Minitab. ¿Qué conclusiones puede sacar de los datos?

		Tiempo de curado		
Cobre		**1**	**2**	**3**
		72.7	74.6	80.0
	1	80.0	77.5	82.7
		77.8	78.5	84.6
Adhesivo	**2**	75.3	81.1	78.3
		77.3	80.9	83.9
	3	76.5	82.6	85.0
Níquel		**1**	**2**	**3**
		74.7	75.7	77.2
	1	77.4	78.2	74.6
		79.3	78.8	83.0
Adhesivo	**2**	77.8	75.4	83.9
		77.2	84.5	89.4
	3	78.4	77.5	81.2

```
Analysis of Variance for strength
Source                GL       SS      MS      F      P
Adhesivo               2  101.317  50.659   6.54  0.007
Tiempocura             2  151.317  75.659   9.76  0.001
Matcond                1    0.722   0.722   0.09  0.764
Adhesivo*
tiempocura             4   30.526   7.632   0.98  0.441
Adhesivo*
matcond                2    8.015   4.008   0.52  0.605
Tiempocura*
matcond                2    5.952   2.976   0.38  0.687
Adhesivo*
tiempocura*
matcond                4   33.298   8.325   1.07  0.398
Error                 18  139.515   7.751
Total                 35  470.663
```

60. El artículo **"Effect of Cutting Conditions on Tool Performance in CBN Hard Turning" (*J. of Manuf. Processes*, 2005: 10–17)** reporta los siguientes datos de la velocidad de corte (m/s), alimentación (mm/rev), profundidad de corte (mm) y la vida de la herramienta (min). Lleve a cabo un análisis de varianza de tres factores de la vida de la herramienta, asumiendo la ausencia de cualquier posible interacción de los factores (como lo hicieron los autores del artículo).

Observación	Velocidad de corte	Alimentación	Profundidad de corte	Vida
1	1.21	0.061	0.102	27.5
2	1.21	0.168	0.102	26.5
3	1.21	0.061	0.203	27.0
4	1.21	0.168	0.203	25.0
5	3.05	0.061	0.102	8.0
6	3.05	0.168	0.102	5.0
7	3.05	0.061	0.203	7.0
8	3.05	0.168	0.203	3.5

61. Igual que con un cuadrado latino, se puede utilizar un diseño de cuadrado grecolatino cuando se sospecha que tres factores externos pueden afectar las variables de respuesta y que los cuatro factores (los tres externos y el de interés) tienen el mismo número de niveles. En un cuadrado latino cada nivel del factor de interés (C) aparece una vez en cada renglón (con cada nivel de A) y una vez en cada columna (con cada nivel de B). En un cuadrado grecolatino, cada nivel del factor D aparece una vez en cada renglón, en cada columna y también con cada nivel del tercer factor externo C. Alternativamente, se puede utilizar el diseño cuando los cuatro factores son de igual interés, el número de niveles de cada uno es N y cuando sólo están disponibles los recursos para N^2 observaciones. Un cuadrado de 5×5 se ilustra en a) con (k, l) en cada celda que denota el k-ésimo nivel de C y el l-ésimo nivel de D. En b) se presentan datos de pérdida de peso en barras de silicio utilizadas para material semiconductor como una función del volumen de grabado al agua fuerte (A), color del ácido nítrico en solución de grabado (B), tamaño de las barras (C) y tiempo en la solución de grabado (D) (de **"Applications of Analytic Techniques to the Semiconductor Industry", Fourteenth Midwest Quality Control Conference, 1959**).

Sea $x_{ij(kl)}$ la pérdida de peso observada cuando el factor A está al nivel i, B está al nivel j, C está al nivel k y D está al nivel l. Suponiendo que no hay interacción entre los factores, la suma total de cuadrados SST (con $N^2 - 1$ grados de libertad) puede ser dividida en SSA, SSB, SSC, SSD y SSE. Proporcione expresiones para estas sumas de cuadrados, incluidas las fórmulas, obtenga la tabla ANOVA de los datos dados y pruebe cada una de las cuatro hipótesis de efecto principal con $\alpha = .05$.

				B		
(*C*, *D*)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	
	1	(1, 1)	(2, 3)	(3, 5)	(4, 2)	(5, 4)
	2	(2, 2)	(3, 4)	(4, 1)	(5, 3)	(1, 5)
A	**3**	(3, 3)	(4, 5)	(5, 2)	(1, 4)	(2, 1)
	4	(4, 4)	(5, 1)	(1, 3)	(2, 5)	(3, 2)
	5	(5, 5)	(1, 2)	(2, 4)	(3, 1)	(4, 3)

(a)

65	82	108	101	126
84	109	73	97	83
105	129	89	89	52
119	72	76	117	84
97	59	94	78	106

(b)

BIBLIOGRAFÍA

Box, George, William Hunter y Stuart Hunter, *Statistics for Experimenters* (2a. ed.), Wiley, Nueva York, 2006. Contiene un caudal de sugerencias e ideas sobre análisis de datos basados en la extensa experiencia consultora de los autores.

DeVor, R., T. Chang y J. W. Sutherland, *Statistical Quality Design and Control*, (2a. ed.), Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 2006. Incluye un estudio moderno de experimentos factoriales y factoriales fraccionarios con un mínimo de matemáticas.

Hocking, Ronald, *Methods and Applications of Linear Models* (2a. ed.), Wiley, Nueva York, 2003. Un tratamiento muy general de análisis de varianza escrito por una de las autoridades más reconocidas en este campo.

Kleinbaum, David *et al.*, *Applied Regression Analysis and Other Multivariable Methods* (4a. ed.) Duxbury Press, Boston, 2007. Contiene una discusión especialmente buena de problemas asociados con el análisis de "datos desbalanceados", es decir K_{ij} desiguales.

Kuehl, Robert O., *Design of Experiments: Statistical Principles of Research Design and Analysis* (2a. ed.), Duxbury Press, Boston, 1999. Un tratamiento amplio y actualizado de experimentos diseñados y análisis de los datos resultantes.

Montgomery, Douglas, *Design and Analysis of Experiments* (7a. ed.), Wiley, Nueva York, 2009. Véase la bibliografía del capítulo 10.

Neter, John, William Wasserman y Michael Kutner, *Applied Linear Statistical Models* (5a. ed.), Irwin, Homewood, IL., 2004. Véase la bibliografía del capítulo 10.

Vardeman, Stephen, *Statistics for Engineering Problem Solving*, PWS, Boston, 1994. Una introducción general para ingenieros, con mucha metodología descriptiva e inferencial para datos obtenidos de experimentos diseñados.

Regresión lineal simple y correlación

12

INTRODUCCIÓN

En los problemas de dos muestras discutidos en el capítulo 9 interesaba comparar valores de parámetros para la distribución x y la distribución y. Incluso cuando las observaciones se aparearon no se trató de utilizar información sobre una de las variables al estudiar la otra variable. Este es precisamente el objetivo del análisis de regresión, explotar la relación entre dos (o más) variables, de modo que se pueda obtener información sobre una de ellas mediante el conocimiento de los valores de las otras.

Gran parte de las matemáticas está dedicada a estudiar variables que están *determinísticamente* relacionadas. Decir que x y y están relacionadas de esta manera significa que, una vez que se conoce el valor de x, el valor de y queda completamente especificado. Por ejemplo, suponga que decide rentar una vagoneta por un día y la renta es de $25.00 más $.30 por milla recorrida. Si x = el número de millas recorridas y y = el cargo por la renta, entonces $y = 25 + .3x$. Si se recorren 100 millas ($x = 100$), entonces $y = 25 + .3(100) = 55$. Otro ejemplo, si la velocidad inicial de una partícula es v_0 y experimenta una aceleración constante a, entonces la distancia recorrida = $y = v_0x + \frac{1}{2}ax^2$, donde x = tiempo.

Existen muchas variables x y y que parecerían estar relacionadas entre sí, pero no de forma determinística. Un ejemplo conocido para muchos estudiantes está dado por las variables x = promedio de calificaciones en bachillerato (GPA, por sus siglas en inglés) y y = promedio de calificaciones universitario (GPA). El valor de y no puede ser determinado sólo con el conocimiento de x y dos estudiantes diferentes podrían tener el mismo valor x pero tener valores y muy diferentes. No obstante, existe la tendencia de que aquellos estudiantes que tienen en bachillerato promedio de calificaciones alto (bajo) también tienen un promedio alto (bajo) de calificaciones en la universidad. Conocer el promedio de calificaciones en bachillerato de un estudiante es bastante útil, ya que permite predecir cómo se desempeñará en la universidad.

Otros ejemplos de variables relacionadas de una forma no determinística incluyen x = edad de un niño y y = tamaño del vocabulario de ese niño, x = tamaño de un motor en centímetros cúbicos y y = eficiencia de combustible de un automóvil equipado con dicho motor, x = fuerza de tensión aplicada y y = cantidad de alargamiento en una tira de metal.

El **análisis de regresión** es la parte de la estadística que se ocupa de investigar la relación entre dos o más variables asociadas en una forma no determinística. En este capítulo, se generaliza la relación lineal determinística $y = \beta_0 + \beta_1 x$ a una relación probabilística lineal, se desarrollan procedimientos para hacer inferencias sobre del modelo y se obtiene una medida cuantitativa (el coeficiente de correlación) del grado al cual las dos variables están relacionadas. En el capítulo 13 se considerarán técnicas para validar un modelo particular y para investigar relaciones no lineales y relaciones que implican más de dos variables.

12.1 Modelo de regresión lineal simple

La relación matemática determinística más simple entre dos variables x y y es una relación lineal $y = \beta_0 + \beta_1 x$. El conjunto de pares (x, y) para los cuales $y = \beta_0 + \beta_1 x$ determina una línea recta con pendiente β_1 e intersección en y β_0.* El objetivo de esta sección es desarrollar un modelo probabilístico lineal.

Si las dos variables no están determinísticamente relacionadas, entonces con un valor fijo de x el valor de la segunda variable es incierto. Por ejemplo, si se está investigando la relación entre la edad de un niño y el tamaño del vocabulario y se decide seleccionar un niño de $x = 5.0$ años de edad, entonces antes de hacer la selección, el tamaño del vocabulario es una variable aleatoria Y. Después de que un niño en particular de 5 años de edad ha sido seleccionado y sometido a prueba, el resultado puede ser un vocabulario de 2000 palabras. Se diría entonces que el valor observado de Y asociado con la fijación de $x = 5.0$ fue $y = 2000$.

De modo más general, la variable cuyo valor es fijado por el experimentador será denotada por x y se llamará **variable independiente, pronosticadora o explicativa**. Con x fija, la segunda variable será aleatoria; esta variable aleatoria y su valor observado se designan por Y y y, respectivamente, y se le conoce como **variable dependiente** o **de respuesta**.

Normalmente se realizarán observaciones para varios escenarios de la variable independiente. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ los valores de la variable independiente para la que se realizan las observaciones y sean Y_i y y_i, respectivamente, la variable aleatoria y el valor observado asociado con x_i. Los datos bivariantes disponibles se componen entonces de los n pares $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. Una imagen de estos datos llamada **gráfica de dispersión** proporciona impresiones preliminares acerca de la naturaleza de cualquier relación. En una gráfica como esa, cada (x_i, y_i) se representa como un punto colocado en un sistema de coordenadas bidimensional.

* La pendiente de una recta es el cambio en y con un incremento de 1 unidad en x. Por ejemplo, si $y = -3x + 10$, entonces y se reduce en 3 cuando x se incrementa en 1, de modo que la pendiente es -3. La intersección en y es la altura a la cual la recta cruza el eje vertical y se obtiene estableciendo $x = 0$ en la ecuación.

EJEMPLO 12.1 Los problemas visuales y musculoesqueléticos asociados con el uso de terminales con pantalla de visualización (VDT, por sus siglas en inglés) se han vuelto un tanto comunes en años recientes. Algunos investigadores se han enfocado en la dirección vertical de la mirada fija como causa del cansancio e irritación de los ojos. Se sabe que esta relación está estrechamente relacionada con el área de la superficie ocular (OSA, por sus siglas en inglés), así que se requiere un método para medir el área de la superficie ocular. Los siguientes datos representativos sobre y = OSA (cm^2) y x = ancho de la fisura palprebal (es decir, el ancho horizontal de la apertura del ojo, en cm) fueron tomados del artículo **"Analysis of Ocular Surface Area for Comfortable VDT Workstation Layout" (*Ergonomics*, 1996: 877–884)**. No se proporciona el orden en el cual se obtuvieron las observaciones, así que por conveniencia se muestran en orden creciente de los valores x.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x_i	.40	.42	.48	.51	.57	.60	.70	.75	.75	.78	.84	.95	.99	1.03	1.12
y_i	1.02	1.21	.88	.98	1.52	1.83	1.50	1.80	1.74	1.63	2.00	2.80	2.48	2.47	3.05

i	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x_i	1.15	1.20	1.25	1.25	1.28	1.30	1.34	1.37	1.40	1.43	1.46	1.49	1.55	1.58	1.60
y_i	3.18	3.76	3.68	3.82	3.21	4.27	3.12	3.99	3.75	4.10	4.18	3.77	4.34	4.21	4.92

Por consiguiente $(x_1, y_1) = (.40, 1.02)$, $(x_5, y_5) = (.57, 1.52)$, etcétera. En la figura 12.1 se muestra una gráfica de dispersión obtenida con Minitab; se utilizó una opción que produjo una gráfica de puntos tanto de valores x como de valores y individualmente a lo largo de los márgenes derecho y superior de la gráfica, lo que facilita visualizar las distribuciones de las variables individuales (los histogramas o gráficas de caja son opciones alternativas). He aquí algunas anotaciones que hay que tener en cuenta sobre los datos y la gráfica:

- Varias observaciones tienen valores x idénticos aunque valores y diferentes (p. ej., $x_8 = x_9 = .75$ pero $y_8 = 1.80$ y $y_9 = 1.74$). Por tanto, el valor de y *no* está determinado sólo por x, sino también por varios otros factores.
- Existe una fuerte tendencia a que y se incremente a medida que x lo hace. Es decir, los valores grandes de OSA tienden a asociarse con valores grandes de ancho de fisura, una relación positiva entre las variables.

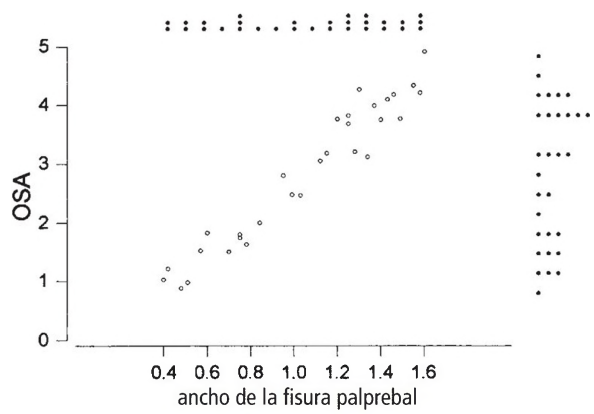


Figura 12.1 Gráfica de dispersión obtenida con Minitab con los datos del ejemplo 12.1, junto con gráficas de puntos de valores x y y

- Al parecer el valor de y podría ser pronosticado a partir de x al encontrar una recta que esté razonablemente cerca de los puntos presentes en la gráfica (los autores del artículo citado superponen tal recta en su gráfica). En otras palabras, existe evidencia de una relación lineal (aunque no perfecta) sustancial entre las dos variables. ■

Los ejes horizontal y vertical en la gráfica de dispersión de la figura 12.1 se cortan en el punto (0, 0). En muchos conjuntos de datos los valores de x o y o los valores de ambas variables difieren considerablemente de cero respecto a los rangos de los valores. Por ejemplo, un estudio de cómo se relaciona la eficiencia de un equipo de aire acondicionado con la temperatura diaria máxima a la intemperie podría implicar observaciones de temperaturas desde 80 hasta 100°F. Cuando es este el caso, una gráfica más informativa mostraría los ejes apropiadamente marcados que intersecan en algún punto diferente de (0, 0).

EJEMPLO 12.2 El arsénico está presente en muchas aguas subterráneas y en algunas aguas superficiales. Investigaciones recientes sobre sus efectos en la salud ha llevado a la Agencia de Protección Ambiental a reducir los niveles permisibles de arsénico en el agua potable, de modo que muchos sistemas de agua ya no son compatibles con las normas. Este interés ha estimulado el desarrollo de métodos para eliminar el arsénico. Los siguientes datos respecto a x = pH y y = arsénico eliminado (%) mediante un proceso en particular fueron tomados de una gráfica de dispersión que aparece en el artículo **"Optimizing Arsenic Removal During Iron Removal: Theoretical and Practical Considerations" (*J. of Water Supply Res. and Tech.*, 2005: 545–560)**.

x	7.01	7.11	7.12	7.24	7.94	7.94	8.04	8.05	8.07
y	60	67	66	52	50	45	52	48	40
x	8.90	8.94	8.95	8.97	8.98	9.85	9.86	9.86	9.87
y	23	20	40	31	26	9	22	13	7

La figura 12.2 muestra dos gráficas de dispersión de estos datos obtenidas con Minitab. En la figura 12.2(a) Minitab seleccionó la escala para ambos ejes. La figura 12.2(b) se obtuvo especificando una escala para los ejes, de modo que se intersecan aproximadamente en el punto (0, 0). La segunda gráfica está más amontonada que la primera; tal amontonamiento hace más difícil valorar la naturaleza general de cualquier relación. Por ejemplo, puede ser más difícil descubrir la curvatura en una gráfica amontonada.

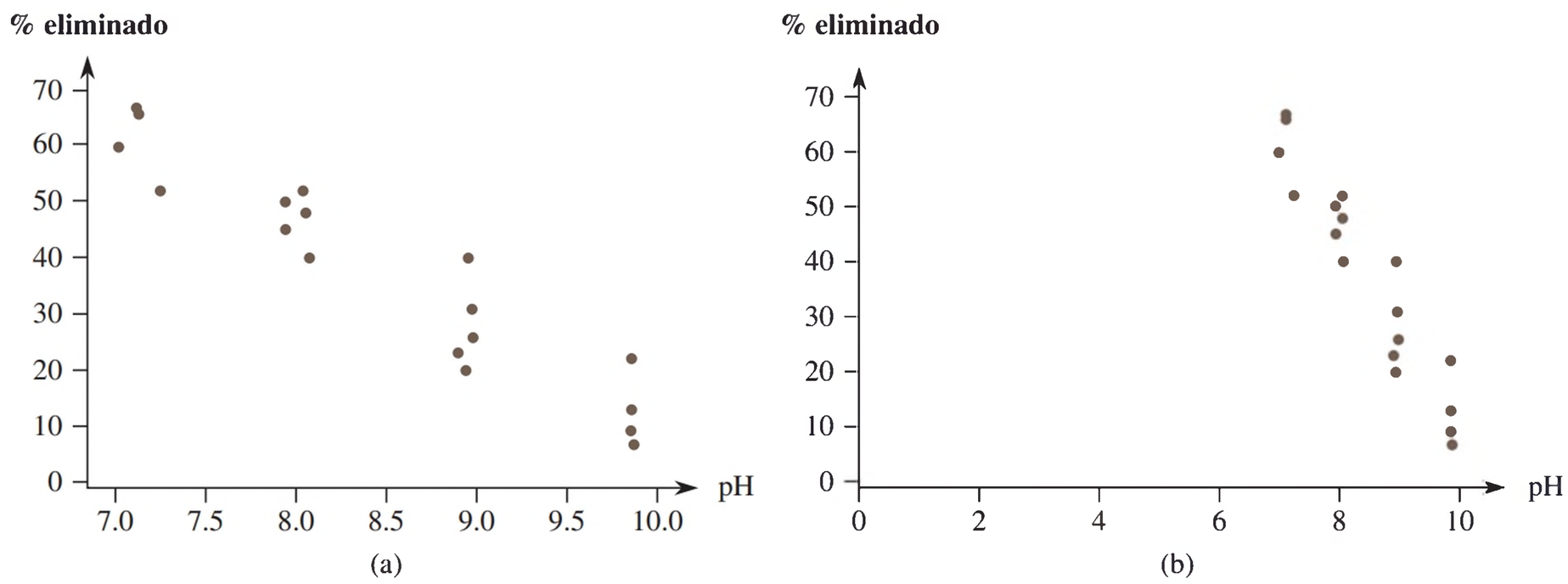


Figura 12.2 Gráficas de dispersión obtenidas con Minitab con los datos del ejemplo 12.2

Los grandes valores de arsénico eliminado tienden a asociarse con un bajo pH, una relación negativa o inversa. Además, las dos variables parecen estar al menos aproximadamente relacionadas de forma lineal, aunque los puntos en la gráfica se dispersarían en torno a cualquier línea recta sobrepuesta (dicha recta aparece en la gráfica en el artículo citado). ■

Modelo probabilístico lineal

Para el modelo determinístico $y = \beta_0 + \beta_1 x$, el valor observado real de y es una función lineal de x. La generalización apropiada de esto en un modelo probabilístico asume que *el valor esperado de Y es una función lineal de x*, pero para x fija la variable Y difiere de su valor esperado en una cantidad aleatoria.

DEFINICIÓN

Modelo de regresión lineal simple

Existen parámetros β_0, β_1 y σ^2 de tal suerte que con cualquier valor fijo de la variable independiente x, la variable dependiente es una variable aleatoria y está relacionada con x mediante la **ecuación modelo**

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon \qquad \textbf{(12.1)}$$

La cantidad ϵ en la ecuación modelo es una variable aleatoria, la cual se supone que está normalmente distribuida con $E(\epsilon) = 0$ y $V(\epsilon) = \sigma^2$.

La variable ϵ se conoce como **término de error aleatorio** o **desviación aleatoria** en el modelo. Sin ϵ cualquier par observado (x, y) correspondería a un punto que queda exactamente sobre la recta $y = \beta_0 + \beta_1 x$, llamada **recta de regresión** (o de **población**) **verdadera**. La inclusión del término de error aleatorio permite a (x, y) quedar por encima de la recta de regresión (cuando $\epsilon > 0$) o por debajo de la recta (cuando $\epsilon < 0$). Los puntos (x_1, y_1),..., (x_n, y_n) provenientes de n observaciones independientes se dispersarán entonces en torno a la recta de regresión verdadera, como se ilustra en la figura 12.3. En ocasiones la conveniencia del modelo de regresión lineal simple puede sugerirse mediante consideraciones teóricas (p. ej., existe una relación lineal exacta entre las dos variables, con ϵ representando el error de medición). Con mucha más frecuencia, no obstante, la racionalidad del modelo se indica mediante una gráfica de dispersión que exhibe un patrón lineal sustancial (tal como en las figuras 12.1 y 12.2).

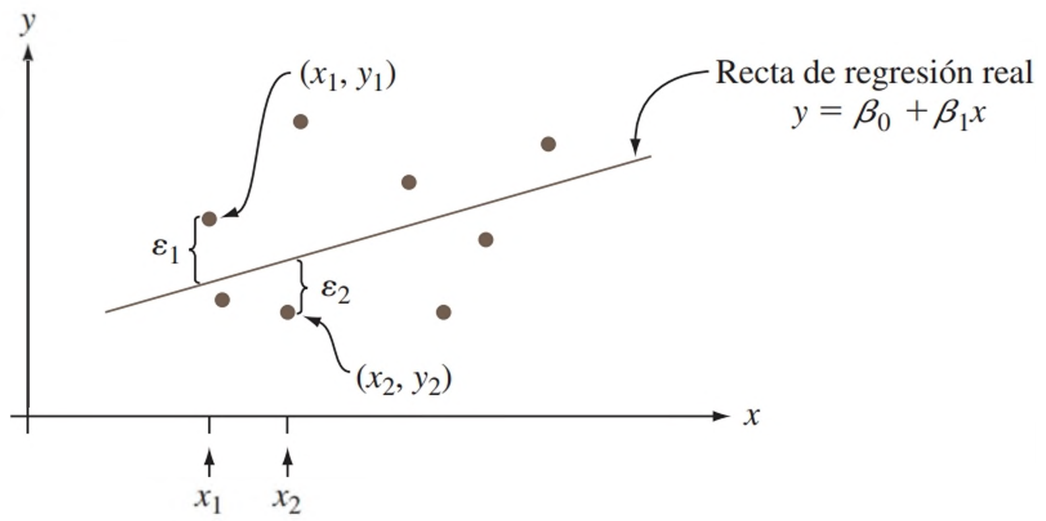


Figura 12.3 Puntos correspondientes a observaciones del modelo de regresión lineal simple

Las implicaciones de la ecuación modelo (12.1) se entienden mejor con la ayuda de la siguiente notación. Sea x^* un valor particular de la variable independiente x y

$$\mu_{Y\cdot x^*} = \text{el valor esperado (o media) de } Y \text{ cuando } x = x^*$$
$$\sigma^2_{Y\cdot x^*} = \text{la varianza de } Y \text{ cuando } x = x^*$$

La notación alternativa es $E(Y|x^*)$ y $V(Y|x^*)$. Por ejemplo, si x = esfuerzo aplicado (kg/mm)^2 y y = tiempo para la fractura (h), entonces $\mu_{Y\cdot 20}$ denotaría el valor esperado de tiempo para la fractura cuando se aplica un esfuerzo de 20 kg/mm^2. Si se piensa en una población completa de pares (x, y), entonces $\mu_{Y\cdot x^*}$ es la media de todos los valores y con los cuales $x = x^*$ y $\sigma^2_{Y\cdot x^*}$ es una medida de cuántos de estos valores de y se dispersan en torno a la media. Si por ejemplo, x = edad de un niño y y = tamaño del vocabulario, entonces $\mu_{Y\cdot 5}$ es el tamaño de vocabulario promedio de todos los niños de 5 años que hay en la población y $\sigma^2_{Y\cdot 5}$ describe la cantidad de variabilidad del tamaño de vocabulario de esta parte de la población. Una vez que se fija x, la única aleatoriedad del lado derecho de la ecuación modelo (12.1) se encuentra en el error aleatorio ϵ y su media y su varianza son 0 y σ^2, respectivamente, cualquiera que sea el valor de x. Esto implica que

$$\mu_{Y\cdot x^*} = E(\beta_0 + \beta_1 x^* + \epsilon) = \beta_0 + \beta_1 x^* + E(\epsilon) = \beta_0 + \beta_1 x^*$$
$$\sigma^2_{Y\cdot x^*} = V(\beta_0 + \beta_1 x^* + \epsilon) = V(\beta_0 + \beta_1 x^*) + V(\epsilon) = 0 + \sigma^2 = \sigma^2$$

Al reemplazar x^* en $\mu_{Y\cdot x^*}$ por x se obtiene la relación $\mu_{Y\cdot x} = \beta_0 + \beta_1 x$, la cual expresa que la *media de Y*, más que la Y misma, es una función lineal de x. La recta de regresión verdadera $y = \beta_0 + \beta_1 x$ es, por consiguiente, la *recta de las medias*; su altura por encima de cualquier valor x es el valor esperado de Y para ese valor de x. La pendiente β_1 de la recta de regresión verdadera se interpreta como el cambio *esperado* en Y asociado con el incremento de 1 unidad del valor de x. La segunda relación nos indica que la cantidad de variabilidad en la distribución de valores Y es la misma con cada valor diferente de x (homogeneidad de varianza). Si la variable independiente es el peso del vehículo y la variable dependiente es la eficiencia del combustible (mpg, millas por galón)entonces el modelo implica que el promedio de la eficiencia de combustible cambia linealmente con el peso (probablemente β_1 es negativa) y que la cantidad de variabilidad de la eficiencia para cualquier peso particular es la misma que para cualquier otro peso. Por último, con x fija, Y es la suma de una constante $\beta_0 + \beta_1 x$ y una variable aleatoria ϵ normalmente distribuida, por tanto, tiene una distribución normal. Estas propiedades se ilustran en la figura 12.4. El parámetro de varianza σ^2 determina el

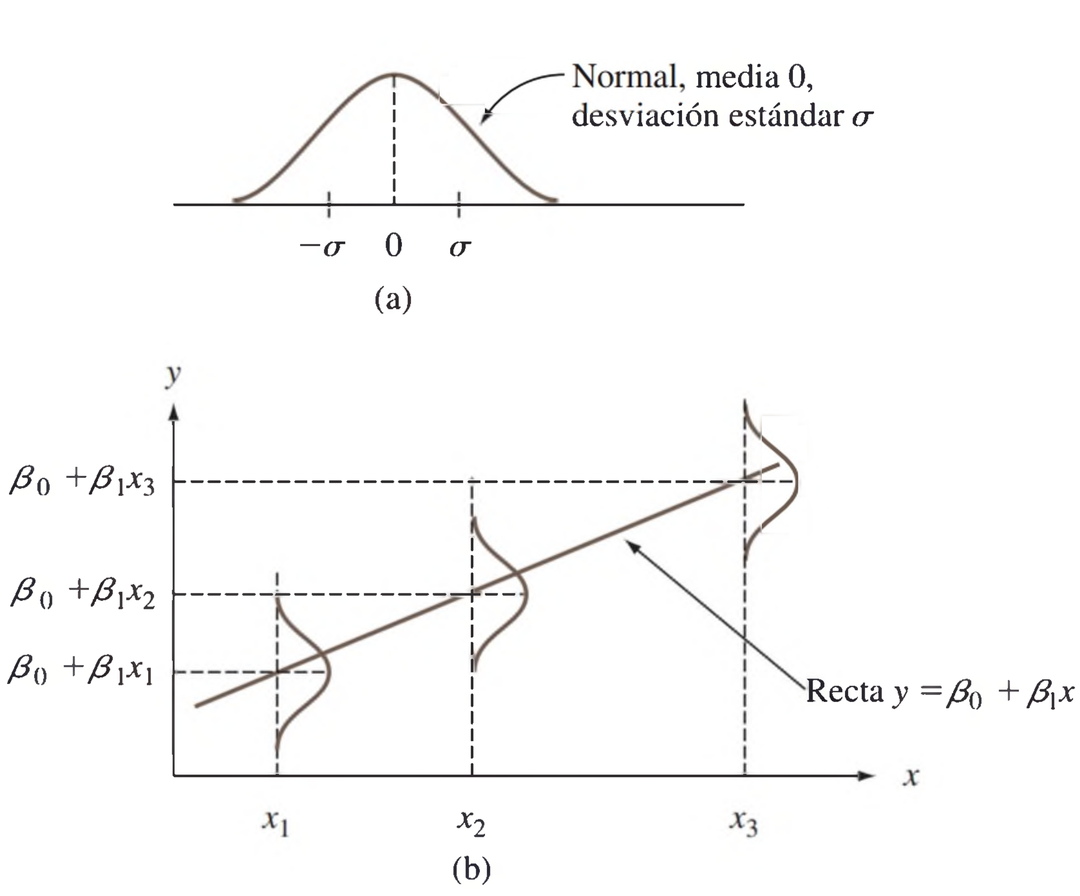


Figura 12.4 (a) Distribución de ϵ; (b) distribución de Y con diferentes valores de x

grado al cual cada curva normal se extiende en torno a su media; en términos generales, el valor de σ es el tamaño de una desviación típica de la recta de regresión verdadera. Cuando σ es pequeña, un punto observado (x, y) normalmente quedará bastante cerca de la recta de regresión verdadera, en tanto que las observaciones pueden desviarse considerablemente de sus valores esperados (correspondientes a puntos alejados de la recta) cuando σ es grande.

EJEMPLO 12.3 Suponga que el modelo de regresión lineal simple con una recta de regresión verdadera $y = 65 - 1.2x$ y $\sigma = 8$ describe la relación entre el esfuerzo aplicado x y el tiempo para la fractura y. Así, para cualquier valor fijo x^* de esfuerzo, el tiempo para la fractura tiene una distribución normal con media de $65 - 1.2x^*$ y desviación estándar 8. En la población de todos los puntos (x, y), la magnitud de una desviación típica de la recta de regresión verdadera es alrededor de 8. Con $x = 20$, Y tiene la media $\mu_{Y\cdot 20} = 65 - 1.2(20) = 41$, por tanto,

$$P(Y > 50 \text{ cuando } x = 20) = P\left(Z > \frac{50 - 41}{8}\right) = 1 - \Phi(1.13) = .1292$$

Debido a que $\mu_{Y\cdot 25} = 35$,

$$P(Y > 50 \text{ cuando } x = 25) = P\left(Z > \frac{50 - 35}{8}\right) = 1 - \Phi(1.88) = .0301$$

Estas probabilidades se ilustran como las áreas sombreadas en la figura 12.5.

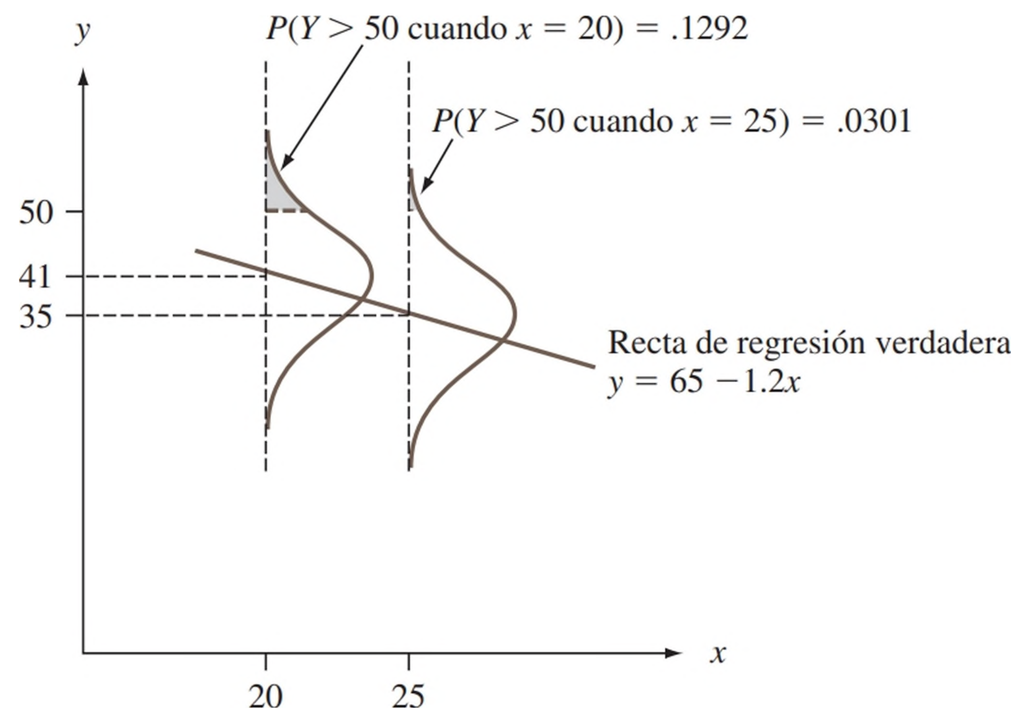


Figura 12.5 Probabilidades basadas en el modelo de regresión lineal simple

Suponga que Y_1 denota una observación del tiempo para la fractura realizada con $x = 25$ y que Y_2 denota una observación independiente realizada con $x = 24$. Entonces $Y_1 - Y_2$ está normalmente distribuida con media $E(Y_1 - Y_2) = \beta_1 = -1.2$, varianza $V(Y_1 - Y_2) = \sigma^2 + \sigma^2 = 128$ y desviación estándar $\sqrt{128} = 11.314$. La probabilidad de que Y_1 exceda Y_2 es

$$P(Y_1 - Y_2 > 0) = P\left(Z > \frac{0 - (-1.2)}{11.314}\right) = P(Z > .11) = .4562$$

Es decir, aunque se espera que Y disminuya a medida que x se incrementa en 1 unidad, no es improbable que la Y observada en $x + 1$ sea más grande que la Y observada en x. ■

EJERCICIOS Sección 12.1 (1–11)

1. La relación de eficiencia de un espécimen de acero sumergido en un tanque de fosfatado es el peso del recubrimiento de fosfato dividido entre la pérdida de metal (ambos en mg/pie^2). El artículo **"Statistical Process Control of a Phosphate Coating Line" (*Wire J. Intl*., mayo de 1997: 78–81)** aporta los siguientes datos sobre la temperatura del tanque (x) y relación de eficiencia (y):

Temp.	170	172	173	174	174	175	176
Relación	.84	1.31	1.42	1.03	1.07	1.08	1.04

Temp.	177	180	180	180	180	180	181
Relación	1.80	1.45	1.60	1.61	2.13	2.15	.84

Temp.	181	182	182	182	182	184	184
Relación	1.43	.90	1.81	1.94	2.68	1.49	2.52

Temp.	185	186	188
Relación	3.00	1.87	3.08

a. Construya gráficas de tallo y hojas tanto de la relación de temperatura como de la relación de eficiencia, y comente las características interesantes.

b. El valor de la relación de eficiencia ¿estará determinado por completo y de forma única por la temperatura del tanque? Explique su razonamiento.

c. Construya una gráfica de dispersión de los datos. ¿Será que la relación de eficiencia bien podría pronosticarse mediante el valor de la temperatura? Explique su razonamiento.

2. El artículo **"Exhaust Emissions from Four-Stroke Lawn Mower Engines" (*J. of the Air and Water Mgmnt. Assoc*., 1997: 945–952)** reporta los datos de un estudio en el cual se utilizó una mezcla de gasolinas básicas y una gasolina reformulada. Considere las siguientes observaciones sobre edad (años) y emisiones de NO_x (g/kWh):

Motor	1	2	3	4	5
Edad	0	0	2	11	7
Línea de base	1.72	4.38	4.06	1.26	5.31
Reformulada	1.88	5.93	5.54	2.67	6.53
Motor	6	7	8	9	10
Edad	16	9	0	12	4
Línea de base	.57	3.37	3.44	.74	1.24
Reformulada	.74	4.94	4.89	.69	1.42

Construya gráficas de dispersión de emisiones de NO_x contra edad. ¿Cuál parece ser la naturaleza de la relación entre estas dos variables? [*Nota*: Los autores del artículo citado hacen comentarios sobre la relación.]

3. A menudo surgen datos bivariantess cuando se utilizan dos técnicas diferentes de medir la misma cantidad. Por ejemplo, las observaciones adjuntas de x = concentración de hidrógeno (ppm) mediante un método de cromatografía de gases y y = concentración mediante un nuevo método de sensor se leyeron en una gráfica que se muestra en el artículo **"A New Method to Measure the Diffusible Hydrogen Content in Steel Weldments Using a Polymer Electrolyte-Based Hydrogen Sensor" (*Welding Res*., julio de 1997: 251s–256s)**.

x	47	62	65	70	70	78	95	100	114	118
y	38	62	53	67	84	79	93	106	117	116

x	124	127	140	140	140	150	152	164	198	221
y	127	114	134	139	142	170	149	154	200	215

Construya una gráfica de dispersión. ¿Habrá una fuerte relación entre los dos tipos de mediciones de concentración? ¿Será que los dos métodos miden aproximadamente la misma cantidad? Explique su razonamiento.

4. Los datos adjuntos en y = concentración de amonio (mg/L) y x = transpiración (ml/h) se toman de una gráfica que aparece en el artículo **"Response of Ammonium Removal to Growth and Transpiration of Juncus effusus During the Treatment of Artificial Sewage in Laboratory-Scale Wetlands" (*Water Research*, 2013: 4265–4273)**. El resumen del artículo indica "una correlación lineal entre la concentración de amonio dentro de la rizosfera y la transpiración de las poblaciones de plantas implica que existe una influencia de actividad fisiológica de las plantas sobre la eficiencia de N remociones". (La rizosfera es la estrecha superficie en que las raíces de las plantas interaccionan con el suelo y la transpiración es el proceso de movimiento del agua a través de una planta y su evaporación). El artículo reporta las cantidades resumidas de un análisis de regresión lineal simple. Con base en un diagrama de dispersión, ¿cómo describiría la relación entre variables y será que la regresión lineal simple es una estrategia de modelado apropiada?

x	5.8	8.8	11.0	13.6	18.5	21.0	23.7
y	7.8	8.2	6.9	5.3	4.7	4.9	4.3
x	26.0	28.3	31.9	36.5	38.2	40.4	
y	2.7	2.8	1.8	1.9	1.1	.4	

5. El artículo **"Objective Measurement of the Stretchability of Mozzarella Cheese" (*J. of Texture Studies*, 1992: 185–194)** reporta sobre un experimento para investigar la variación del comportamiento del queso mozzarella con la temperatura. Considere los siguientes datos sobre x = temperatura y y = alargamiento (%) en el momento de la falla del queso.

[*Nota*: Los investigadores eran italianos y utilizaron queso mozzarella *real*, no la imitación que se vende en los Estados Unidos.]

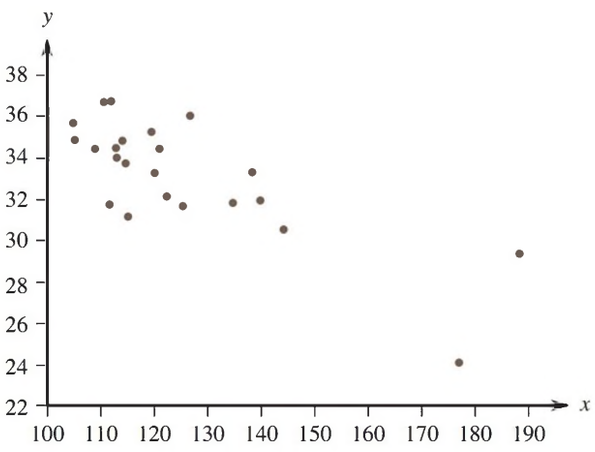
x	59	63	68	72	74	78	83
y	118	182	247	208	197	135	132

a. Construya una gráfica de dispersión en la cual los ejes se corten en (0, 0). Marque 0, 20, 40, 60, 80 y 100 en el eje horizontal y 0, 50, 100, 150, 200 y 250 en el eje vertical.

b. Construya una gráfica de dispersión en la cual los ejes se corten en (55, 100), como se hizo en el citado artículo. ¿Será preferible esta gráfica a la del inciso a)? Explique su razonamiento.

c. ¿Qué sugieren las gráficas de los incisos a) y b) sobre la naturaleza de la relación entre las dos variables?

6. Un factor en el desarrollo del codo de tenista, una dolencia que provoca profundo terror a los tenistas serios, es la vibración inducida por el impacto del sistema raqueta-brazo al contacto con la pelota. Es bien sabido que la probabilidad de sufrir codo de tenista depende de varias propiedades de la raqueta que se utilice. Considere la gráfica de dispersión de x = frecuencia de resonancia de la raqueta y y = suma de la aceleración pico a pico (una característica de la vibración del brazo, en m/s/s) de $n = 23$ raquetas diferentes (**"Transfer of Tennis Racket Vibrations into the Human Forearm", *Medicine and Science in Sports and Exercise*, 1992: 1134–1140**). Analice las características interesantes de los datos y la gráfica de dispersión.



7. El artículo **"Some Field Experience in the Use of an Accelerated Method in Estimating 28-Day Strength of Concrete" (*J. of Amer. Concrete Institute*, 1969: 895)** considera la regresión de y = resistencia estándar después de 28 días de curado (lb/pulg^2) contra x = resistencia acelerada (lb/pulg^2). Suponga que la ecuación de la recta de regresión verdadera es $y = 1800 + 1.3x$.

a. ¿Cuál es el valor esperado de la resistencia después de 28 días cuando la resistencia acelerada = 2500?

b. ¿En cuánto se debe esperar que cambie la resistencia después de 28 días cuando la resistencia acelerada se incrementa en 1 lb/pulg^2?

c. Responda el inciso b) para un incremento de 100 lb/pulg^2.

d. Responda el inciso b) para una reducción de 100 lb/pulg^2.

8. Recurra al ejercicio 7 y suponga que la desviación estándar de la desviación aleatoria ϵ es de 350 lb/pulg^2.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el valor observado de la resistencia después de 28 días exceda 5000 lb/pulg^2 cuando el valor de la resistencia acelerada es de 2000?

b. Repita el inciso a) con 2500 en lugar de 2000.

c. Considere hacer dos observaciones independientes de resistencia después de 28 días, la primera con una resistencia acelerada de 2000 y la segunda con $x = 2500$. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda observación exceda la primera por más de 1000 lb/pulg^2?

d. Sean Y_1 y Y_2 las observaciones de resistencia después de 28 días cuando $x = x_1$ y $x = x_2$, respectivamente. ¿Por cuánto tendría que exceder x_2 a x_1 para que $P(Y_2 > Y_1) = .95$?

9. La velocidad de flujo y(m^3/min) en un dispositivo utilizado para medir la calidad del aire depende de la caída de presión x (pulg. de agua) a través del filtro del dispositivo. Suponga que con valores de x entre 5 y 20, las dos variables están relacionadas de acuerdo con el modelo de regresión lineal simple con recta de regresión verdadera $y = -.12 + .095x$.

a. ¿Cuál es el cambio esperado de la velocidad de flujo asociado con un incremento de 1 pulg en la caída de presión? Explique.

b. ¿Qué cambio de la velocidad de flujo puede ser esperado cuando la caída de presión se reduce en 5 pulg?

c. ¿Cuál es la velocidad de flujo esperada con una caída de presión de 10 pulg? ¿Y en una caída de presión de 15 pulg?

d. Suponga $\sigma = .025$ y considere una caída de presión de 10 pulg. ¿Cuál es la probabilidad de que el valor observado de la velocidad de flujo exceda .835?, ¿y de que la velocidad de flujo observada exceda .840?

e. ¿Cuál es la probabilidad de que una observación de la velocidad de flujo, cuando la caída de presión es de 10 pulg, exceda una observación de la velocidad de flujo cuando la caída de presión es de 11 pulg?

10. Suponga que el costo esperado de una corrida de producción está relacionado con el tamaño de la corrida mediante la ecuación $y = 4000 + 10x$. Sea Y una observación sobre el costo de una corrida. Si el *tamaño* de las variables y el *costo* están relacionados de acuerdo con el modelo de regresión lineal simple, ¿podría ser el caso de que $P(Y > 5500$ cuando $x = 100) = .05$ y $P(Y > 6500$ cuando $x = 200) = .10$? Explique.

11. Suponga que en un cierto proceso químico el tiempo de reacción y (h) está relacionado con la temperatura (°F) en la cámara en la cual la reacción ocurre de acuerdo con el modelo de regresión lineal simple con la ecuación $y = 5.00 - .01x$ y $\sigma = .075$.

a. ¿Cuál es el cambio esperado del tiempo de reacción con un incremento de 1°F de la temperatura? ¿Con un incremento de 10°F de la temperatura?

b. ¿Cuál es el tiempo de reacción esperado cuando la temperatura es de 200°F? ¿Y cuando la temperatura es de 250°F?

c. Suponga que se realizan cinco observaciones independientemente del tiempo de reacción, cada una para una temperatura de 250°F. ¿Cuál es la probabilidad de que las cinco observaciones resulten entre 2.4 y 2.6 h?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que dos tiempos de reacción independientemente observados a temperaturas con 1° de diferencia sean tales que el tiempo a la temperatura más alta exceda el tiempo a la temperatura más baja?

12.2 Estimación de parámetros de modelo

En esta y en las siguientes secciones se supondrá que las variables x y y están relacionadas de acuerdo con el modelo de regresión lineal simple. Un investigador casi nunca conocerá los valores de β_0, β_1 o σ^2. En cambio, estará disponible una muestra de datos compuesta de n pares observados $(x_1, y_1),\ldots, (x_n, y_n)$, con la cual los parámetros de modelo y la recta de regresión verdadera pueden ser estimados. Se supone que estas observaciones se obtuvieron independientemente una de otra. Es decir, y_i es el valor observado de Y_i, donde $Y_i = \beta_{0+}\beta_1 x_1 + \epsilon_i$ y las n desviaciones $\epsilon_1, \epsilon_2,\ldots, \epsilon_n$ son variables aleatorias independientes. La independencia de $Y_1, Y_2,\ldots, Y_n$ se desprende de la independencia de las ϵ_i.

De acuerdo con el modelo los puntos observados estarán distribuidos en torno a la recta de regresión verdadera de una manera aleatoria. La figura 12.6 muestra una gráfica típica de pares observados junto con dos candidatos para la recta de regresión estimada. Intuitivamente, la recta $y = a_0 + a_1x$ no es una estimación razonable de la recta verdadera $y = \beta_0 + \beta_1x$ porque si $y = a_0 + a_1x$ fuera la recta verdadera, los puntos observados con toda seguridad habrían quedado más cerca de la misma. La recta $y = b_0 + b_1x$ es una estimación más factible porque los puntos observados están dispersos, en lugar de estar cerca de esta recta.

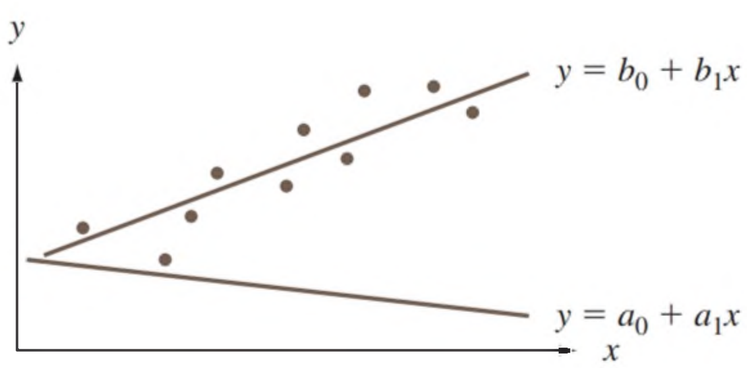


Figura 12.6 Dos estimaciones diferentes de la recta de regresión verdadera

La figura 12.6 y la discusión anterior sugieren que la estimación de $y = \beta_0 + \beta_1x$ deberá ser una recta que en un cierto sentido se ajuste mejor a los puntos de los datos observados. Esto es lo que motiva el principio de mínimos cuadrados el cual puede rastrearse hacia atrás en el tiempo hasta el matemático alemán Gauss (1777–1855). De acuerdo con este principio, una recta proporciona un buen ajuste para los datos si las distancias verticales (desviaciones) de los puntos observados a la recta son pequeñas (véase la figura 12.7). La medida de la bondad del ajuste es la suma de cuadrados de estas desviaciones. La recta de mejor ajuste es entonces la que tiene la suma más pequeña posible de desviaciones al cuadrado.

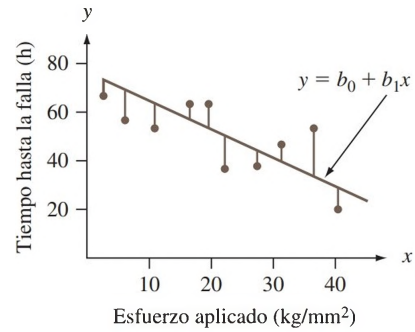


Figura 12.7 Desviaciones de los datos observados respecto a la recta $y = b_0 + b_1x$

Principio de mínimos cuadrados

La desviación vertical del punto (x_i, y_i) respecto a la recta $y = b_0 + b_1x$ es

$$\text{altura del punto} - \text{altura de la recta} = y_i - (b_0 + b_1x_i)$$

La suma de las desviaciones verticales al cuadrado de los puntos $(x_1, y_1),\ldots, (x_n, y_n)$ a la recta es entonces

$$f(b_0, b_1) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (b_0 + b_1x_i)]^2$$

Las estimaciones puntuales de β_0 y β_1, denotadas por $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$, llamadas **estimaciones de mínimos cuadrados**, son aquellos valores que reducen al mínimo a $f(b_0, b_1)$. Es decir, $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ son tales que $f(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) \leq f(b_0, b_1)$ con cualesquier b_0 y b_1. La **recta de regresión estimada** o **recta de mínimos cuadrados** es entonces la recta cuya ecuación es $y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1x$.

Los valores minimizados de b_0 y b_1 se encuentran tomando las derivadas parciales de $f(b_0, b_1)$ respecto tanto a b_0 como b_1, igualándolas a cero [análogamente a $f'(b) = 0$ en cálculo de una variable] y resolviendo las ecuaciones

$$\frac{\partial f(b_0, b_1)}{\partial b_0} = \sum 2(y_i - b_0 - b_1x_i)(-1) = 0$$

$$\frac{\partial f(b_0, b_1)}{\partial b_1} = \sum 2(y_i - b_0 - b_1x_i)(-x_i) = 0$$

Al cancelar el factor -2 y reordenar se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones, llamado **ecuaciones normales:**

$$nb_0 + \left(\sum x_i\right)b_1 = \sum y_i$$

$$\left(\sum x_i\right)b_0 + \left(\sum x_i^2\right)b_1 = \sum x_iy_i$$

Estas ecuaciones son lineales en las dos incógnitas b_0 y b_1. Siempre que no todas las x_i sean idénticas, las estimaciones de mínimos cuadrados son la única solución de este sistema.

PROPOSICIÓN

La estimación de mínimos cuadrados del coeficiente de la pendiente β_1 de la recta de regresión verdadera es

$$b_1 = \hat{\beta}_1 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \tag{12.2}$$

Al calcular las fórmulas para el numerador y el denominador de $\hat{\beta}_1$ son

$$S_{xy} = \sum x_i y_i - \left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)/n \qquad S_{xx} = \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2/n$$

La estimación de mínimos cuadrados de la intersección β_0 de la recta de regresión verdadera es

$$b_0 = \hat{\beta}_0 = \frac{\sum y_i - \hat{\beta}_1 \sum x_i}{n} = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \tag{12.3}$$

Las fórmulas para el cálculo de S_{xy} y S_{xx} requieren sólo los estadísticos resumidos Σx_i, Σy_i, Σx_i^2 y $\Sigma x_i y_i$ (más adelante se requerirá Σy_i^2). Al calcular $\hat{\beta}_0$ se utilizan dígitos adicionales en $\hat{\beta}_1$ porque, si $\bar{x}$ es grande en magnitud, el redondeo afectará la respuesta final. En la práctica es preferible usar un paquete de software estadístico en lugar del cálculo manual y los gráficos trazados a mano. Una vez más, asegúrese de que la gráfica de dispersión muestre un patrón lineal con una variación relativamente homogénea antes de ajustar el modelo de regresión lineal simple.

EJEMPLO 12.4 El número de cetano es una propiedad fundamental en la especificación de la calidad de ignición del combustible que se utiliza en un motor diesel. La determinación de este número para un combustible biodiesel es cara y lleva mucho tiempo. El artículo **"Relating the Cetane Number of Biodiesel Fuels to Their Fatty Acid Composition: A Critical Study" (*J. of Automobile Engr.*, 2009: 565–583)** incluye los siguientes datos en x = índice de yodo (g) y y = número de cetano para una muestra de 14 biocombustibles. El índice de yodo es la cantidad de yodo necesario para saturar una muestra de 100 g de aceite. Los autores del artículo ajustan el modelo de regresión lineal simple a estos datos, así que vamos a seguir su ejemplo.

x	132.0	129.0	120.0	113.2	105.0	92.0	84.0	83.2	88.4	59.0	80.0	81.5	71.0	69.2
y	46.0	48.0	51.0	52.1	54.0	52.0	59.0	58.7	61.6	64.0	61.4	54.6	58.8	58.0

Las cantidades resumidas necesarias para el cálculo manual se puede obtener mediante la colocación de los valores de x en una columna y los valores de y en otra y luego crear columnas para x^2, xy y y^2 (por el momento estos últimos valores no son necesarios, pero se utilizarán en breve). Al calcular las sumas por columna, tenemos $\Sigma x_i = 1307.5$, $\Sigma y_i = 779.2$, $\Sigma x_i^2 = 128\,913.93$, $\Sigma x_i y_i = 71\,347.30$, $\Sigma y_i^2 = 43\,745.22$, de donde

$$S_{xx} = 128\,913.93 - (1307.5)^2/14 = 6802.7693$$
$$S_{xy} = 71\,347.30 - (1307.5)(779.2)/14 = -1424.41429$$

La pendiente estimada de la recta de regresión real (es decir, la pendiente de la recta de mínimos cuadrados) es

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{-1424.41429}{6802.7693} = -.20938742$$

Estimamos que el cambio esperado en el promedio real del número de cetano asociado con un incremento de 1 g en el índice de yodo es $-.209$, es decir, una disminución de .209. Puesto que $\bar{x} = 93.392857$ y $\bar{y} = 55.657143$, la intersección estimada de la recta de regresión real (es decir, la intersección de la recta de mínimos cuadrados) es

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x} = 55.657143 - (-.20938742)(93.392857) = 75.212432$$

La ecuación de la recta de regresión estimada (recta de mínimos cuadrados) es $y = 75.212 - .209x$, exactamente la descrita en el artículo citado. La figura 12.8 muestra un diagrama de dispersión de los datos con la recta de mínimos cuadrados superpuesta. Esta recta ofrece un resumen muy bueno de la relación entre las dos variables.

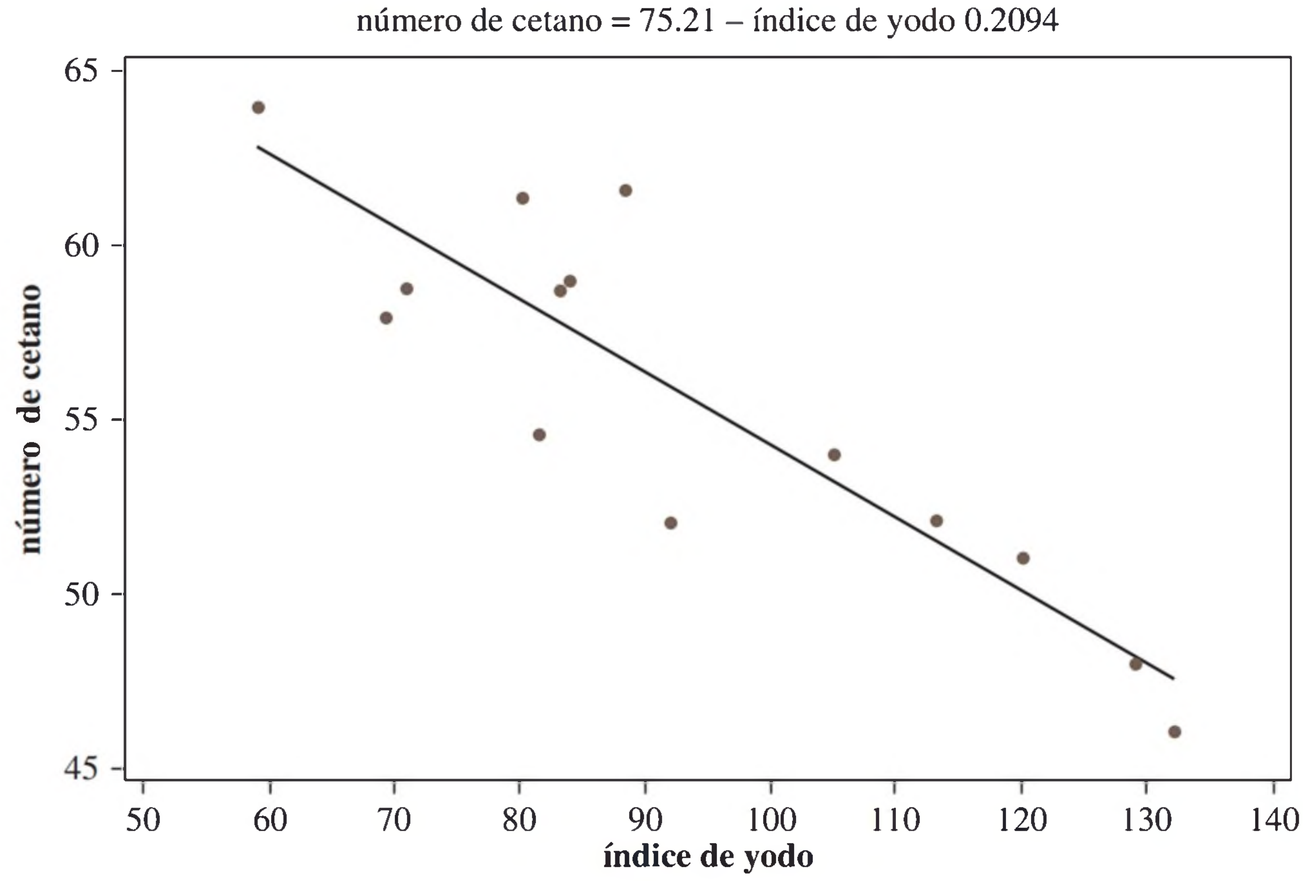


Figura 12.8 Diagrama de dispersión de los datos con la recta de mínimos cuadrados sobrepuesta con Minitab para el ejemplo 12.4 ■

La recta de regresión estimada puede ser utilizada de manera inmediata para dos propósitos diferentes. Con un valor fijo de x, x^*, $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*$ (la altura de la recta sobre x^*) da 1) una estimación puntual del valor esperado de Y cuando $x = x^*$; o 2) una predicción puntual del valor Y que resultará de una nueva observación realizada con $x = x^*$.

EJEMPLO 12.5 Remítase al escenario del valor del índice de yodo para el número de cetano descrito en el ejemplo anterior. La ecuación de regresión estimada fue $y = 75.212 - .2094x$. Una estimación puntual del verdadero número de cetano promedio de todos los biocombustibles, cuyo índice de yodo es 100 es

$$\hat{\mu}_{Y\cdot 100} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1(100) = 75.212 - .2094(100) = 54.27$$

Si se selecciona una muestra de biocombustible cuyo índice de yodo es 100, también 54.27 es un punto de predicción para el número de cetano resultante. ■

La recta de mínimos cuadrados no deberá utilizarse para predecir un valor de x mucho más allá del rango de los datos, de tal suerte que $x = 40$ o $x = 150$ en el ejemplo 12.4. El **peligro de extrapolación** es que la relación ajustada (una recta en este caso) puede no ser válida para tales valores de x.

Estimación de σ^2 y σ

El parámetro σ^2 determina la cantidad de variabilidad, inherente en el modelo de regresión. Un valor grande de σ^2 conducirá a (x_i, y_i) observados que están bastante dispersos en torno a la recta de regresión verdadera; mientras σ^2 sea pequeña los puntos observados tenderán a quedar cerca de la recta verdadera (véase la figura 12.9). Se utilizará una estimación de σ^2 en las fórmulas de los intervalos de confianza (IC) y los procedimientos de prueba de hipótesis que se presentan en las dos secciones siguientes. Debido a que la ecuación de la recta verdadera es desconocida, la estimación se basa en el grado al cual las observaciones muestrales se desvían de la recta *estimada*. Muchas desviaciones grandes (residuos) sugieren un valor grande de σ^2, mientras que las desviaciones de pequeña magnitud sugieren que σ^2 es pequeña.

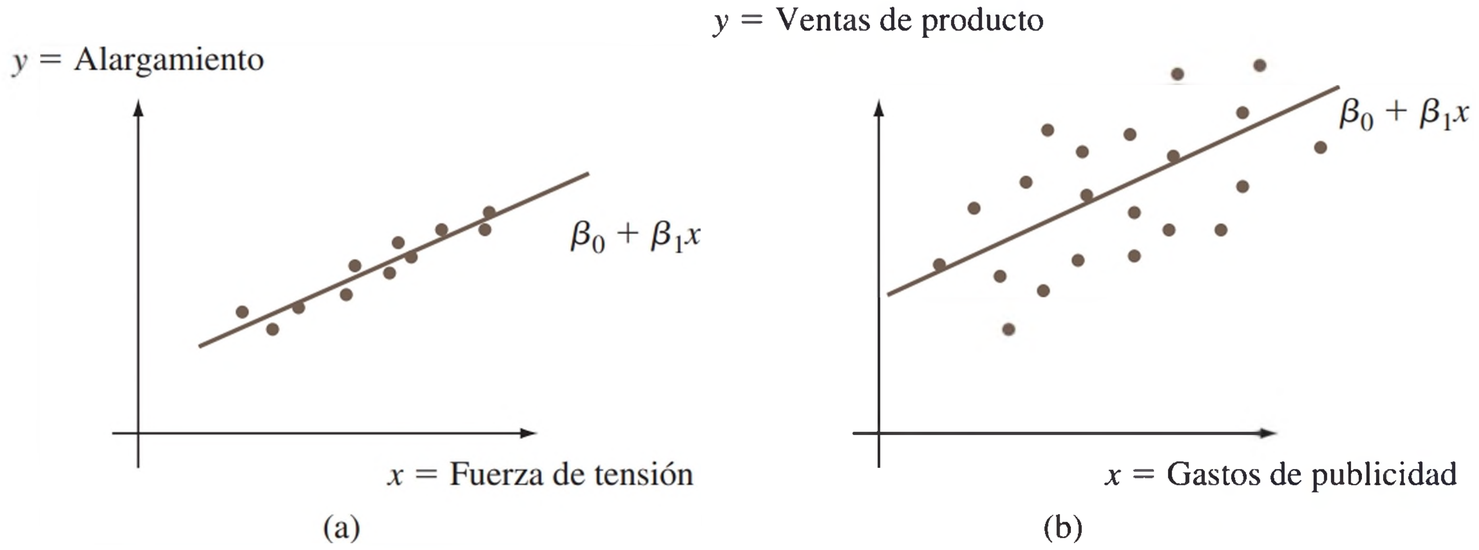


Figura 12.9 Muestra típica para σ^2: (a) pequeña; (b) grande

DEFINICIÓN

Los **valores ajustados** (o **pronosticados**) $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_n$,se obtienen sustituyendo sucesivamente $x_1, \ldots, x_n$ en la ecuación de la recta de regresión estimada: $\hat{y}_1 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1$, $\hat{y}_2 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_2, \ldots, \hat{y}_n = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_n$. Los **residuos** son las diferencias $y_1 - \hat{y}_1, y_2 - \hat{y}_2, \ldots, y_n - \hat{y}_n$ entre los valores observados y los valores ajustados y.

Es decir, el valor pronosticado $\hat{y}_i$ es el valor de y pronosticado o esperado cuando se utiliza la recta de regresión estimada con $x = x_i$; $\hat{y}_i$ es la altura de la recta de regresión estimada por encima del valor x_i con el cual se realizó la i-ésima observación. El residuo $y_i - \hat{y}_i$ entra es la desviación vertical entre el punto (x_i, y_i) y la recta de mínimos cuadrados es un número positivo si el punto está sobre la recta y negativo si está debajo de esta. Si todos los residuos son pequeños, entonces mucha de la variabilidad en los valores y observados al parecer se debe a la relación lineal entre x y y, mientras que muchos residuos grandes sugieren un poco de variabilidad inherente en y respecto a la cantidad debida a la relación lineal. Suponiendo que la recta en la figura 12.7 es la recta de mínimos cuadrados, los residuos están identificados por segmentos de recta verticales que parten de los puntos observados a la recta. Cuando se obtiene la recta de regresión estimada mediante el principio de mínimos cuadrados, la suma de los residuos en teoría debe ser cero. En la práctica, la suma puede desviarse un poco de cero debido al redondeo.

EJEMPLO 12.6 La alta densidad de población de Japón ha provocado un sinnúmero de problemas de consumo de recursos. Una dificultad especialmente seria tiene que ver con la eliminación de los desechos. El artículo **"Innovative Sludge Handling Through Pelletization Thickening" (*Water Research*, 1999: 3245–3252)** reporta el desarrollo de una nueva máquina de compresión para procesar lodos de albañal. Una parte importante de la investi-

gación implicó relacionar el contenido de humedad de gránulos comprimidos (y, en %) con la velocidad de filtración de la máquina (x, en kg-DS/m/h). Los siguientes datos se tomaron de una gráfica que muestra el artículo:

x	125.3	98.2	201.4	147.3	145.9	124.7	112.2	120.2	161.2	178.9
y	77.9	76.8	81.5	79.8	78.2	78.3	77.5	77.0	80.1	80.2
x	159.5	145.8	75.1	151.4	144.2	125.0	198.8	132.5	159.6	110.7
y	79.9	79.0	76.7	78.2	79.5	78.1	81.5	77.0	79.0	78.6

Las cantidades resumidas pertinentes (*estadísticos resumidos*) son $\Sigma x_i = 2817.9$, $\Sigma y_i = 1574.8$, $\Sigma x_i^2 = 415\,949.85$, $\Sigma x_i y_i = 222\,657.88$ y $\Sigma y_i^2 = 124\,039.58$, de donde $\overline{x} = 140.895$, $\overline{y} = 78.74$, $S_{xx} = 18\,921.8295$ y $S_{xy} = 776.434$. Por tanto,

$$\hat{\beta}_1 = \frac{776.434}{18\,921.8295} = .04103377 \approx .041$$

$$\hat{\beta}_0 = 78.74 - (.04103377)(140.895) = 72.958547 \approx 72.96$$

por lo que la ecuación de la recta de mínimos cuadrados es $y = 72.96 + .041x$. Para precisión numérica, los valores ajustados se calcularon con $\hat{y}_i = 72.958547 + .04103377x_i$:

$$\hat{y}_1 = 72.958547 + .04103377(125.3) \approx 78.100,\ y_1 - \hat{y}_1 \approx -.200, \text{ etc.}$$

Nueve de los 20 residuos son negativos, por lo que los nueve puntos correspondientes en un diagrama de dispersión de los datos se encuentran por debajo de la recta de regresión estimada. Todos los valores previstos (ajustes) y residuos aparecen en la siguiente tabla.

Obs	Filtrado	Contenido de humedad	Ajuste	Residuo
1	125.3	77.9	78.100	−0.200
2	98.2	76.8	76.988	−0.188
3	201.4	81.5	81.223	0.277
4	147.3	79.8	79.003	0.797
5	145.9	78.2	78.945	−0.745
6	124.7	78.3	78.075	0.225
7	112.2	77.5	77.563	−0.063
8	120.2	77.0	77.891	−0.891
9	161.2	80.1	79.573	0.527
10	178.9	80.2	80.299	−0.099
11	159.5	79.9	79.503	0.397
12	145.8	79.0	78.941	0.059
13	75.1	76.7	76.040	0.660
14	151.4	78.2	79.171	−0.971
15	144.2	79.5	78.876	0.624
16	125.0	78.1	78.088	0.012
17	198.8	81.5	81.116	0.384
18	132.5	77.0	78.396	−1.396
19	159.6	79.0	79.508	−0.508
20	110.7	78.6	77.501	1.099

Casi de la misma forma en que las desviaciones de la media en en el caso de la muestra se combinaron para obtener la estimación $s^2 = \Sigma(x_i - \bar{x})^2/(n - 1)$, la estimación de σ^2 en un análisis de regresión se basa en elevar al cuadrado y sumar los residuos. Para esta varianza estimada se continuará utilizando el símbolo s^2, así que no hay que confundirla con la s^2 previa.

DEFINICIÓN

La **suma de cuadrados debido al error** (o su equivalente, la suma de cuadrados residuales) denotada por SSE, es

$$\text{SSE} = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum [y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i)]^2$$

y la estimación de σ^2 es

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{\text{SSE}}{n-2} = \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2}$$

El divisor $n - 2$ en s^2 es el número de grados de libertad (gl) asociado con SSE y la estimación s^2. Esto es porque para obtener s^2 primero se deben estimar los dos parámetros β_0 y β_1, lo que hace que se pierdan 2 grados de libertad (tal y como μ tuvo que estimarse en los problemas de la muestra, con el resultado de una varianza estimada basada en $n - 1$ grados de libertad). Al sustituir cada y_i en la fórmula para s^2 mediante la variable aleatoria Y_i, obtenemos el estimador S^2. Se puede demostrar que S^2 es un estimador insesgado para σ^2 (aunque el estimador S no sea insesgado para σ). Aquí la interpretación de s es similar a lo que se sugirió antes para la desviación estándar muestral: a grandes rasgos, es el tamaño de una desviación típica vertical dentro de la muestra desde la recta de regresión estimada.

EJEMPLO 12.7 Los residuos de los datos de contenido de filtración humedad-velocidad fueron calculados con anterioridad. La suma de cuadrados debido al error correspondiente es

$$\text{SSE} = (-.200)^2 + (-.188)^2 + \cdots + (1.099)^2 = 7.968$$

La estimación de σ^2 es entonces $\hat{\sigma}^2 = s^2 = 7.968/(20 - 2) = .4427$ y la desviación estándar estimada es $\hat{\sigma} = s = \sqrt{.4427} = .665$. En términos generales, .665 es la magnitud de una desviación típica respecto a la recta de regresión estimada; algunos puntos están cerca de la recta así como otros están alejados. ■

El cálculo de SSE con la fórmula de definición implica mucha aritmética tediosa, ya que primero se deben calcular los valores pronosticados y los residuos. La siguiente fórmula de cálculo no requiere estas cantidades

$$\text{SSE} = \sum y_i^2 - \hat{\beta}_0 \sum y_i - \hat{\beta}_1 \sum x_i y_i = S_{yy} - \hat{\beta}_1 S_{xy}$$

Esta expresión de en medio se obtiene al sustituir $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$ por $\Sigma(y_i - \hat{y}_i)^2$, elevando al cuadrado el sumando, realizando la suma y continuarla hasta obtener los tres términos resultantes y simplificar. La fórmula de cálculo es especialmente sensible a los efectos de redondeo en $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$, así que conservar tantos dígitos como sea posible en cálculos intermedios protegerá contra errores de redondeo.

EJEMPLO 12.8 El artículo **"Promising Quantitative Nondestructive Evaluation Techniques for Composite Materials" (*Materials Evaluation*, 1985: 561–565)** reporta sobre el estudio para investigar cómo la propagación de una onda de esfuerzo ultrasónica a través de una sustancia depende de las propiedades de esta última. Los siguientes datos sobre la resistencia a la fractura (x, como porcentaje de resistencia a la tensión más reciente) y la atenuación (y, en neper/cm, la disminución de la amplitud de la onda de esfuerzo) en compuestos de poliéster reforzados con fibra de vidrio se tomaron de una gráfica que aparece en el artículo. El patrón lineal sustancial que se incluye en la gráfica de dispersión sugiere el modelo de regresión lineal simple.

x	12	30	36	40	45	57	62	67	71	78	93	94	100	105
y	3.3	3.2	3.4	3.0	2.8	2.9	2.7	2.6	2.5	2.6	2.2	2.0	2.3	2.1

Las cantidades necesarias resumidas son $n = 14$, $\Sigma x_i = 890$, $\Sigma x_i^2 = 67\ 182$, $\Sigma y_i = 37.6$, $\Sigma y_i^2 = 103.54$ y $\Sigma x_i y_i = 2234.30$, de donde $S_{xx} = 10\ 603.4285714$, $S_{xy} = -155.98571429$, $\hat{\beta}_1 = -.0147109$ y $\hat{\beta}_0 = 3.6209072$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \text{SSE} &= 103.54 - (3.6209072)(37.6) - (-.0147109)(2234.30) \\ &= .2624532 \end{aligned}$$

Se obtiene el mismo resultado de

$$\text{SSE} = S_{yy} - \hat{\beta}_1 S_{xy} = 103.54 - (37.6)^2/14 - (-.0147109)(-155.98571429)$$

Así $s^2 = .2624532/12 = .0218711$ y $s = .1479$. Cuando $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ se redondean a tres cifras decimales en la fórmula de cálculo para SSE, el resultado es

$$\text{SSE} = 103.54 - (3.621)(37.6) - (-.015)(2234.30) = .905$$

la cual es más de tres veces el valor correcto. ■

Coeficiente de determinación

La figura 12.10 muestra tres diferentes gráficas de dispersión de datos bivariantes. En las tres gráficas las alturas de los diferentes puntos varían sustancialmente, lo que indica que existe mucha variabilidad en los valores y observados. Todos los puntos en la primera gráfica quedan exactamente en una línea recta. En este caso toda la variación (100%) de y puede ser atribuida al hecho de que x y y están linealmente relacionadas en combinación con la variación de x. Los puntos en la figura 12.10(b) no están exactamente en una recta, pero su variabilidad se compara a la variabilidad total de y, y las desviaciones respecto a la recta de mínimos cuadrados son pequeñas. Es razonable concluir en este caso que gran parte de la variación de y observada puede atribuirse a la relación lineal aproximada entre las variables postuladas por el modelo de regresión lineal simple. Cuando la gráfica de dispersión es como la de la figura 12.10(c) existe una variación sustancial en torno a la recta de mínimos cuadrados respecto a la variación total de y, así que el modelo de regresión lineal simple no explica la variación de y al relacionar y con x.

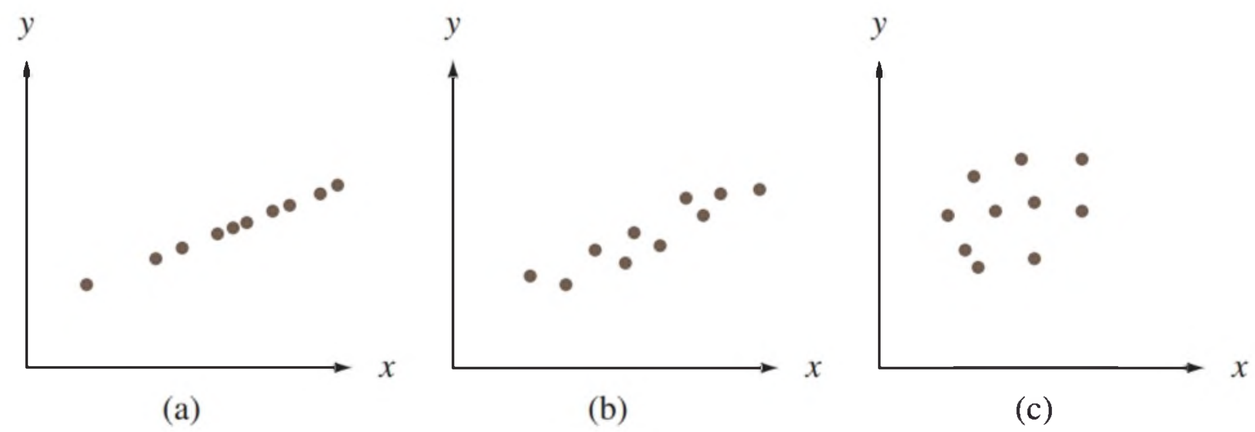


Figura 12.10 Utilización del modelo para explicar la variación de y: (a) datos para los que se explica toda la variación; (b) datos para los cuales se explica la mayor parte de la variación; (c) datos para los cuales se explica poca variación

La suma de cuadrados SSE debido al error puede ser interpretada como una medida de cuánta variación de y permanece sin ser explicada por el modelo; es decir, cuánta no puede ser atribuida a una relación lineal. En la figura 12.10(a), SSE = 0 y no existe ninguna variación no explicada, mientras que esta es pequeña con los datos de la figura 12.10(b) y mucho más grande en la figura 12.10(c). La **suma de cuadrados total** da una medida cuantitativa de la cantidad de variación total en los valores y observados

$$\text{SST} = S_{yy} = \sum (y_i - \bar{y})^2 = \sum y_i^2 - \left(\sum y_i\right)^2 / n$$

La suma de cuadrados total es la suma de las desviaciones al cuadrado respecto a la media muestral de los valores y observados. Por consiguiente, se resta el mismo número $\bar{y}$ de cada y_i presente en SST, mientras que SSE implica restar cada valor diferente pronosticado $\hat{y}_i$ de la y_i correspondiente observada. Así como SSE es la suma de desviaciones al cuadrado respecto a la recta de mínimos cuadrados $y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$, SST es la suma de desviaciones al cuadrado respecto a la recta horizontal a la altura $\bar{y}$ (en tal caso las desviaciones verticales son $y_i - \bar{y}$), como se ilustra en la figura 12.11. Además, puesto que la suma de desviaciones al cuadrado respecto a la recta de mínimos cuadrados es más pequeña que la suma de desviaciones al cuadrado respecto a *cualquier* otra recta, SSE < SST a menos que la propia recta horizontal sea la recta de mínimos cuadrados. El cociente SSE/SST es la proporción de variación total que no puede explicarse mediante el modelo de regresión lineal simple y 1 − SSE/SST (un número entre 0 y 1) es la proporción de variación de la y observada explicada por el modelo.

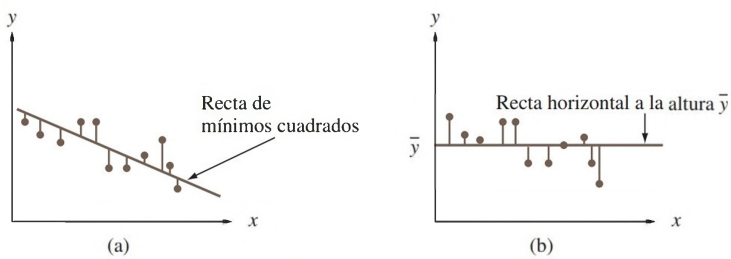


Figura 12.11 Sumas de cuadrados ilustradas: (a) SSE = suma de desviaciones cuadráticas en torno a la recta de mínimos cuadrados; (b) SST = suma de desviaciones al cuadrado en torno a la recta horizontal

DEFINICIÓN

El **coeficiente de determinación,** denotado con r^2, está dado por

$$r^2 = 1 - \frac{\text{SSE}}{\text{SST}}$$

Se interpreta como la proporción de variación y observada que puede explicarse mediante el modelo de regresión lineal simple (atribuida a una relación lineal aproximada entre y y x).

Mientras más alto es el valor de r^2, más exitoso es el modelo de regresión lineal simple al explicar la variación de y. Cuando se realiza un análisis de regresión mediante un programa estadístico, r^2 o $100r^2$ (el porcentaje de variación explicado por el modelo) son una parte prominente de los resultados. Si r^2 es pequeño, un analista normalmente deseará buscar un modelo alternativo (ya sea un modelo no lineal o uno de regresión múltiple que implique más de una sola variable independiente) que explique con más eficacia la variación de y.

EJEMPLO 12.9 La gráfica de dispersión de los datos para el valor del índice de yodo del número de cetano de la figura 12.8 ciertamente pretende un valor r^2 razonablemente alto. Con

$$\hat{\beta}_0 = 75.212432 \qquad \hat{\beta}_1 = -.20938742 \qquad \sum y_i = 779.2$$
$$\sum x_i y_i = 71\ 347.30 \qquad \sum y_i^2 = 43\ 745.22$$

se tiene

$$\text{SST} = 43\ 745.22 - (779.2)^2/14 = 377.174$$
$$\text{SSE} = 43745.22 - (75.212432)(779.2) - (2.20938742)(71\ 347.30) = 78.920$$

El coeficiente de determinación es entonces

$$r^2 = 1 - \text{SSE/SST} = 1 - (78.920)/(377.174) = .791$$

Esto es, 79.1% de la variación observada en el número de cetano es atribuible a (puede explicarse mediante) la regresión lineal simple que relaciona el número de cetano y el valor del índice de yodo (los valores de r^2 son incluso más altos que esto en muchos contextos científicos, pero los científicos sociales generalmente estarían extasiados con ¡un valor grande cerca de este!).

La figura 12.12 muestra resultados parciales generados por Minitab con los datos del número de cetano en el índice de yodo. El programa también proporciona los valores y residuos pronosticados y demás información, si se le solicita. Los formatos utilizados por otros programas difieren un poco de los de Minitab, pero el contenido de la información es muy similar. La suma de cuadrados de regresión se estudiará más adelante. Las demás cantidades en la figura 12.12 que aún no han sido estudiadas serán abordadas en la sección 12.3 [excepto R-Sq(adj), que se contempla en el capítulo 13 cuando se estudian los modelos de regresión múltiple].

```
The regression equation is
número de cetano = 75.2 - 0.209 iod val

                                  β̂0  β̂1
Predictor          Coef      SE Coef          T          P
Constant         75.212        2.984      25.21      0.000
índiceyodo    -0.20939      0.03109      -6.73      0.000

                                        100r²
s = 2.56450  R-sq = 79.1%  R-sq(adj) = 77.3%

Analysis of Variance                    SSE

SOURCE         DF         SS         MS          F          P
Regression      1     298.25     298.25      45.35      0.000
Error          12      78.92       6.58
Total          13     377.17 ←————————————— SST
```

Figura 12.12 Resultados obtenidos con Minitab para la regresión de los ejemplos 12.4 y 12.9 ■

El coeficiente de determinación se escribe en una forma un poco diferente al introducir una tercera suma de cuadrados; la **suma de cuadrados debida a la regresión**, SSR, dada por $\text{SSR} = \Sigma(\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \text{SST} - \text{SSE}$. La suma de cuadrados debido a la regresión se interpreta como la cantidad de variación total que *se* explica mediante el modelo. En tal caso se tiene

$$r^2 = 1 - \text{SSE/SST} = (\text{SST} - \text{SSE})/\text{SST} = \text{SSR/SST}$$

la relación de la variación explicada a la variación total. La tabla ANOVA que aparece en la figura 12.12 muestra que $\text{SSR} = 298.25$ de donde $r^2 = 298.25/377.17 = .791$ como antes.

Terminología y alcance del análisis de regresión

El término *análisis de regresión* fue introducido por primera vez por Francis Galton a finales del siglo XIX, en conexión con su trabajo sobre la relación entre la estatura del padre x

y la estatura del hijo y. Después de recopilar varios pares (x_i, y_i) Galton utilizó el principio de mínimos cuadrados para obtener la ecuación de la recta de regresión estimada con el objetivo de utilizarla para predecir la estatura del hijo a partir de la estatura del padre. Al utilizar la recta obtenida, Galton encontró que si la estatura del padre estaba por encima del promedio, era de esperarse que la del hijo también estuviera por encima del promedio, *pero no tanto como la del padre.* Asimismo, el hijo de un padre cuya estatura es más baja que la del promedio también tendría una estatura más baja que el promedio, pero no tanto como la del padre. Por tanto, la estatura pronosticada del hijo era "retrocedida" hacia la media; porque *regresión* significa un regreso o vuelta. Galton adoptó la terminología *recta de regresión*. Este fenómeno de retroceder hacia la media ha sido observado en muchas otras situaciones (p. ej., promedios de bateo de un año al otro en el béisbol) y se llama **efecto de regresión**.

El análisis hasta ahora ha supuesto que la variable independiente está bajo el control del investigador, así que sólo la variable dependiente Y es aleatoria. Este no fue, sin embargo, el caso con el experimento de Galton: las estaturas de los padres no fueron preseleccionadas, sino que en su lugar tanto X como Y fueron aleatorias. Se pueden aplicar métodos y conclusiones de análisis de regresión cuando los valores de la variable independiente se fijan de antemano y cuando son aleatorios, pero como las deducciones e interpretaciones son más directas en el primer caso, se continuará trabajando explícitamente con él. Para más comentarios, véase el excelente libro de John Neter y colaboradores, citado en la bibliografía del capítulo.

EJERCICIOS Sección 12.2 (12–29)

12. Consulte los datos del ejercicio 4, en el que y = concentración del amonio (mg/L) y x = transpiración (ml/h). Las cantidades resumidas incluyen $n = 13$, $\Sigma x_i = 303.7$, $\Sigma y_i = 52.8$, $S_{xx} = 1585.230769$, $S_{xy} = -341.959231$ y $S_{yy} = 77.270769$.

- **a.** Obtenga la ecuación de la recta de regresión estimada y úsela para calcular una predicción del punto de concentración de amonio de una observación futura cuando la concentración de amonio es 25 ml/h.
- **b.** ¿Qué sucede si la recta de regresión estimada se utiliza para calcular una estimación del punto de concentración medio verdadero cuando la transpiración es de 45 ml/h? ¿Por qué no tiene sentido calcular la estimación de este punto?
- **c.** Calcule e interprete s.
- **d.** ¿Piensa que el modelo de regresión lineal simple es efectivo para explicar la variación observada en la concentración? Explique.

13. Los siguientes datos adjuntos sobre x = densidad de corriente (mA/cm^2) y y = tasa de deposición (μm/min) aparecieron en el artículo **"Plating of 60/40 Tin/Lead Solder for Head Termination Metallurgy" (*Plating and Surface Finishing*, enero de 1997: 38–40)**. ¿Está de acuerdo con la afirmación del autor del artículo en el sentido de que "se obtuvo una relación lineal a partir de la tasa de deposición de estaño-plomo como función de la densidad de corriente"? Explique su razonamiento.

x	20	40	60	80
y	.24	1.20	1.71	2.22

14. Remítase a los datos de relación de temperatura del tanque-eficiencia dada en el ejercicio 1.

- **a.** Determine la ecuación de la recta de regresión estimada.
- **b.** Calcule una estimación puntual de la relación eficiencia promedio verdadera cuando la temperatura del tanque es de 182.
- **c.** Calcule los valores de los residuos con la recta de mínimos cuadrados de las cuatro observaciones con las cuales la temperatura es de 182. ¿Por qué no todas tienen el mismo signo?
- **d.** ¿Qué proporción de la variación observada en la relación de eficiencia puede ser atribuida a la relación de regresión lineal simple entre las dos variables?

15. Se determinaron los valores del módulo de elasticidad (MOE, la relación de esfuerzo, es decir, fuerza por unidad de área a deformación por unidad de longitud, en GPa) y la resistencia a la flexión (una medida de la capacidad para resistir la falla en la flexión en MPa) con una muestra de vigas de concreto de un cierto tipo, y se obtuvieron los siguientes datos (tomados de una gráfica que aparece en el artículo **"Effects of Aggregates**

and Microfillers on the Flexural Properties of Concrete", *Magazine of Concrete Research*, 1997: 81–98):

MOE	29.8	33.2	33.7	35.3	35.5	36.1	36.2
Resistencia	5.9	7.2	7.3	6.3	8.1	6.8	7.0
MOE	36.3	37.5	37.7	38.7	38.8	39.6	41.0
Resistencia	7.6	6.8	6.5	7.0	6.3	7.9	9.0
MOE	42.8	42.8	43.5	45.6	46.0	46.9	48.0
Resistencia	8.2	8.7	7.8	9.7	7.4	7.7	9.7
MOE	49.3	51.7	62.6	69.8	79.5	80.0	
Resistencia	7.8	7.7	11.6	11.3	11.8	10.7	

a. Construya una gráfica de tallo y hojas de los valores de MOE y comente sobre cualquier característica interesante.

b. ¿Será que el valor de resistencia es completa y únicamente determinado por el valor del MOE? Explique.

c. Use los siguientes resultados generados por Minitab para obtener la ecuación de la recta de mínimos cuadrados para predecir la resistencia a partir del módulo de elasticidad y luego para predecir la resistencia de una viga cuyo módulo de elasticidad es de 40. ¿Se sentiría cómodo si utilizara la recta de mínimos cuadrados para predecir la resistencia cuando el módulo de elasticidad es de 100? Explique

```
Predictor      Coef     Stdev  t-ratio      P
Constant     3.2925    0.6008     5.48  0.000
mod elas    0.10748   0.01280     8.40  0.000

s = 0.8657  R-sq = 73.8%  R-sq(adj) = 72.8%

Analysis of Variance

SOURCE       DF       SS      MS      F      P
Regression    1   52.870  52.870  70.55  0.000
Error        25   18.736   0.749
Total        26   71.605
```

d. ¿Cuáles son los valores de SSE, SST y el coeficiente de determinación? ¿Sugieren estos valores que el modelo de regresión lineal simple describe de forma efectiva la relación entre las dos variables? Explique.

16. El artículo **"Characterization of Highway Runoff in Austin, Texas, Area" (*J. of Envir. Engr.*, 1998: 131–137)** incluye una gráfica de dispersión junto con una recta de mínimos cuadrados, de x = volumen de precipitación pluvial (m^3) y y = volumen de escurrimiento (m^3) en un lugar particular. Los siguientes valores fueron tomados de la gráfica.

x	5	12	14	17	23	30	40	47
y	4	10	13	15	15	25	27	46
x	55	67	72	81	96	112	127	
y	38	46	53	70	82	99	100	

a. ¿Será que una gráfica de dispersión de los datos apoya el uso del modelo de regresión lineal simple?

b. Calcule las estimaciones puntuales de la pendiente y la intercepción de la recta de regresión de población.

c. Calcule una estimación puntual del volumen de escurrimiento promedio verdadero cuando el volumen de precipitación pluvial es de 50.

d. Calcule una estimación puntual de la desviación estándar σ.

e. ¿Qué proporción de la variación observada del volumen de escurrimiento puede atribuirse a la relación de regresión lineal simple entre el escurrimiento y la precipitación pluvial?

17. El agregado fino de concreto, hecho a partir de un agregado secundario clasificado de manera uniforme y una pasta de cemento-agua, es beneficioso en las zonas propensas a las lluvias excesivas debido a sus excelentes propiedades de drenaje. El artículo **"Pavement Thickness Design for No-Fines Concrete Parking Lots" (*J. of Trans. Engr.*, 1995: 476–484)** empleó un análisis de mínimos cuadrados en el estudio de cómo y = porosidad (%) se relaciona con x = peso unitario (por pie cúbico) en muestras de concreto. Considere los siguientes datos representativos:

x	99.0	101.1	102.7	103.0	105.4	107.0	108.7	110.8
y	28.8	27.9	27.0	25.2	22.8	21.5	20.9	19.6
x	112.1	112.4	113.6	113.8	115.1	115.4	120.0	
y	17.1	18.9	16.0	16.7	13.0	13.6	10.8	

Un resumen de las cantidades pertinentes es $\Sigma x_i = 1640.1$, $\Sigma y_i = 299.8$, $\Sigma x_i^2 = 179\,849.73$, $\Sigma x_i y_i = 32\,308.59$, $\Sigma y_i^2 = 6430.06$.

a. Obtenga la ecuación de la recta de regresión estimada. A continuación, cree un gráfico de dispersión de los datos y el gráfico de la recta estimada. ¿Será que el modelo de la relación puede explicar una gran parte de la variación observada en y?

b. Interprete la pendiente de la recta de mínimos cuadrados.

c. ¿Qué sucede si la estimación lineal se utiliza para predecir la porosidad cuando el peso unitario es de 135? ¿Por qué esto no es una buena idea?

d. Calcule los residuos correspondientes a las dos primeras observaciones.

e. Calcule e interprete una estimación puntual de σ.

f. ¿Qué proporción de la variación observada en la porosidad se puede atribuir a la relación lineal aproximada entre el peso unitario y la porosidad?

18. Durante la última década el polvo de caucho se ha utilizado en cemento asfáltico para mejorar el rendimiento. El artículo **"Experimental Study of Recycled Rubber-Filled High-Strength Concrete" (*Magazine of Concrete Res.*, 2009: 549–556)** incluye una regresión de y = *esfuerzo axial* (MPa) en x = *esfuerzo cúbico* (Mpa) basada en los siguientes datos de muestra:

x	112.3	97.0	92.7	86.0	102.0	99.2	95.8	103.5	89.0	86.7
y	75.0	71.0	57.7	48.7	74.3	73.3	68.0	59.3	57.8	48.5

a. Obtenga la ecuación de la recta de mínimos cuadrados e interprete su pendiente.

b. Calcule e interprete el coeficiente de determinación.

c. Calcule e interprete una estimación de la desviación estándar σ del error en el modelo de regresión lineal simple.

19. Los siguientes datos son representativos de los reportados en el artículo **"An Experimental Correlation of Oxides of Nitrogen Emissions from Power Boilers Based on Field Data" (*J. of Engr. for Power*, julio de 1973: 165–170)**, con x = tasa de liberación debido a área de quemador (MBtu/h-pie^2) y y = tasa de emisión de NO_x (ppm):

x	100	125	125	150	150	200	200
y	150	140	180	210	190	320	280
x	250	250	300	300	350	400	400
y	400	430	440	390	600	610	670

a. Suponiendo que el modelo de regresión lineal simple es válido obtenga la estimación de mínimos cuadrados de la recta de regresión verdadera.

b. ¿Cuál es la estimación de la tasa de emisión de NO_x esperada cuando la tasa de liberación debido al área del quemador es igual a 225?

c. Estime la cantidad en la cual espera que cambie la tasa de emisiones de NO_x cuando la tasa de liberación debida al área del quemador disminuye en 50.

d. ¿Utilizaría la recta de regresión estimada para predecir la tasa de emisión con una tasa de liberación de 500? ¿Por qué sí, o por qué no?

20. El comportamiento de las barras de unión de refuerzo es determinante e importante en la fuerza y la estabilidad. El artículo **"Experimental Study on the Bond Behavior of Reinforcing Bars Embedded in Concrete Subjected to Lateral Pressure" (*J. of Materials in Civil Engr.*, 2012: 125–133)** reporta los resultados de un experimento en el que se aplicaron diferentes niveles de presión lateral a 21 especímenes cúbicos de concreto, cada uno con una barra redonda de acero liso de 16 mm incrustada, y se determinó la capacidad de unión correspondiente. Debido a las diferentes fuerzas sobre un cubo de hormigón (f_{cu}, en MPa), la presión lateral aplicada fue equivalente a una proporción fija de la f_{cu} de la muestra (0, $.1f_{cu}$,..., $.6f_{cu}$). También, puesto que la fuerza de unión puede ser influenciada por la f_{cu} del espécimen, la capacidad de enlace se expresa como el cociente de la fuerza de unión (MPa) para $\sqrt{f_{cu}}$.

Presión	0	0	0	.1	.1	.1	.2
Cociente	0.123	0.100	0.101	0.172	0.133	0.107	0.217
Presión	.2	.2	.3	.3	.3	.4	.4
Cociente	0.172	0.151	0.263	0.227	0.252	0.310	0.365
Presión	.4	.5	.5	.5	.6	.6	.6
Cociente	0.239	0.365	0.319	0.312	0.394	0.386	0.320

a. ¿Será que una gráfica de dispersión de datos apoya el uso del modelo de regresión lineal simple?

b. Utilice los siguientes resultados de Minitab para dar estimaciones puntuales de la pendiente y de la intercepción de la recta de regresión de la población.

c. Calcule una estimación puntual de la capacidad de unión promedio real cuando la presión lateral es $.45f_{cu}$.

d. ¿Qué es una estimación puntual de la desviación estándar de error σ, y ¿cómo la interpreta?

e. ¿Cuál es el valor de la variación total y qué proporción de este se explica mediante el modelo de la relación?

```
The regression equation is
Cociente = 0.101 + 0.461 Presión

Predictor        Coef   SE Coef        T        P
Constant      0.10121   0.01308     7.74    0.000
Pressure      0.46071   0.03627    12.70    0.000

S=0.0332397  R-Sq=89.5%  R-Sq(adj)=88.9%

Analysis of Variance
Source           DF      SS      MS      F      P
Regression        1 0.17830 0.17830 161.37 0.000
Residual Error   19 0.02099 0.00110
Total            20 0.19929
```

21. El ángulo de recuperación de pliegues y la resistencia a la tensión son las dos características más importantes para evaluar el desempeño de la tela de algodón entrelazada. Un incremento en el ángulo de entrelazado, determinado por la absorbencia de una banda de éster carboxilo, mejora la resistencia a los pliegues de la tela (a expensas de reducir la resistencia mecánica). Los siguientes datos sobre x = absorbancia y y = resistencia al ángulo de los pliegues fueron tomados de una gráfica que se muestra en el artículo **"Predicting the Performance of Durable Press Finished Cotton Fabric with Infrared Spectroscopy" (*Textile Res. J.*, 1999: 145–151)**.

x	.115	.126	.183	.246	.282	.344	.355	.452	.491	.554	.651
y	334	342	355	363	365	372	381	392	400	412	420

He aquí los resultados obtenidos con Minitab:

```
Predictor       Coef   SE Coef        T        P
Constant     321.878     2.483   129.64    0.000
absorb       156.711     6.464    24.24    0.000

S = 3.60498  R-Sq = 98.5%  R-Sq(adj) = 98.3%

Source           DF      SS      MS      F      P
Regression        1  7639.0  7639.0 587.81  0.000
Residual Error    9   117.0    13.0
Total            10  7756.0
```

a. ¿Será apropiado el modelo de regresión lineal simple? Explique.

b. ¿Qué ángulo de resistencia a las arrugas pronosticaría para un espécimen de tela cuya absorbancia es de .300?

c. ¿Cuál sería la estimación del ángulo de resistencia a los pliegues esperado cuando la absorbancia es de .300?

22. El cemento de fosfato de calcio cada vez está ganando más atención para su uso en aplicaciones de reparación ósea. El artículo **"Short-Fibre Reinforcement of Calcium Phosphate Bone Cement" (*J. of Engr. in Med.*, 2007: 203–211)** informa sobre un estudio en el que se utilizan fibras de polipropileno en un intento de mejorar el comportamiento de la fractura. Los siguientes datos de x = peso de la fibra (%) y y = resistencia a la compresión (MPa) fueron proporcionado por los autores del artículo.

x	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.25	1.25	1.25	1.25
y	9.94	11.67	11.00	13.44	9.20	9.92	9.79	10.99	11.32
x	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50	5.00	5.00	5.00	5.00
y	12.29	8.69	9.91	10.45	10.25	7.89	7.61	8.07	9.04
x	7.50	7.50	7.50	7.50	10.00	10.00	10.00	10.00	
y	6.63	6.43	7.03	7.63	7.35	6.94	7.02	7.67	

a. Ajuste el modelo de regresión lineal simple a estos datos. Después, determine la proporción de la variación observada en la resistencia que se puede atribuir a la relación entre el modelo de resistencia y el peso de la fibra. Por último, obtenga una estimación puntual de la desviación estándar de ϵ, la desviación aleatoria de la ecuación de modelo.

b. Los valores de resistencia promedio de los seis niveles diferentes de peso de la fibra son 11.05, 10.51, 10.32, 8.15, 6.93 y 7.24, respectivamente. El citado documento incluye una figura en la que se compara la resistencia promedio contra el peso promedio de la fibra. Obtenga la ecuación de esta recta de regresión y calcule el coeficiente de determinación correspondiente. Explique la diferencia entre el valor de r^2 para esta regresión y el valor de r^2 obtenido en a).

23. **a.** Obtenga la SSE con los datos del ejercicio 19 a partir de la fórmula definitoria [$\text{SSE} = \Sigma(y_i - \bar{y}_i)^2$] y compare con el valor determinado mediante la fórmula de cálculo.

b. Calcule el valor de la suma de cuadrados total. ¿Será que el modelo de regresión lineal simple explica con eficacia la variación en la tasa de emisión? Justifique su aseveración.

24. Las especies de diatomeas invasivas *Didymosphenia geminata* tienen potencial para causar sustanciales daños ecológicos y económicos en los ríos. En el artículo **"Substrate Characteristics Affect Colonization by the Bloom-Forming Diatom Didymosphenia geminata (*Aquatic Ecology*, 2010: 33–40)** se describe una investigación del comportamiento de la colonia. Un aspecto de particular interés fue si y = densidad de la colonia estaba relacionada con x = área superficial de la roca. El artículo contiene un diagrama de dispersión y el resumen de un análisis de regresión. A continuación se presentan los datos representativos:

x	50	71	55	50	33	58	79	26
y	152	1929	48	22	2	5	35	7
x	69	44	37	70	20	45	49	
y	269	38	171	13	43	185	25	

a. Ajuste el modelo de regresión lineal simple a estos datos, prediga la densidad de la colonia cuando el área superficial = 70 y cuando el área superficial = 71 y calcule los residuos correspondientes. ¿Cómo se comparan entre sí?

b. Calcule e interprete el coeficiente de determinación.

c. La segunda observación tiene un valor y muy extremo y (en el conjunto de datos completo que consta de 72 observaciones, había dos de estos). Esta observación puede haber tenido un impacto sustancial en el ajuste del modelo y en las conclusiones posteriores. Elimine y vuelva a calcular la ecuación de la recta de regresión estimada. ¿Será que difiere sustancialmente de la ecuación antes de la eliminación? ¿Cuál es el impacto en r^2 y en s?

25. Compruebe que b_1 y b_0 de las expresiones (12.2) y (12.3) satisfacen las ecuaciones normales.

26. Demuestre que el "promedio de puntos" $(\bar{x}, \bar{y})$ queda en la recta de regresión estimada.

27. Suponga que un investigador cuenta con los datos sobre la cantidad de espacio del anaquel x dedicado a la exhibición de un producto particular y sobre los ingresos por ventas y del mismo producto. Quizá el investigador desee adaptar un modelo para el cual la recta de regresión verdadera pase a través de (0, 0). El modelo apropiado es $Y = \beta_1 x + \epsilon$. Suponga que $(x_1, y_1),\ldots, (x_n, y_n)$ son pares observados generados con este modelo y deduzca el estimador de mínimos cuadrados de β_1. [*Sugerencia*: Escriba la suma de desviaciones al cuadrado como una función de b_1, un valor de prueba y use el cálculo para determinar el valor minimizante de b_1.]

28. **a.** Considere los datos del ejercicio 20. Suponga que en lugar de la recta de mínimos cuadrados que pasa por los puntos $(x_1, y_1),\ldots, (x_n, y_n)$, se desea que la recta de mínimos cuadrados pase por $(x_1 - \bar{x}, y_1),\ldots, (x_n - \bar{x}, y_n)$. Construya una gráfica de dispersión con los puntos (x_i, y_i) y luego con los puntos $(x_i - \bar{x}, y_i)$. Use las gráficas para explicar intuitivamente cómo están relacionadas entre sí las dos rectas de mínimos cuadrados.

b. Suponga que en lugar del modelo $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i (i = 1,\ldots, n)$, se desea ajustar un modelo de la forma $Y_i = \beta_0^* + \beta_1^*(x_i - \bar{x}) + \epsilon_i$ $(i = 1,\ldots, n)$. ¿Cuáles son los estimadores de mínimos cuadrados de β_0^* y β_1^* y cómo están relacionados con $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$?

29. Considere los siguientes tres conjuntos de datos en los cuales las variables de interés son x = distancia de la casa al trabajo y y = tiempo de recorrido de la distancia de la casa al trabajo. Basado en una gráfica de dispersión y los valores de s y r^2, ¿en qué situación la regresión lineal simple sería más (al menos) efectiva y por qué?

Conjunto de datos	**1**		**2**		**3**	
	x	y	x	y	x	y
	15	42	5	16	5	8
	16	35	10	32	10	16
	17	45	15	44	15	22
	18	42	20	45	20	23
	19	49	25	63	25	31
	20	46	50	115	50	60
S_{xx}	17.50		1270.8333		1270.8333	
S_{xy}	29.50		2722.5		1431.6667	
$\hat{\beta}_1$	1.685714		2.142295		1.126557	
$\hat{\beta}_0$	13.666672		7.868852		3.196729	
SST	114.83		5897.5		1627.33	
SSE	65.10		65.10		14.48	

12.3 Inferencias sobre el parámetro de la pendiente β_1

Virtualmente en todo el trabajo inferencial realizado hasta ahora, el concepto de variabilidad de muestreo ha sido persistente. En particular, las propiedades de las distribuciones de muestreo de varios estadísticos han sido la base para desarrollar fórmulas de intervalo de confianza y métodos de prueba de hipótesis. La idea clave en este caso es que el valor de cualquier cantidad calculada a partir de datos muestrales, el valor de cualquier estadístico, variará de una muestra a otra.

EJEMPLO 12.10 Reconsidere los datos sobre x = tasa de liberación debido al área del quemador y y = tasa de emisiones de NO_x del ejercicio 12.19 en la sección previa. Existen 14 observaciones realizadas con los valores x 100, 125, 125, 150, 150, 200, 200, 250, 250, 300, 300, 350, 400 y 400, respectivamente. Suponga que la pendiente y la intercepción de la recta de regresión verdadera son $\beta_1 = 1.70$ y $\beta_0 = -50$, con $\sigma = 35$ (consistente con los valores $\hat{\beta}_1 = 1.7114$, $\hat{\beta}_0 = -45.55$, $s = 36.75$). Se procedió a generar una muestra de desviaciones aleatorias $\tilde{\epsilon}_1, \ldots, \tilde{\epsilon}_{14}$ respecto a una distribución normal con media 0 y desviación estándar 35, y luego se sumó $\tilde{\epsilon}_i$ a $\beta_0 + \beta_1 x_i$ para obtener 14 valores y correspondientes. Se realizaron entonces los cálculos de regresión para obtener la pendiente, la intercepción y la desviación estándar estimados. Este proceso se repitió un total de 20 veces y los valores resultantes se proporcionan en la tabla 12.1.

Tabla 12.1 Resultados de simulación del ejemplo 12.10

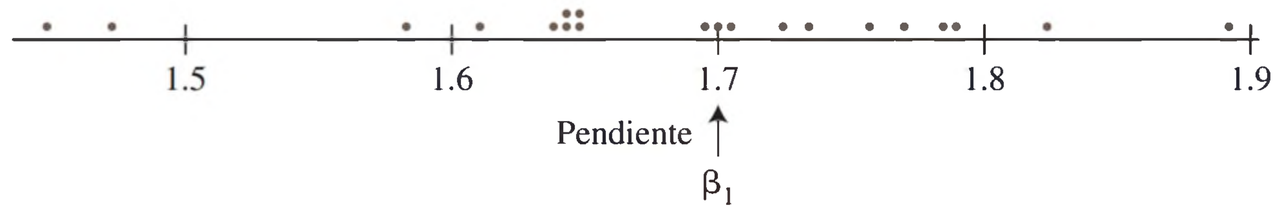
$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_0$	s	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_0$	s
1. 1.7559	−60.62	43.23	11. 1.7843	−67.36	41.80
2. 1.6400	−49.40	30.69	12. 1.5822	−28.64	32.46
3. 1.4699	−4.80	36.26	13. 1.8194	−83.99	40.80
4. 1.6944	−41.95	22.89	14. 1.6469	−32.03	28.11
5. 1.4497	5.80	36.84	15. 1.7712	−52.66	33.04
6. 1.7309	−70.01	39.56	16. 1.7004	−58.06	43.44
7. 1.8890	−95.01	42.37	17. 1.6103	−27.89	25.60
8. 1.6471	−40.30	43.71	18. 1.6396	−24.89	40.78
9. 1.7216	−42.68	23.68	19. 1.7857	−77.31	32.38
10. 1.7058	−63.31	31.58	20. 1.6342	−17.00	30.93

Claramente existe variación en los valores de la pendiente y la intercepción estimadas, así como también en la desviación estándar estimada. La ecuación de la recta de mínimos cuadrados varía, por tanto, de una muestra a la siguiente. La figura 12.13 en la página 511 muestra una gráfica de puntos de las pendientes estimadas, así como también gráficas de la recta de regresión verdadera y las 20 rectas de regresión muestrales. ■

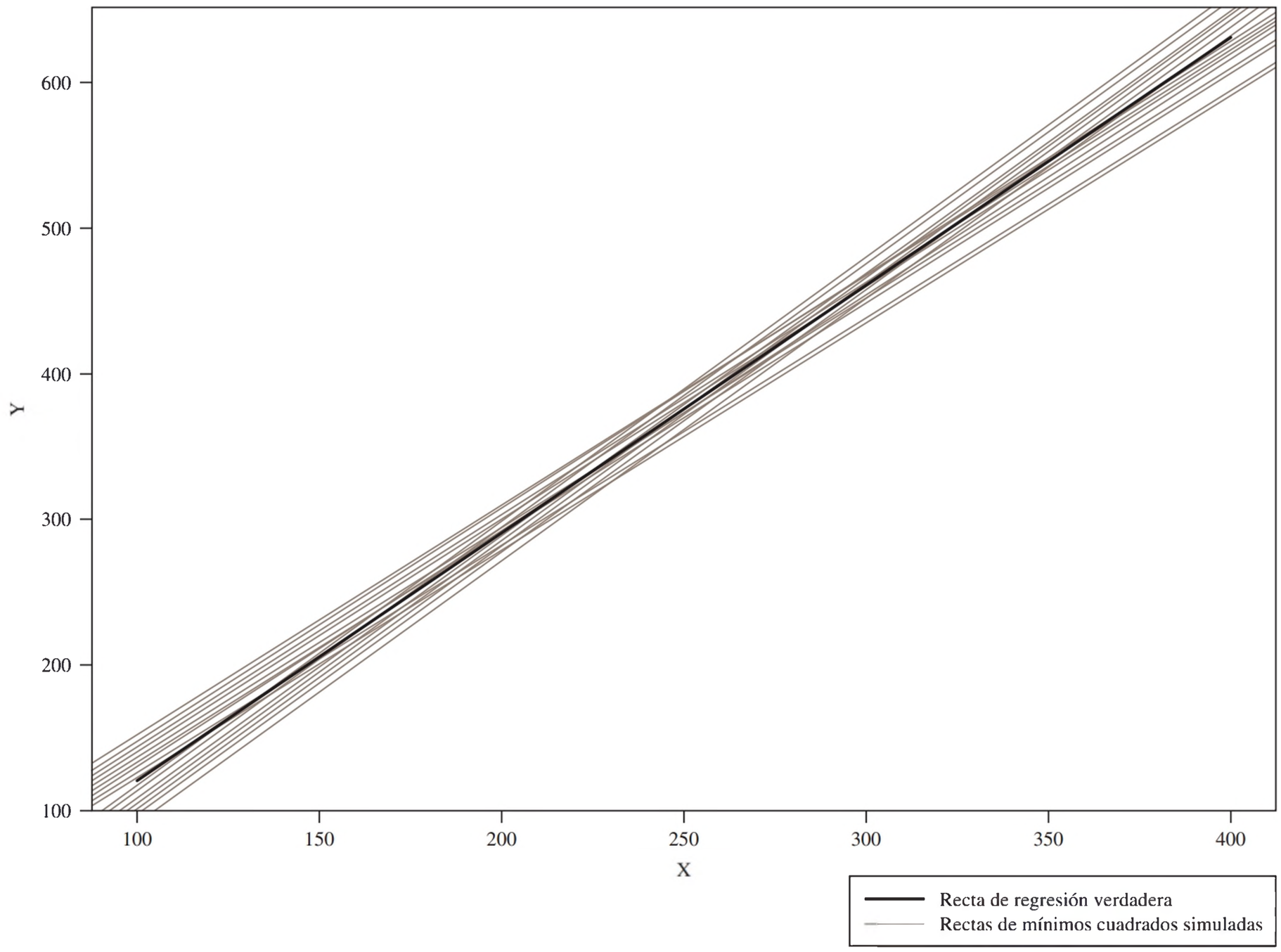
La pendiente β_1 de la recta de regresión de población es el cambio promedio verdadero en la variable dependiente y asociada con un incremento de 1 unidad en la variable independiente x. La pendiente de la recta de mínimos cuadrados, $\hat{\beta}_1$ da una estimación puntual de β_1. Del mismo modo que un intervalo de confianza para μ y los procedimientos para probar hipótesis respecto a μ se basaron en propiedades de la distribución de muestreo de $\overline{X}$, las inferencias adicionales sobre β_1 están basadas en considerar a $\hat{\beta}_1$ como un estadístico e investigar su distribución de muestreo.

Se supone que los valores de las x_i se eligen antes de realizar el experimento, así que sólo las Y_i son aleatorias. Los estimadores (estadísticos y, por tanto, las variables aleatorias) de β_0 y β_1 se obtienen al reemplazar y_i por Y_i en (12.2) y (12.3):

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2} \qquad \hat{\beta}_0 = \frac{\sum Y_i - \hat{\beta}_1 \sum x_i}{n}$$



(a)



(b)

Figura 12.13 Resultados de simulación del ejemplo 12.10; (a) Gráfica de puntos de pendientes estimadas; (b) gráficas de la recta de regresión verdadera y de las 20 rectas de mínimos cuadrados (obtenidas con S-Plus)

Asimismo, el estimador de σ^2 se obtiene al reemplazar cada y_i en la fórmula para s^2 por la variable aleatoria Y_i:

$$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{\sum Y_i^2 - \hat{\beta}_0 \sum Y_i - \hat{\beta}_1 \sum x_i Y_i}{n - 2}$$

El denominador de $\hat{\beta}_1$, $S_{xx} = \Sigma(x_i - \bar{x})^2$, depende sólo de las x_i y no de las Y_i, así que es una constante. Entonces, puesto que $\Sigma(x_i - \bar{x})\bar{Y} = \bar{Y}\,\Sigma(x_i - \bar{x}) = Y \cdot 0 = 0$, el estimador de la pendiente se escribe como

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) Y_i}{S_{xx}} = \sum c_i Y_i \qquad \text{donde } c_i = (x_i - \bar{x})/S_{xx}$$

Es decir, $\hat{\beta}_1$ es una función lineal de las variables aleatorias independientes $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, cada una de las cuales está normalmente distribuida. Invocar las propiedades de una función lineal de variables aleatorias que se analizaron en la sección 5.5 conduce a los siguientes resultados.

PROPOSICIÓN

1. La media de $\hat{\beta}_1$ es $E(\hat{\beta}_1) = \mu_{\hat{\beta}_1} = \beta_1$, así que $\hat{\beta}_1$ es un estimador insesgado de β_1 (la distribución de $\hat{\beta}_1$ siempre está centralizada en el valor de β_1).
2. La varianza y la desviación estándar de $\hat{\beta}_1$ son

$$V(\hat{\beta}_1) = \sigma^2_{\hat{\beta}_1} = \frac{\sigma^2}{S_{xx}} \qquad \sigma_{\hat{\beta}_1} = \frac{\sigma}{\sqrt{S_{xx}}} \tag{12.4}$$

   donde $S_{xx} = \Sigma(x_i - \overline{x})^2 = \Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2/n$. Reemplazando σ por su estimación s da una estimación para $\sigma_{\hat{\beta}_1}$ (la desviación estándar estimada, es decir, el error estándar estimado de $\hat{\beta}_1$):

$$s_{\hat{\beta}_1} = \frac{s}{\sqrt{S_{xx}}}$$

   (Esta estimación también puede ser denotada por $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}$.)
3. El estimador $\hat{\beta}_1$ tiene una distribución normal (debido a que es una función lineal de variables aleatorias estandarizadas independientes).

De acuerdo con (12.4), la varianza de $\hat{\beta}_1$ es igual a la varianza σ^2 del término de error aleatorio o, de forma equivalente, de cualquier Y_i, dividida entre $\Sigma(x_i - \overline{x})^2$. Puesto que mide la dispersión de las x_i en torno a $\overline{x}$, se concluye que si se realizan observaciones a valores x_i que están bastante dispersos se obtiene un estimador más preciso del parámetro de la pendiente (la varianza más pequeña de $\hat{\beta}_1$), mientras que los valores de x_i muy cercanos entre sí implican un estimador altamente variable. Desde luego, si las x_i están demasiado dispersas, un modelo lineal quizá no sea apropiado a lo largo del rango de observación.

Muchos procedimientos inferenciales previamente analizados se basaron en estandarizar un estimador restando primero su media y luego dividiéndolo entre su desviación estándar estimada. En particular, los procedimientos de prueba y un intervalo de confianza para la media μ de una población normal utilizaron el hecho de que la variable estandarizada $(\overline{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$, es decir $(\overline{X} - \mu)/S_{\hat{\mu}}$, tenía una distribución t con $n - 1$ grados de libertad. Un resultado similar en este caso abre la puerta a más inferencias sobre β_1.

TEOREMA

La suposición del modelo de regresión lineal simple implica que la variable estandarizada

$$T = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{S/\sqrt{S_{xx}}} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{S_{\hat{\beta}_1}}$$

tiene una distribución t con $n - 2$ grados de libertad.

Un intervalo de confianza para β_1

Tal como en la deducción de intervalos de confianza previos, se inicia con un enunciado de probabilidad

$$P\left(-t_{\alpha/2,\,n-2} < \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{S_{\hat{\beta}_1}} < t_{\alpha/2,n-2}\right) = 1 - \alpha$$

La manipulación de las desigualdades entre paréntesis para aislar β_1 y la sustitución de las estimaciones en lugar de los estimadores da la fórmula del intervalo de confianza.

Un **intervalo de confianza** de $100(1-\alpha)\%$ **para la pendiente** β_1 de la recta de regresión verdadera es

$$\hat{\beta}_1 \pm t_{\alpha/2,n-2} \cdot s_{\hat{\beta}_1}$$

Este intervalo tiene la misma forma general de muchos de los intervalos previos. Está centrado en la estimación puntual del parámetro y la cantidad que se extiende a cada lado depende del nivel de confianza deseado (a través del valor crítico t) y de la cantidad de variabilidad del estimador $\hat{\beta}_1$ (a través de $s_{\hat{\beta}_1}$, el cual tenderá a ser más pequeño cuando existe poca variabilidad en la distribución de $\hat{\beta}_1$ y grande en caso contrario).

EJEMPLO 12.11 Cuando daña la estructura de la madera, puede ser más económico reparar la zona afectada en vez de sustituir toda la estructura. El artículo **"Simplified Model for Strength Assessment of Timber Beams Joined by Bonded Plates"** (***J. of Materials in Civil Engr.*, 2013: 980–990**) investigó una estrategia particular para su reparación. Los siguientes datos fueron usados por los autores del artículo como base para ajustar el modelo de regresión lineal simple. La variable dependiente es y = carga de ruptura (N) y la variable independiente es la longitud de anclaje (la longitud adicional del material utilizado para adherir en la unión, en mm).

x	50	50	80	80	110	110	140	140	170	170
y	17 052	14 063	26 264	19 600	21 952	26 362	26 362	26 754	31 654	32 928

Observe que la relación entre la longitud de anclaje y la carga de ruptura claramente no es determinista, ya que hay observaciones con valores x idénticos pero diferentes valores y. La figura 12.14 muestra un diagrama de dispersión de los datos (también se presenta en el artículo citado) donde parece haber una relación lineal positiva bastante sustancial entre las dos variables.

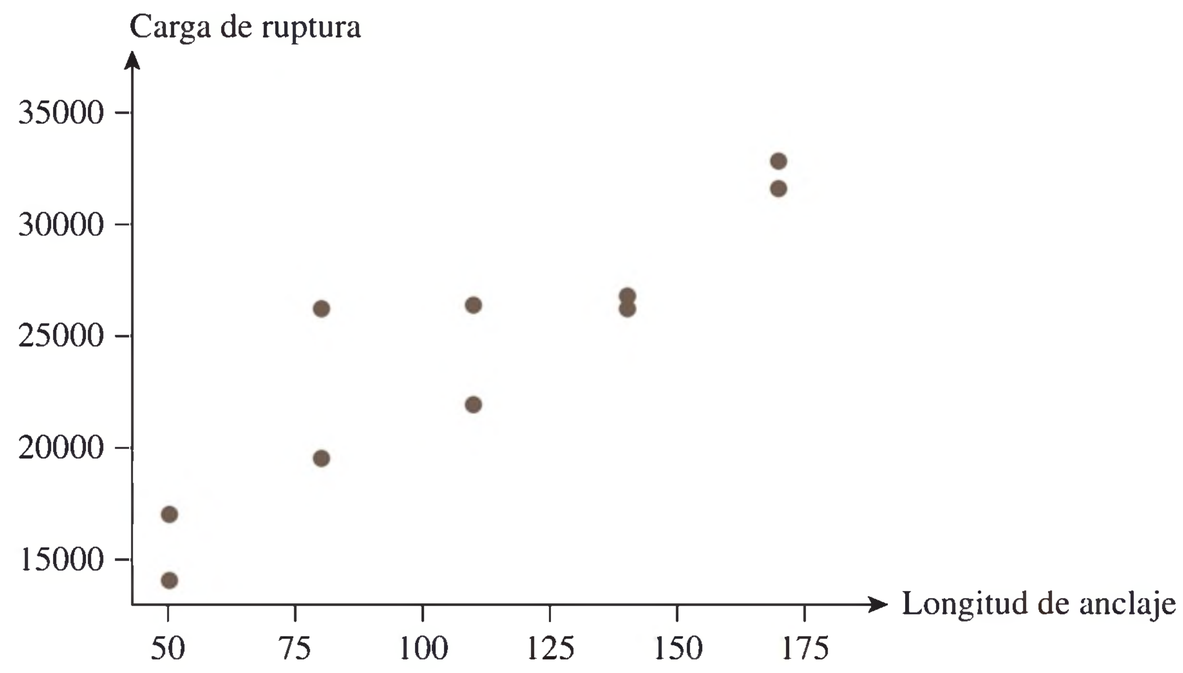


Figura 12.14 Gráfica de dispersión de los datos del ejemplo 12.11

Las cantidades resumidas incluyen $S_{xx} = 18\,000$, $S_{xy} = 2\,225\,579.40$, $S_{yy} = \text{SST} = 331\,839\,568.9$, $\hat{\beta}_1 = 123.6433$, $\hat{\beta}_0 = 10\,698.33$, $\text{SSE} = 56\,661\,439.1$ y $r^2 = .829$. Aproximadamente 83% de la variación observada en la carga de ruptura puede atribuirse a la relación del modelo de regresión lineal simple entre carga de ruptura y longitud de anclaje. El grado de libertad de error es $10 - 2 = 8$, de lo cual $s^2 = 56\,661\,439.1/8 = 7\,082\,679.89$ y $s = 2661.33$. El error estándar estimado de $\hat{\beta}_1$ es

$$s_{\hat{\beta}_1} = \frac{s}{\sqrt{S_{xx}}} = \frac{2661.33}{\sqrt{18\,000}} = 19.836$$

Un nivel de confianza de 95% requiere que $t_{.025,8} = 2.306$. El intervalo de confianza es

$$123.64 \pm (2.306)(19.836) = 123.64 \pm 45.74 = (77.90\ 169.38)$$

Con un alto grado de confianza, se estima que un aumento en la resistencia a la ruptura media verdadera de entre 77.90 N y 169.38 N está asociado con un aumento de 1 mm de longitud de anclaje (al menos para las longitudes de anclaje entre 50 y 170 mm). Este intervalo no es demasiado estrecho, es una consecuencia del pequeño tamaño muestral y la variabilidad sustancial sobre la recta de regresión estimada. Observe que el intervalo incluye sólo valores positivos, por lo que podemos estar absolutamente seguros de la fuerza aumenta conforme aumenta la longitud de anclaje.

La figura 12.15 presenta los resultados de regresión del paquete SAS. El valor de $s_{\hat{\beta}_1}$ se encuentra debajo de las estimaciones del parámetro como el segundo número en la columna del error estándar. También es un error estándar estimado para $\hat{\beta}_0$, del cual se puede calcular un intervalo de confianza para la intercepción de la recta de regresión de población. Las dos últimas columnas de la tabla de parámetros estimados dan información sobre la comprobación de ciertas hipótesis, nuestro siguiente tema de análisis.

Análisis de varianza					
Fuente	Grados de libertad	Suma de los cuadrados	Media de los cuadrados	Valor P	Pr > F
Modelo	1	275178130	275178130	38.85	0.0003
Error	8	56661439	7082680		
Total corregido	9	331839569			

Raíz MSE	2661.33047	R cuadrada	0.8293
Media dependiente	24299	R Adj. cuadrada	0.8079
Coef. Var	10.95238		

Parámetros estimados					
Variable	Grados de libertad	Parámetro estimado	Error estándar	Valor *t*	Pr >|t|
Intercepción	1	10698	2338.67544	4.57	0.0018
Longitud de anclaje	1	123.64333	19.83639	6.23	0.0003

Figura 12.15 Resultados obtenidos con SAS con los datos del ejemplo 12.11 ■

Procedimientos de prueba de hipótesis

Tal como antes, la hipótesis nula en una prueba respecto a β_1 será un enunciado de igualdad. El valor nulo (valor de β_1 supuesto verdadero por la hipótesis nula) será denotado por β_{10} (léase "beta uno cero", *no* "beta diez"). El estadístico de prueba se obtiene reemplazando β_i en la variable estandarizada T por el valor nulo β_{10}; es decir, estandarizando el estimador de β_i conforme a la suposición de que H_0 es verdadera. El estadístico de prueba tiene, por tanto, una distribución t con $n - 2$ grados de libertad cuando H_0 es verdadera, lo que permite determinar un valor P tal como se describe en los capítulos 8 y 9 para las pruebas t.

El par más comúnmente encontrado de hipótesis sobre β_1 es H_0: $\beta_1 = 0$ contra H_a: $\beta_i \neq 0$. Cuando esta hipótesis nula es verdadera, $\mu_{Y \cdot x} = \beta_0$ independiente de x. Entonces conocer x no da ninguna información sobre el valor de la variable dependiente. Una prueba de estas dos hipótesis se refiere a menudo como la *prueba de la utilidad del modelo* de

regresión lineal simple. A menos que n sea muy pequeño, H_0 se rechazará y la utilidad del modelo se confirma precisamente cuando r^2 es razonablemente grande. El modelo de regresión lineal simple no debe utilizarse para otras inferencias (estimaciones de la media o predicciones de valores futuros) a menos que los resultados en las pruebas del modelo de utilidad rechace H_0 para una α convenientemente pequeña.

Hipótesis nula: H_0: $\beta_1 = \beta_{10}$

Valor del estadístico de prueba: $t = \dfrac{\hat{\beta}_1 - \beta_{10}}{s_{\hat{\beta}_1}}$

Hipótesis alternativa	Determinación del valor *P*
H_a: $\beta_1 > \beta_{10}$	Área bajo la curva t_{n-2} a la derecha de t
H_a: $\beta_1 < \beta_{10}$	Área bajo la curva t_{n-2} a la izquierda de t
H_a: $\beta_1 \neq \beta_{10}$	$2 \cdot$ (Área bajo la curva t_{n-2} a la derecha de $\lvert t \rvert$)

La **prueba de utilidad del modelo** es la prueba de H_0: $\beta_1 = 0$ contra H_a: $\beta_1 \neq 0$, en cuyo caso el valor del estadístico de prueba es el **cociente *t***, $t = \hat{\beta}_1 / s_{\hat{\beta}_1}$.

EJEMPLO 12.12 Los ciclomotores o mopeds son muy populares en Europa debido a su costo y su fácil manejo. Sin embargo, pueden ser peligrosos si se modifican las características de rendimiento. Una de las características comúnmente manipulada es la velocidad máxima. El artículo **"Procedure to Verify the Maximum Speed of Automatic Transmission Mopeds in Periodic Motor Vehicle Inspections" (*J. of Automotive Engr.*, 2008: 1615–1623)** incluyó un análisis de regresión lineal simple de las variables x = velocidad de la pista de prueba (km/h) y y = velocidad de prueba de rodamiento. He aquí los datos leídos de una gráfica en el artículo:

x	42.2	42.6	43.3	43.5	43.7	44.1	44.9	45.3	45.7
y	44	44	44	45	45	46	46	46	47

x	45.7	45.9	46.0	46.2	46.2	46.8	46.8	47.1	47.2
y	48	48	48	47	48	48	49	49	49

Una gráfica de dispersión de los datos muestra un patrón lineal sustancial. El resultado de Minitab en la figura 12.16 da el coeficiente de determinación como $r^2 = .923$, que sin duda presagia una útil relación lineal. Vamos a llevar a cabo la prueba de utilidad del modelo en un nivel de significancia $\alpha = .01$.

```
The regression equation is
vel rodamiento = -2.22 + 1.08 vel pista

Predictor          Coef       SE Coef          T          P
Constant         -2.224         3.528      -0.63      0.537
vel pista       1.08342       0.07806      13.88      0.000

S = 0.506890    R-Sq = 92.3%    R-Sq(adj) = 91.9%

Analysis of Variance

Source                DF         SS         MS          F          P
Regression             1     49.500     49.500     192.65      0.000
Residual Error        16      4.111      0.257
Total                 17     53.611
```

$s_{\hat{\beta}_1}$ $t = \dfrac{\hat{\beta}_1}{s_{\hat{\beta}_1}}$

← Valor *P* para la prueba de la utilidad del modelo

Figura 12.16 Resultados obtenidos con Minitab del ejemplo 12.12

El parámetro de interés es β_1, el cambio esperado en la velocidad de rodadura asociado con un incremento de 1 km/h en la prueba de velocidad. La hipótesis nula H_0: $\beta_1 = 0$ será rechazada en favor de la alternativa H_0: $\beta_1 \neq 0$ si el cociente t, $t = \hat{\beta}_1/s_{\hat{\beta}_1}$ se encuentra demasiado lejos, ya sea en la cola de la curva t_{n-2} (lo que resulta en un pequeño valor P). De acuerdo con la figura 12.16, $\hat{\beta}_1 = 1.08342$, $s_{\hat{\beta}_1} = .07806$, y

$$t = \frac{1.08342}{.07806} = 13.88 \quad \text{(también en los resultados)}$$

El valor P es dos veces el área capturada bajo la curva t de 16 grados de libertad a la derecha de 13.88. Minitab da un valor $P = .000$. Por ello se puede rechazar la hipótesis nula de no relación lineal útil a cualquier nivel de significancia razonable. Esta confirmación de la utilidad del modelo de regresión simple permite calcular varias estimaciones y predicciones tal como se describe en la sección 12.4. ■

Regresión y ANOVA

La descomposición de la suma total de cuadrados $\Sigma(y_i - \bar{y})^2$ en una parte SSE, la cual mide la variación no explicada y una parte SSR, la cual mide la variación explicada por la relación lineal, hace recordar fuertemente el ANOVA unidireccional. De hecho, la hipótesis nula H_0: $\beta_1 = 0$ puede ser probada contra H_a: $\beta_1 \neq 0$ con una tabla ANOVA (tabla 12.2) y determinando el valor P para la prueba F.

Tabla 12.2 Tabla ANOVA para regresión lineal simple

Origen de la variación	gl	Suma de cuadrados	Media cuadrática	f
Regresión	1	SSR	SSR	$\dfrac{\text{SSR}}{\text{SSE}/(n-2)}$
Error	$n-2$	SSE	$s^2 = \dfrac{\text{SSE}}{n-2}$	
Total	$n-1$	SST		

La prueba F da exactamente el mismo resultado que la prueba t de utilidad de modelo $t^2 = f$ y $t^2_{\alpha/2,n-2} = F_{\alpha,1,n-2}$. Virtualmente todos los programas de computadora que cuentan con opciones de regresión incluyen dicha tabla ANOVA en los resultados. Por ejemplo, la figura 12.15 muestra los resultados obtenidos con SAS con los datos de mortero del ejemplo 12.11. La tabla ANOVA en la parte superior de los resultados tiene $f = 38.85$ con un valor P de .0003 para la prueba de utilidad de modelo. La tabla de estimaciones de parámetro da $t = 6.23$ de nuevo con $P = .0003$ y $38.85 \approx (6.23)^2$ (que serían idénticos si se mostrara mayor precisión decimal).

EJERCICIOS Sección 12.3 (30–43)

30. Reconsidere la situación descrita en el ejercicio 7, en el cual x = resistencia acelerada del concreto y y = resistencia después de 28 días de curado. Suponga que el modelo de regresión lineal simple es válido con x entre 1000 y 4000 y que $\beta_1 = 1.25$ y $\sigma = 350$. Considere un experimento en el cual $n = 7$ y los valores x a los cuales se realizan las observaciones son $x_1 = 1000$, $x_2 = 1500$, $x_3 = 2000$, $x_4 = 2500$, $x_5 = 3000$, $x_6 = 3500$ y $x_7 = 4000$.

a. Calcule $\sigma_{\hat{\beta}_1}$, la desviación estándar de $\hat{\beta}_1$.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la pendiente estimada con base en las observaciones esté entre 1.00 y 1.50?

c. Suponga que también es posible hacer una sola observación con cada uno de los $n = 11$ valores $x_1 = 2000$, $x_2 = 2100,\ldots, x_{11} = 3000$. Si un objetivo importante es estimar β_1 con tanta precisión como sea posible, ¿se preferiría el experimento con $n = 11$ a uno con $n = 7$?

31. Durante las operaciones de perforación de pozos de petróleo, los componentes del ensamble de perforación pueden sufrir rompimiento por esfuerzo a partir de sulfuros. El artículo **"Composition Optimization of High-Strength Steels for Sulfide Cracking Resistance Improvement" (*Corrosion Science*, 2009: 2878–2884)** informa sobre un estudio en el que se analizó la composición de un acero de grado estándar. Los siguientes datos sobre el umbral de esfuerzo y = umbral de tensión (SMYS%) y x = límite elástico (MPa) se obtuvieron de una gráfica en el artículo (que también incluye la ecuación de la recta de mínimos cuadrados).

x	635	644	711	708	836	820	810	870	856	923	878	937	948
y	100	93	88	84	77	75	74	63	57	55	47	43	38

$$\sum x_i = 10\,576,\ \sum y_i = 894,\ \sum x_i^2 = 8\,741\,264,$$
$$\sum y_i^2 = 66\,224,\ \sum x_i y_i = 703\,192$$

a. ¿Qué proporción de la variación observada en el esfuerzo puede ser atribuida a la relación lineal aproximada entre las dos variables?

b. Calcule la desviación estándar estimada $s_{\hat{\beta}_1}$.

c. Calcule un intervalo de confianza usando el nivel de confianza de 95% de la variación esperada del esfuerzo asociado con un aumento de 1 MPa en la resistencia. ¿Será que este promedio real de cambio ha sido estimado con precisión?

32. El ejercicio 16 de la sección 12.2 aporta datos sobre x = volumen de precipitación pluvial y y = volumen de escurrimiento (ambos en m^3). Use los resultados adjuntos obtenidos con Minitab para decidir si existe una relación lineal útil entre la precipitación pluvial y el escurrimiento, y luego calcule un intervalo de confianza para el cambio promedio verdadero del volumen de escurrimiento asociado con 1 m^3 de incremento del volumen de precipitación pluvial.

```
The regression equation is
escurrimiento = −1.13 + 0.827 precipitación pluvial

Predictor          Coef      Stdev   t-ratio       P
Constant         −1.128      2.368    −0.48   0.642
precipitación  0.82697    0.03652     22.64   0.000
pluvial

s = 5.240          R-sq = 97.5%     R-sq(adj) = 97.3%
```

33. El ejercicio 15 de la sección 12.2 incluyó resultados generados por Minitab del módulo de elasticidad con una regresión de resistencia a la flexión de vigas de concreto.

a. Úselos para calcular un intervalo de confianza con un nivel de confianza de 95% para la pendiente β_1 de la recta de regresión de población e interprete el intervalo resultante.

b. Suponga que anteriormente se creía que cuando el módulo de elasticidad se incrementa en 1 GPa, el cambio promedio verdadero asociado de la resistencia a la flexión era cuando mucho de .1 MPa. ¿Contradicen los datos esta creencia? Formule y pruebe las hipótesis pertinentes.

34. Las tecnologías electromagnéticas ofrecen eficaces técnicas de detección no destructivas para determinar las características del pavimento. La propagación de las ondas electromagnéticas a través del material depende de sus propiedades dieléctricas. Los siguientes datos, amablemente proporcionados por los autores del artículo **"Dielectric Modeling of Asphalt Mixtures and Relationship with Density" (*J. of Transp. Engr.*, 2011: 104–111)**, se utilizaron para relacionar y = constante dieléctrica a x = aire vacío (%) para 18 muestras que tienen un contenido de asfalto de 5%:

y	4.55	4.49	4.50	4.47	4.47	4.45	4.40	4.34	4.43
x	4.35	4.79	5.57	5.20	5.07	5.79	5.36	6.40	5.66
y	4.43	4.42	4.40	4.33	4.44	4.40	4.26	4.32	4.34
x	5.90	6.49	5.70	6.49	6.37	6.51	7.88	6.74	7.08

El siguiente resultado de R es de una regresión lineal simple de y sobre x:

```
             Estimate  Std. Error  t value  Pr(>|t|)
(Intercept)  4.858691    0.059768   81.283     <2e-16
Airevacío   −0.074676    0.009923   −7.526   1.21e-06

Residual standard error: 0.03551 on 16 DF Multiple
R-squared: 0.7797, Adjusted R-squared: 0.766 F-statistic:
56.63 on 1 and 16 DF, p-value: 1.214e-06

Analysis of Variance Table

Response: Dieléctrico
           Df    Sum Sq   Mean Sq  F value     Pr(>F)
Airevacío   1  0.071422  0.071422   56.635  1.214e-06
Residuals  16   0.20178  0.001261
```

a. Obtenga la ecuación de la recta de mínimos cuadrados e interprete su pendiente.

b. ¿Qué proporción de la variación observada en la constante dieléctrica se puede atribuir a la relación lineal aproximada entre la constante dieléctrica y el aire vacío?

c. ¿Habrá una relación lineal útil entre la constante dieléctrica y el aire vacío? Establezca y pruebe las hipótesis apropiadas.

d. Suponga que anteriormente se creía que cuando el aire vacío aumenta en 1 por ciento, el cambio promedio verdadero asociado con la constante dieléctrica sería al menos de $-.05$. ¿Los datos de la muestra contradicen esta creencia? Realice una prueba de hipótesis apropiadas usando un nivel de significancia de .01.

35. ¿Cómo afecta la aceleración lateral, en las fuerzas laterales experimentadas en las curvas, que en gran medida están bajo el control del conductor, respecto a la sensación de náusea perciben los pasajeros de un autobús? El artículo **"Motion Sickness in Public Road Transport: The Effect of Driver, Route, and Vehicle" (*Ergonomics*, 1999: 1646-1664)** reporta datos sobre x = dosis de mareo provocado por el movimiento (calculado de acuerdo con una norma británica para evaluar movimientos similares en el mar) y y = sensación de náusea reportada (%). Las cantidades pertinentes son

$$n = 17,\ \sum x_i = 222.1,\ \sum y_i = 193,\ \sum x_i^2 = 3056.69,$$
$$\sum x_i y_i = 2759.6,\ \sum y_i^2 = 2975$$

Los valores de las dosis en la muestra oscilaron entre 6.0 y 17.6.

a. Suponiendo que el modelo de regresión lineal simple es válido para relacionar estas dos variables (esto es apoyado por los datos sin procesar), calcule e interprete un estimador del parámetro de pendiente que dé información sobre la precisión y la confiabilidad de la estimación.

b. ¿Habrá una relación lineal útil entre estas dos variables? Pruebe las hipótesis adecuadas usando $\alpha = .01$.

c. ¿Sería sensato utilizar el modelo de regresión lineal simple como base para predecir el % de náusea cuando la dosis = 5.0? Explique su razonamiento.

d. Cuando se utilizó Minitab para ajustar el modelo de regresión lineal simple a los datos sin procesar, la observación (6.0, 2.50) se señaló como un posible impacto sustancial en el ajuste. Elimine esta observación de la muestra y recalcule la estimación del inciso a). Con base en esto, ¿ejercerá la observación una influencia indebida?

36. Cuando se utilizan fluidos para remover metales durante las operaciones de maquinado para enfriar y lubricar la herramienta y la pieza de trabajo suele producirse bruma (gotas transportadas por el aire o aerosoles). La generación de bruma es una preocupación para la OSHA, la cual recientemente ha reducido sustancialmente la norma en los lugares de trabajo. El artículo **"Variables Affecting Mist Generation from Metal Removal Fluids" (*Lubrication Engr.*, 2002: 10–17)** aporta los siguientes datos sobre x = velocidad de flujo de un aceite soluble al 5% (cm/s) y y = la cantidad de gotas de bruma con diámetro menor que 10 μm (mg/m^3):

x	89	177	189	354	362	442	965
y	.40	.60	.48	.66	.61	.69	.99

a. Los investigadores realizaron un análisis de regresión lineal simple para relacionar las dos variables. ¿Apoya la gráfica de dispersión esta estrategia?

b. ¿Qué proporción de la variación observada de la bruma puede ser atribuida a la relación de regresión lineal simple entre velocidad y bruma?

c. A los investigadores les interesaba particularmente el impacto en la bruma de la velocidad creciente de 100 a 1000 (un factor de 10 correspondiente a la diferencia entre los valores x más pequeños y más grandes presentes en la muestra). Cuando x se incrementa de esta manera, ¿existe evidencia sustancial de que el incremento promedio verdadero de y es menor que .6?

d. Estime el cambio promedio verdadero de la bruma asociado con un incremento de 1 cm/s en la velocidad y hágalo de modo que dé información sobre precisión y confiabilidad.

37. La obtención de imágenes mediante resonancia magnética (MRI, por sus siglas en inglés) está bien establecida como una herramienta para medir velocidades de la sangre y en flujos de volúmenes. El artículo **"Correlation Analysis of Stenotic Aortic Valve Flow Patterns Using Phase Contrast MRI"**, citado en el ejercicio 1.67, propone utilizar esta metodología para determinar el área valvular en pacientes con estenosis aórtica. Los siguientes datos sobre velocidad pico (m/s), obtenidos en exámenes de 23 pacientes en dos planos diferentes, se tomaron de una gráfica que aparece en el artículo citado.

Nivel-	.60	.82	.85	.89	.95	1.01	1.01	1.05
Nivel--	.50	.68	.76	.64	.68	.86	.79	1.03

Nivel-	1.08	1.11	1.18	1.17	1.22	1.29	1.28	1.32
Nivel--	.75	.90	.79	.86	.99	.80	1.10	1.15

Nivel-	1.37	1.53	1.55	1.85	1.93	1.93	2.14
Nivel--	1.04	1.16	1.28	1.39	1.57	1.39	1.32

a. ¿Habrá alguna diferencia entre la velocidad promedio verdadera en los dos diferentes planos? Realice una prueba de hipótesis apropiada (como lo hicieron los autores del artículo).

b. Los autores del artículo también regresaron el nivel de velocidad-- contra nivel de velocidad-. La intercepción y la pendiente estimadas resultantes son .14701 y .65393 con errores estándar estimados correspondientes de .07877 y .05947, coeficiente de determinación de .852 y $s = .110673$. El artículo señala que esta regresión mostraba evidencias de una fuerte relación lineal pero una pendiente de regresión muy por debajo de 1. ¿Está usted de acuerdo?

38. Remítase a los datos sobre x = tasa de liberación y y = tasa de emisión de NO_x dados en el ejercicio 19.

a. ¿Especifica el modelo de regresión lineal simple una relación útil entre las dos tasas? Use el procedimiento de prueba apropiado para obtener información sobre el valor P y luego saque una conclusión a nivel de significancia .01.

b. Calcule un intervalo de confianza de 95% para el cambio esperado en la tasa de emisiones asociado con un incremento de 10 MBtu/h-pie^2 en la tasa de liberación.

39. Realice la prueba de utilidad de modelo mediante el método ANOVA con los datos de contenido de humedad-tasa de filtración del ejemplo 12.6. Verifique que se obtenga un resultado equivalente al de la prueba t.

40. Use las reglas del valor esperado para demostrar que es un estimador insesgado de β_0 (suponiendo que $\hat{\beta}_1$ es insesgado para β_1).

41. **a.** Verifique que $E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$ usando las reglas de valor esperado del capítulo 5.

b. Use las reglas de varianza del capítulo 5 para verificar la expresión para $V(\hat{\beta}_1)$ dada en esta sección.

42. Si cada x_i se multiplica por una constante positiva c y cada y_i se multiplica por otra constante positiva d, verifique que el estadístico t para probar que H_0: $\beta_1 = 0$ contra H_a: $\beta_1 \neq 0$ no cambia de valor (el valor de $\hat{\beta}_1$ sí cambiará, lo cual demuestra que la magnitud de $\hat{\beta}_1$ no es indicativo por sí mismo de la utilidad de modelo).

43. La probabilidad de un error tipo II con la prueba t para H_0: $\beta_1 = \beta_{10}$ se calcula del mismo modo que para las pruebas t del

capítulo 8. Si el valor alternativo de β_1 es denotado por β_1', el valor de

$$d = \frac{|\beta_{10} - \beta_1'|}{\sigma\sqrt{\dfrac{n-1}{S_{xx}}}}$$

se calcula primero, luego se ingresa al conjunto apropiado de curvas de la tabla A.17 del apéndice por el eje horizontal con el valor de d, y β se lee en la curva de $n - 2$ grados de libertad. Un artículo que apareció en el ***Journal of Public Health Engineering*** reporta los resultados de un análisis de regresión basado en $n = 15$ observaciones en las cuales x = temperatura de aplicación de filtro (°C) y y = % de eficiencia de eliminación de BOD. Las cantidades calculadas incluyen $\Sigma x_i = 402$, $\Sigma x_i^2 = 11\,098$, $s = 3.725$ y $\hat{\beta}_1 = 1.7035$. Considere probar a un nivel de .01 H_0: $\beta_1 = 1$, la que manifiesta que el incremento esperado en el % de eliminación de BOD es 1 cuando la temperatura de aplicación del filtro se incrementa 1°C, contra la alternativa H_a: $\beta_1 > 1$. Determine P(error tipo II) cuando $\beta_1' = 2$, $\sigma = 4$.

12.4 Inferencias sobre $\mu_{Y\cdot x^*}$ y predicción de valores Y futuros

Sea x^* un valor específico de la variable independiente x. Una vez que las $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ estimadas han sido calculadas, $\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_1 x^*$ puede ser considerada una estimación puntual de $\mu_{Y\cdot x^*}$ (el valor esperado o el valor promedio real de Y cuando $x = x^*$) o un predicción del valor Y que resultará de una sola observación realizada cuando $x = x^*$. La estimación puntual o predicción por sí misma no da información de con cuánta precisión ha sido estimada $\mu_{Y\cdot x^*}$ o pronosticada Y. Esto se remedia desarrollando un intervalo de confianza para $\mu_{Y\cdot x^*}$ y un intervalo de predicción (IP) para un solo valor de Y.

Antes de obtener datos muestrales, tanto $\hat{\beta}_0$ como $\hat{\beta}_1$ están sujetas a variabilidad de muestreo; es decir, ambas son estadísticos cuyos valores variarán de muestra en muestra. Suponga, por ejemplo, que $\beta_0 = 50$ y $\beta_1 = 2$. Entonces una primera muestra de pares (x, y) podría dar $\hat{\beta}_0 = 52.35$, $\hat{\beta}_1 = 1.895$; una segunda muestra podría dar $\hat{\beta}_0 = 46.52$, $\hat{\beta}_1 = 2.056$; etcétera. De aquí se desprende que $\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*$ misma cambia de valor de muestra en muestra, así que es un estadístico. Si la intercepción y la pendiente de la recta de la población son los valores antes mencionados 50 y 2, respectivamente, y $x^* = 10$, entonces este estadístico está tratando de estimar el valor $50 + 2(10) = 70$. La estimación con una primera muestra podría ser $52.35 + 1.895(10) = 71.30$, con una segunda muestra podría ser $46.52 + 2.056(10) = 67.08$, etcétera.

Esta variación en el valor de $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*$ se puede visualizar regresando a la figura 12.13 en la página 511. Considere el valor $x^* = 300$. Las alturas de las 20 rectas de regresión estimada por encima de este valor son un poco diferentes entre sí. Lo mismo puede decirse de las alturas de las rectas por encima del valor $x^* = 350$. De hecho, al parecer hay más variación en el valor de $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1(350)$ que en el de $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1(300)$. Más adelante veremos que esto es porque 350 está más lejos de $\bar{x} = 235.71$ (el "centro de los datos") que 300.

Los métodos para hacer inferencias acerca de β_1 se basan en las propiedades de la distribución muestral del estadístico $\hat{\beta}_1$. De la misma manera, las inferencias sobre la media Y del valor $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*$ se basan en las propiedades de la distribución muestral del estadístico $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*$. La sustitución de las expresiones para $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ en $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*$ seguida de alguna manipulación algebraica lleva a la representación de $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*$ como una función lineal de las Y_i:

$$\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^* = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})(x_i - \bar{x})}{\sum(x_i - \bar{x})^2}\right] Y_i = \sum_{i=1}^{n} d_i Y_i$$

Los coeficientes $d_1, d_2, \ldots, d_n$ en esta función lineal implican a las x_i y a las x^*, las cuales son fijas. La aplicación de las reglas de la sección 5.5 a esta función lineal aporta las siguientes propiedades.

PROPOSICIÓN

Sea $\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*$, donde x^* es algún valor fijo de x. Entonces

1. La media de $\hat{Y}$ es

$$E(\hat{Y}) = E(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*) = \mu_{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*} = \beta_0 + \beta_1 x^*$$

Así pues $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*$ es un estimador insesgado para $\beta_0 + \beta_1 x^*$, (es decir, para $\mu_{Y \cdot x^*}$).

2. La varianza de $\hat{Y}$ es

$$V(\hat{Y}) = \sigma_{\hat{Y}}^2 = \sigma^2\left[\frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2/n}\right] = \sigma^2\left[\frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_{xx}}\right]$$

y la desviación estándar $\sigma_{\hat{Y}}$ es la raíz cuadrada de esta expresión. La desviación estándar estimada de $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*$, denotada por $s_{\hat{Y}}$ o $s_{\hat{\beta}_0} + s_{\hat{\beta}_1 x^*}$ se obtiene al reemplazar σ por su estimación s:

$$s_{\hat{Y}} = s_{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*} = s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_{xx}}}$$

3. $\hat{Y}$ tiene una distribución normal.

La varianza de $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*$ es más pequeña cuando $x^* = \bar{x}$ y se incrementa a medida que x^* se aleja de $\bar{x}$ en una u otra dirección. Por consiguiente, la estimación de $\mu_{Y \cdot x^*}$ es más precisa cuando x^* está cerca del centro de las x_i que cuando está lejos de los valores x a los cuales se les realizaron las observaciones. Esto implicará que el intervalo de confianza así como el intervalo de predicción sean más angostos con una x^* cerca de $\bar{x}$ que con una x^* lejos de $\bar{x}$. La mayoría de los programas de computadora dan tanto $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*$ como $s_{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*}$ con cualquier x^* especificado.

Inferencias sobre $\mu_{Y \cdot x^*}$

Así como los procedimientos inferenciales para β_1 se basaron en la variable t, obtenida estandarizando β_1, aquí una variable t obtenida estandarizando $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*$ conduce a un intervalo de confianza y procedimientos de prueba.

TEOREMA

La variable

$$T = \frac{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^* - (\beta_0 + \beta_1 x^*)}{S_{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*}} = \frac{\hat{Y} - (\beta_0 + \beta_1 x^*)}{S_{\hat{Y}}} \qquad (12.5)$$

tiene una distribución t con $n - 2$ grados de libertad.

Un enunciado de probabilidad implica que esta variable estandarizada ahora puede ser manipulada para producir un intervalo de confianza para $\mu_{Y \cdot x^*}$.

Un **intervalo de confianza** de $100(1 - \alpha)\%$ **para** $\mu_{Y \cdot x^*}$, el valor esperado de Y cuando $x = x^*$, es

$$\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^* \pm t_{\alpha/2, n-2} \cdot s_{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*} = \hat{y} \pm t_{\alpha/2, n-2} \cdot s_{\hat{Y}} \qquad (12.6)$$

Este intervalo de confianza está centrado en la estimación puntual de $\mu_{Y \cdot x^*}$ y se extiende a cada lado en una cantidad que depende del nivel de confianza y del grado de variabilidad del estimador en el cual está basada la estimación puntual.

EJEMPLO 12.13 La corrosión de varillas de refuerzo de acero es el problema de durabilidad más importante de las estructuras de concreto reforzadas. La carbonatación del concreto ocurre a consecuencia de una reacción química que reduce el pH lo suficiente para iniciar la corrosión de las varillas de refuerzo. A continuación se dan datos representativos sobre x = profundidad de carbonatación (mm) y y = resistencia (MPa) para una muestra de especímenes testigo tomados de un edificio particular (obtenidos de una gráfica que se ilustra en el artículo **"The Carbonation of Concrete Structures in the Tropical Environment of Singapore",** ***Magazine of Concrete Res*****., 1996: 293–300**).

x	8.0	15.0	16.5	20.0	20.0	27.5	30.0	30.0	35.0
y	22.8	27.2	23.7	17.1	21.5	18.6	16.1	23.4	13.4
x	38.0	40.0	45.0	50.0	50.0	55.0	55.0	59.0	65.0
y	19.5	12.4	13.2	11.4	10.3	14.1	9.7	12.0	6.8

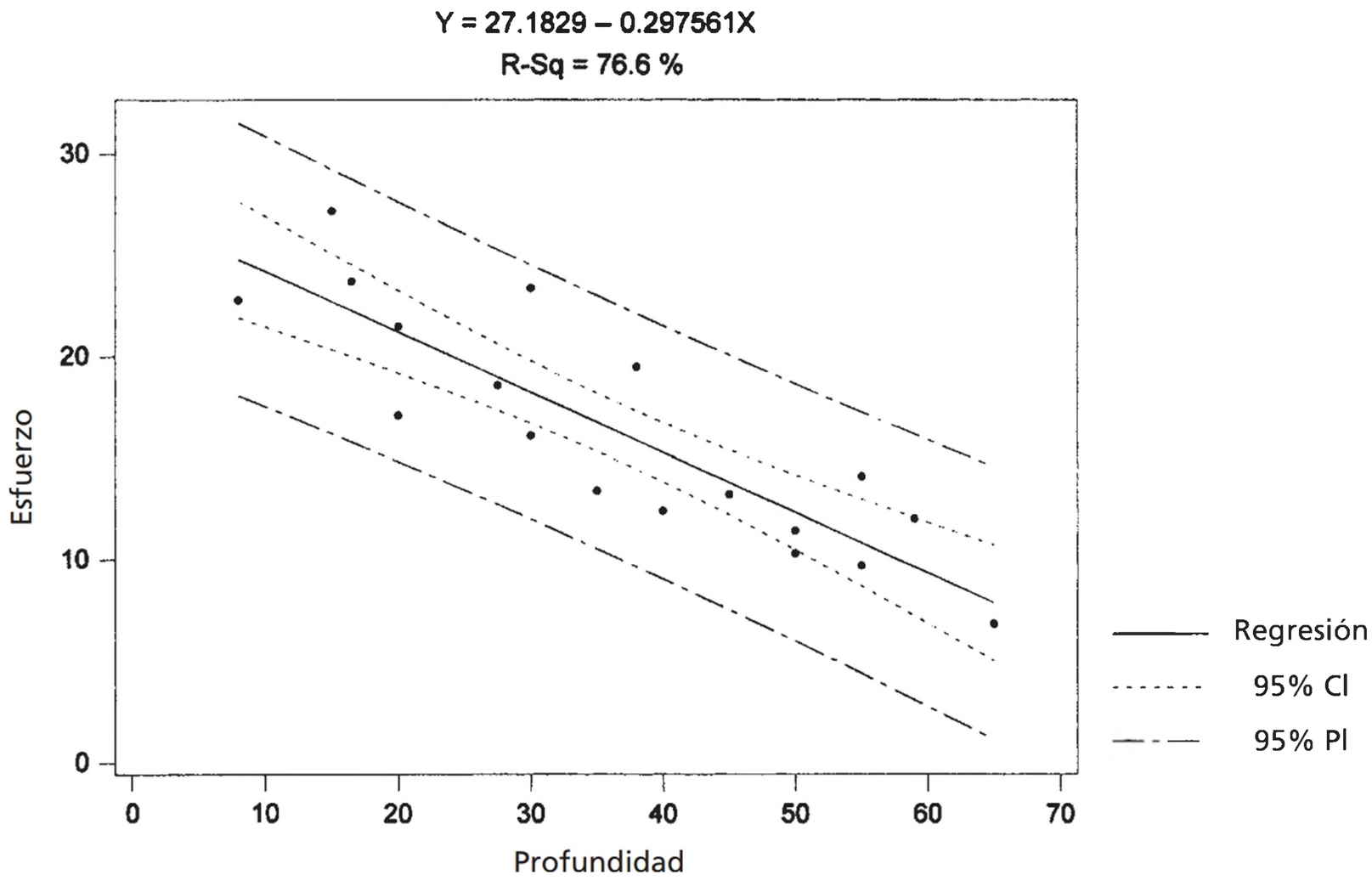


Figura 12.17 Diagrama de dispersión generado por Minitab con intervalos de confianza e intervalos de predicción con los datos del ejemplo 12.13

Una gráfica de dispersión de los datos (véase la figura 12.17) apoya fuertemente el uso del modelo de regresión lineal simple. Las siguientes son cantidades pertinentes:

$$\sum x_i = 659.0 \qquad \sum x_i^2 = 28\,967.50 \qquad \bar{x} = 36.6111 \qquad S_{xx} = 4840.7778$$
$$\sum y_i = 293.2 \qquad \sum x_i y_i = 9293.95 \qquad \sum y_i^2 = 5335.76$$
$$\hat{\beta}_1 = -.297561 \qquad \hat{\beta}_0 = 27.182936 \qquad \text{SSE} = 131.2402$$
$$r^2 = .766 \qquad s = 2.8640$$

Calcule ahora un intervalo de confianza, utilizando un nivel de confianza de 95% para la resistencia media de todos los especímenes testigo que tienen una profundidad de carbonatación de 45 mm; es decir, un intervalo de confianza para $\beta_0 + \beta_1(45)$. El intervalo está centrado en

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1(45) = 27.18 - .2976(45) = 13.79$$

La desviación estándar estimada del estadístico $\hat{Y}$ es

$$s_{\hat{Y}} = 2.8640\sqrt{\frac{1}{18} + \frac{(45 - 36.6111)^2}{4840.7778}} = .7582$$

El valor crítico t de 16 grados de libertad para un nivel de confianza de 95% es 2.120, con el cual se determina que el intervalo deseado es

$$13.79 \pm (2.120)(.7582) = 13.79 \pm 1.61 = (12.18, 15.40)$$

La angostura de este intervalo sugiere que se tiene información razonablemente precisa sobre la media que se está estimando. Recuerde que si recalcula este intervalo muestra tras muestra, a la larga aproximadamente 95% de los intervalos calculados incluiría $\beta_0 + \beta_1(45)$. Sólo se puede esperar que esta media quede en el intervalo único que se calculó.

La figura 12.18 muestra resultados Minitab obtenidos por una solicitud de ajustar el modelo de regresión lineal simple y calcular intervalos de confianza para la media de resistencia a profundidades de 45 mm y 35 mm. Los intervalos aparecen en la parte inferior de los resultados; observe que el segundo intervalo es más angosto que el primero, porque 35 está mucho más cerca de $\bar{x}$ que 45. La figura 12.17 muestra 1) curvas correspondientes a los límites de confianza con cada valor x diferente y 2) límites de predicción que se discutirán en breve. Obsrve cómo las curvas se alejan cada vez más a medida que x se aleja de $\bar{x}$.

```
The regression equation is   resistencia = 27.2 − 0.298 profundidad

Predictor            Coef         Stdev      t-ratio        P
 Constant           27.183         1.651        16.46    0.000
   profundidad     −0.29756       0.04116       −7.23    0.000
s = 2.864        R-sq = 76.6%       R-sq(adj) = 75.1%

Analysis of Variance

SOURCE              DF          SS          MS          F          P
Regression           1      428.62      428.62      52.25      0.000
     Error          16      131.24        8.20
     Total          17      559.86

   Fit         Stdev.Fit            95.0% C.I.            95.0% P.I.
13.793             0.758      (12.185, 15.401)      (7.510, 20.075)

   Fit         Stdev.Fit            95.0% C.I.            95.0% P.I.
16.768             0.678      (15.330, 18.207)     (10.527, 23.009)
```

Figura 12.18 Resultados de regresión obtenidos con Minitab con los datos del ejemplo 12.13 ■

En algunas situaciones se desea un intervalo de confianza no sólo para un solo valor x, sino para dos o más valores x. Suponga que un investigador desea un intervalo de confianza tanto para $\mu_{Y\cdot v}$ como para $\mu_{Y\cdot w}$, donde v y w son dos valores diferentes de la variable independiente. Es tentador calcular el intervalo (12.6) primero con $x = v$ y luego con $x = w$. Suponga que se utiliza $\alpha = .05$ en cada cálculo para obtener dos intervalos de 95%. Luego, si las variables implicadas al calcular los dos intervalos fueran independientes una de otra, el nivel de confianza conjunto sería $(.95)\cdot(.95) \approx .90$.

Sin embargo, los intervalos no son independientes porque se utilizan las mismas $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$, y S en cada uno. Por consiguiente, no se puede aseverar que el nivel de confianza conjunto para los dos intervalos sea exactamente de 90%. Se puede demostrar, no obstante, que si el intervalo de confianza de $100(1 - \alpha)\%$ (12.6) se calcula tanto con $x = v$ como con $x = w$ para obtener intervalos de confianza conjuntos para $\mu_{Y\cdot v}$ y $\mu_{Y\cdot w}$, entonces *el nivel de confianza conjunto en el par de intervalos resultante es al menos de* $100(1 - 2\alpha)\%$. En particular, si se utiliza $\alpha = .05$ se obtiene un nivel de confianza conjunto de *al menos* 90%, en tanto que si se utiliza $\alpha = .01$ se obtiene una confianza de al menos 98%. Así, en el ejemplo 12.13, un intervalo de confianza de 95% para $\mu_{Y\cdot 45}$ fue (12.185, 15.401) y un intervalo de confianza de 95% para $\mu_{Y\cdot 35}$ fue (15.330, 18.207). El nivel de confianza simultáneo o conjunto para las dos proposiciones $12.185 < \mu_{Y\cdot 45} < 15.401$ y $15.330 < \mu_{Y\cdot 35} < 18.207$ es al menos de 90%.

La validez de estos intervalos de confianza conjuntos o simultáneos se fundamenta en un resultado de probabilidad llamado **desigualdad de Bonferroni**, así que los intervalos de confianza conjuntos se conocen como **intervalos de Bonferroni**. El método es fácil de generalizar para que dé intervalos conjuntos para k diferentes $\mu_{Y\cdot x}$. *Utilizando el intervalo* (12.6) *por separado primero con* $x = x_1^*$, *luego con* $x = x_2^*$,..., *y finalmente con* $x = x_k^*$ *se obtiene un conjunto de k intervalos de confianza para los cuales está garantizado que el nivel de confianza simultáneo o conjunto es al menos de* $100(1 - k\alpha)\%$.

Las pruebas de hipótesis respecto a $\beta_0 + \beta_1 x^*$ están basadas en el estadístico de prueba T obtenido al reemplazar $\beta_0 + \beta_1 x^*$ en el numerador de (12.5) por el valor nulo de μ_0. Por ejemplo, H_0: $\beta_0 + \beta_1(45) = 15$ en el ejemplo 12.13 expresa que cuando la profundidad de carbonatación es de 45, la resistencia esperada (es decir, el promedio verdadero) es de 15. El valor del estadístico de prueba es entonces $t = [\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1(45) - 15]/s_{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1(45)}$, y la prueba es de cola superior, inferior o de dos colas de acuerdo con la desigualdad en H_a.

Intervalo de predicción para un valor futuro de Y

A menos que se calcule un intervalo estimado para $\mu_{Y\cdot x^*}$ un investigador quizá desee obtener un intervalo de valores factibles para el valor de Y asociado con alguna observación futura cuando la variable independiente tiene el valor x^*. Por ejemplo, el tamaño del vocabulario y está relacionado con la edad x de un niño. El intervalo de confianza (12.6) con $x^* = 6$ podría proporcionar un estimado del tamaño de vocabulario promedio verdadero de todos los niños de 6 años. Alternativamente, se podría desear un intervalo de valores factibles para el tamaño del vocabulario de un niño particular de 6 años.

Un intervalo de confianza se refiere a un parámetro, o característica de población, cuyo valor es fijo pero desconocido. En contraste, un valor futuro de Y no es un parámetro sino una variable aleatoria; por esta razón se hace referencia a un intervalo de valores factibles para un valor Y futuro como **intervalo de predicción** en lugar de intervalo de confianza. El error de estimación es $\beta_0 + \beta_1 x^* - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*)$, una diferencia entre una cantidad fija (pero desconocida) y una variable aleatoria. El error de predicción es $Y - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*)$, una diferencia entre dos variables aleatorias. Existe, por tanto, más incertidumbre en la predicción que en la estimación, así que un intervalo de predicción será más ancho que un intervalo de confianza. Debido a que el valor futuro Y es independiente de las Y_i observadas,

$$\begin{aligned} V[Y - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*)] &= \text{varianza del error de predicción} \\ &= V(Y) + V(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*) \\ &= \sigma^2 + \sigma^2\left[\frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_{xx}}\right] \\ &= \sigma^2\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_{xx}}\right] \end{aligned}$$

Además, puesto que $E(Y) = \beta_0 + \beta_1 x^*$ y $E(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*) = \beta_0 + \beta_1 x^*$, el valor esperado del error de predicción es $E(Y - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*)) = 0$. Se puede demostrar entonces que la variable estandarizada

$$T = \frac{Y - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*)}{S\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_{xx}}}}$$

tiene una distribución t con $n - 2$ grados de libertad. Al sustituir esta T en la proposición de probabilidad $P(-t_{\alpha/2,\, n-2} < T < t_{\alpha/2,\, n-1}) = 1 - \alpha$ y manipulándola para aislar Y entre las dos desigualdades se obtiene el siguiente intervalo

Un **intervalo de predicción de** $100(1-\alpha)\%$ **para una observación** Y **futura que se va a realizar cuando** $x = x^*$ es

$$\begin{aligned}
&\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^* \pm t_{\alpha/2,n-2} \cdot s\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_{xx}}} \\
&= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^* \pm t_{\alpha/2,n-2} \cdot \sqrt{s^2 + s^2_{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*}} \qquad (12.7) \\
&= \hat{y} \pm t_{\alpha/2,n-2} \cdot \sqrt{s^2 + s^2_{\hat{Y}}}
\end{aligned}$$

La interpretación del nivel de predicción de $100(1-\alpha)\%$ es idéntica al de los niveles de confianza previos; si se utiliza (12.7) repetidamente, a la larga los intervalos resultantes en realidad contendrán los valores y observados $100(1-\alpha)\%$ del tiempo. Observe que el 1 debajo de la raíz cuadrada inicial hace que el intervalo de predicción (12.7) sea más ancho que el intervalo de confianza (12.6), aun cuando ambos intervalos estén centrados en $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*$. Además, a medida que $n \to \infty$, el ancho del intervalo de confianza tiende a cero, en tanto que el ancho del intervalo de predicción no (porque incluso con el perfecto conocimiento de β_0 y β_1, seguirá habiendo incertidumbre en la predicción).

EJEMPLO 12.14 Regrese a los datos de profundidad de carbonatación-resistencia del ejemplo 12.13 y calcule un intervalo de predicción de 95% para un valor de resistencia que resultaría de seleccionar un solo espécimen testigo cuya profundidad de carbonatación es de 45 mm. Cantidades pertinentes del ejemplo son

$$\hat{y} = 13.79 \qquad s_{\hat{Y}} = .7582 \qquad s = 2.8640$$

Para un nivel de predicción de 95% basado en $n - 2 = 16$ grados de libertad, el valor crítico es 2.120, exactamente el que se utilizó previamente para un nivel de confianza de 95%. El intervalo de predicción es entonces

$$\begin{aligned}
13.79 \pm (2.120)\sqrt{(2.8640)^2 + (.7582)^2} &= 13.79 \pm (2.120)(2.963) \\
&= 13.79 \pm 6.28 = (7.51, 20.07)
\end{aligned}$$

Valores factibles para una sola observación de resistencia cuando la profundidad es de 45 mm son (al nivel de predicción de 95%) entre 7.51 y 20.07 MPa. El intervalo de confianza de 95% para una resistencia media, cuando la profundidad es de 45, fue (12.18, 15.40). El intervalo de predicción es mucho más ancho que esto debido a los $(2.8640)^2$ extra debajo de la raíz cuadrada. La figura 12.18, los resultados Minitab del ejemplo 12.13, muestra este intervalo, así como también el intervalo de confianza. ■

La técnica Bonferroni puede emplearse como en el caso del intervalo de confianza. Si se calcula un intervalo de predicción de $100(1-\alpha)\%$ para cada uno de los k valores diferentes de x, el nivel de predicción simultánea o conjunta para los k intervalos es al menos de $100(1-k\alpha)\%$.

EJERCICIOS Sección 12.4 (44–56)

44. El ajuste del modelo de regresión lineal simple a las $n = 27$ observaciones de $x =$ módulo de elasticidad y $y =$ resistencia a la flexión dados en el ejercicio 15 de la sección 12.2 dio por resultado en $\hat{y} = 7.592$, $s_{\hat{Y}} = .179$ cuando $x = 40$ y $\hat{y} = 9.741$, $s_{\hat{Y}} = .253$ para $x = 60$.

a. Explique por qué $s_{\hat{Y}}$ es más grande cuando $x = 60$ que cuando $x = 40$.

b. Calcule un intervalo de confianza con un nivel de confianza de 95% para la resistencia promedio verdadera de todas las vigas cuyo módulo de elasticidad es 40.

c. Calcule un intervalo de predicción con un nivel de predicción 95% para la resistencia de una sola viga cuyo módulo de elasticidad es 40.

d. Si se calcula un intervalo de confianza de 95% para la resistencia promedio verdadera cuando el módulo de elasticidad es 60, ¿cuál será el nivel de confianza simultáneo tanto para este intervalo como para el intervalo calculado en el inciso b)?

45. Reconsidere los datos de contenido de humedad-tasa de filtración introducidos en el ejemplo 12.6 (véase también el ejemplo 12.7).

a. Calcule un intervalo de confianza de 90% para $\beta_0 + 125\beta_1$, el contenido de humedad promedio verdadero cuando la tasa de filtración es 125.

b. Pronostique el valor del contenido de humedad con un solo experimento en el cual la tasa de filtración es 125 utilizando un nivel de predicción de 90%. ¿Cómo se compara este intervalo al del inciso a)? ¿Por qué es este el caso?

c. ¿Cómo se compararán los intervalos de los incisos a) y b) con un intervalo de confianza y un intervalo de predicción cuando la tasa de filtración es 115? Responda sin calcular en realidad estos nuevos intervalos.

d. Interprete las hipótesis H_0: $\beta_0 + 125\beta_1 = 80$ y H_a: $\beta_0 + 125\beta_1 < 80$ y luego realice una prueba a un nivel de significancia de .01

46. La astringencia es la calidad de un vino que hace que la boca del bebedor lo perciba un poco áspero, seco y astringente. El documento **"Analysis of Tannins in Red Wine Using Multiple Methods: Correlation with Perceived Astringency" (*Amer. J. of Enol. and Vitic.*, 2006: 481–485)** informó sobre una investigación para evaluar la relación entre la percepción de la astringencia y la concentración de taninos mediante diversos métodos analíticos. He aquí los datos proporcionados por los autores en x = concentración de taninos por la precipitación de proteínas y y = la astringencia percibida determinada por un panel de catadores.

x	.718	.808	.924	1.000	.667	.529	.514	.559
y	.428	.480	.493	.978	.318	.298	−.224	.198
x	.766	.470	.726	.762	.666	.562	.378	.779
y	.326	−.336	.765	.190	.066	−.221	−.898	.836
x	.674	.858	.406	.927	.311	.319	.518	.687
y	.126	.305	−.577	.779	−.707	−.610	−.648	−.145
x	.907	.638	.234	.781	.326	.433	.319	.238
y	1.007	−.090	−1.132	.538	−1.098	−.581	−.862	−.551

Las cantidades importantes se resumen como sigue:

$$\sum x_i = 19.404,\ \sum y_i = -.549,\ \sum x_i^2 = 13.248032,$$
$$\sum y_i^2 = 11.835795,\ \sum x_i y_i = 3.497811$$
$$S_{xx} = 13.248032 - (19.404)^2/32 = 1.48193150,$$
$$S_{yy} = 11.82637622$$
$$S_{xy} = 3.497811 - (19.404)(-.549)/32 = 3.83071088$$

a. Ajuste el modelo de regresión lineal simple a estos datos. Después, determine la proporción de la variación observada en la astringencia que se puede atribuir a la relación entre el modelo de astringencia y concentración de taninos.

b. Calcule e interprete un intervalo de confianza para la pendiente de la recta de regresión real.

c. Estime un promedio real de astringencia cuando la concentración de taninos es .6 y hágalo de una manera que transmita información acerca de la fiabilidad y la precisión.

d. Estime la astringencia del vino de una muestra única cuya concentración de taninos es .6 y hágalo de una manera que transmita información acerca de la fiabilidad y la precisión.

e. ¿Le parece que el promedio real de astringencia de una concentración de taninos de .7 es algo diferente de 0? Establezca y pruebe las hipótesis adecuadas.

47. El modelo de regresión lineal simple se ajusta muy bien a los datos de precipitación pluvial y volumen de escurrimiento dados en el ejercicio 16 de la sección 12.2. La ecuación de la recta de mínimos cuadrados es $y = -1.128 + .82697\,x$, $r^2 = 9.75$ y $s = 5.24$.

a. Use el hecho de que $s_{\hat{Y}} = 1.44$ cuando el volumen de la precipitación pluvial es de 40 m^3 para predecir el escurrimiento en una forma que transmita información sobre confiabilidad y precisión. ¿Sugiere el intervalo resultante que se dispone de información precisa sobre el valor de escurrimiento para esta futura observación? Explique su razonamiento.

b. Calcule un intervalo de predicción para escurrimiento cuando la precipitación pluvial es de 50, utilizando el mismo nivel de predicción del inciso a). ¿Qué se puede decir sobre el nivel de predicción simultáneo para los dos intervalos que calculó?

48. Una alcantarilla en un colector pluvial es la superficie de contacto entre el escurrimiento superficial y el conductor de desagüe. El dispositivo de la alcantarilla es un dispositivo que mejora las propiedades supresoras de contaminantes. El artículo **"An Evaluation of the Urban Stormwater Pollutant Demoral Efficiency of Catch Basin Inserts" (*Water Envir. Res.*, 2005: 500–510)** reporta pruebas de varios dispositivos en condiciones controladas en las que el flujo de entrada es muy parecido al que se puede esperar en el campo. Considere los siguientes datos, tomados de una gráfica que aparece en el artículo, para un tipo particular de dispositivo sobre x cantidad filtrada (miles de litros) y y = % total de sólidos suspendidos eliminados.

x	23	45	68	91	114	136	159	182	205	228
y	53.3	26.9	54.8	33.8	29.9	8.2	17.2	12.2	3.2	11.1

Las cantidades resumidas son

$$\sum x_i = 1251,\ \sum x_i^2 = 199\,365,\ \sum y_i = 250.6,$$
$$\sum y_i^2 = 9249.36,\ \sum x_i y_i = 21\,904.4$$

a. ¿Avala la gráfica de dispersión la selección del modelo de regresión lineal simple? Explique.

b. Obtenga la ecuación de la recta de mínimos cuadrados.

c. ¿Qué proporción de la variación observada en el % de eliminación puede ser atribuida a la relación de modelo?

d. ¿Será que el modelo de regresión lineal simple especifica una relación útil? Realice una prueba de hipótesis apropiada con un nivel de significancia de .05.

e. ¿Será que hay una fuerte evidencia para concluir que al menos existe 2% de reducción promedio verdadera en la eliminación de sólidos suspendidos, asociada a un incremento

de 10 000 litros de la cantidad filtrada? Pruebe las hipótesis apropiadas con $\alpha = .05$.

f. Calcule e interprete un intervalo de confianza de 95% para el promedio verdadero de % eliminado cuando la cantidad filtrada es de 100 000 litros. ¿Cómo se compara este intervalo de ancho con el intervalo de confianza cuando la cantidad filtrada es de 200 000 litros?

g. Calcule e interprete un intervalo de predicción de 95% para el % eliminado cuando la cantidad filtrada es de 100 000 litros. ¿Cómo se compara el ancho de este intervalo con el del intervalo de confianza calculado en (f) y con el del intervalo de predicción cuando la cantidad filtrada es de 200 000 litros?

49. Le informan que un intervalo de confianza de 95% para el contenido de plomo esperado, cuando el flujo de tráfico es de 15 basado en una muestra de $n = 10$ observaciones, es (462.1, 597.7). Calcule un intervalo de confianza de 99% para el contenido de plomo esperado cuando el flujo de tráfico es de 15.

50. Se han utilizado aleaciones de silicio-germanio en ciertos tipos de celdas solares. El artículo **"Silicon-Germanium Films Deposited by Low-Frequency Plasma-Enhanced Chemical Vapor Deposition" (*J. of Material Res.*, 2006: 88–104)** reporta sobre un estudio de varias propiedades estructurales y eléctricas. Considere los siguiente datos sobre x = concentración de Ge en fase sólida (desde 0 hasta 1) y y = posición de nivel Fermi (eV).

x	0	.42	.23	.33	.62	.60	.45	.87	.90	.79	1	1	1
y	.62	.53	.61	.59	.50	.55	.59	.31	.43	.46	.23	.22	.19

Un diagrama de dispersión muestra una relación lineal sustancial. He aquí una salida Minitab de un ajuste de mínimos cuadrados. [*Nota*: Existen varias inconsistencias entre los datos dados en el artículo, la gráfica que ahí se ilustra y la información resumida sobre un análisis de regresión.]

```
The regression equation is
Posición de nivel Fermi =
0.7217 − 0.4327 concentración de Ge

S = 0.0737573   R-Sq = 80.2%   R-Sq(adj) = 78.4%

Analysis of Variance

Source       DF        SS        MS       F      P
Regression    1  0.241728  0.241728   44.43  0.000
Error        11  0.059842  0.005440
Total        12  0.301569
```

a. Obtenga una estimación de intervalo del cambio esperado en la posición del nivel Fermi asociado con un incremento de .1 en la concentración de Ge, e interprete su estimación.

b. Obtenga una estimación de intervalo para la posición media del nivel Fermi cuando la concentración es de .50, e interprete su estimación.

c. Obtenga un intervalo de valores factibles para la posición que resulta de una sola observación que ha de realizarse cuando la concentración es de .50, interprete su intervalo y compare con el intervalo de b).

d. Obtenga intervalos de confianza simultáneos para la posición esperada cuando la concentración es de .3, .5 y .7; el nivel de confianza conjunto deberá ser al menos de 97%.

51. Remítase al ejemplo 12.12 en el cual x = velocidad en la pista de pruebas y y = velocidad de rodamiento de prueba.

a. Minitab dio $s_{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1(45)} = .120$ y $s_{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1(47)} = .186$. ¿Por qué la primera desviación estándar estimada es más pequeña que la segunda?

b. Use los resultados obtenidos con Minitab del ejemplo para calcular un intervalo de confianza de 95% para la velocidad de rodamiento de prueba esperada cuando la velocidad de prueba es = 45.

c. Use los resultados obtenidos con Minitab para calcular un intervalo de predicción de 95% para un solo valor de la velocidad de rodamiento cuando la velocidad de prueba es = 47.

52. El grabado con plasma es esencial en la transferencia de patrones de líneas finas en procesos de semiconductores de corriente. El artículo **"Ion Beam-Assisted Etching of Aluminum with Chlorine" (*J. of the Electrochem. Soc.*, 1985: 2010–2012)** da los siguientes datos (tomados de una gráfica) sobre flujo de cloro (x, en SCCM) a través de una tobera utilizada en el mecanismo de grabado y en la velocidad de grabado (y, en 100 A/min).

x	1.5	1.5	2.0	2.5	2.5	3.0	3.5	3.5	4.0
y	23.0	24.5	25.0	30.0	33.5	40.0	40.5	47.0	49.0

Las cantidades estadísticas resumidas son $\Sigma x_i = 24.0$, $\Sigma y_i = 312.5$, $\Sigma x_i^2 = 70.50$, $\Sigma x_i y_i = 902.25$, $\Sigma y_i^2 = 11\ 626.75$, $\hat{\beta}_0 = 6.448718$, $\hat{\beta}_1 = 10.602564$.

a. ¿Será que el modelo de regresión lineal simple especifica una relación útil entre el flujo de cloro y la velocidad de grabado?

b. Estime el cambio promedio verdadero en la velocidad de grabado asociado con un incremento de 1 SCCM en la velocidad de flujo utilizando un intervalo de confianza de 95%, e interprete el intervalo.

c. Calcule a un intervalo de confianza de 95% para $\mu_{Y \cdot 3.0}$ la velocidad de grabado promedio verdadera cuando el flujo = 3.0. ¿Ha sido estimado con precisión este promedio?

d. Calcule un intervalo de predicción de 95% para una sola observación de velocidad de grabado que se realizará cuando el flujo = 3.0. ¿Es probable que la predicción sea precisa?

e. Cuando el flujo = 2.5 sea más ancho o más angosto que los intervalos correspondientes de los incisos c) y d), ¿serán los intervalos de confianza y predicción de 95%? Responda sin calcular en realidad los intervalos.

f. ¿Recomendaría calcular un intervalo de predicción de 95% para un flujo de 6.0? Explique.

53. Considere los siguientes cuatro intervalos basados en los datos del ejercicio 12.17 (sección 12.2):

a. Un intervalo de confianza de 95% para la porosidad media cuando el peso unitario es de 110.

b. Un intervalo de predicción de 95% para la porosidad cuando el peso unitario es de 110.

c. Un intervalo de confianza de 95% para la porosidad media cuando el peso unitario es de 115.

d. Un intervalo de predicción de 95% para la porosidad cuando el peso unitario es de 115.

Sin calcular ninguno de estos intervalos, ¿qué se puede decir sobre sus anchos uno respecto al otro?

54. La estatura de un paciente es útil para una variedad de propósitos médicos, tales como la estimación de volumen en una

unidad de cuidados intensivos que requiere ventilación artificial. Sin embargo, puede ser difícil hacer una medición exacta si el paciente está confuso, inconsciente o sedado. Y medir la estatura cuando un individuo está acostado no es sencillo. En cambio, las mediciones de longitud del cúbito son generalmente rápidas y fáciles de obtener, incluso en pacientes confinados a una silla o una cama. Los siguientes datos sobre x = longitud del cúbito (cm) y y = estatura (cm) para los varones mayores de 65 se obtuvieron de un gráfico en el artículo **"Ulna Length to Predict Height in English and Portuguese Patient Populations" (*European J. of Clinical Nutr.*, 2012: 209–215)**.

x	22.5	22.8	22.8	23.3	23.3	24.4	25.0
y	158	155	156	160	161	162	164

x	25.0	25.0	25.0	26.0	26.0	26.8	28.2
y	166	167	170	166	173	178	174

Las cantidades resumidas incluyen $\Sigma x_i = 346.1$, $\Sigma y_i = 2310$, $S_{xx} = 36.463571$, $S_{xy} = 137.60$, $S_{yy} = 626.00$.

a. Obtenga la ecuación de la recta de regresión estimada e interprete su pendiente.

b. Calcule e interprete el coeficiente de determinación.

c. Realice una prueba de la utilidad del modelo.

d. Calcule los intervalos de predicción para las estaturas de dos individuos cuya longitud del cúbito es 23 y 25, respectivamente; utilice un nivel de predicción de 95% para cada intervalo.

e. Con base en las predicciones de d), ¿está de acuerdo con el siguiente señalamiento en el citado artículo?: "la estatura puede predecirse con precisión a partir de la longitud del cúbito".

55. Verifique que $V(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x)$ se obtuvo, de hecho, mediante la expresión que aparece en el texto. [*Sugerencia*: $V(\Sigma d_i Y_i) = \Sigma d_i^2 \cdot V(Y_i)$.]

56. El artículo **"Bone Density and Insertion Torque as Predictors of Anterior Cruciate Ligament Graft Fixation Strength" (*The Amer. J. of Sports Med.*, 2004: 1421–1429)** proporciona los siguientes datos sobre el torque de inserción máximo (N · m) y carga de deformación (N), donde ésta mide la resistencia del injerto, correspondientes a 15 especímenes diferentes.

Torque	1.8	2.2	1.9	1.3	2.1	2.2	1.6	2.1
Carga	491	477	598	361	605	671	466	431

Torque	1.2	1.8	2.6	2.5	2.5	1.7	1.6
Carga	384	422	554	577	642	348	446

a. ¿Es factible que la carga de cedencia esté normalmente distribuida?

b. Estime la carga de deformación promedio verdadera calculando un intervalo de confianza con un nivel de confianza de 95% e interprételo.

c. Los siguientes son resultados obtenidos con Minitab para la regresión de la carga de deformación generada por el torque. ¿Será que el modelo de regresión lineal simple especifica una relación útil entre las variables?

```
Predictor       Coef    SE Coef       T       P
Constant      152.44      91.17    1.67   0.118
Torque        178.23      45.97    3.88   0.002

S = 73.2141   R-Sq = 53.6%   R-Sq(adj) = 50.0%

Source           DF      SS     MS      F      P
Regression        1   80554  80554  15.03  0.002
Residual Error   13   69684   5360
Total            14  150238
```

d. Los autores del artículo citado aseguran que "por consiguiente, no se puede sino concluir que los métodos basados en el análisis de regresión simple no son clínicamente suficientes para predecir la resistencia de fijación individual". ¿Está usted de acuerdo? [*Sugerencia*: Considere predecir la carga de deformación cuando el torque es de 2.0.]

12.5 Correlación

Hay muchas situaciones en las que al estudiar el comportamiento conjunto de dos variables el objetivo es ver si están relacionadas en lugar de utilizar una para predecir el valor de la otra. En esta sección primero se desarrolla el coeficiente de correlación muestral r como una medida de qué tan fuerte es la relación entre dos variables x y y en una muestra y luego se relaciona r con el coeficiente de correlación ρ definido en el capítulo 5.

Coeficiente de correlación muestral *r*

Dados n pares numéricos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, es natural hablar de que x y y tienen una relación positiva si las x grandes se parean con y grandes y las x pequeñas con y pequeñas. Asimismo, si las x grandes se parean con y pequeñas y las x pequeñas con y grandes, se asume una relación negativa entre las variables. Considere la cantidad

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n}$$

Luego, si la relación es fuertemente positiva, una x_i por encima de la media $\bar{x}$ tenderá a aparearse con una y_i por encima de la media $\bar{y}$, de modo que $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) > 0$ y este producto también será positivo siempre y cuando x_i y y_i estén por debajo de sus medias respectivas. De este modo una relación positiva implica que S_{xy} será positiva. Un argumento análogo demuestra que cuando la relación es negativa, S_{xy} será negativa, puesto que la mayoría de los productos $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ seguirán siendo negativos. Esto se ilustra en la figura 12.19.

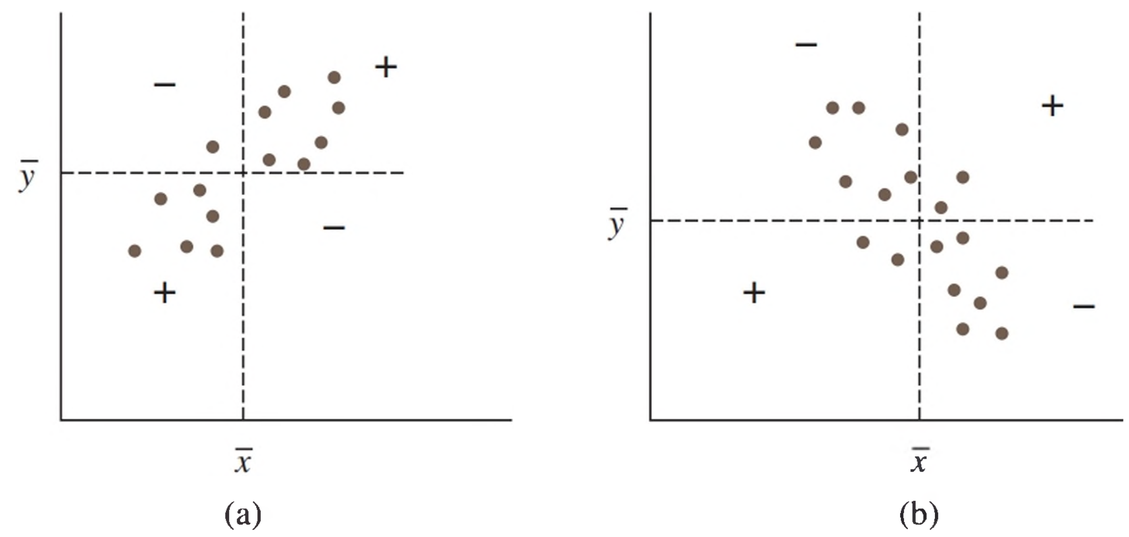


Figura 12.19 (a) Gráfica de dispersión con S_{xy} positiva; (b) gráfica de dispersión con S_{xy} negativa [+ significa $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) > 0$ y − significa $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) < 0$]

Aunque S_{xy} parece ser una medida factible de la fuerza de una relación, aún no se sabe qué tan positiva o negativa pueda ser. Desafortunadamente, S_{xy} tiene un serio defecto. Si se cambian las unidades de medición de x o y, se puede hacer que S_{xy} sea arbitrariamente grande en magnitud o arbitrariamente próxima a cero. Por ejemplo, si $S_{xy} = 25$ cuando x se mide en metros, $S_{xy} = 25\,000$ cuando x se mide en milímetros y .025 cuando x está expresada en kilómetros. Una condición razonable para imponer cualquier medida de qué tan fuerte es la relación entre x y y es que la medida calculada no dependa de las unidades particulares utilizadas para medirlas. Esta condición se cumple modificando S_{xy} para obtener el coeficiente de correlación muestral.

DEFINICIÓN

El **coeficiente de correlación muestral** para los n pares es $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ es

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\Sigma(y_i - \bar{y})^2}} = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}}\sqrt{S_{yy}}} \qquad (12.8)$$

EJEMPLO 12.15 Una evaluación precisa de la productividad del suelo es crítica para una planificación racional del uso del suelo. Desafortunadamente, tal como argumenta el autor del artículo **"Productivity Ratings Based on Soil Series" (*Prof. Geographer*, 1980: 158–163)**, no es fácil obtener un índice de productividad del suelo aceptable. Una dificultad es que la productividad está determinada en parte por el tipo de cosecha y la relación entre el rendimiento de dos cosechas diferentes plantadas en el mismo suelo puede no ser muy fuerte. Con fines ilustrativos, el artículo presenta los siguientes datos sobre una cosecha de maíz x y una cosecha de cacahuates y (mT/Ha) para ocho tipos diferentes de suelo.

x	2.4	3.4	4.6	3.7	2.2	3.3	4.0	2.1
y	1.33	2.12	1.80	1.65	2.00	1.76	2.11	1.63

Con $\Sigma x_i = 25.7$, $\Sigma y_i = 14.40$, $\Sigma x_i^2 = 88.31$, $\Sigma x_i y_i = 46.856$ y $\Sigma y_i^2 = 26.4324$,

$$S_{xx} = 88.31 - \frac{(25.7)^2}{8} = 5.75 \quad S_{yy} = 26.4324 - \frac{(14.40)^2}{8} = .5124$$

$$S_{xy} = 46.856 - \frac{(25.7)(14.40)}{8} = .5960$$

de donde $$r = \frac{.5960}{\sqrt{5.75}\sqrt{.5124}} = .347$$ ■

Propiedades de *r*

Las propiedades más importantes de r son las siguientes:

1. El valor de r no depende de cuál de las dos variables estudiadas es x o cuál es y.
2. El valor de r es independiente de las unidades en las cuales se midan x y y.
3. $-1 \le r \le 1$
4. $r = 1$ si y sólo si todos los pares (x_i, y_i) quedan en una línea recta con pendiente positiva, y $r = -1$ si y sólo si los pares (x_i, y_i) quedan en una línea recta con pendiente negativa.
5. El cuadrado del coeficiente de correlación muestral da el valor del coeficiente de determinación que resultaría de ajustar el modelo de regresión lineal simple, en símbolos $(r)^2 = r^2$.

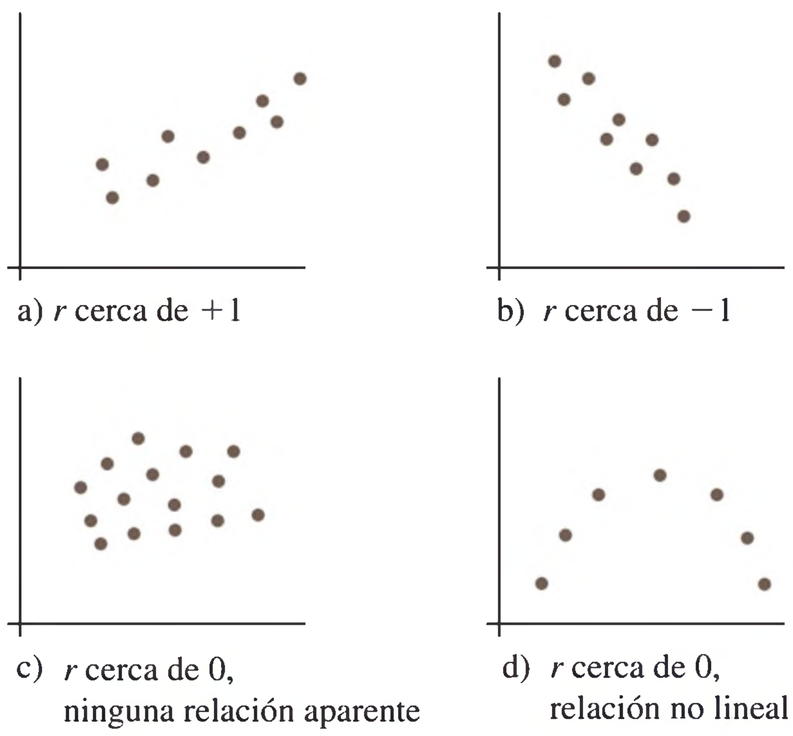
La propiedad 1 contrasta con lo que sucede en el análisis de regresión donde virtualmente todas las cantidades de interés (la pendiente estimada, la intercepción y estimada, s^2, etc.) dependen de cuál de las dos variables es tratada como la variable dependiente. Sin embargo, la propiedad 5 demuestra que la proporción de variación de la variable dependiente explicada al ajustar el modelo de regresión lineal simple no depende de cuál variable desempeñe este rol.

La propiedad 2 equivale a decir que r no cambia si cada x_i es reemplazada por cx_i y si cada y_i es reemplazada por dy_i (un cambio en la escala de medición), así como también si cada x_i es reemplazada por $x_i - a$ y y_i por $y_i - b$ (lo que cambia la ubicación de cero en el eje de medición). Esto implica, por ejemplo, que r es el mismo si la temperatura se mide en °F o °C.

La propiedad 3 dice que el valor máximo de r, correspondiente al grado más grande posible de relación positiva, es $r = 1$, mientras que la relación más negativa está identificada con $r = -1$. De acuerdo con la propiedad 4, las correlaciones positivas y negativas más grandes se obtienen sólo cuando todos los puntos quedan a lo largo de una línea recta. Cualquier otra configuración de puntos, aun cuando la configuración sugiere una relación determinística entre las variables, dará un valor r menor que 1 en magnitud absoluta. Por consiguiente *r mide el grado de relación lineal* entre las variables. Un valor de r cercano a cero no es evidencia de la falta de una fuerte relación, sino sólo de la ausencia de una relación lineal, de modo que tal valor de r debe ser interpretado con precaución. La figura 12.20 ilustra varias configuraciones de puntos asociadas con diferentes valores de r.

Una pregunta que suele plantearse es, "¿cuándo se puede decir que existe una correlación fuerte entre las variables y cuándo una débil?". He aquí una regla de oro informal para caracterizar el valor de r:

Débil	**Moderada**	**Fuerte**
$-.5 \le r \le .5$	si $-.8 < r < -.5$ o $.5 < r < .8$	si $r \ge .8$ o $r \le -.8$



a) r cerca de $+1$

b) r cerca de -1

c) r cerca de 0, ninguna relación aparente

d) r cerca de 0, relación no lineal

Figura 12.20 Gráficas de dispersión con diferentes valores de r

Quizá le sorprenda que una r tan sustancial como .5 o $-.5$ aparezca en la categoría débil. La razón es que si $r = .5$ o $-.5$, entonces $r^2 = .25$ en una regresión con cualquiera de las variables en el papel de y. Un modelo de regresión que explica la mayor parte del 25% de la variación observada en realidad no es muy impresionante. En el ejemplo 12.15 la correlación entre la cosecha de maíz y la cosecha de cacahuates se describiría como débil.

Inferencias sobre el coeficiente de correlación de una población

El coeficiente de correlación r mide qué tan fuerte es la relación entre x y y en la muestra observada. Se puede pensar que los pares (x_i, y_i) se sacaron de una población de pares bivariantes, con (X_i, Y_i) teniendo alguna función de masa de probabilidad o función de densidad de probabilidad conjunta. En el capítulo 5 se define el coeficiente de correlación $\rho(X, Y)$ mediante

$$\rho = \rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

donde

$$\text{cov}(X, Y) = \begin{cases} \sum_x \sum_y (x - \mu_X)(y - \mu_Y) p(x, y) & (X, Y) \text{ discreto} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f(x, y)\, dx\, dy & (X, Y) \text{ continuo} \end{cases}$$

Si se considera que $p(x, y)$ o $f(x, y)$ describen la distribución de pares de valores dentro de toda la población, ρ se transforma en la medida de qué tan fuertemente están relacionadas x y y en la población. En el capítulo 5 se muestran las propiedades de ρ análogas a aquellas para r.

El coeficiente de correlación de la población ρ es un parámetro o característica de la población, exactamente como lo son μ_X, μ_Y, σ_X y σ_Y, así que se puede utilizar el coeficiente de correlación muestral para hacer varias inferencias sobre ρ. En particular, r es una estimación puntual de ρ y el estimador correspondiente es

$$\hat{\rho} = R = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum (X_i - \bar{X})^2} \sqrt{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}}$$

EJEMPLO 12.16 Los investigadores médicos han observado que las adolescentes tienen mucho más probabilidad de parir bebés con bajo peso que las adultas. Dado que estos bebés tienen mayores tasas de mortalidad numerosas investigaciones se han centrado en la relación entre la edad de la madre y el peso del bebé al nacer. Uno de estos estudios se describe en el artículo **"Body Size and Intelligence in 6-Year-Olds: Are Offspring of Teenage Mothers at Risk? (*Maternal and Child Health J.*, 2009: 847–856)**. La siguiente información en x = edad de la madre (años) y y = peso del bebé al nacer (g) es consistente con las cantidades resumidas dadas en el citado artículo, así como con los datos publicados por el National Center for Health Statistics.

x	15	17	18	15	16	19	17	16	18	19
y	2289	3393	3271	2648	2897	3327	2970	2535	3138	3573

Un diagrama de dispersión de los datos muestra un patrón lineal creciente algo sustancial. Las cantidades resumidas correspondientes son $\Sigma x_i = 170$, $\Sigma y_i = 30\,041$, $\Sigma x_i^2 = 3910$, $\Sigma y_i^2 = 91\,785\,351$, $\Sigma x_i y_i = 515\,600$, a partir de lo cual $S_{xx} = 20$, $S_{yy} = 1\,539\,182.90$, $S_{xy} = 4903$. Por tanto,

$$r = \frac{4903}{\sqrt{20}\sqrt{1\,539\,182.90}} = .884$$

Con ρ que denota la correlación entre la edad de la madre y peso del bebé en toda la población de adolescentes que parieron, la estimación puntual de ρ es $\hat{\rho} = r = .884$. ■

Los intervalos de muestra pequeña y los procedimientos de prueba presentados en los capítulos 7 al 9 están basados en la suposición de normalidad de la población. Para probar las hipótesis sobre ρ es necesario hacer una suposición análoga acerca de la distribución de los pares de valores (x, y) en la población. Ahora se supone que *tanto X como Y* son aleatorios (gran parte del trabajo de regresión se realizó con x fijada por el experimentador) con una distribución bivariada de probabilidad normal tal como se describe en la sección 5.2. Recuerde que en este caso $\rho = 0$ implica que X y Y son independientes de la variable aleatoria.

Suponer que los pares se tomaron de una distribución normal bivariada permite probar hipótesis sobre ρ y construir un intervalo de confianza. No existe una forma completamente satisfactoria de verificar la factibilidad de la suposición de normalidad bivariada. Una verificación parcial implica construir dos gráficas de probabilidad normal separadas, una para las x_i y otra para las y_i, puesto que la normalidad bivariada implica que las distribuciones marginales tanto de X como de Y son normales. Si cualquiera de las gráficas se aparta sustancialmente de un patrón de línea recta, no se deberán utilizar los siguientes procedimientos inferenciales para una n pequeña.

Prueba en cuanto a la ausencia de correlación

Sea R el coeficiente de correlación de la muestra como una variable aleatoria (antes de que se obtengan los datos). Cuando H_0: $\rho = 0$ es verdadera el estadístico de prueba

$$T = \frac{R\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-R^2}}$$

tiene una distribución t con $n - 2$ grados de libertad.

Hipótesis alternativa	Determinación del valor P
H_a: $\rho > 0$	Área bajo la curva t_{n-2} a la derecha de t
H_a: $\rho > 0$	Área bajo la curva t_{n-2} a la izquierda de t
H_a: $\rho \neq 0$	2·(Área bajo la curva t_{n-2} a la derecha de $\lvert t \rvert$)

EJEMPLO 12.17 Los efectos neurotóxicos del manganeso son bien conocidos y normalmente son provocados por la prolongada exposición laboral durante largos periodos. En los campos de higiene ocupacional e higiene ambiental no había sido reportada con anterioridad la relación entre la peroxidación de los lípidos, la cual es responsable del deterioro de los alimentos y de los daños en tejidos vivos, y la exposición laboral. El artículo **"Lipid Peroxidation in Workers Exposed to Manganese" (*Scand. J. of Work and Environ. Health*, 1996: 381–386)** proporciona información sobre x = concentración de manganeso en sangre (ppb) y y = concentración ($m$mol/L) de malondialdehído, el cual es el producto estable de la peroxidación de los lípidos, tanto para una muestra de 22 trabajadores expuestos a manganeso como para una muestra de control de 45 individuos. El valor de r para la muestra de control fue de .29, por lo que

$$t = \frac{(.29)\sqrt{45-2}}{\sqrt{1-(.29)^2}} \approx 2.0$$

El valor P correspondiente para una prueba t de dos colas basada en 43 grados de libertad es aproximadamente de .052 (el artículo citado sólo reporta que el valor $P > .05$). No se desearía rechazar la aseveración de que $\rho = 0$ al nivel de significancia .01 o .05. Para la muestra de trabajadores expuestos, $r = .83$ y $t \approx 6.7$, existe una clara evidencia de que existe una relación lineal en toda la población de trabajadores expuestos de la cual fue seleccionada la muestra. ■

Puesto que ρ mide el grado al cual existe una relación lineal entre las dos variables en la población, la hipótesis nula H_0: $\rho = 0$ manifiesta que no existe tal relación de población. En la sección 12.3 se utilizó la relación $t\ \hat{\beta}_1/s_{\hat{\beta}_1}$ para probar una relación lineal entre las dos variables en el contexto del análisis de regresión. Resulta que ambos procedimientos de prueba son completamente equivalentes porque $r\sqrt{n-2}/\sqrt{1-r^2} = \hat{\beta}_1/s_{\hat{\beta}_1}$. Cuando el interés radica sólo en valorar la fuerza de cualquier relación lineal en lugar de ajustarse a un modelo y utilizarlo para estimar o predecir, la fórmula del estadístico de prueba que se acaba de presentar requiere menos cálculos que la relación t.

Otras inferencias sobre r

El procedimiento para probar H_0: $\rho = \rho_0$ cuando $\rho_0 \neq 0$ no es equivalente a cualquier procedimiento de análisis de regresión. El estadístico de prueba se basa en una transformación de R desarrollada por el estadístico famoso R. A. Fisher.

PROPOSICIÓN

Cuando $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ es la muestra de una distribución normal bivariada, la variable aleatoria

$$V = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+R}{1-R}\right) \tag{12.9}$$

tiene aproximadamente una distribución normal con media y varianza

$$\mu_V = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right) \qquad \sigma_V^2 = \frac{1}{n-3}$$

El razonamiento para la transformación es obtener una función de R que tenga una varianza independiente de ρ; este no sería el caso con R misma. Además, no se deberá utilizar la transformación si n es muy pequeña, puesto que la aproximación no será válida.

El estadístico de prueba para demostrar H_0: $\rho = \rho_0$ es

$$Z = \frac{V - \frac{1}{2}\ln[(1 + \rho_0)/(1 - \rho_0)]}{1/\sqrt{n - 3}}$$

Hipótesis alternativa	Determinación del valor *P*
H_a: $\rho > \rho_0$	Área bajo la curva normal estándar a la derecha de z
H_a: $\rho < \rho_0$	Área bajo la curva normal estándar a la izquierda de z
H_a: $\rho \neq \rho_0$	$2 \cdot$ (Área bajo la curva normal estándar a la derecha de $\lvert z \rvert$)

EJEMPLO 12.18 El artículo **"Size Effect in Shear Strength of Large Beams–Behavior and Finite Element Modelling" (*Mag. of Concrete Res.*, 2005: 497–509)** reporta sobre un estudio de las diversas características de gran reforzado de vigas de hormigón profundas y superficiales probadas hasta la falla. Considere los siguientes datos sobre x = resistencia de cubo y y = resistencia de cilindro (ambas en MPa):

x	55.10	44.83	46.32	51.10	49.89	45.20	48.18	46.70	54.31	41.50
y	49.10	31.20	32.80	42.60	42.50	32.70	36.21	40.40	37.42	30.80
x	47.50	52.00	52.25	50.86	51.66	54.77	57.06	57.84	55.22	
y	35.34	44.80	41.75	39.35	44.07	43.40	45.30	39.08	41.89	

Por tanto, $S_{xx} = 367.74$, $S_{yy} = 488.54$ y $S_{xy} = 322.37$ a partir de lo cual $r = .761$. ¿Será que este valor proporciona una fuerte evidencia para concluir que las dos medidas de resistencia están al menos moderada y positivamente correlacionadas?

La interpretación previa de correlación positiva moderada fue $.5 < \rho < .8$, así que se desea probar H_0: $\rho = .5$ contra H_a: $\rho > .5$. El valor calculado de V es entonces

$$v = .5 \ln\left(\frac{1 + .761}{1 - .761}\right) = .999 \qquad .5 \ln\left(\frac{1 + .5}{1 - .5}\right) = .549$$

Por consiguiente, $z = (.999 - .549)\sqrt{19 - 3} = .180$. El valor P para una prueba de cola superior es $1 - \Phi(1.80)\sqrt{19 - 3} = .0359$. La hipótesis nula, por consiguiente, puede ser rechazada a un nivel de significancia de .05, pero no al nivel de .01. El último resultado es algo más sorprendente a la luz de la magnitud de r, pero cuando n es pequeño, puede resultar una r razonablemente grande aun cuando ρ no sea del todo sustancial. A nivel de significancia de .01, la evidencia de una correlación moderadamente positiva no es convincente. ■

Para obtener un intervalo de confianza para ρ primero se deduce un intervalo para $\mu_V = \frac{1}{2}\ln[(1 + \rho)/(1 - \rho)]$. Al estandarizar V, escribir una proposición de probabilidad y manipular las desigualdades resultantes se obtiene

$$\left(v - \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n - 3}}, v + \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n - 3}}\right) \tag{12.10}$$

como un intervalo de $100(1 - \alpha)\%$ para μ_V, donde $v = \frac{1}{2}\ln[(1 + r)/(1 - r)]$. Este intervalo puede entonces ser manipulado para dar el intervalo de confianza deseado.

Un intervalo de confianza de $100(1 - \alpha)\%$ para ρ es

$$\left(\frac{e^{2c_1} - 1}{e^{2c_1} + 1}, \quad \frac{e^{2c_2} - 1}{e^{2c_2} + 1}\right)$$

donde c_1 y c_2 son los puntos extremos izquierdo y derecho, respectivamente, del intervalo (12.11).

EJEMPLO 12.19 Desde la época de Leonardo da Vinci se sabe que x = altura y y = envergadura (medida de dedo a dedo mientras los brazos están extendidos a los lados) están estrechamente relacionadas. Aquí se presentan las mediciones de una muestra aleatoria de estudiantes que están asistiendo a un curso de estadística:

x	63.0	63.0	65.0	64.0	68.0	69.0	71.0	68.0
y	62.0	62.0	64.0	64.5	67.0	69.0	70.0	72.0
x	68.0	72.0	73.0	73.5	70.0	70.0	72.0	74.0
y	70.0	72.0	73.0	75.0	71.0	70.0	76.0	76.5

Un diagrama de dispersión muestra un patrón lineal aproximado, y así se forman diagramas de probabilidad normal de x y y. El coeficiente de correlación de la muestra se calcula como $r = .9422$. Su transformación de Fisher es

$$v = .5\ln\left(\frac{1 + .9422}{1 - .9422}\right) = 1.757$$

Un intervalo de confianza de 95% para μ_V es

$$1.757 \pm \frac{1.96}{\sqrt{16 - 3}} = (1.213, 2.301) = (c_1, c_2)$$

El intervalo de confianza para ρ con un nivel de confianza de aproximadamente 95% es, por tanto,

$$\left(\frac{e^{2(1.213)} - 1}{e^{2(1.213)} + 1}, \frac{e^{2(2.301)} - 1}{e^{2(2.301)} + 1}\right) = (.838, .980)$$

Observe que el intervalo incluye sólo valores superiores a .8, así que al parecer hay una asociación lineal fuerte entre ambas variables en la población muestreada.

En el capítulo 5 se advirtió que un valor grande del coeficiente de correlación (cercano a 1 o -1) implica sólo asociación y no causalidad. Esto es válido tanto para ρ como para r.

EJERCICIOS Sección 12.5 (57–67)

57. El artículo **"Behavioral Effects of Mobile Telephone Use During Simulated Driving"** (***Ergonomics*, 1995: 2536–2562**) reporta que para una muestra de 20 sujetos experimentales el coeficiente de correlación muestral con x = edad y y = tiempo desde que el sujeto obtuvo una licencia de manejo (años) fue .97. ¿Por qué piensa que el valor de r se aproxima tanto a 1? (Los autores del artículo dan una explicación.)

58. El Turbine Oil Oxidation Test (TOST) y el Rotating Bomb Oxidation Test (RBOT) son dos procedimientos diferentes de evaluar la estabilidad ante la oxidación de aceites para turbina de vapor. El artículo **"Dependence of Oxidation Stability of Steam Turbine Oil on Base Oil Composition"** (***J. of the Society of Tribologists and Lubrication Engrs*., octubre de 1997: 19–24**) reporta las siguientes observaciones de 12 especímenes

de aceite. sobre x = tiempo para realizar TOST (h) y y = tiempo para realizar RBOT (min) con

TOST	4200	3600	3750	3675	4050	2770
RBOT	370	340	375	310	350	200
TOST	4870	4500	3450	2700	3750	3300
RBOT	400	375	285	225	345	285

a. Calcule e interprete el valor del coeficiente de correlación muestral (como lo hicieron los autores del artículo).

b. ¿Cómo se vería afectado el valor de r si se hubiera hecho x = tiempo para realizar RBOT y y = tiempo para realizar TOST?

c. ¿Cómo se vería afectado el valor de r si el tiempo para realizar RBOT estuviera expresado en horas?

d. Construya gráficas de probabilidad normal y comente.

e. Realice una prueba de hipótesis para decidir si el tiempo para realizar RBOT y el tiempo para realizar TOST están linealmente relacionados.

59. La firmeza y la fibrosidad de los espárragos son importantes para determinar su calidad. Este fue el enfoque de un estudio reportado en **"Post-Harvest Glyphosphate Application Reduces Toughening, Fiber Content, and Lignification of Stores Asparagus Spears" (*J. of the Amer. Soc. of Hort. Science*, 1988: 569–572)**. El artículo reporta los siguientes datos (tomados de una gráfica) sobre x = fuerza cortante (kg) y y = porcentaje de peso de la fibra en seco.

x	46	48	55	57	60	72	81	85	94
y	2.18	2.10	2.13	2.28	2.34	2.53	2.28	2.62	2.63
x	109	121	132	137	148	149	184	185	187
y	2.50	2.66	2.79	2.80	3.01	2.98	3.34	3.49	3.26

$n = 18, \Sigma x_i = 1950, \Sigma x_i^2 = 251\,970,$
$\Sigma y_i = 47.92, \Sigma y_i^2 = 130.6074, \Sigma x_i y_i = 5530.92$

a. Calcule el valor del coeficiente de correlación muestral. Basado en este valor, ¿cómo describiría la naturaleza de la relación entre las dos variables?

b. Si un primer espécimen tiene un valor más grande de fuerza cortante que un segundo espécimen, ¿qué tiende a ser cierto del porcentaje de peso de fibra en seco para los dos especímenes?

c. Si la fuerza cortante se expresa en libras, ¿qué le pasa al valor de r? ¿Por qué?

d. Si el modelo de regresión lineal simple fuera ajustado a estos datos, ¿qué proporción de la variación observada en porcentaje de peso de la fibra en seco podría ser explicada por la relación de modelo?

e. Realice una prueba a un nivel de significancia .01 para decidir si existe una asociación lineal positiva entre las dos variables.

60. Las evaluaciones del movimiento de cabeza son importantes porque los individuos, especialmente los discapacitados, pueden ser capaces de operar los dispositivos de ayuda de esta manera. El artículo **"Constancy of Head Turning Recorded in Healthy Young Humans" (*J. of Biomed. Engr.*, 2008: 428–436)** reporta datos sobre los rangos en los ángulos de inclinación máxima de la cabeza en el sentido de las manecillas del reloj para la parte anterior, posterior, derecha e izquierda en 14 sujetos seleccionados al azar. Considere los siguientes datos para el ángulo promedio de inclinación máxima anterior (AMIA), tanto en la dirección de las manecillas del reloj (SH) como en sentido contrario (SA).

Sujeto:	1	2	3	4	5	6	7
SH:	57.9	35.7	54.5	56.8	51.1	70.8	77.3
SA:	44.2	52.1	60.2	52.7	47.2	65.6	71.4
Sujeto:	8	9	10	11	12	13	14
SH:	51.6	54.7	63.6	59.2	59.2	55.8	38.5
SA:	48.8	53.1	66.3	59.8	47.5	64.5	34.5

a. Calcule una estimación puntual del coeficiente de correlación de población entre el SH y el AMIA y entre el AMIA y el SA ($\Sigma SH = 786.7, \Sigma SA = 767.9, \Sigma SH^2 = 45\,727.31, \Sigma SA^2 = 43\,478.07, \Sigma SHSA = 44\,187.87$).

b. Suponiendo normalidad bivariada (las gráficas de probabilidad normal del SH y las muestras del SA son razonablemente rectas) lleve a cabo una prueba al nivel de significancia .01 para decidir si existe una relación lineal entre las dos variables en la población (al igual que los autores del citado artículo). ¿La conclusión sería la misma si se utiliza un nivel de significancia de.001?

61. Los autores del artículo **"Objective Effects of a Six Months' Endurance and Strength Training Program in Outpatients with Congestive Heart Failure" (*Medicine and Science in Sports and Exercise*, 1999: 1102-1107)** presentan un análisis de correlación para investigar la relación entre el nivel de lactato máximo x y la resistencia muscular y. Los siguientes datos fueron tomados de una gráfica en el artículo.

x	400	750	770	800	850	1025	1200
y	3.80	4.00	4.90	5.20	4.00	3.50	6.30
x	1250	1300	1400	1475	1480	1505	2200
y	6.88	7.55	4.95	7.80	4.45	6.60	8.90

$S_{xx} = 36.9839, S_{yy} = 2\,628\,930.357, S_{xy} = 7377.704$. Un diagrama de dispersión muestra un patrón lineal.

a. Realice una prueba para ver si existe una correlación positiva entre el nivel de lactato máximo y la resistencia muscular en la población de la cual se seleccionaron estos datos.

b. Si se tuviera que realizar un análisis de regresión para predecir la resistencia a consecuencia del nivel de lactato, ¿qué proporción de variación observada en la resistencia podría ser atribuida a la relación lineal aproximada? Responda la pregunta análoga si se utilizara regresión para predecir el nivel de lactato a partir de la resistencia; responda ambas preguntas sin realizar ningún cálculo de regresión.

62. El artículo **"Quantitative Estimation of Clay Mineralogy in Fine-Grained Soils" (*J. of Geotechnical and Geoenvironmental Engr.*, 2011: 997–1008)** informa sobre diferentes propiedades químicas de los suelos naturales y artificiales. Aquí se presentan las observaciones de x = capacidad de intercambio catiónico (CEC, en meq/100 g) y y = área superficial específica (SSA, en m^2/g) de 20 suelos naturales.

x	66	121	134	101	77	89	63	57	117	118
y	175	324	460	288	205	210	295	161	314	265
x	76	125	75	71	133	104	76	96	58	109
y	236	355	240	133	431	306	132	269	158	303

Minitab da la siguiente salida en respuesta a una solicitud de r:

```
correlation of x and y = 0.853
```

Los diagramas de probabilidad normal de x y y son muy rectos.

a. Realice una prueba de hipótesis para ver si hay una asociación lineal positiva en la población de los datos de la muestra que fueron seleccionados.

b. Con $n = 20$, ¿qué tan pequeño tendría que ser el valor de r para que la hipótesis nula de la prueba de a) no sea rechazada en el nivel de significancia .01?

c. Calcule un intervalo de confianza para ρ utilizando un nivel de confianza de 95%.

63. En el artículo **"Sensory and Physical Properties of Inherently Flame-Retardant Fabrics" (*Textile Research*, 1984: 61–68)** se investigaron las propiedades físicas de seis muestras de tela resistente a las llamas. Use los siguientes datos y un nivel de significancia de .05 para determinar si existe una relación lineal entre la rigidez x (mg-cm) y el espesor y (mm). ¿Es sorprendente el resultado de la prueba a la luz del valor de r?

x	7.98	24.52	12.47	6.92	24.11	35.71
y	.28	.65	.32	.27	.81	.57

64. Los siguientes datos sobre x = índice de transparencia ultravioleta y y = máxima prevalencia de infección se tomaron de una gráfica en el artículo **"Solar Radiation Decreases Parasitism in Daphnia" (*Ecology Letters*, 2012: 47–54)**:

x	1.3	1.4	1.5	2.0	2.2	2.7	2.7	2.7	2.8
y	16	3	32	1	13	0	8	16	2
x	2.9	3.0	3.6	3.8	3.8	4.6	5.1	5.7	
y	1	7	36	25	10	35	58	56	

Las cantidades resumidas incluyen $S_{xx} = 25.5224$, $S_{yy} = 5593.0588$ y $S_{xy} = 264.4882$.

a. Calcule e interprete el valor del coeficiente de correlación de la muestra.

b. Si decide ajustar el modelo de regresión lineal simple a estos datos, ¿qué proporción de la variación observada en la prevalencia máxima podría explicarse mediante la relación del modelo?

c. Si decide hacer la regresión del índice de transparencia UV sobre la máxima prevalencia (es decir, intercambiar los papeles de x y y), ¿qué proporción de la variación observada puede atribuirse a la relación del modelo?

d. Realice una prueba de H_0: $\rho = .5$ contra H_a: $\rho > .5$ utilizando un nivel de significancia de 0.05. [*Nota*: El artículo citado informó el valor P para probar H_0: $\rho = 0$ contra H_0: $\rho \neq 0$.]

65. La torsión durante la rotación externa de la cadera y la extensión pueden explicar por qué ocurren las lágrimas labral acetabular en atletas profesionales. El artículo **"Hip Rotational Velocities During the Full Golf Swing" (*J. of Sports Science and Med.*, 2009: 296–299)** informa sobre una investigación en la que el pico de la velocidad máxima de rotación interna de la cadera (x) y el pico final de la velocidad de rotación externa de la cadera (y) se han determinado en una muestra de 15 jugadores de golf. Los datos proporcionados por los autores del artículo fueron utilizados para calcular las siguientes cantidades resumidas:

$$\sum(x_i - \bar{x})^2 = 64\,732.83, \sum(y_i - \bar{y})^2 = 130\,566.96,$$
$$\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 44\,185.87$$

Gráficas separadas de probabilidad normal mostraron patrones lineales muy importantes.

a. Calcule una estimación puntual del coeficiente de correlación de la población.

b. Efectúe una prueba en el nivel de significancia .01 para decidir si existe una relación lineal entre las dos velocidades en la población muestreada.

c. ¿La conclusión de b) habría cambiado si se hubiera probado la hipótesis adecuada para decidir si existe una relación lineal positiva entre la población? ¿Qué pasará si se utiliza un nivel de significancia .05 en lugar .01?

66. Considere una serie de tiempo; es decir, una secuencia de observaciones $X_1, X_2, \ldots$ obtenidas durante el transcurso del tiempo con valores observados $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Suponga que la serie no muestra tendencia hacia arriba ni hacia abajo durante el transcurso del tiempo. Usualmente un investigador deseará saber qué tan fuertemente están relacionados los valores en la serie separados por un número especificado de unidades de tiempo. El *coeficiente de autocorrelación muestral correspondiente a un retardo* r_1 es simplemente el valor del coeficiente de correlación muestral r de los pares (x_1, x_2), $(x_2, x_3), \ldots, (x_{n-1}, x_n)$, es decir, pares de valores separados por una unidad de tiempo. Asimismo, el *coeficiente de autocorrelación muestral correspondiente a dos retardos* r_2 es r para los $n - 2$ pares (x_1, x_3), $(x_2, x_4), \ldots, (x_{n-2}, x_n)$.

a. Calcule los valores de r_1, r_2 y r_3 para los datos de temperatura del ejercicio 82 del capítulo 1 y comente.

b. Análogo al coeficiente de correlación de la población ρ, sean $\rho_1, \rho_2, \ldots$ los coeficientes de autocorrelación teóricos o de largo plazo con los varios retardos. Si todos estos ρ son 0 no existe relación (lineal) con cualquier retraso. En este caso, si n es grande cada R_i tiene aproximadamente una distribución normal con media 0 y desviación estándar $1/\sqrt{n}$ y los diferentes R_i son casi independientes. Por consiguiente H_0:

$\rho_i = 0$ puede probarse mediante una prueba z con el valor estadístico de prueba $z_i = \sqrt{n}r_i$. Si $n = 100$ y $r_1 = .16$, $r_2 = -.09$ y $r_3 = -.15$, a un nivel de significancia de aproximadamente .05, ¿existe alguna evidencia de autocorrelación teórica con los primeros tres retrasos?

c. Si se prueba simultáneamente la hipótesis nula del inciso b) con más de un retraso para más de un retraso, ¿por qué se desearía aumentar el nivel de significancia para cada prueba?

67. Se recopiló una muestra de $n = 500$ pares (x, y) y se realizó una prueba de H_0: $\rho = 0$ contra H_a: $\rho \neq 0$. El valor P resultante se calculó como .00032.

a. ¿Qué conclusión sería apropiada al nivel de significancia .001?

b. ¿Indicará este pequeño valor P que existe una muy fuerte relación entre x y y (un valor de ρ que difiera considerablemente de 0)? Explique.

c. Suponga ahora que una muestra de $n = 10\,000$ pares (x, y) dio por resultado $r = .022$. Pruebe H_0: $\rho = 0$ contra H_a: $\rho \neq 0$ a un nivel .05. ¿Será el resultado estadísticamente significativo? Comente sobre el significado práctico de su análisis.

EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS (68–87)

68. El avalúo de un almacén puede parecer sencillo en comparación con otros avalúos asignados. El avalúo de un almacén implica comparar una edificación que principalmente es una armadura abierta con otros edificios semejantes. Sin embargo, siguen habiendo varios atributos de un almacén que están factiblemente relacionados con el valor apreciado. El artículo **"Challenges In Appraising 'Simple' Warehouse Properties" (Donald Sonneman, *The Appraisal Journal*, abril de 2001, 174–178)** proporciona los siguientes datos sobre la altura de la armadura (pies), la cual determina qué tan alto pueden ser apilados los productos almacenados y el precio de venta ($) por pie cuadrado.

Altura	12	14	14	15	15	16	18	22	22	24
Precio	35.53	37.82	36.90	40.00	38.00	37.50	41.00	48.50	47.00	47.50
Altura	24	26	26	27	28	30	30	33	36	
Precio	46.20	50.35	49.13	48.07	50.90	54.78	54.32	57.17	57.45	

a. ¿Será el caso de que la altura de la armadura y el precio de venta están "determinísticamente" relacionados, es decir, que el precio de venta está determinado por completo y únicamente por la altura de la armadura? [*Sugerencia*: Examine los datos.]

b. Construya una gráfica de dispersión de los datos. ¿Qué sugieren?

c. Determine la ecuación de la recta de mínimos cuadrados.

d. Proporcione una predicción puntual del precio cuando la altura de la armadura es de 27 pies y calcule el residuo correspondiente.

e. ¿Qué porcentaje de la variación observada del precio de venta puede ser atribuido a la relación lineal aproximada entre la altura de la armadura y el precio?

69. Remítase al ejercicio previo, el cual dio datos sobre alturas de armaduras para una muestra de almacenes y los precios de venta correspondientes.

a. Estime el cambio promedio verdadero del precio de venta asociado con un pie de incremento en la altura de la armadura y hágalo de modo que dé información sobre la precisión de la estimación.

b. Estime el precio de venta promedio real de todos los almacenes cuya armadura tiene una altura de 25 pies y hágalo de modo que dé información sobre la precisión de la estimación.

c. Pronostique el precio de venta de un solo almacén cuya armadura tiene una altura de 25 pies y hágalo de modo que dé información sobre la precisión de la predicción. ¿Cómo se compara esta estimación con la estimación de b)?

d. Sin calcular ningún intervalo, ¿cómo se compararía el ancho de un intervalo de predicción de 95% con el precio de venta cuando la altura de la armadura es de 25 pies con el ancho de un intervalo de 95% cuando la altura es de 30 pies? Explique su razonamiento.

e. Calcule e interprete el coeficiente de correlación muestral.

70. A los científicos forenses usualmente les interesa realizar alguna clase de medición en un cuerpo (vivo o muerto) y luego utilizarla como base para inferir algo sobre la edad del cuerpo. Considere los datos adjuntos sobre edad (años) y % de ácido aspértico D (de aquí en adelante %DAA) de una pieza dental particular **("An Improved Method for Age at Death Determination from the Measurements of D-Aspertic Acid in Dental Collagen", *Archaeometry*, 1990: 61–70).**

Edad	9	10	11	12	13	14	33	39	52	65	69
%DAA	1.13	1.10	1.11	1.10	1.24	1.31	2.25	2.54	2.93	3.40	4.55

Suponga que una pieza dental de otro individuo tiene 2.01%DAA. ¿Podría ser que el individuo tuviera menos de 22 años? Esta pregunta era pertinente en cuanto a si el individuo podía ser sentenciado a cadena perpetua por homicidio o no.

Una estrategia aparentemente razonable es retroceder la edad en %DDA, y luego calcule un intervalo de probabilidad para la edad cuando %DAA = 2.01. No obstante, es más natural en este caso considerar la edad como la variable independiente x y el %DAA como la variable dependiente y, así que el modelo de regresión es $\%\text{DAA} = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$. Después de estimar los coeficientes de regresión se puede sustituir $y^* = 2.01$ en la ecuación estimada y luego resolverla para una predicción

de edad $\hat{x}$. Este uso "inverso" de la recta de regresión se llama "calibración". Un intervalo de predicción para edad con nivel de predicción aproximadamente de $100(1 - \alpha)\%$ es $\hat{x} \pm t_{\alpha/2,n-2} \cdot SE$ donde

$$SE = \frac{s}{\hat{\beta}_1}\left\{1 + \frac{1}{n} + \frac{(\hat{x} - \bar{x})^2}{S_{xx}}\right\}^{1/2}$$

Calcule este intervalo de predicción para $y^* = 2.01$ y luego aborde la pregunta previamente planteada.

71. Los compuestos fenólicos se encuentran en las descargas residuales de procesos de conversión de carbón, refinerías de petróleo, fabricación de herbicidas y fabricación de fibra de vidrio. Estos compuestos son tóxicos, cancerígenos y han contribuido en las últimas décadas a la contaminación ambiental de los ambientes acuáticos. En un estudio que se reporta en **"Photolysis, Biodegradation, and Sorption Behavior of Three Selected Phenolic Compounds on the Surface and Sediment of Rivers" (*J. of Envir. Engr.*, 2011: 1114–1121)** los autores examinaron las características de absorción de tres compuestos fenólicos. Los siguientes datos sobre la y = concentración absorbida (μg/g) y x = concentración de equilibrio (μg/mL) de 2, 4-dinitrofenol (DNP) en un sedimento de río natural particular fueron obtenidos de una gráfica del artículo.

x	.11	.13	.14	.18	.29	.44	.67	.78	.93
y	1.72	2.17	2.33	3.00	5.17	7.61	11.17	12.72	14.78

a. Calcule los puntos estimados de la pendiente y la intercepción de la recta de regresión de población.

b. ¿El modelo de regresión lineal simple especifica una relación útil entre y y x?

c. Confirme que $\hat{y} = 3.404$, $S_{\hat{Y}} = .107$ cuando $x = .2$, y $\hat{y} = .6.616$, $S_{\hat{Y}} = .088$ cuando $x = .4$. Explique por qué $s_{\hat{Y}}$ es mayor cuando $x = .2$ que cuando $x = .4$.

d. Calcule un intervalo de confianza con un nivel de confianza de 95% para el promedio verdadero de la concentración absorbida de DNP de todas las muestras de sedimento de río que tienen una concentración de equilibrio de .4.

e. Calcule un intervalo de predicción con un nivel de predicción de 95% para que la concentración absorbida de DNP en una muestra de sedimento de río sólo tenga una concentración de equilibrio de .4.

72. Los resultados SAS dados al final de la página están basados en datos tomados del artículo **"Evidence for and the Rate of Denitrification in the Arabian Sea" (*Deep Sea Research*, 1978: 431–435)**. Las variables estudiadas son x = nivel de salinidad (%) y y = nivel de nitrato (μM/L).

a. ¿Cuál es el tamaño de muestra n? [*Sugerencia*: Busque los grados de libertad para SSE.]

b. Calcule una estimación puntual del nivel de nitrato esperado cuando el nivel de salinidad es de 35.5.

c. ¿Habrá una relación lineal útil entre las dos variables?

d. ¿Cuál es el valor del coeficiente de correlación muestral?

e. ¿Utilizaría el modelo de regresión lineal simple para sacar conclusiones cuando el nivel de salinidad es de 40?

73. La presencia de carburos de aleación duros en aleaciones de hierro blanco al alto cromo produce una excelente resistencia a la abrasión, lo que las hace apropiadas para el manejo de materiales en la industria minera y del procesamiento de materiales. Los datos adjuntos sobre x = contenido de austenita retenido (%) y y = pérdida por desgaste abrasivo (mm^3) en prueba de desgaste de alfileres con granate como el abrasivo fueron tomadas de una gráfica que aparece en el artículo **"Microstructure-Property Relationships in High Chromium White Iron Alloys" (*Intl. Materials Reviews*, 1996: 59-82)**.

x	4.6	17.0	17.4	18.0	18.5	22.4	26.5	30.0	34.0
y	.66	.92	1.45	1.03	.70	.73	1.20	.80	.91
x	38.8	48.2	63.5	65.8	73.9	77.2	79.8	84.0	
y	1.19	1.15	1.12	1.37	1.45	1.50	1.36	1.29	

Resultados obtenidos con SAS para el ejercicio 72

Dependent Variable: NIVELNITRATO

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob > F
Model	1	64.49622	64.49622	63.309	0.0002
Error	6	6.11253	1.01875		
C Total	7	70.60875			

Root MSE	1.00933	R-square	0.9134
Dep Mean	26.91250	Adj R-sq	0.8990
C.V.	3.75043		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for HO: Parameter = 0	Prob > |T|
INTERCEPCION	1	326.976038	37.71380243	8.670	0.0001
SALINIDAD	1	−8.403964	1.05621381	−7.957	0.0002

Resultados obtenidos con SAS para el ejercicio 73

Dependent Variable: PERDIDADABRASIVA

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob > F
Model	1	0.63690	0.63690	15.444	0.0013
Error	15	0.61860	0.04124		
C Total	16	1.25551			

Root MSE	0.20308	R-square	0.5073
Dep Mean	1.10765	Adj R-sq	0.4744
C.V.	18.33410		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter = 0	Prob > |T|
INTERCEPCION	1	0.787218	0.09525879	8.264	0.0001
CONTENIDOAUSTENITA	1	0.007570	0.00192626	3.930	0.0013

Use los datos y los resultados obtenidos con SAS dados al inicio de esta página para responder las siguientes preguntas.

a. ¿Qué proporción de la variación observada de pérdida por desgaste puede atribuirse a la relación de modelo de regresión lineal simple?

b. ¿Cuál es el valor del coeficiente de correlación muestral?

c. Pruebe la utilidad del modelo de regresión lineal simple con $\alpha = .01$.

d. Estime la pérdida por desgaste promedio verdadera cuando el contenido es de 50% y hágalo de modo que dé información sobre confiabilidad y precisión.

e. ¿Qué valor de pérdida por desgaste pronosticaría cuando el contenido es de 30% y cuál es valor del residuo correspondiente?

74. Los siguientes datos se tomaron de una gráfica de dispersión del artículo **"Urban Emissions Measured with Aircraft"** (***J. of the Air and Waste Mgmt. Assoc.*, 1998: 16–25**). La variable de respuesta es ΔNO_y la variable explicativa es ΔCO.

ΔCO	50	60	95	108	135
ΔCO_y	2.3	4.5	4.0	3.7	8.2
ΔCO	210	214	315	720	
ΔNO_y	5.4	7.2	13.8	32.1	

a. Adapte un modelo apropiado a los datos y juzgue la utilidad del modelo.

b. Pronostique el valor de ΔNO_y que se obtendría al realizar una observación más cuando ΔCO es 400 y hágalo de modo que dé información sobre precisión y confiabilidad. ¿Será que el ΔNO_y puede ser pronosticado con precisión? Explique.

c. El valor más grande de ΔCO es mucho más grande que los demás valores. ¿Ha tenido esta observación un impacto sustancial en la ecuación ajustada?

75. Se estudió la relación entre la velocidad (pies/s) y la cadencia al correr (número de pasos/s) entre maratonistas. Las cantidades resumidas resultantes fueron $n = 11$, $\Sigma(\text{velocidad}) = 205.4$, $\Sigma(\text{velocidad})^2 = 3880.08$, $\Sigma(\text{cadencia}) = 35.16$, $\Sigma(\text{cadencia})^2 = 112.681$ y $\Sigma(\text{velocidad})(\text{cadencia}) = 660.130$.

a. Calcule la ecuación de la recta de mínimos cuadrados que utilizaría para predecir la cadencia a partir de la velocidad.

b. Calcule la ecuación de la recta de mínimos cuadrados que utilizaría para predecir la velocidad a partir de la cadencia.

c. Calcule el coeficiente de determinación para la regresión de la cadencia basada en la velocidad del inciso a) y para la regresión de la velocidad basada en la cadencia del inciso b). ¿Cómo están relacionadas?

76. "Mezcla de modos" se refiere a cuánto de la propagación de grietas es atribuible a los tres modos de fractura convencionales de abertura, deslizamiento o desgarro. Para los problemas de los aviones, sólo los dos primeros modos están presentes y el ángulo de mezcla de modos mide el grado al cual la propagación se debe a deslizamiento en oposición a abertura. El artículo **"Increasing Allowable Flight Loads by Improved Structural Modeling"** (***AIAA J.*, 2006: 376–381**] proporciona los siguientes datos sobre x = ángulo de mezcla de modos (grados) y y = tenacidad a la fractura (N/m) de paneles utilizados en la construcción de aviones.

x	16.52	17.53	18.05	18.50	22.39	23.89	25.50	24.89
y	609.4	443.1	577.9	628.7	565.7	711.0	863.4	956.2
x	23.48	24.98	25.55	25.90	22.65	23.69	24.15	24.54
y	679.5	707.5	767.1	817.8	702.3	903.7	964.9	1047.3

a. Obtenga la ecuación de la recta de regresión estimada y discuta el grado al cual el modelo de regresión lineal simple es una forma razonable de relacionar la tenacidad a la fractura con el ángulo de mezcla de modos.

b. ¿Sugieren los datos que el cambio promedio de la tenacidad a la fractura asociado con un incremento de un grado del ángulo de mezcla de modos excede 50 N/m? Realice una prueba apropiada de hipótesis.

c. Para estimar con precisión la pendiente de la recta de regresión de la población, ¿habría sido preferible realizar observaciones a los ángulos 16, 16, 18, 18, 20, 20, 20, 20, 22, 22, 22, 22, 24, 24, 26 y 26 (de nuevo un tamaño de muestra de 16)? Explique su razonamiento.

d. Calcule una estimación de tenacidad a la fractura promedio verdadera y también una predicción de tenacidad a la fractura tanto para un ángulo de 18 grados como para uno de 22 grados y hágalo de modo que dé información sobre confiabilidad y precisión; luego interprete y compare las estimaciones y predicciones.

77. Las descargas de agua pueden causar terribles consecuencias en el medio ambiente y su limpieza es costosa. Se han desarrollado muchos métodos físicos y biológicos para recuperar el aceite de las superficies de agua. En el artículo **"Capacity of Straw for Repeated Binding of Crude Oil from Salt Water and Its Effect on Biodegradation" (*J. of Hazardous Toxic and Radioactive Waste*, 2012: 75–78)** se analiza cómo puede utilizarse paja de trigo para extraer petróleo de una superficie de agua. Se realizó un experimento en el que se agregó crudo (0 a 16.9 g) a 100 mL de agua salada en cajas de Petri separadas. Luego se agregó paja de trigo (2g) a cada caja y durante la noche se sacudieron todas las cajas a 70 rpm. Los siguientes datos, obtenidos de una gráfica, se basan en la cantidad de x = aceite añadido (g) y = cantidad correspondiente de aceite recuperado (en gramos) de la paja de trigo.

x	1.0	1.5	2.1	2.8	3.6	4.5	5.5
y	0.610	0.840	1.512	1.792	2.952	2.880	4.400
x	6.6	7.8	9.1	10.5	12.0	13.6	15.2	16.9
y	5.346	6.396	7.189	8.085	9.840	11.696	13.224	14.365

a. Construya un diagrama de dispersión de datos. ¿Será que el aceite recuperado puede muy bien predecirse a partir del valor del aceite añadido? Explique su razonamiento.

b. Calcule e interprete el coeficiente de determinación.

c. ¿Será que el modelo de regresión lineal simple especifica una relación útil entre estas dos variables? Formule y pruebe las hipótesis pertinentes.

d. Prediga el valor del aceite recuperado cuando la cantidad de aceite añadido es 5.0 y hágalo de manera que transmita información acerca de la precisión y la confiabilidad.

e. Sin hacer ningún cálculo adicional, realice una prueba de hipótesis para decidir si el valor de ρ es algo distinto de 0.

78. En la sección 12.4 se presentó una fórmula para $V(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^*)$ y un intervalo de confianza para $\beta_0 + \beta_1 x^*$. Considerando $x^* = 0$ se obtiene $\sigma^2_{\hat{\beta}_0}$ y un intervalo de confianza para β_0. Use los datos del ejemplo 12.11 para calcular la desviación estándar estimada de $\hat{\beta}_0$ y un intervalo de confianza de 95% para la intercepción y de la recta de regresión verdadera.

79. Demuestre que $SSE = S_{yy} - \hat{\beta}_1 S_{xy}$, la cual da una fórmula computacional alternativa para SSE.

80. Suponga que x y y son variables positivas y que una muestra de n pares da $r \approx 1$. Si el coeficiente de correlación muestral se calcula para los pares (x, y^2), ¿será el valor resultante también aproximadamente 1? Explique.

81. Sean s_x y s_y las desviaciones estándar muestrales de las x y y observadas, respectivamente [así que $s_x^2 = \Sigma(x_i - \bar{x})^2/(n-1)$ y asimismo para s_y^2].

a. Demuestre que una expresión alternativa para la recta de regresión estimada $y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$ es

$$y = \bar{y} + r \cdot \frac{s_y}{s_x}(x - \bar{x})$$

b. Esta expresión para la recta de regresión puede interpretarse como sigue. Suponga que $r = .5$. ¿Cuál es entonces la y pronosticada con una x situada a 1 desviación estándar (s_x unidades) sobre la media de las x_i? Si r fuera 1, la predicción sería para que y quedara a 1 desviación estándar sobre su media $\bar{y}$, pero puesto que $r = .5$, se pronostica una y que está a sólo .5 desviación estándar ($.5s_y$ unidades) sobre $\bar{y}$. Con los datos del ejercicio 64, cuando la DE del índice de transparencia UV está a 1 DE debajo del promedio en la muestra, ¿a cuántas desviaciones estándar se pronostica que esté la máxima prevalencia pronosticada por encima o por debajo de este promedio para la muestra?

82. Verifique que el estadístico t para probar H_0: $\beta_1 = 0$ en la sección 12.3 es idéntico al estadístico t en la sección 12.5 para probar H_0: $\rho = 0$.

83. Use la fórmula para calcular SSE para comprobar que $r^2 = 1 - SSE/SST$.

84. En la biofiltración de aguas residuales se hace que el aire descargado por una planta de tratamiento pase a través de una membrana porosa húmeda que disuelve los contaminantes en el agua y los transforma en productos inocuos. Los siguientes datos sobre x = temperatura de entrada (°C) y y = eficiencia de eliminación (%) fueron la base para una gráfica de dispersión que apareció en el artículo **"Treatment of Mixed Hydrogen Sulfide and Organic Vapors in a Rock Medium Biofilter" (*Water Environment Research*, 2001: 426–435).**

Obs	Temp	% de eliminación	Obs	Temp	% de eliminación
1	7.68	98.09	17	8.55	98.27
2	6.51	98.25	18	7.57	98.00
3	6.43	97.82	19	6.94	98.09
4	5.48	97.82	20	8.32	98.25
5	6.57	97.82	21	10.50	98.41
6	10.22	97.93	22	16.02	98.51
7	15.69	98.38	23	17.83	98.71
8	16.77	98.89	24	17.03	98.79
9	17.13	98.96	25	16.18	98.87
10	17.63	98.90	26	16.26	98.76
11	16.72	98.68	27	14.44	98.58
12	15.45	98.69	28	12.78	98.73
13	12.06	98.51	29	12.25	98.45
14	11.44	98.09	30	11.69	98.37
15	10.17	98.25	31	11.34	98.36
16	9.64	98.36	32	10.97	98.45

Las cantidades calculadas son $\Sigma x_i = 384.26$, $\Sigma y_i = 3149.04$, $\Sigma x_i^2 = 5099.2412$, $\Sigma x_i y_i = 37\,850.7762$ y $\Sigma y_i^2 = 309\,892.6548$.

a. ¿Será que una gráfica de dispersión de los datos sugiere la pertinencia del modelo de regresión lineal de la muestra?

b. Ajuste el modelo de regresión lineal simple, obtenga una predicción puntual de la eficiencia de eliminación cuando la temperatura = 10.50 y calcule el valor del residuo correspondiente.

c. Aproximadamente ¿cuál es el tamaño de una desviación típica de puntos en la gráfica de dispersión respecto a la recta de mínimos cuadrados?

d. ¿Qué proporción de la variación observada de la eficiencia de eliminación puede atribuirse a la relación de modelo?

e. Estime el coeficiente de pendiente de modo que informe sobre confiabilidad y precisión e interprete su estimación.

f. Una comunicación personal con los autores del artículo reveló que hubo una observación adicional que no estuvo incluida en su gráfica de dispersión: (6.53, 96.55). ¿Qué impacto tiene esta observación adicional en la ecuación de la recta de mínimos cuadrados y los valores de s y r^2?

85. Los procesos normales de incubación en acuacultura inevitablemente producen tensión en los peces, lo cual puede impactar negativamente en el crecimiento, la reproducción y la calidad de la carne y en la susceptibilidad a enfermedades. Tal tensión se pone de manifiesto en los elevados y sostenidos niveles de corticosteroides. El artículo **"Evaluation of Simple Instruments for the Measurement of Blood Glucose and Lactate and Plasma Protein as Stress Indicators en Fish" (*J. of the World Aquaculture Society*, 1999: 276-284)** describe un experimento en el cual los peces fueron sometidos a un protocolo de tensión y luego se suspendió y se les sometió a prueba en varias ocasiones después de que se aplicó el protocolo. Los siguientes datos sobre x = tiempo (min) y y = nivel de glucosa en sangre (mmol/L) se obtuvieron de la gráfica.

x	2	2	5	7	12	13	17	18	23	24	26	28
y	4.0	3.6	3.7	4.0	3.8	4.0	5.1	3.9	4.4	4.3	4.3	4.4
x	29	30	34	36	40	41	44	56	56	57	60	60
y	5.8	4.3	5.5	5.6	5.1	5.7	6.1	5.1	5.9	6.8	4.9	5.7

Use los métodos desarrollados en este capítulo para analizar los datos y escriba un breve reporte que resuma sus conclusiones (suponga que los investigadores están particularmente interesados en el nivel de glucosa 30 min después de la tensión).

86. El artículo **"Evaluating the BOD POD for Assessing Body Fat in Collegiate Football Players" (*Medicine and Science in Sports and Exercise*, 1999: 1350–1356)** reporta sobre un nuevo dispositivo de desplazamiento del aire para medir la grasa corporal. El procedimiento acostumbrado utiliza el dispositivo de pesaje hidrostático, el cual mide el porcentaje de masa corporal mediante el desplazamiento de agua. Los siguientes son datos representativos tomados de una gráfica que presenta en el artículo.

BOD	2.5	4.0	4.1	6.2	7.1	7.0	8.3	9.2	9.3	12.0	12.2
HW	8.0	6.2	9.2	6.4	8.6	12.2	7.2	12.0	14.9	12.1	15.3
BOD	12.6	14.2	14.4	15.1	15.2	16.3	17.1	17.9	17.9		
HW	14.8	14.3	16.3	17.9	19.5	17.5	14.3	18.3	16.2		

a. Use varios métodos para decidir si es factible que las dos técnicas midan o promedien la misma cantidad de grasa.

b. Use los datos para desarrollar una forma de predecir el peso hidrostático a partir de una medición BOD POD e investigue la efectividad de tales predicciones.

87. Reconsidere la situación del ejercicio 73, en que x = contenido de austenita retenido al utilizar un abrasivo de granate y y = pérdida por desgaste abrasivo se relacionaron a través del modelo de regresión lineal simple $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$. Suponga que con un segundo tipo de abrasivo, estas variables también están relacionadas mediante el modelo de regresión lineal simple $Y = \gamma_0 + \gamma_1 x + \epsilon$ y que $V(\epsilon) = \sigma^2$ para ambos tipos de abrasivo. Si el conjunto de datos se compone de n_1 observaciones del primer abrasivo y n_2 del segundo, y si SEC_1 y SEC_2 denotan las dos sumas de cuadrados de error, entonces una estimación agrupada de σ^2 es $\hat{\sigma}^2 = (SEC_1 + SEC_2)/(n_1 + n_2 - 4)$ Sea que SS_{x1} y SS_{x2} denoten $\Sigma(x_i - \bar{x})^2$ con los datos del primer y el segundo abrasivos, respectivamente. Una prueba de H_0: $\beta_1 - \gamma_1 = 0$ (pendientes iguales) está basada en el estadístico

$$T = \frac{\hat{\beta}_1 - \hat{\gamma}_1}{\hat{\sigma}\sqrt{\dfrac{1}{SS_{x1}} + \dfrac{1}{SS_{x2}}}}$$

Cuando H_0 es verdadera, T tiene una distribución t con $n_1 + n_2 - 4$ grados de libertad. Acepte las 15 observaciones utilizando los abrasivos alternativos con $SS_{x2} = 7152.5578$, $\hat{\gamma}_1 = .006845$, y $SEC_2 = .51350$. Empleando esto junto con los datos del ejercicio 73, realice una prueba de nivel .05 para ver si el cambio esperando en la pérdida por desgaste asociado con 1% de aumento en el contenido de austenita es idéntico para los dos tipos de abrasivos.

BIBLIOGRAFÍA

Draper, Norman y Harry Smith, *Applied Regression Analysis* (3a. ed.), Wiley, Nueva York, 1999. El libro más completo y autorizado sobre análisis de regresión actualmente en proceso de impresión.

Neter, John, *et al.*, *Applied Linear Statistical Models* (5a. ed.), Irwin, Homewood, IL., 2005. Los primeros 14 capítulos constituyen un estudio extremadamente informativo y fácil de leer acerca del análisis de regresión.

13 Regresión múltiple y no lineal

INTRODUCCIÓN

En el modelo probabilístico que se estudió en el capítulo 12 señala que el valor observado de la variable dependiente Y se desviaba de la función de regresión lineal $\mu_{Y \cdot x} = \beta_0 + \beta_1 x$ en una cantidad aleatoria. Aquí se consideran dos formas de generalizar el modelo de regresión lineal simple. La primera es sustituir $\beta_0 + \beta_1 x$ con una función no lineal de x, y la segunda es usar una función de regresión que comprenda más de una sola variable independiente. Después de ajustar una función de regresión de la forma seleccionada a la información dada, por supuesto que es importante tener métodos disponibles para hacer inferencias acerca de los parámetros del modelo seleccionado. No obstante, antes de usar estos métodos el analista de datos debe evaluar primero la validez del modelo seleccionado. En la sección 13.1 se estudian estos métodos con base principalmente en un análisis gráfico de los residuos (las y observadas menos las pronosticadas) para verificar lo apropiado del modelo.

En la sección 13.2 se consideran funciones de regresión no lineales de una sola variable independiente x que son "intrínsecamente lineales". Con esto se quiere decir que es posible transformar una o ambas variables para que la relación entre las nuevas variables sea lineal. Se obtiene una clase alternativa de relaciones no lineales con el uso de funciones de regresión polinomiales de la forma $\mu_{Y \cdot x} = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots + \beta_k x^k$; estos modelos polinomiales son el tema de la sección 13.3. El análisis de regresión múltiple comprende la construcción de modelos para relacionar y con dos o más variables independientes. El interés principal de la sección 13.4 está en la interpretación de varios modelos de regresión múltiple, y en entender y usar la salida de regresión de varios paquetes estadísticos de computadoras. La última sección del capítulo examina algunas extensiones y dificultades al hacer modelos de regresión múltiple.

13.1 Aptitud y verificación del modelo

Una gráfica de los pares observados (x_i, y_i) es un primer paso necesario para decidir la forma de una relación matemática entre x y y. Es posible adaptar numerosas funciones que no sean una lineal $(y = b_0 + b_1x)$ a los datos, usando ya sea el principio de mínimos cuadrados u otro método apropiado. Una vez que una función de la forma seleccionada se ha ajustado, es importante verificar el ajuste del modelo para ver si en verdad es apropiado. Una forma de estudiar el ajuste es sobreponer una gráfica de la función de mejor ajuste sobre el diagrama de dispersión de los datos. No obstante, cualquier inclinación o curvatura de la función de mejor ajuste puede ocultar algunos aspectos del ajuste que deben investigarse. Además, la escala en el eje vertical puede hacer difícil evaluar el grado al que los valores observados se desvían de las funciones de mejor ajuste.

Residuos y residuos estandarizados

Un método más eficaz de evaluar la exactitud del modelo es calcular los valores ajustados o pronosticados $\hat{y}_i$ y los residuos $e_i = y_i - \hat{y}_i$, y luego graficar varias funciones de estas cantidades calculadas. A continuación se examinan las gráficas para confirmar la selección de modelo o para las indicaciones de que el modelo no es apropiado. Suponga que el modelo de regresión lineal simple es correcto, y que $y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$ es la ecuación de la recta de regresión estimada. Entonces el i-ésimo residuo es $e_i = y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i)$. Para deducir propiedades de los residuos, sea que $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$ represente el i-ésimo residuo como una variable aleatoria (va) antes de hacer observaciones. Entonces

$$E(Y_i - \hat{Y}_i) = E(Y_i) - E(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i) = 0 \qquad \textbf{(13.1)}$$

Debido a que $\hat{Y}_i (= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i)$ es una función lineal de las Y_j, así lo es $Y_i - \hat{Y}_i$ (los coeficientes dependen de las x_j). Así, la normalidad de las Y_j implica que cada residuo está normalmente distribuido. También se puede demostrar que

$$V(Y_i - \hat{Y}_i) = \sigma^2 \cdot \left[1 - \frac{1}{n} - \frac{(x_i - \bar{x})^2}{S_{xx}}\right] \qquad \textbf{(13.2)}$$

Si se sustituye σ^2 con s^2 y se toma la raíz cuadrada de la ecuación (13.2) se obtiene la desviación estándar estimada de un residuo.

Ahora estandarizamos cada residuo al restar la media (cero) y luego se divide entre la desviación estándar estimada.

Los **residuos estandarizados** están dados por

$$e_i^* = \frac{y_i - \hat{y}_i}{s\sqrt{1 - \frac{1}{n} - \frac{(x_i - \bar{x})^2}{S_{xx}}}} \qquad i = 1, \ldots, n \qquad \textbf{(13.3)}$$

Si, por ejemplo, un residuo estandarizado particular es 1.5, entonces el residuo en sí es 1.5 desviaciones estándar (estimadas) mayor de lo que se esperaría por ajustar el modelo correcto. Note que las varianzas de los residuos difieren entre sí. De hecho, ya que hay un signo $-$ delante de $(x_i - \bar{x})^2$, la varianza de un residuo disminuye a medida que x_i está más lejos del centro de los datos $\bar{x}$. Intuitivamente, esto se debe a que la recta de mínimos cuadrados es tirada hacia una observación cuyo valor x_i se encuentra más a la derecha o a la izquierda de otras observaciones en la muestra. El cálculo de las e_i^* puede ser

tedioso, pero los paquetes computarizados de las estadísticas de más uso dan estos valores de manera automática y pueden construir varias gráficas donde están comprendidos esos valores.

EJEMPLO 13.1 El ejercicio 19 del capítulo 12 presentó datos acerca de x = tasa de liberación debida al área del quemador y y = tasa de emisión de NO_x. Aquí se reproducen los datos y los valores ajustados, los residuos y los residuos estandarizados. La recta de regresión estimada es $y = -45.55 + 1.71x$, y $r^2 = .961$. Observe que los residuos estandarizados no son un múltiplo constante de los residuos debido a que las varianzas residuos difieren unas de otras

x_i	y_i	$\hat{y}_i$	e_i	e_i^*
100	150	125.6	24.4	.75
125	140	168.4	−28.4	−.84
125	180	168.4	11.6	.35
150	210	211.1	−1.1	−.03
150	190	211.1	−21.1	−.62
200	320	296.7	23.3	.66
200	280	296.7	−16.7	−.47
250	400	382.3	17.7	.50
250	430	382.3	47.7	1.35
300	440	467.9	−27.9	−.80
300	390	467.9	−77.9	−2.24
350	600	553.4	46.6	1.39
400	610	639.0	−29.0	−.92
400	670	639.0	31.0	.99

Gráficas de diagnóstico

Las gráficas básicas que numerosos expertos en estadística recomiendan para una evaluación de la validez y utilidad de un modelo son las siguientes:

1. e^* (o e) sobre el eje vertical contra x en el eje horizontal; es decir la gráfica de pares (x_i, e_i^*) [o la de pares (x_i, e_i)]
2. e^* (o e) sobre el eje vertical contra $\hat{y}$ en el eje horizontal; es decir, una gráfica de pares $(\hat{y}_i, e_i^*)$ [o la de pares $(\hat{y}_i, e_i)$]
3. $\hat{y}$ sobre el eje vertical contra y en el eje horizontal; es decir la gráfica del par $(y_i, \hat{y}_i)$
4. Una gráfica de probabilidad normal de los residuos estandarizados

Las gráficas 1 y 2 se denominan **gráficas de residuos** (contra la variable independiente y valores ajustados, respectivamente). Puesto que $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$ es una función lineal de x, el patrón general de puntos en la gráfica 2 debe ser idéntico al de la gráfica 1, aunque las escalas horizontales serán diferentes (en regresión múltiple, hay una gráfica 1 para cada predictor, y la gráfica 2 es una sola imagen general que combina la información de todas ellas). Siempre que el modelo sea correcto, ninguna gráfica de residuos debe exhibir formas distintas. Los residuos deben estar distribuidos al azar alrededor de 0 según una distribución normal de manera que, con excepción de unos cuantos e^*, todos los residuos estandarizados deben encontrarse entre -2 y $+2$.

Esperamos que el modelo ajustado aporte valores predichos de y que estén cerca de sus contrapartes observados. Esto se manifestará en la gráfica 3 mediante puntos trazados que caerían cerca de una línea de 45°. Así, esta gráfica proporciona una evaluación visual de la efectividad del modelo para hacer predicciones. La gráfica 4 le permite al analista evaluar la factibilidad de la suposición de que ε tiene una distribución normal. Si el

patrón de la gráfica se aparta sustancialmente de la linealidad, entonces los procedimientos inferenciales del capítulo 12 con base en la distribución t_{n-2} no se deben utilizar como base para sacar conclusiones.

EJEMPLO 13.2 (Continuación del ejemplo 13.1)

La figura 13.1 presenta un diagrama de dispersión de los datos y las cuatro gráficas recomendadas. La gráfica de $\hat{y}$ contra y confirma la impresión dada por r^2 de que x es eficaz en la predicción de y y también indica que no hay y observada para la cual el valor predicho esté muy lejos de la marca. Ambas gráficas de residuos no muestran una figura poco común ni valores discrepantes. Hay un residuo estandarizado que está ligeramente fuera del intervalo $(-2, 2)$, pero esto no es sorprendente en una muestra de tamaño 14. La gráfica de probabilidad normal de los residuos estandarizados es razonablemente recta. En resumen, las gráficas no dejan remordimiento acerca de lo apropiado de una relación lineal sencilla o del ajuste a la información dada.

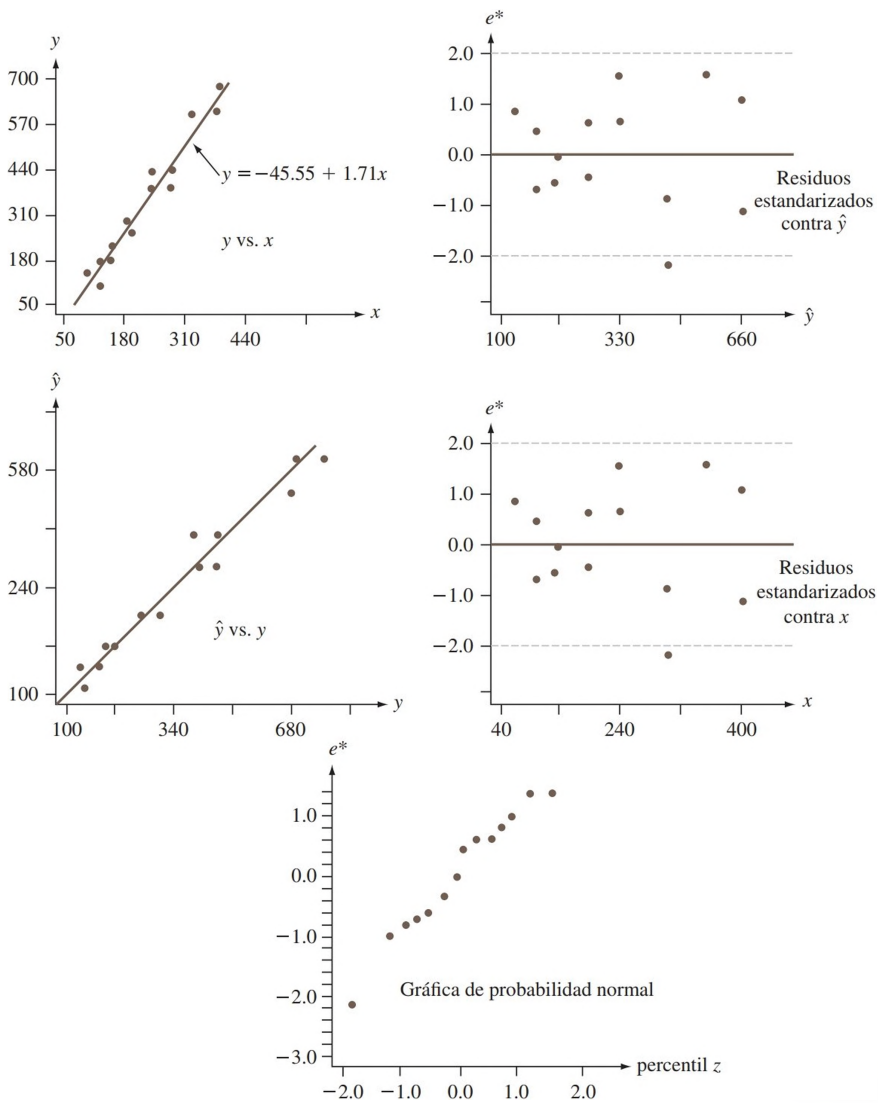


Figura 13.1 Gráficas para los datos del ejemplo 13.1 ■

Dificultades y soluciones

Aun cuando se espera que nuestro análisis genere gráficas como las de la figura 13.1, con gran frecuencia dichas gráficas darán pie a una o más de las siguientes dificultades:

1. Es apropiada una relación probabilística no lineal entre x y y.
2. La varianza de ϵ (y de Y) no es una σ^2 constante sino que depende de x.
3. El modelo seleccionado se ajusta bien a la información, excepto para unos pocos valores discrepantes de datos o resultados aislados, que pueden haber tenido gran influencia en la selección de la función de mejor ajuste.
4. La variable error ϵ no tiene una distribución normal.
5. Cuando el subíndice i indica el orden temporal de las observaciones en tiempo, las ϵ exhiben dependencia en el tiempo.
6. Se han omitido del modelo una o más variables independientes relevantes.

La figura 13.2 presenta gráficas de residuos correspondientes a los elementos 1−3, 5 y 6. En el capítulo 4 se estudiaron figuras en gráficas de probabilidad normales que arrojan duda sobre la suposición de una distribución normal subyacente. Note que los residuos de los datos de la figura 13.2(d), con el punto circulado incluido, por sí mismos no sugerirían un análisis ulterior, pero cuando se ajusta una nueva recta con ese punto borrado la nueva recta difiere considerablemente de la recta original. Este tipo de conducta es más difícil de identificar en regresión múltiple. Lo más probable es que surja cuando haya un solo (o muy pocos) punto(s) de dato con valor(es) variable(s) independiente(s) muy alejados del resto de los datos.

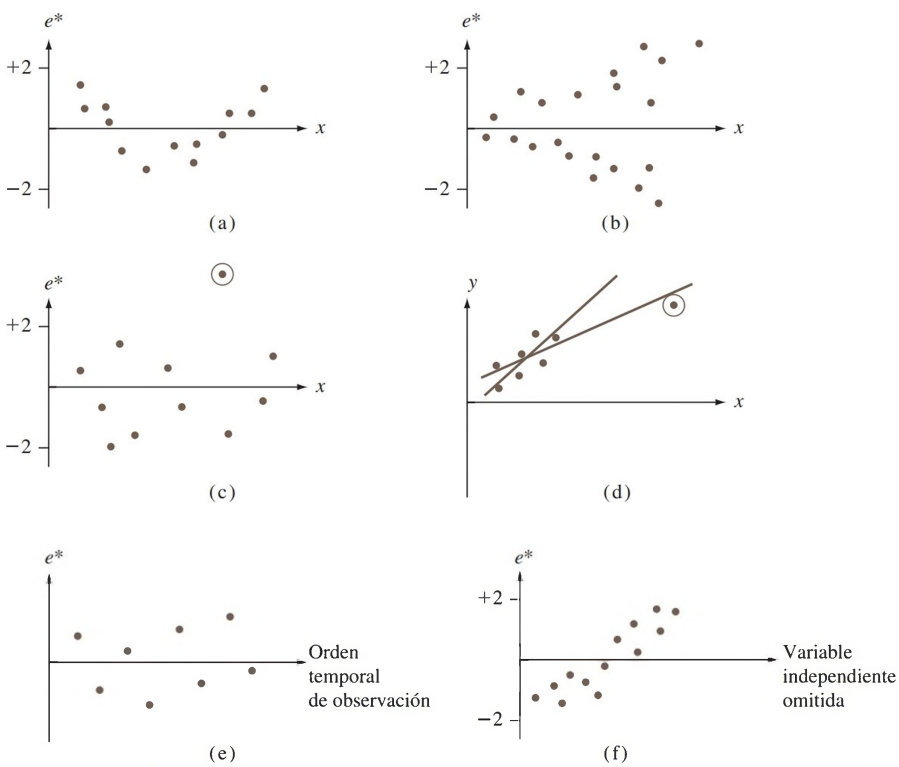


Figura 13.2 Gráficas que indican anormalidad en datos: (a) relación no lineal; (b) varianza no constante; (c) observación discrepante; (d) observación con gran influencia; (e) dependencia de errores; (f) variable omitida

A continuación se indica brevemente de qué soluciones se dispone para los tipos de dificultades. Para un análisis más completo debe consultarse una o más de las referencias sobre análisis de regresión. Si la gráfica de residuos se ve como la de la figura 13.2(a), que exhibe una figura curva, entonces puede ajustarse una función no lineal de x.

La gráfica de residuos de la figura 13.2(b) sugiere que, aun cuando puede ser razonable una relación de línea recta, la suposición de que $V(Y_i) = \sigma^2$ para cada i es de dudosa validez. Cuando las suposiciones del capítulo 12 son válidas se puede demostrar que entre todos los estimadores no sesgados de β_0 y β_1, los estimadores de mínimos cuadrados ordinarios tienen varianza mínima. Estos estimadores dan igual valor a cada (x_i, Y_i). Si la varianza de Y aumenta con x, entonces las Y_i para x_i grandes deben tener menos valor que aquellas con x_i pequeñas. Esto sugiere que β_0 y β_1 deben estimarse al minimizar

$$f_w(b_0, b_1) = \sum w_i[y_i - (b_0 + b_1 x_i)]^2 \qquad \textbf{(13.4)}$$

donde las w_i son las ponderaciones que decrecen con x_i creciente. La reducción al mínimo de la expresión (13.4) da estimaciones de **mínimos cuadrados ponderados**. Por ejemplo, si la desviación estándar de Y es proporcional a x (para $x > 0$), es decir, $V(Y) = kx^2$, entonces se puede demostrar que las ponderaciones $w_i = 1/x_i^2$ dan mejores estimadores de β_0 y β_1. Con frecuencia los expertos en econometría emplean los mínimos cuadrados ponderados (economistas que usan métodos estadísticos) para estimar parámetros.

Cuando las gráficas u otra evidencia sugieren que el conjunto de datos contiene resultados aislados o puntos que tienen gran influencia en el ajuste resultante, un posible método es omitir estos puntos aislados y recalcular la ecuación de regresión estimada. Es seguro que esto sería correcto si se encontrara que los resultados aislados aparecieron debido a errores en el registro de valores de datos o a errores experimentales. Si no se puede hallar una causa para los resultados aislados, es deseable informar la ecuación estimada con y sin los resultados aislados omitidos. Otro método adicional es retener posibles resultados aislados pero sólo para usar un principio de estimación que pone relativamente menos peso en valores aislados del que da el principio de mínimos cuadrados. Uno de estos principios es el MAD (minimizar desviaciones absolutas), que selecciona $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ para minimizar $\Sigma|(y_i - (b_0 + b_1 x_i)|$. A diferencia de las estimaciones de mínimos cuadrados, no hay fórmulas exactas para las estimaciones MAD; sus valores deben encontrarse mediante procedimientos computacionales iterativos. Estos procedimientos también se usan cuando se sospecha que las ϵ_i tienen una distribución que no es normal y que, en cambio, tiene "colas pesadas" (lo cual hace más probable para la distribución normal que valores discrepantes entren en la muestra); los procedimientos de regresión robustos son aquellos que producen estimaciones confiables para una amplia variedad de distribuciones de error subyacentes. Los estimadores de mínimos cuadrados no son robustos del mismo modo que la media muestral $\overline{X}$ no es un estimador robusto para μ.

Cuando una gráfica sugiere dependencia del tiempo en los términos de error, un análisis apropiado puede comprender una transformación de las y o un modelo que, de forma explícita, incluya una variable de tiempo. Por último, una gráfica como la de la figura 13.2(f), que presenta un patrón en los residuos cuando se traza contra una variable omitida, sugiere que se debe considerar un modelo de regresión múltiple que incluya la variable previamente omitida.

EJERCICIOS Sección 13.1 (1–14)

1. Suponga que las variables x = distancia de viaje al trabajo y y = tiempo de recorrido del viaje al trabajo están relacionadas de acuerdo con el modelo de regresión lineal simple con $\sigma = 10$.

a. Si se hacen $n = 5$ observaciones en los valores x de $x_1 = 5$, $x_2 = 10$, $x_3 = 15$, $x_4 = 20$ y $x_5 = 25$, calcule las desviaciones estándar de los cinco residuos correspondientes.

b. Repita el inciso a) para $x_1 = 5$, $x_2 = 10$, $x_3 = 15$, $x_4 = 20$ y $x_5 = 50$.

c. ¿Qué implican los resultados de los incisos a) y b) acerca de la desviación de la recta estimada a partir de la observación hecha en el valor x máximo muestreado?

2. En la tabla siguiente se muestran los valores x y los residuos estandarizados para los datos de flujo de cloro/velocidad de grabado del ejercicio 52 (sección 12.4). Construya una gráfica de residuos estandarizados y comente sobre su aspecto.

x	1.50	1.50	2.00	2.50	2.50
e^*	.31	1.02	−1.15	−1.23	.23
x	3.00	3.50	3.50	4.00	
e^*	.73	−1.36	1.53	.07	

3. El ejemplo 12.6 presenta los residuos de una regresión lineal simple de contenido de humedad y sobre la rapidez de filtración x.

a. Trace los residuos en función de x. ¿Sugerirá la gráfica resultante que una función de regresión de línea recta es una opción razonable de modelo? Explique su razonamiento.

b. Usando $s = .665$, calcule los valores de los residuos estandarizados. ¿Serán $e_i^* \approx e_i$ para $i = 1,..., n$, o será que las e_i^* no están cerca de ser proporcionales a las e_i?

c. Trace los residuos estandarizados en función de x. ¿Será que esta gráfica difiere significativamente en su aspecto general respecto a la gráfica del inciso a)?

4. Los datos anexos en y = energía normalizada (J/m^2) y x = presión intraocular (mmHg) aparecen en un diagrama de dispersión en el artículo **"Evaluating the Risk of Eye Injuries: Intraocular Pressure During High Speed Projectile Impacts" (*Current Eye Research*, 2012: 43–49)**; sobre la gráfica se superpuso una función de regresión estimada.

x	2761	19764	25713	3980	12782	19008
y	1553	14999	32813	1667	8741	16526
x	20782	19028	14397	9606	3905	25731
y	26770	16526	9868	6640	1220	30730

a. Aquí se muestra el resultado de Minitab al ajustar el modelo de regresión lineal simple. ¿Será que el modelo especifica una relación útil entre las dos variables?

```
Predictor          Coef          SE Coef      T      P
Constant          −5090             2257  −2.26  0.048
Presión          1.2912           0.1347   9.59  0.000
S=3679.36  R-Sq=90.2%  R-Sq(adj)=89.2%
```

b. Los residuos estandarizados que se obtienen al ajustar el modelo de regresión lineal simple (en el mismo orden que las observaciones) son .98, −1.57, 1,47, .50, −.76, −.84, 1.47, −.85, −1.03, −.20, .40 y .81. Haga una gráfica de e^* contra x y comente al respecto. [*Nota*: El modelo ajustado en el artículo citado no fue lineal.]

5. Cuando desciende la temperatura del aire, el agua de un río se hace muy fría y se forman cristales de hielo. Este hielo puede afectar de manera significativa la hidráulica de un río. El artículo **"Laboratory Study of Anchor Ice Growth" (*J. of Cold Regions Engr.*, 2001: 60–66)** describe un experimento en el que el grosor del hielo (mm) se estudió como función del tiempo transcurrido (h) bajo condiciones especificadas. La información siguiente se leyó de una gráfica del artículo: $n = 33$; $x = .17$, .33, .50, .67,..., 5.50; $y = .50$, 1.25, 1.50, 2.75, 3.50, 4.75, 5.75, 5.60, 7.00, 8.00, 8.25, 9.50, 10.50, 11.00, 10.75, 12.50, 12.25, 13.25, 15.50, 15.00, 15.25, 16.25, 17.25, 18.00, 18.25, 18.15, 20.25, 19.50, 20.00, 20.50, 20.60, 20.50, 19.80.

a. El valor r^2 resultante de un ajuste de mínimos cuadrados es .977. Interprete este valor y comente sobre lo apropiado de suponer una relación lineal aproximada.

b. Los residuos, escritos en el mismo orden que los valores x, son:

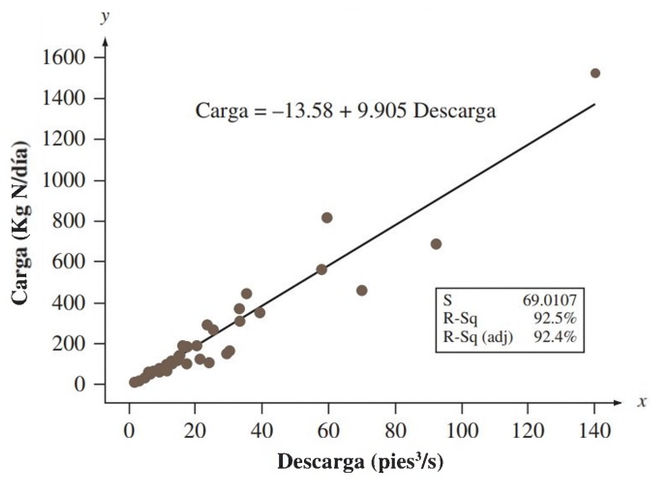
−1.03	−0.92	−1.35	−0.78	−0.68	−0.11	0.21
−0.59	0.13	0.45	0.06	0.62	0.94	0.80
−0.14	0.93	0.04	0.36	1.92	0.78	0.35
0.67	1.02	1.09	0.66	−0.09	1.33	−0.10
−0.24	−0.43	−1.01	−1.75	−3.14		

Grafique los residuos contra el tiempo transcurrido. ¿Qué sugiere la gráfica?

6. El gráfico de dispersión anexo se basa en datos proporcionados por los autores del artículo **"Spurious Correlation in the USEPA Rating Curve Method for Estimating Pollutant Loads" (*J. of Envir. Engr.*, 2008: 610–618)**, aquí la descarga es en pies^3/s en lugar de los m^3/s utilizados en el artículo. El punto en el extremo derecho de la gráfica corresponde a la observación (140, 1529.35). El residuo estandarizado resultante es de 3.10. Minitab marca la observación con una R para grandes residuos y una X para la observación potencialmente influyente. Aquí se muestra información sobre la pendiente estimada:

	Muestra complete	**(140, 1529.35) eliminada**
$\hat{\beta}_1$	9.9050	8.8241
$s_{\hat{\beta}_1}$	.3806	.4734

¿Será que esta observación ejerció un impacto sustancial en la pendiente estimada? Explique.



7. Los paneles de material compuesto con estructura tipo sándwich, son ampliamente utilizados en diversas aplicaciones estructurales aeroespaciales, tales como costillas, superficies de control y timones. El artículo **"Core Crush Problem in Manufacturing of Composite Sandwich Structures: Mechanisms and Solutions" (*Amer. Inst. of Aeronautics and Astronautics J.*, 2006:**

901–907), ajusta a una recta los datos siguientes en x = espesor preimpregnado = (mm) y y = núcleo aplastado (%):

x	.246	.250	.251	.251	.254	.262	.264	.270
y	16.0	11.0	15.0	10.5	13.5	7.5	6.1	1.7
x	.272	.277	.281	.289	.290	.292	.293	
y	3.6	0.7	0.9	1.0	0.7	3.0	3.1	

a. Ajuste el modelo de regresión lineal simple. ¿Qué proporción de la variación observada en el núcleo aplastado puede ser atribuida a la relación del modelo?

b. Construya un diagrama de dispersión. ¿Será que el argumento sugiere que una relación probabilística lineal es la adecuada?

c. Obtenga los residuos y los residuos estandarizados y luego construya las gráficas de residuos. ¿Qué sugieren estas gráficas? ¿Qué tipo de función debe proporcionar un mejor ajuste a los datos que el de una línea recta?

8. El registro continuo de ritmo cardiaco se puede usar para obtener información acerca del nivel de intensidad de ejercicio o esfuerzo físico durante una participación deportiva, trabajo u otras actividades diarias. El artículo **"The Relationship Between Heart Rate and Oxygen Uptake During Non-Steady State Exercise" (*Ergonomics*, 2000: 1578–1592)** publica un estudio para investigar el uso de la respuesta del ritmo cardiaco (x, como porcentaje del ritmo máximo) para predecir la oxigenación (y, como porcentaje de la oxigenación máxima) durante el ejercicio. La información siguiente es de una gráfica del artículo.

RC	43.5	44.0	44.0	44.5	44.0	45.0	48.0	49.0
VO_2	22.0	21.0	22.0	21.5	25.5	24.5	30.0	28.0
RC	49.5	51.0	54.5	57.5	57.7	61.0	63.0	72.0
VO_2	32.0	29.0	38.5	30.5	57.0	40.0	58.0	72.0

Use un paquete computacional de estadística para efectuar un análisis de regresión lineal simple, poniendo particular atención en la presencia de cualesquiera observaciones poco comunes o que influyan.

9. Considere los siguientes cuatro conjuntos de datos (x, y); los tres primeros tienen los mismos valores de x, de modo que estos valores aparecen sólo una vez. (Frank Anscombe, **"Graphs in Statistical Analysis", *Amer. Statistician*, 1973: 17-21**):

Conjunto de datos	**1–3**	**1**	**2**	**3**	**4**	**4**
Variable	x	y	y	y	x	y
	10.0	8.04	9.14	7.46	8.0	6.58
	8.0	6.95	8.14	6.77	8.0	5.76
	13.0	7.58	8.74	12.74	8.0	7.71
	9.0	8.81	8.77	7.11	8.0	8.84
	11.0	8.33	9.26	7.81	8.0	8.47
	14.0	9.96	8.10	8.84	8.0	7.04
	6.0	7.24	6.13	6.08	8.0	5.25
	4.0	4.26	3.10	5.39	19.0	12.50
	12.0	10.84	9.13	8.15	8.0	5.56
	7.0	4.82	7.26	6.42	8.0	7.91
	5.0	5.68	4.74	5.73	8.0	6.89

Para cada uno de estos cuatro conjuntos de datos, los valores de las estadísticas de resumen Σx_i, Σx_i^2, Σy_i, Σy_i^2 y $\Sigma x_i y_i$ son prácticamente idénticos, de modo que todas las cantidades calculadas de estos cinco serán idénticas en esencia para los cuatro conjuntos: la recta de mínimos cuadrados ($y = 3 + .5x$), SSE, s^2, r^2, intervalos t, estadísticos t, etcétera. Los resúmenes estadísticos no proporcionan un modo de distinguir entre los cuatro conjuntos de datos. Con base en un diagrama de dispersión y una gráfica de residuos para cada conjunto, comente sobre lo apropiado o no de ajustar un modelo de línea recta; incluya en sus comentarios cualquier sugerencias: en específico sobre cómo es que un "análisis de línea recta" podría modificarse o calificarse.

10. **a.** Demuestre que $\Sigma_{i=1}^{n} e_i = 0$ cuando las e_i son los residuos de una regresión lineal simple.

b. Los residuos de una regresión lineal simple ¿serán independientes entre sí, estarán positivamente correlacionados, o negativamente correlacionados? Explique.

c. Demuestre que $\Sigma_{i=1}^{n} x_i e_i = 0$ para los residuos de una regresión lineal simple. (Este resultado junto con el inciso a) muestra que hay dos restricciones lineales en las e_i, resultando en una pérdida de 2 grados de libertad cuando se usa el cuadrado de los residuos para estimar σ^2.)

d. ¿Será cierto que $\Sigma_{i=1}^{n} e_i^* = 0$? Dé una prueba o un ejemplo contrario.

11. **a.** Exprese el i-ésimo residuo $Y_i - \hat{Y}_i$, donde $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$, en la forma $\Sigma c_j Y_j$, una función lineal de las Y_j. A continuación use reglas de varianza para verificar que $V(Y_i - \hat{Y}_i)$ está dada por la expresión (13.2).

b. Se puede demostrar que $\hat{Y}_i$ y $Y_i - \hat{Y}_i$ (el i-ésimo valor pronosticado y el residuo) son independientes entre sí. Use este hecho, la relación $Y_i = \hat{Y}_i + (Y_i - \hat{Y}_i)$, y la expresión para $V(\hat{Y})$ de la sección 12.4 para otra vez verificar la expresión (13.2).

c. Cuando x_i se aleja de $\bar{x}$, ¿qué les ocurre a $V(\hat{Y}i)$ y a $V(Y_i - \hat{Y}_i)$?

12. **a.** ¿Podría una regresión lineal dar por resultado 23, −27, 5, 17, −8, 9 y 15? ¿Por qué sí o por qué no?

b. ¿Podría una regresión lineal resultar en residuos 23, −27, 5, 17, −8, −12 y 2, correspondientes a los valores x de 3, −4, 8, 12, −14, −20 y 25? ¿Por qué sí o por qué no? [*Sugerencia*: Vea el ejercicio 10.]

13. Recuerde que $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$ tiene una distribución normal con valor esperado $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$ y varianza

$$\sigma^2\left\{\frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2}\right\}$$

de modo que

$$Z = \frac{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x - (\beta_0 + \beta_1 x)}{\sigma\left(\frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}\right)^{1/2}}$$

tiene una distribución normal estándar. Si $S = \sqrt{\text{SSE}/(n-2)}$ se sustituye por σ, la variable resultante tiene una distribución t con $n - 2$ grados de libertad. Por analogía, ¿cuál es la distribución de cualquier residuo estandarizado en particular?

Si $n = 25$, ¿cuál es la probabilidad de que un residuo estandarizado en particular caiga fuera del intervalo $(-2.50, 2.50)$?

14. Si hay al menos un valor de x en el que más de una observación se haya hecho, hay un procedimiento formal de prueba para probar H_0: $\mu_{Y \cdot x} = \beta_0 + \beta_1 x$ para algunos valores β_0, β_1 (la función de regresión verdadera es lineal)

contra

H_a: H_0 no es verdadera (la función de regresión verdadera no es lineal)

Suponga que se hacen observaciones en $x_1, x_2, \ldots, x_c$. Denote con $Y_{11}, Y_{12}, \ldots, Y_{1n_1}$ las n_1 observaciones cuando $x = x_1; \ldots; Y_{c1}, Y_{c2}, \ldots, Y_{cn_c}$ denota las n_c observaciones cuando $x = x_c$. Con $n = \Sigma n_i$ (el número total de observaciones), SSE tiene $n - 2$ grados de libertad. Se descompone SSE en dos partes, SSPE (error puro) y SSLF (falta de ajuste) como sigue:

$$\text{SSPE} = \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{i\cdot})^2$$
$$= \sum\sum Y_{ij}^2 - \sum n_i \bar{Y}_{i\cdot}^2$$

$$\text{SSLF} = \text{SSE} - \text{SSPE}$$

Las n_i observaciones en x_i contribuyen con $n_i - 1$ grados de libertad a SSPE, de modo que el número de grados de libertad para SSPE es $\Sigma_i(n_i - 1) = n - c$ y los grados de libertad para SSLF son $n - 2 - (n - c) = c - 2$. Sean MSPE = SSPE/$(n - c)$ y MSLF = SSLF/$(c - 2)$. Entonces se puede demostrar que mientras $E(\text{MSPE}) = \sigma^2$, ya sea que H_0 sea verdadera o no, $E(\text{MSLF}) = \sigma^2$ si H_0 es verdadera y $E(\text{MSLF}) > \sigma^2$ si H_0 es falsa.

La prueba estadística es $F = \text{MSLF/MSPE}$ y el correspondiente valor P es el área bajo la curva de $F_{c-2,n-c}$, a la derecha de f.

Los datos siguientes provienen del artículo **"Changes in Growth Hormone Status Related to Body Weight of Growing Cattle" (*Growth*, 1977: 241–247)**, con x = peso corporal y y = rapidez de eliminación metabólica/peso corporal.

x	110	110	110	230	230	230	360
y	235	198	173	174	149	124	115
x	360	360	360	505	505	505	505
y	130	102	95	122	112	98	96

(Así, $c = 4$, $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 4$.)

a. Pruebe H_0 contra H_a al nivel .05 usando la prueba de falta de ajuste que hemos descrito.

b. ¿Sugerirá, un diagrama de dispersión de los datos que la relación entre x y y es lineal? ¿Cómo se compara esto con el resultado del inciso a)? (En el artículo se utilizó una función de regresión no lineal.)

13.2 Regresión con variables transformadas

La necesidad de una alternativa para el modelo lineal $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$ puede ser sugerida, ya sea por un argumento teórico o al examinar gráficas de diagnóstico desde un análisis de regresión lineal. En cualquiera de estos casos es deseable escoger un modelo cuyos parámetros se puedan estimar con facilidad. Una clase importante de estos modelos se especifica mediante funciones "intrínsecamente lineales".

DEFINICIÓN

Una función que relacione y con x es **intrínsecamente lineal** si mediante una transformación de x o y, la función se puede expresar como $y' = \beta_0 + \beta_1 x'$, donde $x' =$ la variable independiente transformada y $y' =$ la variable dependiente transformada.

En la tabla 13.1 se proporcionan cuatro de las funciones intrínsecamente lineales más útiles. En cada caso la transformación apropiada es una transformación logarítmica, ya sea de logaritmos de base 10 o naturales (base e), o una transformación recíproca. En la figura 13.3 se muestran algunas gráficas representativas de las cuatro funciones.

Para una relación de función exponencial, sólo y se transforma para alcanzar linealidad, mientras que, para una relación de función de potencia, tanto x como y se transforman. Debido a que la variable x está en el exponente de una relación exponencial, y crece

Tabla 13.1 Funciones útiles intrínsecamente lineales*

Función	Transformaciones a linealizar	Forma lineal
a. Exponencial: $y = \alpha e^{\beta x}$	$y' = \ln(y)$	$y' = \ln(\alpha) + \beta x$
b. Potencia: $y = \alpha x^{\beta}$	$y' = \log(y), x' = \log(x)$	$y' = \log(\alpha) + \beta x'$
c. $y = \alpha + \beta \cdot \log(x)$	$x' = \log(x)$	$y = \alpha + \beta x'$
d. Recíproca: $y = \alpha + \beta \cdot \frac{1}{x}$	$x' = \frac{1}{x}$	$y = \alpha + \beta x'$

*Cuando log (·) aparece, se puede utilizar logaritmo en base 10 o en base e.

(si $\beta > 0$) o decrece (si $\beta < 0$) con mayor rapidez cuando x aumenta más de lo que es el caso para la función de potencia, aun cuando en un breve intervalo de valores de x puede ser difícil distinguir entre las dos funciones. Ejemplos de funciones que no son intrínsecamente lineales son $y = \alpha + \gamma e^{\beta x}$ y $y = \alpha + \gamma x^{\beta}$.

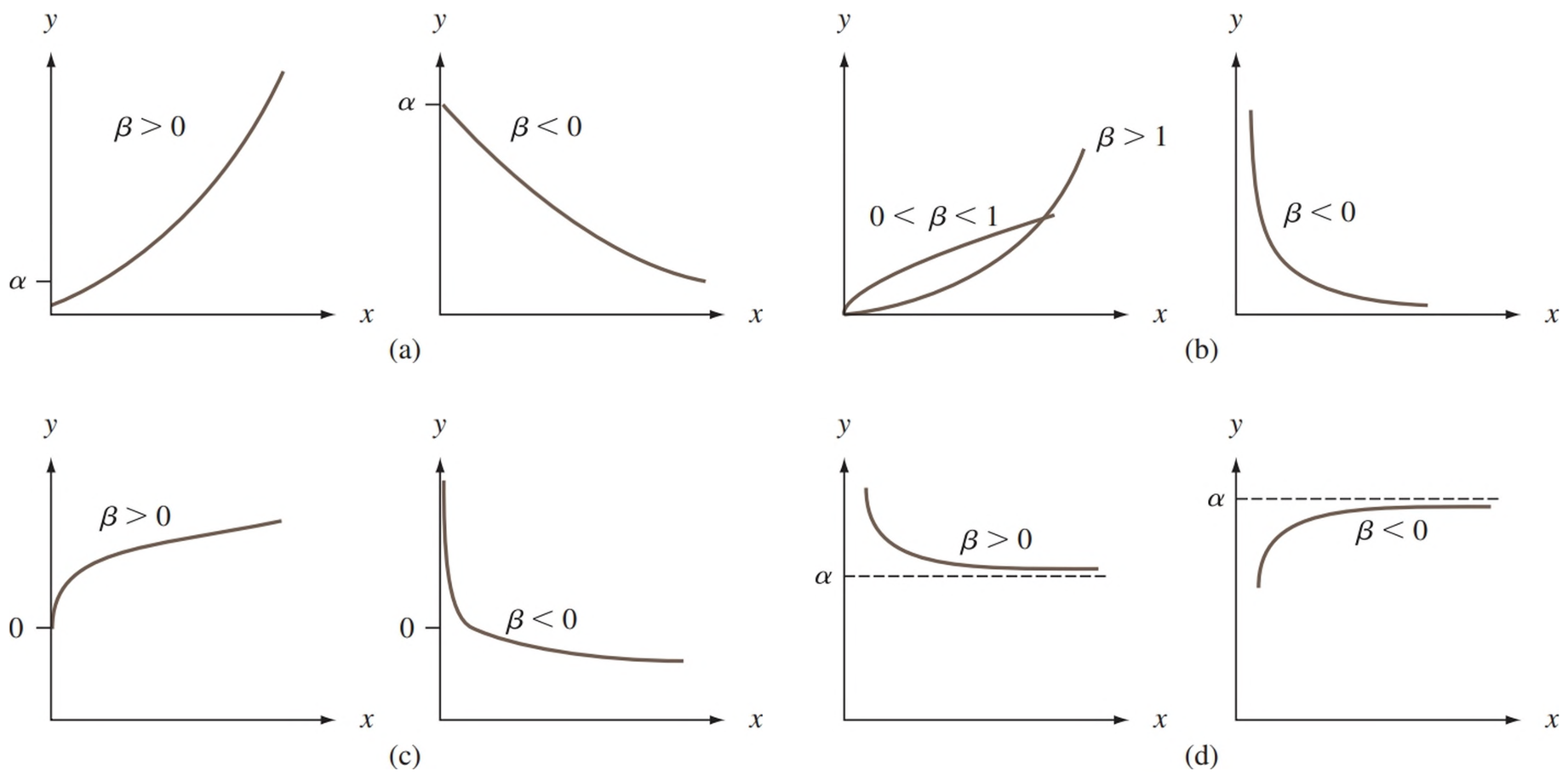


Figura 13.3 Gráficas de las funciones intrínsecamente lineales dadas en la tabla 13.1

Las funciones intrínsecamente lineales llevan directamente a modelos probabilísticos que, aun cuando no son lineales en x como función tienen parámetros cuyos valores se estiman con facilidad usando mínimos cuadrados ordinarios.

DEFINICIÓN

> Un modelo probabilístico que relaciona Y con x es **intrínsecamente lineal** si, mediante una transformación en Y o x, se puede reducir a un modelo probabilístico lineal $Y' = \beta_0 + \beta_1 x' + e'$.

Los modelos probabilísticos intrínsecamente lineales que corresponden a las cuatro funciones de la tabla 13.1 son los siguientes:

a. $Y = \alpha e^{\beta x} \cdot \boldsymbol{\epsilon}$, un modelo multiplicativo exponencial, de modo que $\ln(Y) = Y' = \beta_0 + \beta_1 x' + \boldsymbol{\epsilon}'$ con $x' = x$, $\beta_0 = \ln(\alpha)$, $\beta_1 = \beta$ y $\boldsymbol{\epsilon}' = \ln(\boldsymbol{\epsilon})$.

b. $Y = \alpha e^{\beta} \cdot \boldsymbol{\epsilon}$, un modelo multiplicativo de potencia, de modo que $\log(Y) = Y' = \beta_0 + \beta_1 x' + \boldsymbol{\epsilon}'$ con $x' = \log(x)$, $\beta_0 = \log(x) + \boldsymbol{\epsilon}$ y $\boldsymbol{\epsilon}' = \log(\boldsymbol{\epsilon})$.

c. $Y = \alpha + \beta \log(x) + \epsilon$, de modo que $x' = \log(x)$ linealiza de inmediato el modelo.

d. $Y = \alpha + \beta \cdot 1/x + \epsilon$, de modo que $x' = 1/x$ da un modelo lineal.

Los modelos aditivos exponencial y de potencia, $Y = \alpha e^{\beta x} + \epsilon$ y $Y = \alpha x^{\beta} + \epsilon$, no son intrínsecamente lineales. Nótese que a) y b) requieren una transformación en Y y, como resultado, una transformación en la variable de error ϵ. De hecho, si ϵ tiene una distribución lognormal (véase capítulo 4) con $E(\epsilon) = e^{\sigma^2/2}$ y $V(\epsilon) = \tau^2$ independientes de x, entonces los modelos transformados para a) y b) van a satisfacer todas las suposiciones del capítulo 12 respecto al modelo probabilístico lineal; esto a su vez implica que todas las inferencias para los parámetros del modelo transformado con base en estas suposiciones será válido. Si σ^2 es pequeña, $\mu_{Y \cdot x} \approx \alpha e^{\beta x}$ en a) o αx^{β} en b).

La ventaja principal de un modelo intrínsecamente lineal es que los parámetros β_0 y β_1 del modelo transformado se pueden estimar de inmediato, con el uso del principio de mínimos cuadrados, con sólo sustituir x' y y' en las fórmulas estimadoras:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\Sigma x_i' y_i' - \Sigma x_i' \Sigma y_i'/n}{\Sigma (x_i')^2 - (\Sigma x_i')^2/n}$$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\Sigma y_i' - \hat{\beta}_1 \Sigma x_i'}{n} = \bar{y}' - \hat{\beta}_1 \bar{x}' \qquad \textbf{(13.5)}$$

Los parámetros del modelo original no lineal se pueden estimar entonces al transformar nuevamente $\hat{\beta}_0$ o $\hat{\beta}_1$ si es necesario. Una vez calculado el intervalo de predicción para y' cuando $x' = x'^*$, la inversión de la transformación da un intervalo de predicción (IP) para y misma. En los casos a) y b), cuando σ^2 es pequeña, un intervalo de confianza (IC) aproximado para $\mu_{Y \cdot x^*}$ resulta de tomar los antilog de los límites del IC para $\beta_0 + \beta_1 x'^*$. (Estrictamente hablando, al tomar antilogaritmos da un IC para la *mediana* de la distribución Y, es decir, para $\tilde{\mu}_{Y \cdot x^*}$. Debido a que la distribución lognormal está sesgada de manera positiva, $\mu > \tilde{\mu}$; las dos son aproximadamente iguales si σ^2 es cercana a 0.)

EJEMPLO 13.3 La ecuación de Taylor para la duración de las herramientas y como función del tiempo de corte x indica que $xy^c = k$ o bien, lo que es equivalente, que $y = \alpha x^{\beta}$ (consulte en Wikipedia acerca del desgaste de herramientas para obtener más información). El artículo **"The Effect of Experimental Error on the Determination of Optimum Metal Cutting Conditions" (*J. of Engr. for Industry*, 1967: 315-322)** observa que la relación no es exacta (determinista) y que los parámetros α y β deben ser estimados a partir de los datos. Así, un modelo apropiado es el modelo multiplicativo de la potencia $Y = \alpha \cdot x^{\beta} \cdot \epsilon$, que el autor ajustó a los datos que se muestran a continuación y que constan de las observaciones de la duración de 12 herramientas de carburo (tabla 13.2). Además de los valores x, y, x' y y' se dan los valores transformados pronosticados ($\hat{y}'$) y los valores pronosticados en la escala original ($\hat{y}$, luego de transformarse de nuevo).

Los resúmenes estadísticos para ajustar una línea recta a los datos transformados son $\Sigma x_i' = 74.41200$, $\Sigma y_i' = 26.22601$, $\Sigma x_i'^2 = 461.75874$, $\Sigma y_i'^2 = 67.74609$ y $\Sigma x_i' y_i' = 160.84601$ de modo que

$$\hat{\beta}_1 = \frac{160.84601 - (74.41200)(26.22601)/12}{461.75874 - (74.41200)^2/12} = -5.3996$$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{26.22601 - (-5.3996)(74.41200)}{12} = 35.6684$$

Los valores estimados para α y β, los parámetros del modelo de la función de potencia, son $\hat{\beta} = \hat{\beta}_1 = -5.3996$ y $\hat{\alpha} = e^{\hat{\beta}_0} = 3.094491530 \cdot 10^{15}$. Entonces, la función de regresión

Tabla 13.2 Datos para el ejemplo 13.3

	x	y	$x' = \ln(x)$	$y' = \ln(y)$	$\hat{y}'$	$\hat{y} = e^{\hat{y}'}$
1	600	2.35	6.39693	.85442	1.12754	3.0881
2	600	2.65	6.39693	.97456	1.12754	3.0881
3	600	3.00	6.39693	1.09861	1.12754	3.0881
4	600	3.60	6.39693	1.28093	1.12754	3.0881
5	500	6.40	6.21461	1.85630	2.11203	8.2650
6	500	7.80	6.21461	2.05412	2.11203	8.2650
7	500	9.80	6.21461	2.28238	2.11203	8.2650
8	500	16.50	6.21461	2.80336	2.11203	8.2650
9	400	21.50	5.99146	3.06805	3.31694	27.5760
10	400	24.50	5.99146	3.19867	3.31694	27.5760
11	400	26.00	5.99146	3.25810	3.31694	27.5760
12	400	33.00	5.99146	3.49651	3.31694	27.5760

estimada es $\hat{\mu}_{Y \cdot x} \approx 3.094491530 \cdot 10^{15} \cdot x^{-5.3996}$. Para recapturar la ecuación de Taylor (estimada), se establece $y = 3.094491530 \cdot 10^{15} \cdot x^{-5.3996}$, de donde $xy^{.185} = 740$.

La figura 13.4(a) muestra una gráfica de los residuos estandarizados de la regresión lineal usando variables transformadas (para las que $r^2 = .922$); no hay patrón aparente en la gráfica, aun cuando un residuo estandarizado es un poco grande, y los residuos se ven como deben para una regresión lineal simple. La figura 13.4(b) presenta una gráfica de $\hat{y}$ en función de y, que indica predicciones satisfactorias sobre la escala original.

Para obtener un intervalo de confianza para la duración mediana de la herramienta cuando el tiempo de corte es 500, se transforma $x = 500$ a $x' = 6.21461$. Entonces $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x' = 2.1120$, y un intervalo de confianza de 95% para $\beta_0 + \beta_1$ (6.21461) es (de la sección 12.4) $2.1120 \pm (2.228)(.0824) = (1.928, 2.296)$. El intervalo de confianza de 95% para $\widetilde{\mu}_{Y \cdot 500}$ se obtiene entonces al tomar los antilogaritmos: $(e^{1.928}, e^{2.296}) = (6.876, 9.930)$. Se puede verificar con facilidad que para los datos transformados $s^2 = \hat{\sigma}^2 \approx .081$. Debido a que esto es muy pequeño (6.876, 9.930) es un intervalo aproximado para $\mu_{Y \cdot 500}$.

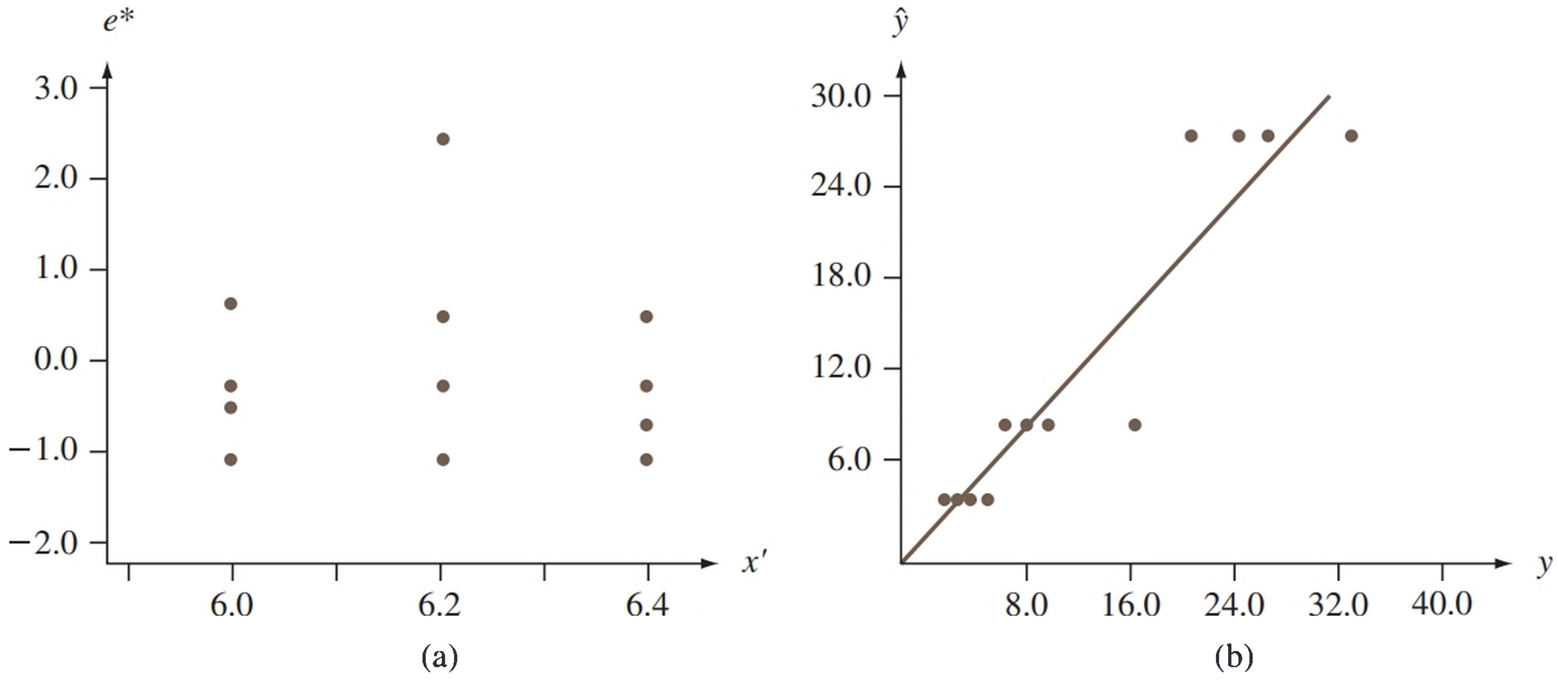


Figura 13.4 (a) Residuos estandarizados en función de x' del ejemplo 13.3; (b) $\hat{y}$ en función de y del ejemplo 13.3 ■

EJEMPLO 13.4 Los datos anexos para x = longitud de un pez mero (mm) y y = contenido de mercurio (mg/kg) se obtuvieron a partir de una gráfica en el artículo **"Mercury in Groupers and Sea Basses from the Gulf of Mexico: Relationships with Size, Age, and Feeding Ecology" (*Transactions of the Amer. Fisheries Soc.*, 2012: 1274–1286)**.

x	285	297	334	362	407	438	455	486	512
y	.076	.045	.064	.080	.061	.071	.131	.198	.084
x	520	535	560	573	590	598	612	667	690
y	.247	.223	.223	.278	.368	.497	.281	.257	.577

La figura 13.5 muestra un diagrama de dispersión de los datos y una gráfica de los residuos estandarizados a partir de una regresión lineal de y sobre x, ambos de Minitab. En esta última gráfica la mayoría de los puntos en el extremo izquierdo y derecho están por encima de la línea del cero, mientras que la mayoría de los puntos en el medio están por debajo de la recta. Esta indicación de curvatura es más evidente en la gráfica de residuos que en el diagrama de dispersión.

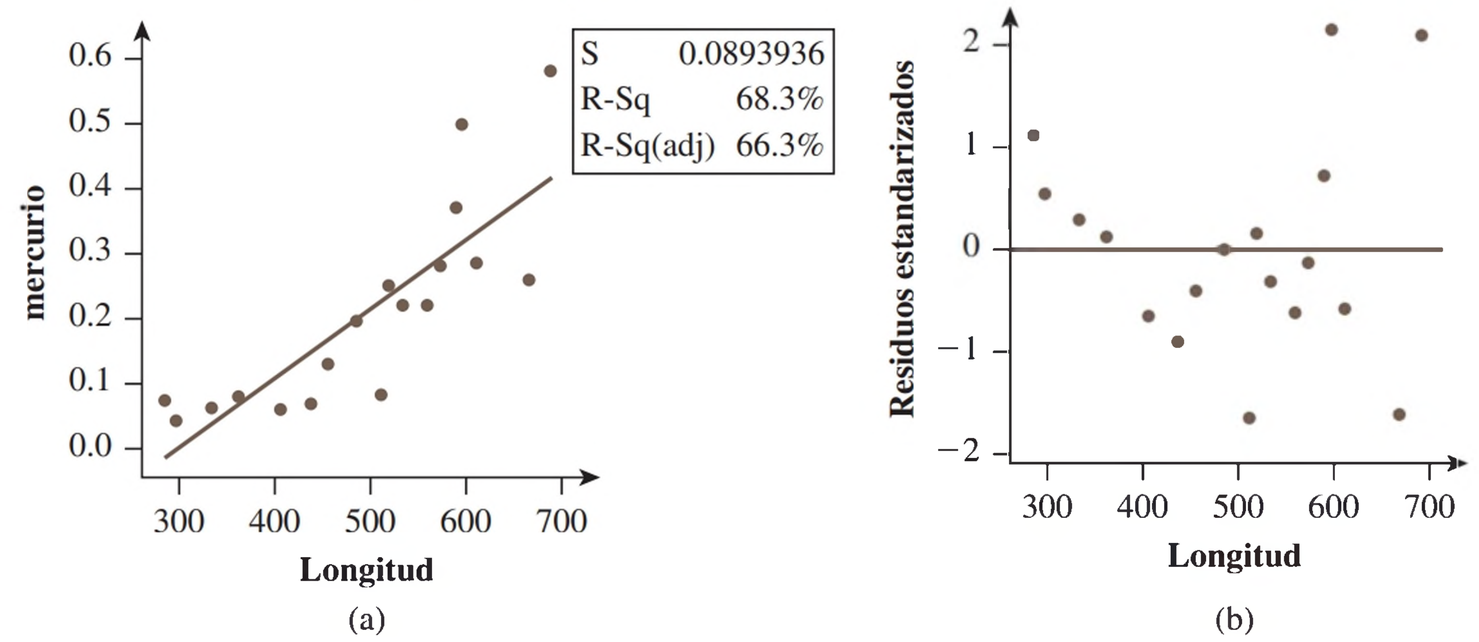


Figura 13.5 (a) Diagrama de dispersión; (b) gráfica de residuos de regresión lineal para los datos del ejemplo 13.4

La figura 13.6 muestra un diagrama de dispersión de ln(y) contra x y una gráfica de los residuos estandarizados resultantes de una regresión lineal de ln(y) sobre x. No hay un patrón discernible en la última gráfica más que el simple azar, y la gráfica de probabilidad normal de los residuos estandarizados (no mostrados) tiene un patrón lineal muy sustancial. El valor de r^2 para esta regresión transformada es razonablemente impresionante, y el valor P para la prueba de modelo de utilidad es .000. De hecho, el artículo citado en realidad contiene una gráfica de ln(y) en función de x; la ecuación de regresión incluida es muy cercana a la nuestra, con una $r^2 = .792$ para la muestra total de 49 observaciones.

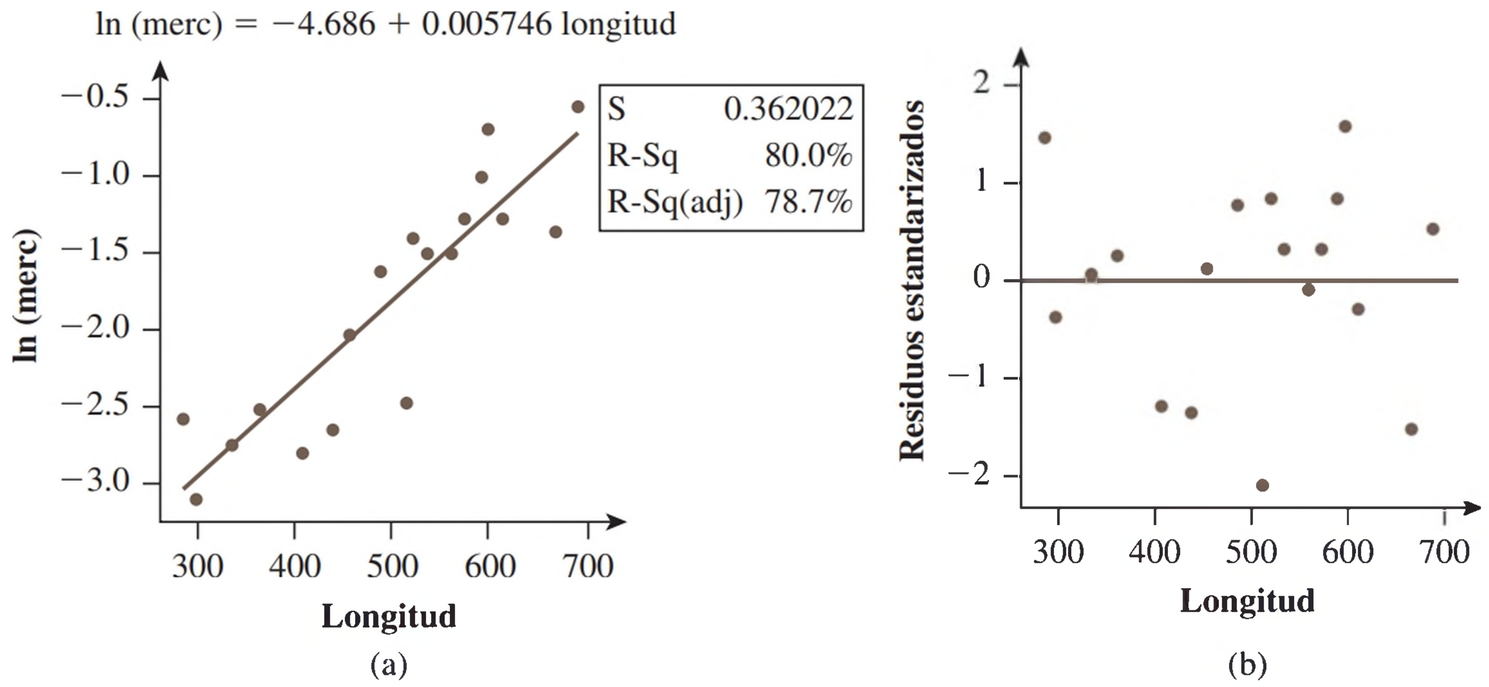


Figura 13.6 (a) Diagrama de dispersión; (b) Gráfica de residuos de regresión lineal para los datos del ejemplo 13.4

La función estimada de regresión exponencial no transformada es $y = e^{-4.686+.005746x} = .009224e^{.005746x}$, de la que se puede obtener una predicción puntual para una futura Y que corresponda a cualquier x particular. Un intervalo de predicción para el contenido de mercurio de un solo pez que tiene una longitud x^* se obtiene utilizando primero la regresión lineal simple para obtener un intervalo de predicción para $\ln(Y)$ y luego tomando el antilogaritmo de los dos puntos finales. Por ejemplo, un IP de 95% cuando $x = 500$ es $(e^{-2.6026}, e^{-1.0246}) = (.074, .359)$. ■

Al analizar datos transformados, se deben recordar los puntos siguientes:

1. Estimar β_1 y β_0 como en (13.5) y luego transformar de nuevo, para obtener estimaciones de los parámetros originales, no es equivalente a usar el principio de mínimos cuadrados directamente en el modelo original. Así, para el modelo exponencial, se podrían estimar α y β al minimizar $\Sigma(y_i - \alpha e^{\beta x_i})^2$. Sería necesario un cálculo iterativo. Las estimaciones resultantes no serían iguales $\hat{\alpha} \neq e^{\hat{\beta}_0}$ y $\hat{\beta} \neq \hat{\beta}_1$.
2. Si el modelo seleccionado no es intrínsecamente lineal, el método resumido en (13.5) no se puede usar. En lugar de esto, tendrían que aplicarse mínimos cuadrados (o algún otro procedimiento de ajuste) al modelo no transformado. Por tanto, para el modelo exponencial aditivo $Y = \alpha e^{\beta x} + \boldsymbol{\epsilon}$, los mínimos cuadrados comprenderían minimizar $\Sigma(y_i - \alpha e^{\beta x_i})^2$. Tomando derivadas parciales respecto a α y β resulta en dos ecuaciones normales no lineales en α y β; estas ecuaciones deben resolverse, por tanto, usando un procedimiento iterativo.
3. Cuando el modelo lineal transformado satisface todas las suposiciones mencionadas en el capítulo 12, el método de mínimos cuadrados da las mejores estimaciones de los parámetros transformados. No obstante, las estimaciones de los parámetros originales pueden no ser los mejores en ningún sentido, aun cuando serán razonables. Por ejemplo, en el modelo exponencial, el estimador $\hat{\alpha} = e^{\hat{\beta}_0}$ no será insesgado, aun cuando será el estimador de α de máxima probabilidad si el error variable $\boldsymbol{\epsilon}'$ está normalmente distribuido. Usar mínimos cuadrados de manera directa (sin transformar) podría dar mejores estimaciones.
4. Si se ha hecho una transformación en y y se desea usar las fórmulas estándar para probar hipótesis o construir intervalos de confianza (IC), $\boldsymbol{\epsilon}'$ debe estar distribuida al menos aproximadamente en forma normal. Para verificar esto, deben comprobarse los residuos de la regresión transformada.
5. Cuando y es transformada, el valor r^2 de la regresión resultante se refiere a una variación en las y_i' explicada por el modelo de regresión transformado. Aun cuando un alto valor de r^2 aquí indica un buen ajuste del modelo no lineal original estimado para las y_i observadas, r^2 no se refiere a las observaciones originales. Quizá la mejor forma de evaluar la calidad del ajuste es calcular los valores pronosticados $\hat{y}_i'$ usando el modelo transformado, transformándolos de nuevo a la escala y original para obtener $\hat{y}_i$, y luego trazar $\hat{y}$ en función de y. Un buen ajuste se hace entonces evidente por puntos cercanos a la recta de 45°. Se podría calcular $\text{SSE} = \Sigma(y_i - \hat{y}_i)^2$ como una medida numérica de la bondad de ajuste. Cuando el modelo era lineal, se comparó esto con $\text{SST} = \Sigma(y_i - \bar{y})^2$, la variación total alrededor de la recta horizontal a una altura $\bar{y}$, lo cual llevó a r^2. En el caso no lineal, sin embargo, no es necesariamente informativo medir la variación total en esta forma, de modo que un valor r^2 no es tan útil como en el caso lineal.

Métodos de regresión más generales

Hasta este punto se ha supuesto que $Y = f(x) + \boldsymbol{\epsilon}$ (un modelo aditivo) o que $Y = f(x) \cdot \boldsymbol{\epsilon}$ (un modelo multiplicativo). En el caso del modelo aditivo, $\hat{\mu}_{Y \cdot x} = f(x)$, de modo que estimar la función de regresión $f(x)$ equivale a estimar la curva de medias de y. En ocasiones,

un diagrama de dispersión de los datos sugiere que no hay una expresión matemática sencilla para $f(x)$. Los expertos en estadística han creado recientemente algunos métodos más flexibles que permiten modelar una amplia variedad de patrones usando el mismo procedimiento de ajuste. Uno de estos métodos es el **LOWESS** (o LOESS), que es la abreviatura de *locally weighted scatter plot smoother* (suavizador de gráfica de dispersión localmente ponderada). Denote con (x^*, y^*) uno de los n pares particulares (x, y) de la muestra. El valor $\hat{y}$ correspondiente a (x^*, y^*) se obtiene al ajustar una recta usando sólo un porcentaje especificado de los datos (por ejemplo 25%) cuyos valores x son más cercanos a x^*. Además, en lugar de usar mínimos cuadrados "ordinarios", que dan un valor igual a todos los puntos, los que tienen valores x más cercanos a x^* tienen más valor que los valores x que están más alejados. La altura de la recta resultante arriba de x^* es el valor ajustado $\hat{y}^*$. Este proceso se repite para cada uno de los puntos n, de modo que se ajustan n rectas diferentes (es seguro que el lector no desearía hacer esto manualmente). Por último, los puntos ajustados se unen para obtener una curva LOWESS.

EJEMPLO 13.5 Por lo general, no es factible poder pesar grandes animales muertos y encontrados en zonas silvestres, de modo que es mejor tener un método para estimar el peso a partir de diversas características de un animal que se puedan determinar con facilidad. Minitab tiene un conjunto de datos en la memoria que consisten en diversas características para una muestra de $n = 143$ osos salvajes. La figura 13.7(a) muestra un diagrama de dispersión de $y =$ peso en función de $x =$ distancia alrededor del pecho (circunferencia del pecho). A primera vista, parece como si una sola recta obtenida de mínimos cuadrados ordinarios resumiera de manera eficaz el patrón. La figura 13.7(b) muestra que la curva LOWESS producida por Minitab, usando un espacio de 50% [el ajuste en (x^*, y^*), está determinado por el 50% más cercano de la muestra]. La curva parece estar formada por dos segmentos de recta unidos arriba de aproximadamente $x = 38$. La línea más inclinada a la derecha de 38 indica que el peso tiende a aumentar con más rapidez como lo hace la circunferencia para circunferencias mayores a 38 pulgadas.

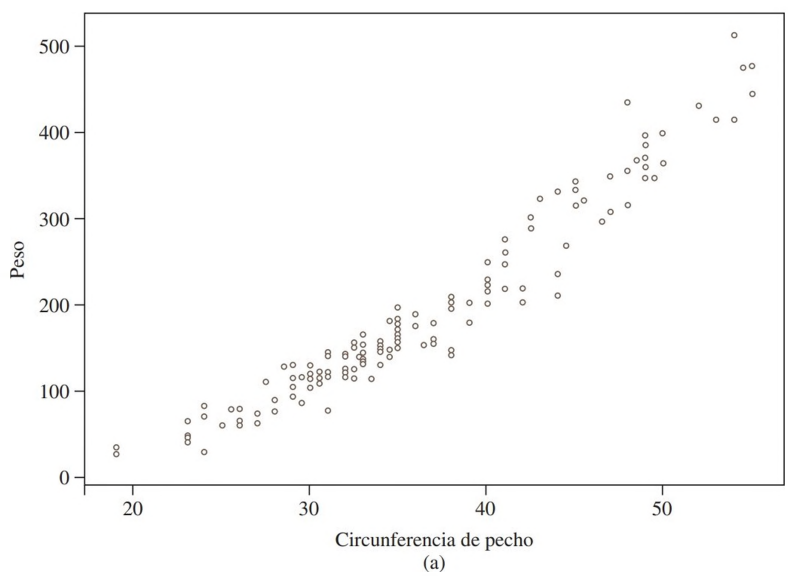


Figura 13.7 (a) Diagrama de dispersión de Minitab para datos del peso de los osos

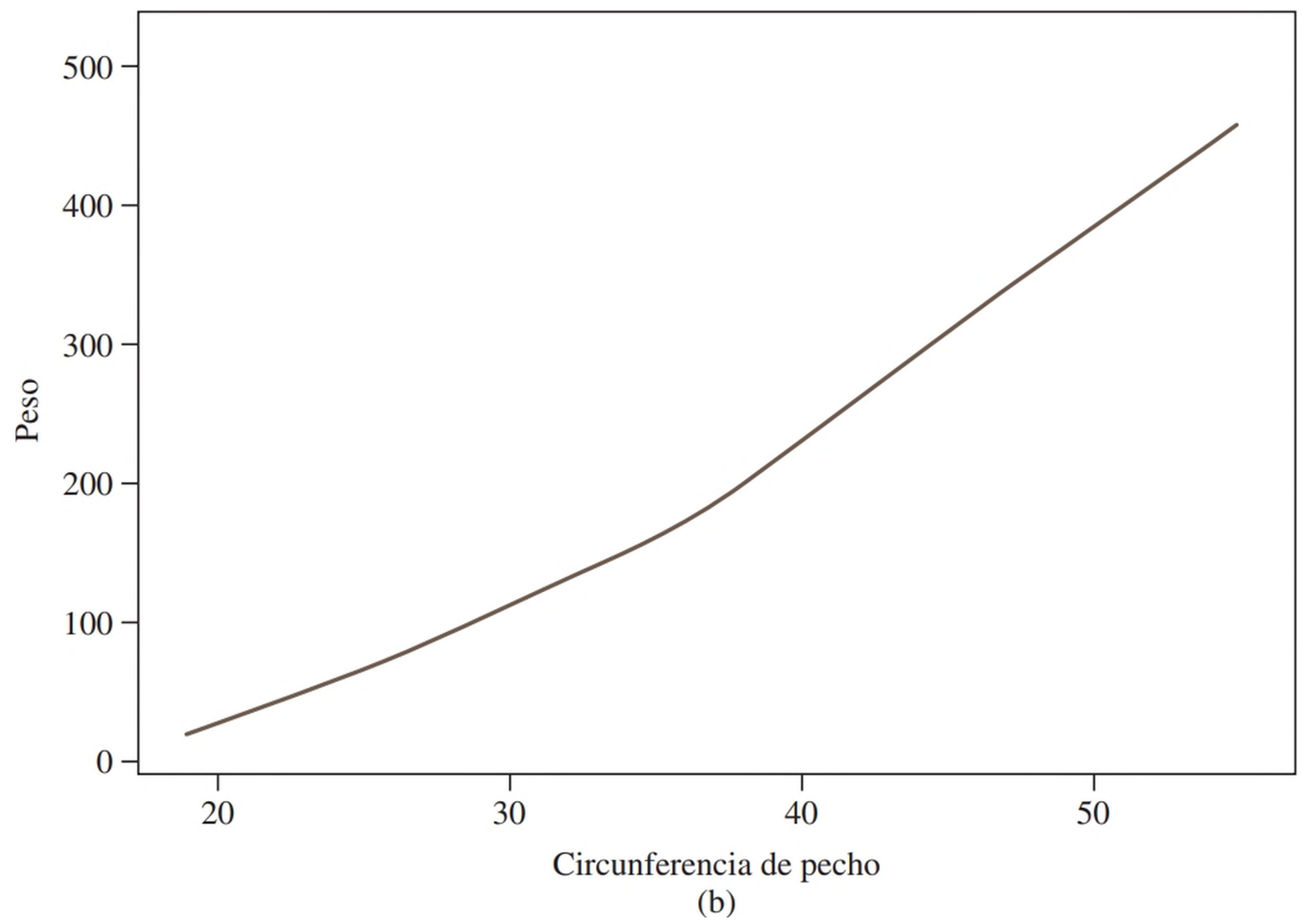


Figura 13.7 (b) Curva LOWESS de Minitab para datos del peso de los osos ■

Es complicado hacer otras inferencias (por ejemplo, obtener un intervalo de confianza para un valor y medio) con base en este tipo general de modelo de regresión. La técnica de instrucciones preliminares mencionada antes se puede usar para este fin.

Regresión logística

El modelo sencillo de regresión lineal es apropiado para relacionar una variable cuantitativa de respuesta a un predictor cuantitativo x. Considere ahora una variable de respuesta dicotómica con valores posibles 1 y 0 correspondientes a éxito y fracaso. Sea $p = P(S) = P(Y = 1)$. Con frecuencia, el valor de p dependerá del valor de alguna variable cuantitativa x. Por ejemplo, la probabilidad de que un auto necesite servicio de garantía de cierta clase podría depender de la distancia total recorrida por el vehículo; o la probabilidad de evitar una infección de cierto tipo podría depender de la dosis de una vacuna. En lugar de usar sólo el símbolo p para la probabilidad de éxito, ahora se usa $p(x)$ para resaltar la dependencia de esta probabilidad en el valor de x. La ecuación de regresión lineal simple $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$ ya no es apropiada, porque tomar la media de cada lado de la ecuación da

$$\mu_{Y \cdot x} = 1 \cdot p(x) + 0 \cdot (1 - p(x)) = p(x) = \beta_0 + \beta_1 x$$

Mientras que $p(x)$ es una probabilidad y, por tanto, debe ser entre 0 y 1, $\beta_0 + \beta_1 x$ no necesita estar en este rango.

En lugar de hacer que la media de Y sea una función lineal de x, ahora se considera un modelo en el que alguna función de la media de Y es una función lineal de x. En otras palabras se hace que $p(x)$ sea una función de $\beta_0 + \beta_1 x$ en lugar de $\beta_0 + \beta_1 x$ misma. Una función que se ha encontrado muy útil en numerosas aplicaciones es la **función logit**

$$p(x) = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x}}$$

La figura 13.8 muestra una gráfica de $p(x)$ para valores particulares de β_0 y β_1 con $\beta_1 > 0$. Cuando x aumenta, la probabilidad de éxito se incrementa. Para β_1 negativa, la probabilidad de éxito sería una función decreciente de x.

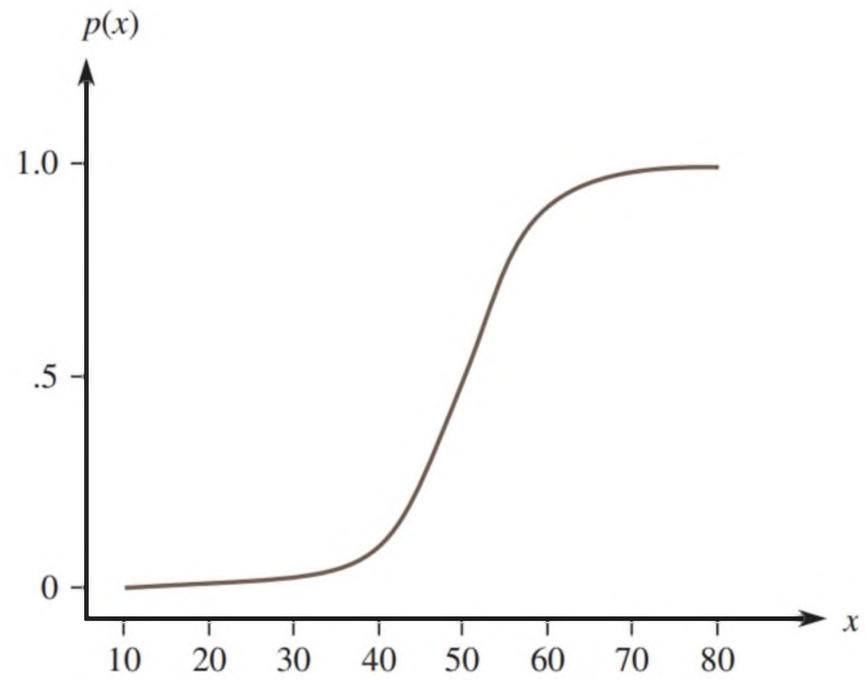


Figura 13.8 Gráfica de una función logit

Regresión logística significa suponer que $p(x)$ está relacionada con x por la función logit. El álgebra sencilla muestra que

$$\frac{p(x)}{1 - p(x)} = e^{\beta_0 + \beta_1 x}$$

La expresión del lado izquierdo recibe el nombre de *posibilidad*. Si, por ejemplo, $\frac{p(60)}{1 - p(60)} = 3$, entonces cuando $x = 60$ un éxito tiene tres veces más probabilidad que un fracaso. Ahora se ve que el logaritmo de la posibilidad es una función lineal del predictor. En particular, el parámetro de pendiente β_1 es el cambio en los logaritmos de las posibilidades asociadas con un aumento de una unidad en x. Esto implica que la posibilidad en sí cambia por el factor multiplicativo e^{β_1} cuando x aumenta en 1 unidad.

El ajuste de la regresión logística a los datos muestrales requiere que se estimen los parámetros β_0 y β_1. Por lo general esto se hace usando la técnica de máxima probabilidad descrita en el capítulo 6. Los detalles son muy complicados, pero por fortuna los paquetes de computación de estadística más populares harán esto previa solicitud y dan indicaciones cuantitativas y gráficas de qué tan bien ajusta el modelo.

EJEMPLO 13.6 He aquí los datos, en forma de una pantalla comparativa de tallo y hoja, de la temperatura en marcha y la incidencia de fracaso de los empaques o juntas (O-rings) en 23 lanzamientos antes del desastre del transbordador espacial Challenger, en 1986 (S = sí, falla; N = no, no falla). Las observaciones del lado izquierdo de la pantalla tienden a ser más pequeñas que las del lado derecho.

Sí		No	
873	5		
3	6	677789	Tallo: diez dígitos
500	7	002356689	Hoja: un dígito
	8	1	

La figura 13.9 muestra una salida Minitab para un análisis y una gráfica de la función de regresión logística estimada del software R. Se ha seleccionado denotar con p la probabilidad de falla. La gráfica de $\hat{p}$ disminuye a medida que aumenta la temperatura debido a que las fallas tienden a ocurrir a temperaturas más bajas que los éxitos. La estimación de β_1 y su desviación estándar estimada es $\hat{\beta}_1 = -.232$ y $s_{\hat{\beta}_1} = .1082$, respectivamente.

Suponemos que el tamaño de muestra n es suficientemente grande aquí, así que $\hat{\beta}_1$ tiene aproximadamente una distribución normal. Si $\beta_1 = 0$ (es decir, si la temperatura no afecta a la probabilidad de falla del empaque o junta), el estadístico de prueba $Z = \hat{\beta}_1 / s_{\hat{\beta}}$ tiene aproximadamente una distribución normal estándar. El valor reportado de esta relación es de $z = -2.14$, con un valor P correspondiente de dos colas .032 (algunos paquetes reportan un valor ji-cuadrada que está a sólo z^2, con el mismo valor P). Al nivel de significancia .05, rechazamos la hipótesis nula de no efecto de la temperatura.

Regresión logística binaria: falla contra temperatura (temp)

```
Logistic Regression Table
                                                        Odds    95%   CI
Predictor       Coef   SE Coef      Z      P  Ratio  Lower  Upper
Constant     15.0429   7.37862   2.04  0.041
temp       −0.232163  0.108236  −2.14  0.032   0.79   0.64   0.98

Goodness-of-Fit Tests
Method            Chi-Square  DF      P
Pearson              11.1303  14  0.676
Deviance             11.9974  14  0.607
Hosmer-Lemeshow       9.7119   8  0.286
```

Resumen de clasificación $\hat{Y}$

Y	0	1
0	1.0000000	0.0000000
1	0.4285714	0.5714286

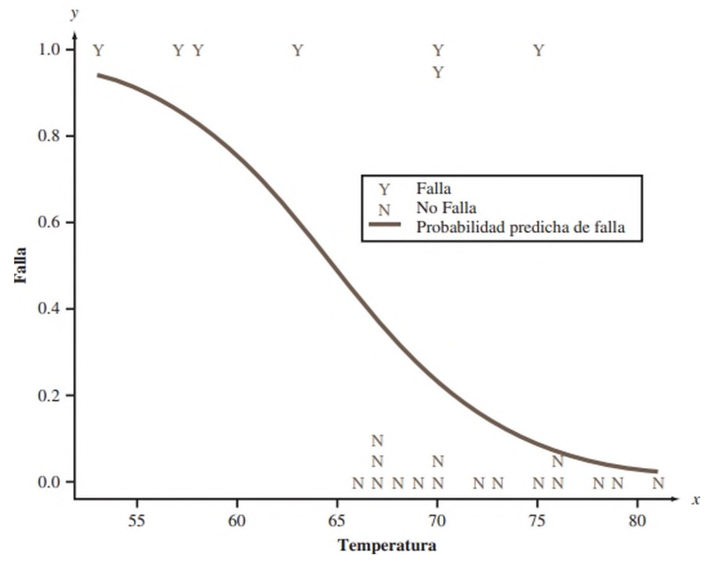


Figura 13.9 Salida de regresión logística de Minitab para el ejemplo 13.6; y gráfica de la función logística estimada y clasificación de las probabilidades de R

Las estimaciones de las posibilidades de falla para cualquier valor particular de temperatura x son

$$\frac{p(x)}{1 - p(x)} = e^{15.0429 - .232163x}$$

Esto implica que el *cociente de posibilidades*: las posibilidades de falla a una temperatura de $x + 1$ divididas entre las posibilidades de falla a una temperatura de x, es

$$\frac{p(x+1)/[1 - p(x+1)]}{p(x)/[1 - p(x)]} = e^{-.232163} = .7928$$

La interpretación es que por cada grado adicional de temperatura se estima que las posibilidades de falla se reducirán en un factor de .79 (21%). Un IC de 95% para el cociente de posibilidad real también se muestra en la salida. Además, Minitab ofrece tres diferentes formas de evaluar el modelo de falta de ajuste: las pruebas de Pearson, de desviación y de Hosmer-Lemeshow. Grandes valores P son consistentes con un buen modelo. Estas pruebas son útiles en la regresión logística múltiple, donde hay más de un predictor en el modelo de relación, por tanto, no es sólo una gráfica como la de la figura 13.9(b). También están disponibles varias gráficas de diagnóstico.

La salida de R proporciona información basada en la clasificación de una observación como una falla si el $p(x)$ estimado es por lo menos .5 y como no-falla en otro caso. Puesto que $p(x) = .5$ cuando $x = 64.80$, tres de los siete errores (Ys en el gráfico) se clasifican erróneamente como no fallas (una proporción de clasificación errónea de .429), mientras que ninguna de las observaciones de no falla serían mal clasificadas. Una mejor manera de evaluar la probabilidad de clasificación errónea es utilizar la *validación cruzada*: elimine la primera observación de la muestra, estime la relación, clasifique la primera observación sobre la base de esta relación de estimación y repita este proceso con cada una de las otras observaciones de la muestra (por tanto, una observación de la muestra no afecta a su propia clasificación).

La temperatura en el lanzamiento para la misión *Challenger* era de sólo 31°F. Puesto que este valor es mucho menor que cualquier temperatura de la muestra, es riesgoso extrapolar la relación estimada. Con todo, parece que para una temperatura así de baja la falla de empaques es casi segura. ■

EJERCICIOS Sección 13.2 (15–25)

15. A nadie que disfrute los totopos le gusta que estén pastosos, de modo que es importante hallar características del proceso de producción para obtener totopos con una textura atractiva. Los siguientes datos sobre x = tiempo de freído (segundos) y y = contenido de humedad (%) se muestran en el artículo **"Thermal and Physical Properties of Tortilla Chips as a Function of Frying Time" (*J. of Food Processing and Preservation*, 1995: 175–189)**.

x	5	10	15	20	25	30	45	60
y	16.3	9.7	8.1	4.2	3.4	2.9	1.9	1.3

a. Construya un diagrama de dispersión de y en función de x y comente.

b. Construya un diagrama de dispersión de los pares $(\ln(x), \ln(y))$ y comente.

c. ¿Qué relación probabilística entre x y y sugiere la figura lineal de la gráfica del inciso b)?

d. Pronostique el valor del contenido de humedad cuando el tiempo de freído es 20, de modo que conlleve información acerca de la confiabilidad y la precisión.

e. Analice los residuos del ajuste del modelo de regresión lineal simple a los datos transformados y comente.

16. Las cuerdas de fibra de poliéster se usan cada vez más como componentes de líneas de amarre para estructuras en aguas profundas mar adentro. Los autores del artículo **"Quantifying the Residual Creep Life of Polyester Mooring Ropes" (*Intl. J. of Offshore and Polar Exploration*, 2005: 223–228)** utilizaron los datos siguientes como base para estudiar la forma en que el tiempo para falla (h) dependía de la carga (% de carga de ruptura):

x	77.7	77.8	77.9	77.8	85.5	85.5
y	5.067	552.056	127.809	7.611	.124	.077
x	89.2	89.3	73.1	85.5	89.2	85.5
y	.008	.013	49.439	.503	.362	9.930
x	89.2	85.5	89.2	82.3	82.0	82.3
y	.677	5.322	.289	53.079	7.625	155.299

Se ajustó una regresión lineal de log(tiempo) en función de la carga. Los investigadores estuvieron particularmente interesados en estimar la pendiente de la recta de regresión verdadera al relacionar estas variables. Investigue la calidad del ajuste, estime la pendiente y pronostique el tiempo para falla cuando la carga es 80, de forma que conlleve información acerca de la confiabilidad y la precisión.

17. Los datos siguientes sobre la rapidez de combustión de la masa x y la longitud de flama y es representativa de aquellos que aparecen en el artículo **"Some Burning Characteristics of Filter Paper" (*Combustion Science and Technology*, 1971: 103–120)**:

x	1.7	2.2	2.3	2.6	2.7	3.0	3.2
y	1.3	1.8	1.6	2.0	2.1	2.2	3.0
x	3.3	4.1	4.3	4.6	5.7	6.1	
y	2.6	4.1	3.7	5.0	5.8	5.3	

a. Estime los parámetros de un modelo de función de potencia.

b. Construya gráficas de diagnóstico para verificar si una función de potencia es una opción apropiada de modelo.

c. Pruebe $H_0: \beta = 4/3$ contra $H_a: \beta < 4/3$, usando una prueba de nivel .05.

d. Pruebe la hipótesis nula que expresa que la longitud media de la flama, cuando la rapidez de combustión es 5.0, es el doble de la longitud media de la flama cuando la rapidez de combustión es 2.5 contra la alternativa de que este no es el caso.

18. Las fallas de las turbinas de gas de los aviones debidas a un alto ciclo de fatiga es un problema muy común. El artículo **"Effect of Crystal Orientation on Fatigue Failure of Single Crystal Nickel Base Turbine Blade Superalloys (*J. of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2002: 161–176)** proporciona los siguientes datos y ajuste de un modelo de regresión no lineal para pronosticar la amplitud de la deformación de los ciclos hasta que ocurra una falla. Ajuste un modelo apropiado, investigue la calidad del ajuste y pronostique la amplitud cuando los ciclos, hasta que ocurra una falla, sean = 5000.

Obs	Ciclos p/falla	Amplitud de deformación	Obs	Ciclos p/falla	Amplitud de deformación
1	1326	.01495	11	7356	.00576
2	1593	.01470	12	7904	.00580
3	4414	.01100	13	79	.01212
4	5673	.01190	14	4175	.00782
5	29516	.00873	15	34676	.00596
6	26	.01819	16	114789	.00600
7	843	.00810	17	2672	.00880
8	1016	.00801	18	7532	.00883
9	3410	.00600	19	30220	.00676
10	7101	.00575			

19. Se realizaron pruebas de resistencia térmica para estudiar la relación entre temperatura y duración del alambre esmaltado de poliéster (**"Thermal Endurance of Polyester Enameled Wires Using Twisted Wire Specimens"**, ***IEEE Trans. Insulation*, 1965: 38–44**), que dieron por resultado los siguientes datos.

Temp.	200	200	200	200	200	200
Duración	5933	5404	4947	4963	3358	3878
Temp.	220	220	220	220	220	220
Duración	1561	1494	747	768	609	777
Temp.	240	240	240	240	240	240
Duración	258	299	209	144	180	184

a. Un diagrama de dispersión de los datos ¿sugerirá una relación probabilística lineal entre duración y temperatura?

b. ¿Qué modelo está implicado mediante una relación lineal entre ln(duración) esperada y 1/temperatura? ¿Será que aparece un diagrama de dispersión de los datos transformados consistente con esta relación?

c. Estime los parámetros del modelo sugerido en el inciso b). ¿Qué duración se pronosticaría para una temperatura de 220?

d. Debido a que hay múltiples observaciones en cada valor x, el método del ejercicio 14 se puede usar para probar la hipótesis nula que expresa que el modelo sugerido en el inciso b) es correcto. Realice la prueba al nivel .01.

20. El ejercicio 14 muestra datos sobre el peso corporal x y la rapidez de eliminación metabólica/peso corporal y. Considere las siguientes funciones intrínsecamente lineales para especificar la relación entre las dos variables: a) $\ln(y)$ en función de x, b) $\ln(y)$ en función de $\ln(x)$, c) y en función de $\ln(x)$, d) y en función de $1/x$, y e) $\ln(y)$ en función de $1/x$. Use cualesquiera gráficas de diagnóstico apropiadas y análisis para decidir cuáles de estas funciones seleccionaría para especificar un modelo probabilístico. Explique su razonamiento.

21. La minería es una de las actividades económicas más importantes en Chile. Los productos minerales se encuentran con frecuencia en sistemas salinos compuestos en gran parte de nitratos naturales. A menudo se utiliza agua dulce como agente de lixiviación para extraer nitrato, pero las regiones mineras de Chile tienen escasos recursos de agua dulce. Un agente de lixiviación alternativa es el agua de mar. Los autores de **"Recovery of Nitrates from Leaching Solutions Using Seawater"** (***Hydrometallurgy*, 2013: 100–105**), evaluaron la recuperación de los iones nitrato a partir de sales desechadas utilizando agua dulce y agua de mar como agentes de lixiviación. Aquí se muestran los datos donde x = tiempo de lixiviación (h) y y = porcentaje de extracción de nitrato (agua de mar):

x	25.5	31.5	37.5	43.5	49.5	55.5
y	26.4	40.1	50.2	57.4	62.7	67.3
x	61.5	67.5	73.5	79.5	85.5	91.5
y	71.4	74.7	77.8	80.3	82.3	84.1
x	97.5	103.5	109.5	115.5	121.5	127.5
y	85.5	86.6	87.9	89.0	89.9	90.6
x	133.5	139.5	145.5	151.5	157.5	
y	91.2	91.8	92.3	92.8	93.3	

a. Construya un diagrama de dispersión. Si el modelo de regresión lineal simple se ajusta a estos datos, ¿cómo se vería una gráfica de los pares (x, e^*)?

b. Construya un diagrama de dispersión de y contra $x' = 1/x$ y especule sobre el valor de r^2 después de haber ajustado un modelo de regresión lineal a los datos transformados.

c. Obtenga un intervalo de predicción de 95% para el porcentaje de extracción de nitratos cuando el tiempo de lixiviación es = 100 h.

22. En cada uno de los casos siguientes decida si la función dada es intrínsecamente lineal. Si es así, identifique x' y y', y luego explique la forma en que se puede introducir un término de error aleatorio $\boldsymbol{\epsilon}$ para dar un modelo probabilístico intrínsecamente lineal.

a. $y = 1/(\alpha + \beta x)$

b. $y = 1/(1 + e^{\alpha + \beta x})$

c. $y = e^{e^{\alpha + \beta x}}$ (una curva Gompertz)

d. $y = \alpha + \beta e^{\lambda x}$

23. Suponga que x y y están relacionadas de acuerdo con un modelo exponencial probabilístico $Y = \alpha e^{\beta x} \cdot \boldsymbol{\epsilon}$, con $V(\boldsymbol{\epsilon})$ una constante independiente de x (como fue el caso en el modelo lineal sencillo $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \boldsymbol{\epsilon}$). ¿Es $V(Y)$ una constante independiente de x [como fue el caso para $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \boldsymbol{\epsilon}$, donde $V(Y) = \sigma^2$]? Explique su razonamiento. Trace una figura de un diagrama de dispersión prototipo que resulte de este modelo. Conteste las mismas preguntas para el modelo de potencia $Y = \alpha e^{\beta} \cdot \boldsymbol{\epsilon}$.

24. La cifosis es una grave curvatura de la espina dorsal que se presenta después de una cirugía espinal correctiva. Un estudio realizado para determinar factores de riesgo para la cifosis informa acerca de las siguientes edades (meses) de 40 personas en el momento de la operación; las primeras 18 personas tenían cifosis, no así las otras 22.

Con cifosis	12	15	42	52	59	73
	82	91	96	105	114	120
	121	128	130	139	139	157
Sin cifosis	1	1	2	8	11	18
	22	31	37	61	72	81
	97	112	118	127	131	140
	151	159	177	206		

Utilice la regresión logística generada por Minitab que se muestra en la siguiente página para determinar si la edad parece tener un impacto significativo en la presencia de cifosis.

Tabla de regresión logística del ejercicio 24

Predictor	Coef	StDev	Z	P	Odds Ratio	95% CI Lower	95% CI Upper
Constant	−0.5727	0.6024	−0.95	0.342			
Edad	0.004296	0.005849	0.73	0.463	1.00	0.99	1.02

25. El artículo **"Acceptable Noise Levels for Construction Site Offices" (*Building Serv. Engr. Res. Tech.*, 2009: 87–94)** analizó las respuestas de una muestra de 77 individuos a cada uno de los cuales se le pidió decir si un nivel de ruido en particular (dBA) al que había estado expuesto era aceptable o inaceptable. He aquí los datos proporcionados por los autores del artículo:

Aceptable:

55.3 55.3 55.3 55.9 55.9 55.9 55.9 56.1 56.1 56.1 56.1
56.1 56.1 56.8 56.8 57.0 57.0 57.0 57.8 57.8 57.8 57.9
57.9 57.9 58.8 58.8 58.8 59.8 59.8 59.8 62.2 62.2 65.3
65.3 65.3 65.3 68.7 69.0 73.0 73.0

Inaceptable:

63.8 63.8 63.8 63.9 63.9 63.9 64.7 64.7 64.7 65.1 65.1
65.1 67.4 67.4 67.4 67.4 68.7 68.7 68.7 70.4 70.4 71.2
71.2 73.1 73.1 74.6 74.6 74.6 74.6 79.3 79.3 79.3 79.3
79.3 83.0 83.0 83.0

Interprete la regresión logística generada por Minitab y trace una gráfica de la probabilidad estimada del nivel aceptable de ruido como función del nivel.

Tabla de regresión logística del ejercicio 25

Predictor	Coef	SE Coef	Z	P	Odds Ratio	95% CI Lower	95% CI Upper
Constant	23.2124	5.05095	4.60	0.000			
nivel de ruido	−0.359441	0.0785031	−4.58	0.000	0.70	0.60	0.81

13.3 Regresión polinomial

Los modelos no lineales, pero intrínsecamente lineales de la sección 13.2 comprenden funciones de la variable independiente x que eran estrictamente crecientes o estrictamente decrecientes. En numerosas situaciones, ya sea de un razonamiento teórico o de otro tipo, un diagrama de dispersión de los datos sugiere que la verdadera función de regresión $\mu_{Y \cdot x}$ tiene uno o más picos o valles, es decir, al menos un mínimo o máximo relativos. En tales casos, una función con polinomios $y = \beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_k x^k$ puede dar una aproximación satisfactoria a la verdadera función de regresión.

DEFINICIÓN

La **ecuación del modelo de regresión con polinomios de *k*-ésimo grado** es

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots + \beta_k x^k + \epsilon \qquad \textbf{(13.6)}$$

donde ϵ es una variable aleatoria distribuida normalmente con

$$\mu_\epsilon = 0 \quad \sigma_\epsilon^2 = \sigma^2 \qquad \textbf{(13.7)}$$

De (13.6) y (13.7), se deduce de inmediato que

$$\mu_{Y \cdot x} = \beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_k x^k \qquad \sigma_{Y \cdot x}^2 = \sigma^2 \qquad \textbf{(13.8)}$$

En otras palabras, el valor esperado de Y es una función de x con polinomios de k-ésimo grado mientras que la varianza de Y, que controla la dispersión de valores observados alrededor de la función de regresión, es la misma para cada valor de x. Se supone que los pares observados $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ se generaron de manera independiente del modelo (13.6).

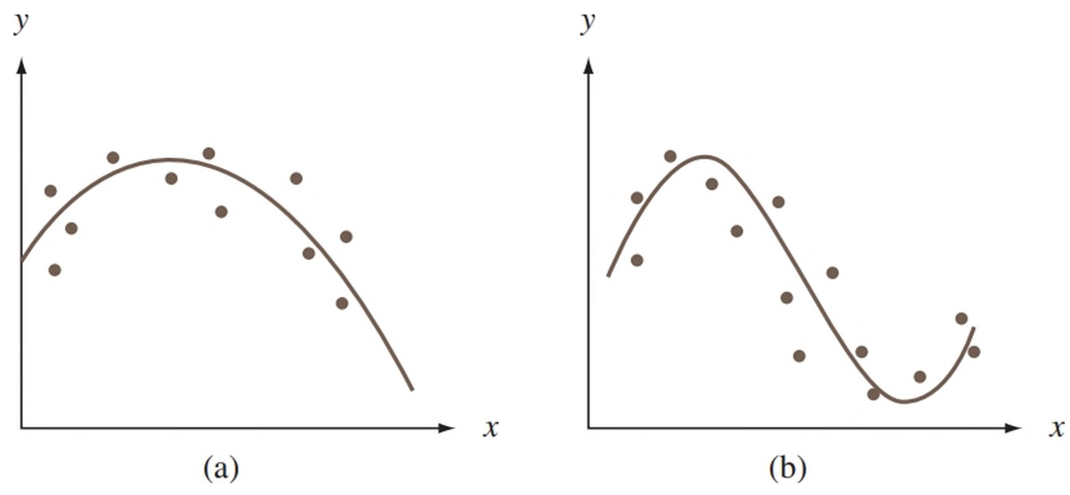


Figura 13.10 (a) Modelo de regresión cuadrático; (b) modelo de regresión cúbico

La figura 13.10 ilustra un modelo cuadrático y uno cúbico; en la práctica, es muy raro ir más allá de $k = 3$.

Estimación de parámetros

Para estimar las β considere una función de regresión de prueba $y = b_0 + b_1x + \cdots + b_kx^k$. Entonces la bondad de ajuste de esta función a los datos observados de esta función se puede evaluar al calcular la suma de desviaciones al cuadrado

$$f(b_0, b_1, \ldots, b_k) = \sum_{i=1}^{n}[y_i - (b_0 + b_1x_i + b_2x_i^2 + \cdots + b_kx_i^k)]^2 \qquad \textbf{(13.9)}$$

Según el principio de mínimos cuadrados, las estimaciones $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_k$ bis son valores de $b_0, b_1, \ldots, b_k$ que minimizan la expresión (13.9). Observe que cuando $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son todas diferentes hay un polinomio de grado $n - 1$ que se ajusta perfectamente a los datos, de modo que el valor minimizador de (13.9) es 0 cuando $k = n - 1$. No obstante, en casi todas las aplicaciones, el modelo con polinomios (13.6) con k grande es bastante irreal.

Para hallar los valores minimizadores en (13.9) se toman las $k + 1$ derivadas parciales $\partial f/\partial b_0, \partial f/\partial b_1, \ldots, \partial f/\partial b_k$ y se igualan a 0 lo cual produce el sistema de ecuaciones normales para las estimaciones. Debido a que la función de prueba $b_0 + b_1x + \cdots + b_kx^k$ es lineal en $b_0, \ldots, b_k$ (aunque no en x), las $k + 1$ ecuaciones normales son lineales en las incógnitas:

$$\begin{aligned}
b_0n + b_1\Sigma x_i + b_2\Sigma x_i^2 + \cdots + b_k\Sigma x_i^k &= \Sigma y_i \\
b_0\Sigma x_i + b_1\Sigma x_i^2 + b_2\Sigma x_i^3 + \cdots + b_k\Sigma x_i^{k+1} &= \Sigma x_iy_i \\
&\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
b_0\Sigma x_i^k + b_1\Sigma x_i^{k+1} + \cdots + b_k\Sigma x_i^{2k} &= \Sigma x_i^ky_i
\end{aligned} \qquad \textbf{(13.10)}$$

Todos los paquetes de software estándar de estadística resolverán de manera automática las ecuaciones de (13.10) y darán las estimaciones junto con otra gran cantidad de información.*

EJEMPLO 13.7 El artículo **"Residual Stresses and Adhesion of Thermal Spray Coatings" (*Surface Engineering*, 2005: 35–40)** considera la relación entre el grosor (μm) de capas de NiCrAl depositadas en sustrato de acero inoxidable y la resistencia a la adherencia (MPa). Los datos que aparecen a continuación se interpretaron de una gráfica del artículo citado.

Grosor	220	220	220	220	370	370	370	370	440	440
Resistencia	24.0	22.0	19.1	15.5	26.3	24.6	23.1	21.2	25.2	24.0
Grosor	440	440	680	680	680	680	860	860	860	860
Resistencia	21.7	19.2	17.0	14.9	13.0	11.8	12.2	11.2	6.6	2.8

* Veremos en la sección 13.4 que la regresión polinómica es un caso especial de la regresión múltiple, por lo que se utiliza generalmente una instrucción apropiada para esta última tarea.

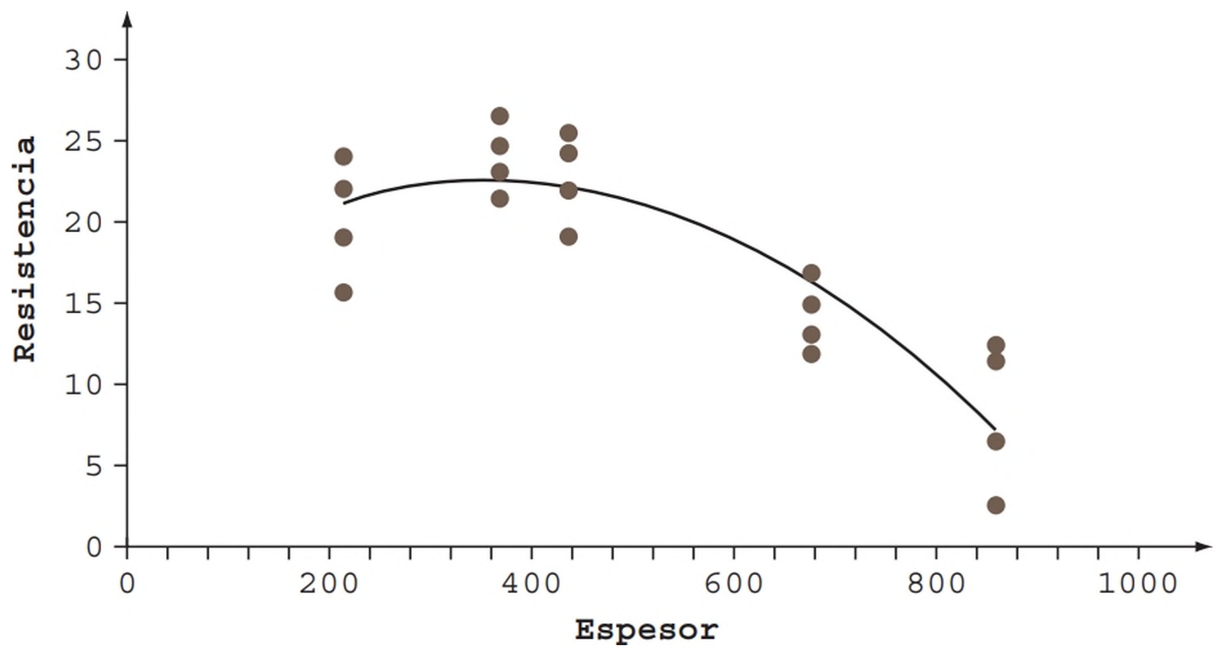
El diagrama de dispersión de la figura 13.11(a) apoya la selección del modelo de regresión cuadrático. La figura 13.11(b) contiene un resultado de Minitab de un ajuste de este modelo. Los coeficientes estimados de regresión son

$$\hat{\beta}_0 = 14.521 \qquad \hat{\beta}_1 = .04323 \qquad \hat{\beta}_2 = -.00006001$$

de los cuales la función estimada de regresión es

$$y = 14.521 + .04323x - .00006001x^2$$

La sustitución de los valores x sucesivos 220, 220,..., 860 y 860 en esta función da los valores pronosticados $\hat{y}_1 = 21.128$,..., $\hat{y}_{20} = 7.321$ y los residuos $y_1 - \hat{y}_1 = 2.872$,..., $y_{20} - \hat{y}_{20} = -4.521$ resultan de la sustracción. La figura 13.12 muestra una gráfica de los residuos estandarizados en función de $\hat{y}$ y también una gráfica de probabilidad normal de los residuos estandarizados los cuales validan el modelo cuadrático.



The regression equation is
resistencia = 14.5 + 0.0432 espesor − 0.000060 espesoralcuadrado

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Constant	14.521	4.754	3.05	0.007
espesor	0.04323	0.01981	2.18	0.043
espesoralcuadrado	−0.00006001	0.00001786	−3.36	0.004

S = 3.26937 R-Sq = 78.0% R-Sq(adj) = 75.4%

Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	2	643.29	321.65	30.09	0.000
Residual Error	17	181.71	10.69		
Total	19	825.00			

Predicted Values for New Observations

New Obs	Fit	SE Fit	95% CI	95% PI
1	21.136	1.167	(18.674, 23.598)	(13.812, 28.460)
2	10.704	1.189	(8.195, 13.212)	(3.364, 18.043)

Values of Predictors for New Observations

New Obs	espesor	espesoralcuadrado
1	500	250000
2	800	640000

Figure 13.11 Diagrama de dispersión de datos del ejemplo 13.7 y salida Minitab del ajuste del modelo cuadrático

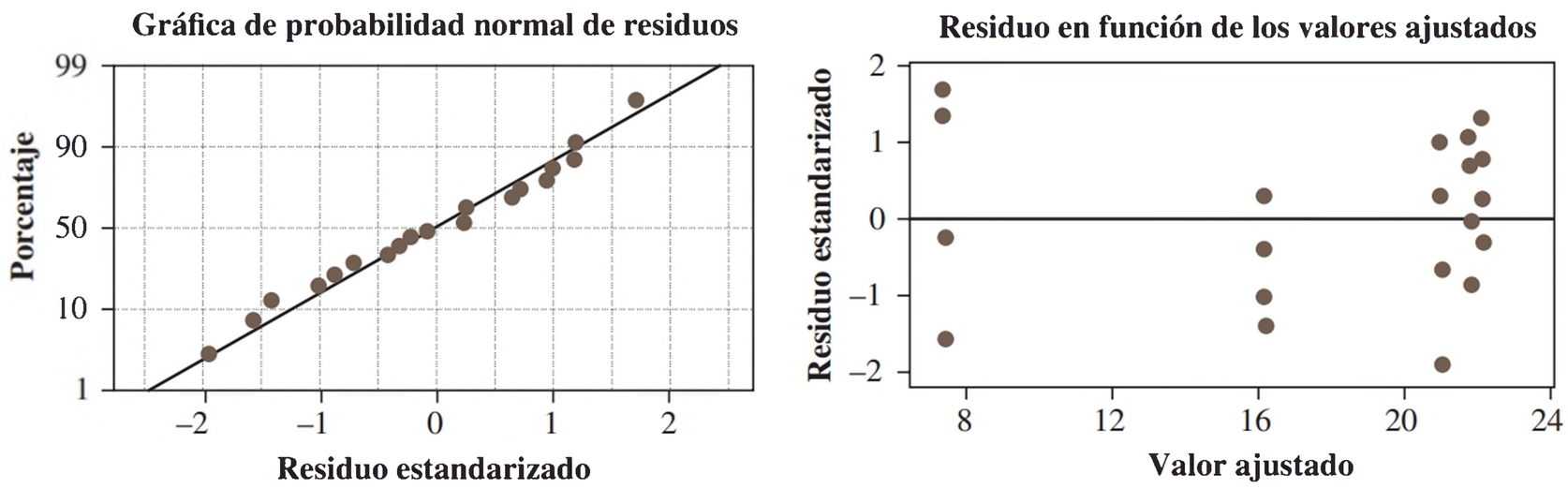


Figura 13.12 Gráficas de diagnóstico para ajuste de modelo cuadrático a datos del ejemplo 13.7 ■

$\hat{\sigma}^2$ y R^2

Para hacer inferencias adicionales debe estimarse la varianza de error σ^2. Con $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i + \cdots + \hat{\beta}_k x_i^k$, el residuo i-ésimo es $y_i - \hat{y}_i$ y la suma del cuadrado de residuos (suma de errores cuadráticos) es $\text{SSE} = \Sigma(y_i - \hat{y}_i)^2$. La estimación de σ^2 es entonces

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{\text{SSE}}{n - (k + 1)} = \text{MSE} \tag{13.11}$$

donde el denominador $n - (k + 1)$ se usa porque al estimar $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k$ se pierden $k + 1$ grados de libertad.

Si de nuevo se hace $\text{SST} = \Sigma(y_i - \bar{y}_i)^2$, entonces SSE/SST es la proporción de la variación total en las y_i observadas que no es explicada por el modelo polinomial. La cantidad 1 − SSE/SST, la proporción de variación explicada por el modelo, recibe el nombre de **coeficiente de determinación múltiple** y se denota con R^2.

Considere ajustar un modelo cúbico a los datos del ejemplo 13.7. Debido a que el modelo cúbico incluye el cuadrático como un caso especial, el ajuste de un cúbico será al menos tan bueno como el ajuste a un cuadrático. En forma más general, con SSE_k = suma de los errores cuadráticos de un polinomio de k-ésimo grado, $\text{SSE}_{k'} \leq \text{SSE}_k$ y $R^2_{k'} \geq R^2_k$ siempre que $k' > k$. Debido a que el objetivo del análisis de regresión es hallar un modelo que sea sencillo (con relativamente pocos parámetros) y que dé un buen ajuste a los datos, un polinomio de grado superior puede no especificar un modelo mejor que un modelo de grado inferior, a pesar de su mayor valor de R^2. Para equilibrar el costo de usar más parámetros contra la ganancia en R^2, muchos expertos en estadística usan el **coeficiente ajustado de determinación múltiple**

$$R^2 \text{ ajustada} = 1 - \frac{n - 1}{n - (k + 1)} \cdot \frac{\text{SSE}}{\text{SST}} = \frac{(n - 1)R^2 - k}{n - 1 - k} \tag{13.12}$$

La R^2 ajustada adecua hacia arriba la proporción de variación no explicada [porque la razón $(n - 1)/(n - k - 1)$ excede de 1], que resulta en R^2 *ajustada* $< R^2$. Entonces, si $R^2_2 = .66$, $R^2_3 = .70$, y $n = 10$, por tanto,

$$\text{ajustada } R^2_2 = \frac{9(.66) - 2}{10 - 3} = .563 \qquad \text{ajustada } R^2_3 = \frac{9(.70) - 3}{10 - 4} = .550$$

Por tanto, la pequeña ganancia en R^2, al pasar de un modelo cuadrático a uno cúbico, no es suficiente para compensar el costo de sumar un parámetro extra al modelo.

EJEMPLO 13.8 (Continuación del ejemplo 13.7)

Por lo general en salidas de computadora SSE y SST se encuentran en una tabla ANOVA. La figura 13.11(b) da SSE = 181.71 y SST = 825.00, para los datos de resistencia a la adherencia, de donde $R^2 = 1 - 181.71/825.00 = .780$ (alternativamente, $R^2 = \text{SSR/SST} = 643.29/825.00 = .780$). Así, 78.0% de la variación observada en resistencia a la adherencia

se puede atribuir a la relación del modelo. R^2 ajustada = .754, es sólo un pequeño cambio hacia abajo en R^2. Las estimaciones de σ^2 y σ son

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{\text{SSE}}{n-(k+1)} = \frac{181.71}{20-(2+1)} = 10.69$$
$$\hat{\sigma} = s = 3.27$$ ■

Además de calcular R^2 y ajustar R^2 se deben examinar las gráficas de diagnóstico usuales para determinar si son válidas las suposiciones del modelo o si es apropiada una modificación (vea la figura 13.12). También existe una prueba formal de modelos de utilidad, una prueba F con base en las sumas de cuadrados ANOVA. Dado que la regresión polinómica es un caso especial de regresión múltiple, aplazaremos el debate de esta prueba hasta la siguiente sección.

Intervalos estadísticos y procedimientos de prueba

Debido a que las y_i aparecen en las ecuaciones normales (13.10) sólo del lado derecho y en forma lineal, las estimaciones resultantes $\hat{\beta}_0,\ldots,\hat{\beta}_k$ son por sí mismas funciones lineales de las y_i. Por tanto, los estimadores son funciones lineales de las Y_i, de modo que cada $\hat{\beta}_i$ tiene una distribución normal. También se puede demostrar que cada $\hat{\beta}_i$ es un estimador insesgado de β_i.

Sea que $\sigma_{\hat{\beta}_i}$ denote la desviación estándar del estimador $\hat{\beta}_i$. Esta desviación estándar tiene la forma

$$\sigma_{\hat{\beta}_i} = \sigma \cdot \left\{\begin{array}{l}\text{una expresión complicada que comprende } \textit{todas} \text{ las} \\ x_j, x_j^2, \ldots, \text{ y } x_j^k\end{array}\right\}$$

Por fortuna, la expresión dentro de las llaves se ha programado en todos los paquetes de software de estadística que se usan con más frecuencia. La desviación estándar estimada de $\hat{\beta}_i$, resulta de sustituir s en lugar de σ en la expresión para $\sigma_{\hat{\beta}_i}$. Estas desviaciones estándar estimadas $s_{\hat{\beta}_0}$, $s_{\hat{\beta}_i}$,..., y $s_{\hat{\beta}_k}$ aparecen en los resultados de todos los paquetes de estadística citados. Sea que $S_{\hat{\beta}_i}$ denote al estimador de $\sigma_{\hat{\beta}_i}$; es decir, la variable aleatoria cuyo valor observado es $s_{\hat{\beta}_i}$. Por tanto, se puede demostrar que la variable estandarizada

$$T = \frac{\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_i}{S_{\hat{\beta}_i}} \tag{13.13}$$

tiene una distribución t basada en $n-(k+1)$ grados de libertad. Esto lleva a los procedimientos inferenciales siguientes.

Un intervalo de confianza (IC) $100(1-\alpha)\%$ para β_i, el coeficiente de x^i de la función de regresión con polinomios, es

$$\hat{\beta}_i \pm t_{\alpha/2,n-(k+1)} \cdot s_{\hat{\beta}_i}$$

Una prueba de H_0: $\beta_i = \beta_{i0}$ está basada en el valor del estadístico t

$$t = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_{i0}}{s_{\hat{\beta}_i}}$$

La prueba está basada en $n-(k+1)$ grados de libertad y es de cola superior, de cola inferior o de dos colas, según si la desigualdad en H_a es $>$, $<$ o $\neq$.

Una estimación puntual de $\mu_{Y\cdot x}$, es decir, de $\beta_0+\beta_1 x+\cdots+\beta_k x^k$ es $\hat{\mu}_{Y\cdot x}=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 x+\cdots+\hat{\beta}_k x^k$. La desviación estándar estimada del estimador correspondiente es más bien complicada. Numerosos paquetes de computadora darán esta desviación estándar estimada

para *cualquier* valor de x cuando un usuario lo pida. Esto, junto con una variable t estandarizada apropiada, se puede usar para justificar los procedimientos siguientes.

Se denota con x^* un valor específico de x. Un intervalo de confianza (IC) $100(1-\alpha)\%$ para $\mu_{Y\cdot x^*}$ es

$$\hat{\mu}_{Y\cdot x^*} \pm t_{\alpha/2,n-(k+1)} \cdot \left\{ \begin{matrix} \text{DE estimada de} \\ \hat{\mu}_{Y\cdot x^*} \end{matrix} \right\}$$

Con $\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x^* + \cdots + \hat{\beta}_k (x^*)^k$, $\hat{y}$ denotando el valor calculado de $\hat{Y}$ para los datos dados, y $s_{\hat{Y}}$ denotando la desviación estándar estimada de la estadística $\hat{Y}$, la fórmula para el intervalo de confianza es muy semejante a la del caso de regresión lineal simple:

$$\hat{y} \pm t_{\alpha/2,n-(k+1)} \cdot s_{\hat{Y}}$$

Un intervalo de predicción $100(1-\alpha)\%$ para un valor y futuro a observar cuando $x = x^*$ es

$$\hat{\mu}_{Y\cdot x^*} \pm t_{\alpha/2,n-(k+1)} \cdot \left\{ s^2 + \left(\begin{matrix} \text{DE estimada} \\ \text{de } \hat{\mu}_{Y\cdot x^*} \end{matrix} \right)^2 \right\}^{1/2} = \hat{y} \pm t_{\alpha/2,n-(k+1)} \cdot \sqrt{s^2 + s_{\hat{Y}}^2}$$

EJEMPLO 13.9 (Continuación del ejemplo 13.8)

La figura 13.11(b) muestra que $\hat{\beta}_2 = -.00006001$ y $s_{\hat{\beta}_2} = .00001786$ (de la columna de coeficientes SE al principio de los resultados). La hipótesis nula H_0: $\beta_2 = 0$ dice que mientras el predictor lineal x se retenga en el modelo, el predictor cuadrático x^2 no proporciona información útil adicional. La alternativa relevante es H_a: $\beta_2 \neq 0$ y el estadístico de prueba es $T = \hat{\beta}_2 / S_{\hat{\beta}_2}$, con valor calculado -3.36. La prueba está basada en $n-(k+1) = 17$ grados de libertad. Al nivel de significancia de .05, la hipótesis nula es rechazada porque el valor P reportado es .004 (el doble del área sobre la curva t_{17} a la izquierda de -3.36). La inclusión del predictor cuadrático se justifica.

La salida de la figura 13.11(b) también contiene información de estimación y predicción para $x = 500$ y para $x = 800$. En particular, para $x = 500$,

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1(500) + \hat{\beta}_2(500)^2 = \text{Ajuste} = 21.136$$
$$s_{\hat{Y}} = \text{DE estimada de } \hat{y} = \text{ajuste SE} = 1.167$$

de la cual un intervalo de confianza de 95% para resistencia media cuando el grosor es $= 500$ es $21.136 \pm (2.110) \times (1.167) = (18.67, 23.60)$. Un intervalo de predicción de 95% para la resistencia que resulta de una sola adherencia cuando el grosor es $= 500$ es $21.136 \pm (2.110)\,[(3.27)^2 + (1.167)^2]^{1/2} = (13.81, 28.46)$. Como ya se dijo antes, el intervalo de predicción es considerablemente más ancho que el intervalo de confianza debido a que s es grande en comparación con el ajuste SE. ■

Centrado de valores x

Para el modelo cuadrático con función de regresión $\mu_{Y\cdot x} = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$, los parámetros β_0, β_1 y β_2 caracterizan el comportamiento de la función cerca de $x = 0$. Por ejemplo, β_0 es la altura a la cual la función de regresión cruza el eje vertical $x = 0$, mientras que β_1 es la primera derivada de la función en $x = 0$ (rapidez de cambio instantánea de $\mu_{Y\cdot x}$ en $x = 0$). Si todas las x_i están lejos de 0, no se puede tener información precisa acerca de los valores de estos parámetros. Sea $\bar{x}$ = promedio de las x_i para las que se toman observaciones, y considere el modelo

$$Y = \beta_0^* + \beta_1^*(x - \bar{x}) + \beta_2^*(x - \bar{x})^2 + \epsilon \qquad \textbf{(13.14)}$$

En el modelo (13.14), $\mu_{Y \cdot x} = \beta_0^* + \beta_1^*(x - \bar{x}) + \beta_2^*(x - \bar{x})^2$ y los parámetros ahora describen el comportamiento de la función de regresión cerca del centro $\bar{x}$ de los datos.

Para estimar los parámetros de (13.14) simplemente se resta $\bar{x}$ de cada x_i para obtener $x_i' = x_i - \bar{x}$, y luego se usan las x_i' en lugar de las x_i. Un beneficio importante de esto es que los coeficientes de $b_0, \ldots, b_k$ de las ecuaciones normales (13.10) serán de magnitud mucho menor de lo que sería el caso si se usaran las x_i originales. Cuando el sistema se resuelve en computadora, este centrado protege contra cualquier error de redondeo que pueda resultar.

EJEMPLO 13.10 El artículo **"A Method for Improving the Accuracy of Polynomial Regression Analysis" (*J. of Quality Tech.*, 1971: 149-155)** informa acerca de los datos siguientes sobre x = temperatura de cura (°F) y y = resistencia máxima al corte de un compuesto de caucho (en libras por pulgada cuadrada), con $\bar{x} = 297.13$:

x	280	284	292	295	298	305	308	315
x'	−17.13	−13.13	−5.13	−2.13	.87	7.87	10.87	17.87
y	770	800	840	810	735	640	590	560

Un análisis de computadora dio los resultados que se ilustran en la tabla 13.3.

Tabla 13.3 Coeficientes estimados y desviaciones estándar para el ejemplo 13.10

Parámetro	Estimación	DE estimada	Parámetro	Estimación	DE estimada
β_0	−26 219.64	11 912.78	β_0^*	759.36	23.20
β_1	189.21	80.25	β_1^*	−7.61	1.43
β_2	−.3312	.1350	β_2^*	−.3312	.1350

La función de regresión estimada usando el modelo original es $y = -26\,219.64 + 189.21x - .3312x^2$, mientras que el modelo centrado de la función es $y = 759.36 - 7.61(x - 297.13) - .3312(x - 297.13)^2$. Estas funciones estimadas son idénticas; la única diferencia es que se han estimado parámetros diferentes para los dos modelos. Las desviaciones estándar estimadas indican con claridad que β_0^* y β_1^* se han estimado con más precisión que β_0 y β_1. Los parámetros cuadráticos son idénticos ($\beta_2 = \beta_2^*$), como se puede ver al comparar el término x^2 en (13.14) con el modelo original. Otra vez se destaca aquí que un beneficio importante de centrar es la ganancia en precisión computacional, no sólo en modelos cuadráticos sino también de orden superior. ■

El libro de Neter *et al.*, que aparece en la bibliografía del capítulo, es una buena fuente de más información acerca de una regresión con polinomios.

EJERCICIOS Sección 13.3 (26–35)

26. El artículo **"Physical Properties of Cumin Seed" (*J. of Agric. Engr. Res.*, 1996: 93–98)** considera una regresión cuadrática de y = densidad a granel en x = contenido de humedad. Los datos de una gráfica en el artículo siguiente, junto con el resultado de Minitab del ajuste cuadrático.

```
The regression equation is
desidadagranel  = 403 + 16.2
contenidohumedad − 0.706  contenidoalcuadrado

Predictor        Coef     StDev        T        P
Constant       403.24     36.45    11.06    0.002
contenido-
humedad        16.164     5.451     2.97    0.059
contsqd       −0.7063    0.1852    −3.81    0.032

S = 10.15      R-Sq = 93.8%      R-Sq(adj) = 89.6%

Analysis of Variance

Source          DF      SS      MS      F      P
Regression       2  4637.7  2318.9  22.51  0.016
Residual Error   3   309.1   103.0
Total            5  4946.8

                                    StDev
  contenido- densidad-                                  St
Obs  humedad   agranel    Fit  Fit Residual Resid
 1       7.0    479.00 481.78 9.35    −2.78 −0.70
 2      10.3    503.00 494.79 5.78     8.21  0.98
 3      13.7    487.00 492.12 6.49    −5.12 −0.66
 4      16.6    470.00 476.93 6.10    −6.93 −0.85
 5      19.8    458.00 446.39 5.69    11.61  1.38
 6      22.0    412.00 416.99 8.75    −4.99 −0.97

          StDev
Fit        Fit           95.0% CI            95.0% PI
491.10    6.52  (470.36, 511.83)  (452.71, 529.48)
```

a. El diagrama de dispersión de los datos ¿será consistente con el modelo de regresión cuadrático?

b. ¿Qué proporción de variación observada en densidad se puede atribuir a la relación del modelo?

c. Calcule un IC de 95% para el promedio de densidad real cuando el contenido de humedad es 13.7.

d. El último renglón de la salida es de una información de petición de estimación y predicción cuando el contenido de humedad es 14. Calcule un intervalo de predicción de 99% para densidad cuando el contenido de humedad sea de 14.

e. ¿Será que el predictor cuadrático da información útil? Pruebe las hipótesis apropiadas al nivel de significancia .05.

27. Los datos siguientes sobre y = concentración de glucosa (g/L), y x = tiempo de fermentación (días) para una mezcla particular de licor de malta se obtuvieron de un diagrama de dispersión del artículo **"Improving Fermentation Productivity with Reverse Osmosis" (*Food Tech.*, 1984: 92–96):**

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	74	54	52	51	52	53	58	71

a. Verifique que un diagrama de dispersión de los datos sea consistente con la selección de un modelo de regresión cuadrático.

b. La ecuación de regresión cuadrática estimada es $y = 84.482 - 15.875x + 1.7679x^2$. Pronostique el valor de concentración de glucosa para un tiempo de fermentación de 6 días y calcule el residuo correspondiente.

c. Usando SSE = 61.77, ¿qué proporción de variación observada se puede atribuir a la relación de regresión cuadrática?

d. Los $n = 8$ residuos estandarizados basados en el modelo cuadrático son 1.91, −1.95, −.25, .58, .90, .04, −.66 y .20. Construya una gráfica de los residuos estandarizados contra x y una gráfica de probabilidad normal. ¿Mostrarán estas gráficas algunas características problemáticas?

e. La desviación estándar estimada de $\mu_{Y\cdot 6}$, es decir, $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1(6) + \hat{\beta}_2(36)$, es 1.69. Calcule un intervalo de confianza de 95% para $\mu_{Y\cdot 6}$.

f. Calcule un intervalo de predicción de 95% para una observación de concentración de glucosa hecha después de 6 días de tiempo de fermentación.

28. La viscosidad (y) de un aceite se midió con un cono y un viscosímetro de plato a seis velocidades de cono diferentes (x). Se supuso que un modelo de regresión cuadrático era apropiado y la función de regresión estimada resultante de las $n = 6$ observaciones fue

$$y = -113.0937 + 3.3684x - .01780x^2$$

a. Estime $\mu_{Y\cdot 75}$, la viscosidad esperada cuando la velocidad es 75 rpm.

b. ¿Qué viscosidad se pronosticaría para una velocidad de cono de 60 rpm?

c. Si $\Sigma y_i^2 = 8386.43$, $\Sigma y_i = 210.70$, $\Sigma x_i y_i = 17\,002.00$ y $\Sigma y_i^2 y_i = 1\,419\,780$, calcule $SSE[= \Sigma y_i^2 - \hat{\beta}_0 \Sigma y_i - \hat{\beta}_1 \Sigma x_i y_i - \hat{\beta}_2 \Sigma x_i^2 y_i]$ y s.

d. Del inciso c), $SST = 8386.43 - (210.70)^2/6 = 987.35$. Usando el SSE calculado en el inciso c), ¿cuál es el valor calculado de R^2?

e. Si la desviación estándar estimada de $\hat{\beta}_2$ es $s_{\hat{\beta}_2} = .00226$, pruebe H_0: $\beta_2 = 0$ contra H_a: $\beta_2 \neq 0$ al nivel .01, e interprete el resultado.

29. En años recientes se han investigado de manera extensa los productos moldeables refractarios de alta alúmina por sus importantes ventajas sobre otros ladrillos refractarios de la misma clase, por ejemplo, menos costos de producción y aplicación, versatilidad y rendimiento a altas temperaturas. Los datos siguientes sobre x = viscosidad (MPa · s) y y = derrame libre (%) se obtuvieron de una gráfica del artículo **"Processing of Zero-Cement Self-Flow Alumina Castables" (*The Amer. Ceramic Soc. Bull.*, 1998: 60-66)**:

x	351	367	373	400	402	456	484
y	81	83	79	75	70	43	22

Los autores del artículo científico citado relacionaron estas dos variables usando un modelo de regresión cuadrático. La función de regresión estimada es $y = -295.96 + 2.1885x - .0031662x^2$.

a. Calcule los valores y residuos pronosticados y luego SSE y s^2.

b. Calcule e interprete el coeficiente de determinación múltiple.

c. La desviación estándar (DE) de $\hat{\beta}_2$ es $s_{\hat{\beta}_2} = .0004835$. ¿El predictor cuadrático pertenece al modelo de regresión?

d. La desviación estándar (DE) estimada de $\hat{\beta}_1$ es .4050. Use esto y la información en c) para obtener los intervalos de confianza conjuntos para los coeficientes de regresión cuadrática y lineal con un nivel de confianza conjunto de (al menos) 95%.

e. La desviación estándar estimada de $\mu_{Y\cdot 400}$ es 1.198. Calcule un intervalo de confianza de 95% para un derrame libre

promedio verdadero cuando la viscosidad = 400 y también un intervalo de predicción de 95% para derrame libre que resulte de una sola observación hecha cuando la viscosidad es = 400, y compare los intervalos.

30. Los datos adjuntos fueron extraídos del artículo **"Effects of Cold and Warm Temperatures on Springback of Aluminum-Magnesium Alloy 5083-H111" (*J. of Engr. Manuf.*, 2009: 427–431)**. La variable de respuesta es el límite elástico (MPa), y la predicción de la temperatura (°C).

x	−50	25	100	200	300
y	91.0	120.5	136.0	133.1	120.8

Aquí se muestra el resultado de Minitab del ajuste del modelo de regresión cuadrática (una gráfica en el documento citado sugiere que los autores la crearon):

```
Predictor            Coef    SE Coef       T       P
Constant          111.277      2.100   52.98   0.000
temperatura       0.32845    0.03303    9.94   0.010
temperatura   −0.0010050  0.0001213   −8.29   0.014
al cuadrado

S = 3.44398    R-Sq = 98.1%      R-Sq(adj) = 96.3%

Analysis of Variance

Source           DF       SS      MS      F      P
Regression        2  1245.39  622.69  52.50  0.019
Residual Error    2    23.72   11.86
Total             4  1269.11
```

a. ¿Qué proporción de la variación observada en la fuerza se puede atribuir a la relación del modelo?

b. Lleve a cabo una prueba de hipótesis al nivel de significancia .05 para decidir si el predictor cuadrático proporciona información útil por encima de la proporcionada por el predictor lineal.

c. Para un valor de fuerza de 100, $\hat{y} = 134.07$, $s_{\hat{y}} = 2.38$. Estime la fuerza promedio real cuando la temperatura es de 100, de una manera que transmita información sobre la precisión y la confiabilidad.

d. Utilice la información en c) para predecir la fuerza de una única observación que se hizo cuando la temperatura es de 100 y hágalo de una manera que transmita información sobre la precisión y la confiabilidad. Luego compare esta predicción con la estimación obtenida en c).

31. Los datos adjuntos de y = producción de energía (W) y x = diferencia de temperatura (°K) fueron proporcionados por los autores del artículo **"Comparison of Energy and Exergy Efficiency for Solar Box and Parabolic Cookers" (*J. of Energy Engr.*, 2007: 53–62)**.

Los autores del artículo ajustaron un modelo de regresión cúbico a los datos. Aquí está el resultado de Minitab de dicho ajuste.

```
The regression equation is

y = −134 + 12.7 x − 0.377 x**2 + 0.00359 x**3

Predictor        Coef    SE Coef       T       P
Constant     −133.787      8.048  −16.62   0.000
x             12.7423     0.7750   16.44   0.000
x**2         −0.37652    0.02444  −15.41   0.000
x**3        0.0035861  0.0002529   14.18   0.000

S = 0.168354  R-Sq = 98.0%  R-Sq(adj) = 97.7%

Analysis of Variance

Source          DF      SS      MS      F      P
Regression       3 27.9744  9.3248 329.00  0.000
Residual Error  20  0.5669  0.0283
Total           23 28.5413
```

a. ¿Qué proporción de la variación observada en la producción de energía se puede atribuir a la relación del modelo?

b. Ajuste un modelo cuadrático para los datos resultantes en $R^2 = .780$. Calcule R^2 ajustada para este modelo y compárelo con R^2 ajustada para el modelo cúbico.

c. ¿Será que el predictor cúbico proporciona información útil sobre y por encima de la proporcionada por los predictores lineales y cuadráticos? Estable zca y ponga a prueba las hipótesis adecuadas.

d. Cuando $x = 30$, $s_{\hat{y}} = .0611$. Obtenga un IC del 95% de la producción real de energía promedio en este caso y también un 95% de IP para una producción de energía única que se observa cuando la diferencia de temperatura es de 30. Sugerencia: $s_{\hat{y}} = .0611$.

e. Interprete las hipótesis H_0: $\mu_{Y \cdot 35} = 5$ contra H_a: $\mu_{Y \cdot 35} \neq 5$ y luego lleve a cabo una prueba al nivel de significancia .05 con el hecho de que cuando $x = 35$, $s_{\hat{y}} = .0523$.

32. La siguiente información es un subconjunto de datos obtenidos en un experimento para estudiar la relación entre x = pH del suelo y y = concentración A1/EC **("Root Responses of Three Gramineae Species to Soil Acidity in an Oxisol and an Ultisol", *Soil Science*, 1973: 295–302)**:

x	4.01	4.07	4.08	4.10	4.18
y	1.20	.78	.83	.98	.65
x	4.20	4.23	4.27	4.30	4.41
y	.76	.40	.45	.39	.30
x	4.45	4.50	4.58	4.68	4.70	4.77
y	.20	.24	.10	.13	.07	.04

Se propuso un modelo cúbico en el artículo, pero la versión de Minitab empleada por el autor del presente texto rechazó

x	23.20	23.50	23.52	24.30	25.10	26.20	27.40	28.10	29.30	30.60	31.50	32.01
y	3.78	4.12	4.24	5.35	5.87	6.02	6.12	6.41	6.62	6.43	6.13	5.92
x	32.63	33.23	33.62	34.18	35.43	35.62	36.16	36.23	36.89	37.90	39.10	41.66
y	5.64	5.45	5.21	4.98	4.65	4.50	4.34	4.03	3.92	3.65	3.02	2.89

incluir el término x^3 en el modelo, expresando que "x^3 está altamente correlacionada con otras variables predictoras". Para solucionar esto, $\bar{x} = 4.3456$ se restó de cada valor x para obtener $x' = x - \bar{x}$. Se requirió entonces una regresión cúbica para ajustar el modelo teniendo la función de regresión

$$y = \beta_0^* + \beta_1^* x' + \beta_2^* (x')^2 + \beta_3^* (x')^3$$

El resultado es la siguiente salida de computadora:

Parámetro	Estimación	DE estimada
β_0^*	.3463	.0366
β_1^*	−1.2933	.2535
β_2^*	2.3964	.5699
β_3^*	−2.3968	2.4590

a. ¿Cuál es la función de regresión estimada para el modelo "centrado"?

b. ¿Cuál es el valor estimado del coeficiente β_3 en el modelo "no centrado" con función de regresión $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3$? ¿Cuál es la estimación de β_2?

c. Usando el modelo cúbico, ¿qué valor de y se pronosticaría cuando el pH del suelo es de 4.5?

d. Realice una prueba para determinar si el término cúbico debe ser retenido en el modelo.

33. En numerosos problemas de regresión con polinomios, en lugar de ajustar una función de regresión "centrada" usando $x' = x - \bar{x}$, la precisión en los cálculos se puede mejorar si se usa una función de la variable independiente estandarizada $x' = (x - \bar{x})/s_x$, donde s_x es la desviación estándar de las x_i. Considere ajustar la función de regresión cúbica $y = \beta_0^* + \beta_1^* x' + \beta_2^* (x')^2 + \beta_3^* (x')^3$ a los siguientes datos, que resultan de un estudio de la relación entre eficiencia de empuje y de cohetes impulsores supersónicos y el ángulo x de semidivergencia de la nariz del cohete (**"More on Correlating Data", *CHEMTECH*, 1976: 266–270**):

x	5	10	15	20	25	30	35
y	.985	.996	.988	.962	.940	.915	.878

Parámetro	Estimación	DE estimada
β_0^*	.9671	.0026
β_1^*	−.0502	.0051
β_2^*	−.0176	.0023
β_3^*	.0062	.0031

a. ¿Qué valor de y se pronosticará cuando el ángulo de semidivergencia sea 20? ¿Y cuando $x = 25$?

b. ¿Cuál es la función de regresión estimada $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x + \hat{\beta}_2 x^2 + \hat{\beta}_3 x^3$ para el modelo "no estandarizado"?

c. Use una prueba de nivel .05 para determinar si el término cúbico debe borrarse del modelo.

d. ¿Qué se puede decir acerca de la relación entre las SSE y las R^2 para modelos estandarizados y no estandarizados? Explique.

e. La SSE para el modelo cúbico es .00006300, mientras que para un modelo cuadrático la SSE es .00014367. Calcule la R^2 para cada modelo. ¿Será que la diferencia entre las dos sugiere que el término cúbico debe ser borrado?

34. La información siguiente resultó de un experimento para evaluar el potencial de tierras sin quemar de una mina de carbón, como medio para el crecimiento de plantas. Las variables son x = cationes extraíbles de ácido y y = acidez intercambiable/capacidad total de intercambio de cationes (**"Exchangeable Acidity in Unburnt Colliery Spoil", *Nature*, 1969: 161**):

x	−23	−5	16	26	30	38	52
y	1.50	1.46	1.32	1.17	.96	.78	.77

x	58	67	81	96	100	113
y	.91	.78	.69	.52	.48	.55

La estandarización de la variable independiente x para obtener $x' = (x - \bar{x})/s_x$, y el ajuste de la función de regresión $y = \beta_0^* + \beta_1^* x' + \beta_2^* (x')^2$, dieron la siguiente salida de computadora.

Parámetro	Estimado	DE estimada
β_0^*	.8733	.0421
β_1^*	−.3255	.0316
β_2^*	.0448	.0319

a. Estime $\mu_{Y \cdot 50}$.

b. Calcule el valor del coeficiente de determinación múltiple (véase el ejercicio 28(c)).

c. ¿Cuál es la función de regresión estimada $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x + \hat{\beta}_2 x^2$ usando la variable x no estandarizada?

d. ¿Cuál es la desviación estándar estimada de $\hat{\beta}_2$ calculada en el inciso c)?

e. Realice una prueba usando las estimaciones estandarizadas para determinar si el término cuadrático debe retenerse en el modelo. Repita usando las estimaciones no estandarizadas. ¿Difieren sus conclusiones?

35. El artículo **"The Respiration in Air and in Water of the Limpets *Patella caerulea and Patella lusitanica*" (*Comp. Biochemistry and Physiology*, 1975: 407-411)** propone un sencillo modelo de potencia para la relación entre el ritmo de respiración y y la temperatura x de *P. caerulea* en el aire. De cualquier modo una gráfica de $\ln(y)$ en función de x muestra un patrón curvo. Ajuste el modelo de potencia cuadrática $Y = \alpha e^{\beta x + \gamma x^2} \cdot \epsilon$ a los datos siguientes.

x	10	15	20	25	30
y	37.1	70.1	109.7	177.2	222.6

13.4 Análisis de regresión múltiple

En regresión múltiple, el objetivo es construir un modelo probabilístico que relacione una variable dependiente y a más de una variable independiente o predictor. Represente con k el número de variables predictoras ($k \geq 2$) y denote estas predictores con $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Por ejemplo, al tratar de predecir el precio de venta de una casa, se podría tener $k = 3$ con x_1 = tamaño (pies^2), x_2 = edad (años) y x_3 = número de habitaciones.

DEFINICIÓN

La **ecuación general del modelo de regresión múltiple aditivo** es

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + \epsilon \qquad \textbf{(13.15)}$$

donde $E(\boldsymbol{\epsilon}) = 0$ y $V(\boldsymbol{\epsilon}) = \sigma^2$. Además, para fines de prueba de hipótesis y calcular intervalos de confianza o intervalos de predicción, se supone que $\boldsymbol{\epsilon}$ está normalmente distribuida.

Sean $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*$ valores particulares de $x_1, \ldots, x_k$. Entonces (13.15) implica que

$$\mu_{Y \cdot x_1^*, \ldots, x_k^*} = \beta_0 + \beta_1 x_1^* + \cdots + \beta_k x_k^* \qquad \textbf{(13.16)}$$

De esta forma, así como $\beta_0 + \beta_1 x$ describe la media Y como función de x en regresión lineal simple, la verdadera función de regresión (o población) $\beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_k x_k$ da el valor esperado de Y como función de $x_1, \ldots, x_k$. Las β_i son los **verdaderos coeficientes de regresión** (o **población**). El coeficiente de regresión β_1 se interpreta como el cambio esperado en Y asociado con un aumento de una unidad en x_1 *mientras* $x_2, \ldots, x_k$ *se mantienen fijos*. Interpretaciones análogas se cumplen para $\beta_2, \ldots, \beta_k$.

Modelos con interacción y predictores cuadráticos

Si un investigador ha obtenido observaciones en y, x_1 y x_2, un modelo posible es $Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \boldsymbol{\epsilon}$. No obstante, se pueden construir otros modelos al formar predictores y funciones matemáticas de x_1 y/o x_2. Por ejemplo, con $x_3 = x_1^2$ y $x_4 = x_1 x_2$, el modelo

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \epsilon$$

tiene la forma general de (13.15). En general, no es sólo permisible para algunos predictores ser funciones matemáticas de otras, sino también que, con frecuencia, sean altamente deseables en el sentido de que el modelo resultante pueda ser mucho más exitoso para explicar la variación en y que cualquier otro modelo sin estos predictores. Este análisis también muestra que la regresión con polinomios es ciertamente un caso especial de regresión múltiple. Por ejemplo, el modelo cuadrático $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \boldsymbol{\epsilon}$ tiene la forma de (13.15) con $k = 2$, $x_1 = x$ y $x_2 = x^2$.

Para el caso de dos variables independientes, x_1 y x_2, hay cuatro modelos útiles de regresión múltiple.

1. El modelo de primer orden:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \epsilon$$

2. El modelo de segundo orden sin interacción:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1^2 + \beta_4 x_2^2 + \epsilon$$

3. El modelo con predictores de primer orden e interacción:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1 x_2 + \epsilon$$

4. El modelo de segundo orden completo o cuadrático completo:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1^2 + \beta_4 x_2^2 + \beta_5 x_1 x_2 + \epsilon$$

La comprensión de las diferencias entre estos modelos es un primer paso importante en la construcción de modelos de regresión realistas a partir de las variables independientes bajo estudio.

El modelo de primer orden es la generalización más fácil de regresión lineal simple. Expresa que para un valor fijo de cualquiera de las dos variables, el valor esperado de Y es una función lineal de la otra variable y que el cambio esperado en Y, asociado con un aumento unitario en x_1 (x_2) es β_1 (β_2) independiente del nivel de x_2 (x_1). Entonces, si se grafica la función de regresión como una función de x_1 para diversos valores diferentes de x_2, se obtienen como contornos de la función de regresión un conjunto de rectas paralelas, como se ve en la figura 13.13(a). La función $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$ especifica un plano en espacio tridimensional; el primer modelo dice que cada uno de los valores observados de la variable dependiente corresponde a un punto que se desvía verticalmente de este plano en una cantidad aleatoria $\boldsymbol{\epsilon}$.

Según el modelo de segundo orden sin interacción, si x_2 es fija, el cambio esperado en Y para un aumento de 1 unidad en x_1 es

$$\begin{aligned}&\beta_0 + \beta_1(x_1 + 1) + \beta_2 x_2 + \beta_3(x_1 + 1)^2 + \beta_4 x_2^2 \\ &\quad - (\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1^2 + \beta_4 x_2^2) = \beta_1 + \beta_3 + 2\beta_3 x_1\end{aligned}$$

Debido a que este cambio esperado no depende de x_2, los contornos de la función de regresión para diferentes valores de x_2 son todavía paralelos entre sí. No obstante, la dependencia del cambio esperado en el valor de x_1 significa que los contornos son ahora curvas en lugar de rectas. Esto se ve en la figura 13.13(b). En este caso, la superficie de regresión ya no es un plano en espacio tridimensional, sino que es una superficie curvada.

Los contornos de la función de regresión para el modelo de primer orden con interacción son rectas no paralelas. Esto es porque el cambio esperado en Y cuando x_1 se aumenta en 1 es

$$\begin{aligned}&\beta_0 + \beta_1(x_1 + 1) + \beta_2 x_2 + \beta_3(x_1 + 1)x_2 \\ &\quad - (\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1 x_2) = \beta_1 + \beta_3 x_2\end{aligned}$$

Este cambio esperado depende del valor de x_2, de modo que cada línea de contorno debe tener una pendiente diferente, como se ve en la figura 13.13(c). La palabra *interacción* refleja el hecho de que un cambio esperado en Y, cuando una variable aumenta en valor, depende del valor de la otra variable.

Por último, para el modelo completo de segundo orden, el cambio esperado en Y cuando x_2 se mantiene fijo mientras x_1 aumenta en 1 unidad es $\beta_1 + \beta_3 + 2\beta_3 x_1 + \beta_5 x_2$, que es una función de x_1 y de x_2. Esto implica que los contornos de la función de regresión son curvados y no paralelos entre sí, como se ilustra en la figura 13.13(d).

Similares consideraciones se aplican a los modelos construidos a partir de más de dos variables independientes. En general, la presencia de términos de interacción en el modelo implica que el cambio esperado en Y depende no sólo de la variable que aumenta o disminuye, sino también de los valores de algunas de las variables fijas. Al igual que en ANOVA, es posible tener términos de interacción de avance más elevado (por ejemplo $x_1 x_2 x_3$), lo que hace más difícil la interpretación del modelo.

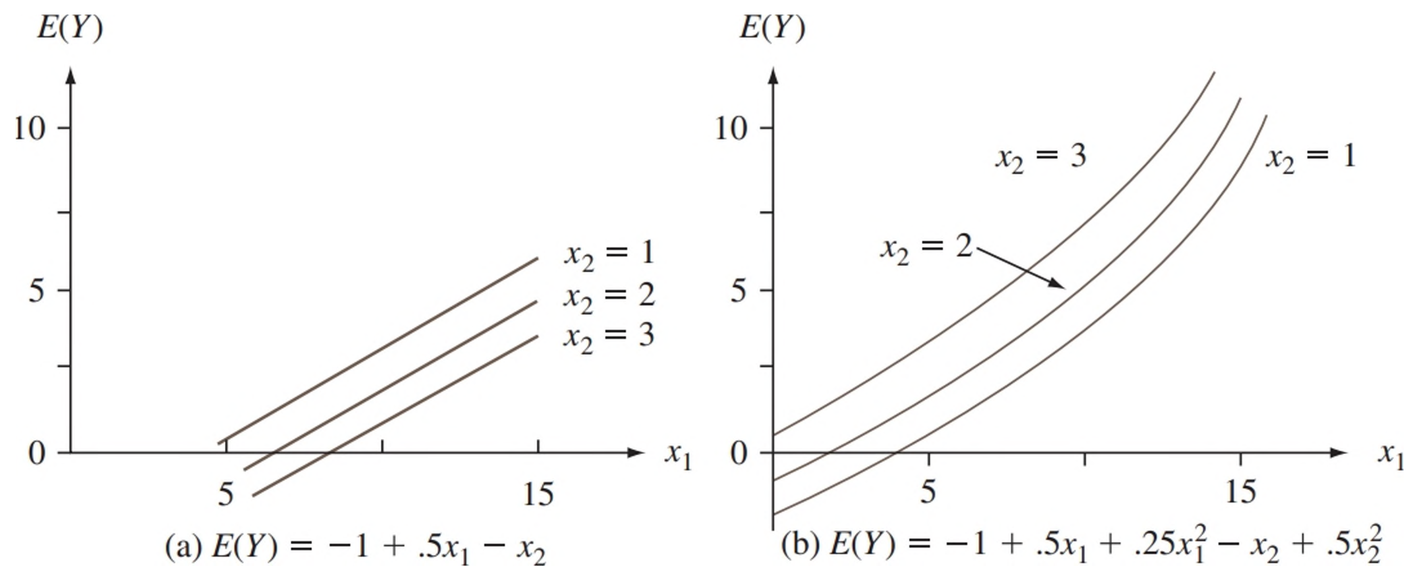


Figura 13.13 Contornos de cuatro funciones de regresión diferentes

Note que si el modelo contiene predictores de interacción o cuadráticos, por lo general no es aplicable la interpretación genérica de una β_i dada previamente. Esto es porque entonces no es posible aumentar x_i en 1 unidad y mantener fijos los valores de los otros predictores.

Modelos con predictores para variables categóricas

Hasta este punto se ha considerado explícitamente la inclusión de sólo variables predictoras cuantitativas (numéricas) en un modelo de regresión múltiple. Con el uso de la codificación numérica sencilla también se pueden incorporar en un modelo las variables cualitativas (categóricas) tales como material para cojinetes (aluminio o cobre/plomo) o tipo de madera (pino, roble o nogal). Debemos centrarnos primero en el caso de una variable dicotómica, una con sólo dos categorías posibles, hombre o mujer, de manufactura estadounidense o extranjera, etcétera. Con cualquiera de estas variables se asocia una **variable indicadora** *x* o **imaginaria** cuyos posibles valores 0 y 1 indican qué categoría es relevante para cualquier observación particular.

EJEMPLO 13.11 El artículo **"Estimating Urban Travel Times: A Comparative Study" (*Trans. Res.*, 1980: 173–175)** describe un estudio que relaciona la variable dependiente y = tiempo de recorrrido de un determinado lugar a otro en cierta ciudad y la variable independiente x_2 = distancia entre lugares. En el estudio se emplearon dos tipos de vehículos, autos de pasajeros y camiones. Sea

$$x_1 = \begin{cases} 1 & \text{si el vehículo es un camión} \\ 0 & \text{si el vehículo es un auto de pasajeros} \end{cases}$$

Un posible modelo de regresión múltiple es

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \epsilon$$

La media del tiempo de viaje depende de si un vehículo es un auto o un camión:

$$\begin{aligned} \text{tiempo medio} &= \beta_0 + \beta_2 x_2 && \text{cuando } x_1 = 0 \text{ (autos)} \\ \text{tiempo medio} &= \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 x_2 && \text{cuando } x_1 = 1 \text{ (camiones)} \end{aligned}$$

El coeficiente β_1 es la diferencia en tiempos medios entre camiones y autos con la distancia mantenida fija; si $\beta_1 > 0$, a los camiones les tomará más tiempo en promedio recorrer cualquier distancia particular que a los autos.

Una segunda posibilidad es un modelo con un predictor de interacción:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1 x_2 + \epsilon$$

Ahora los tiempos medios para los dos tipos de vehículos son

$$\begin{aligned} \text{tiempo medio} &= \beta_0 + \beta_2 x_2 && \text{cuando } x_1 = 0 \\ \text{tiempo medio} &= \beta_0 + \beta_1 + (\beta_2 + \beta_3) x_2 && \text{cuando } x_1 = 1 \end{aligned}$$

Para cada modelo la gráfica del tiempo medio contra distancia es una recta para cualquiera de los dos tipos de vehículo, como se ilustra en la figura 13.14. Las dos rectas son paralelas para el primer modelo (sin interacción), pero en general tendrán diferentes pendientes cuando el segundo modelo es correcto. Para este último modelo el cambio en el tiempo medio de viaje, asociado con un aumento de 1 milla en la distancia, depende del tipo de vehículo de que se trate; interactúan las dos variables "tipo de vehículo" y "tiempo de viaje". De hecho, los datos recolectados por los autores del artículo citado sugieren la presencia de interacción.

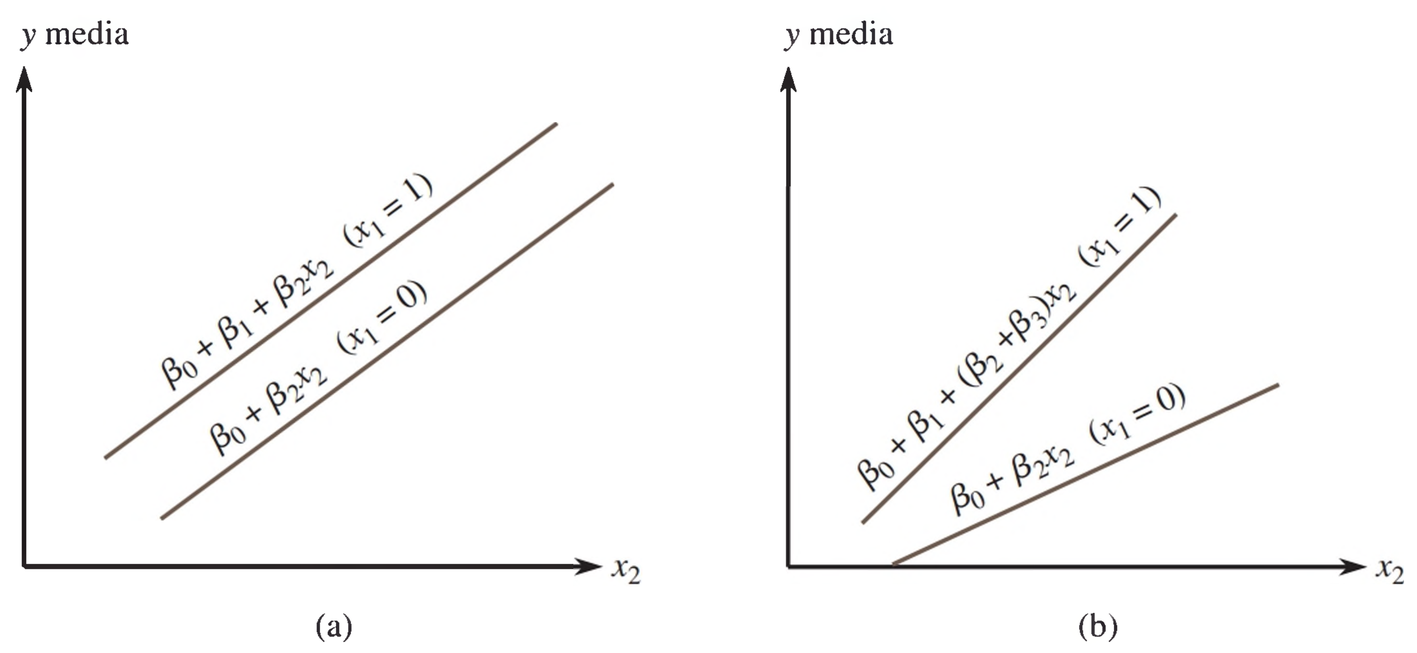


Figura 13.14 Funciones de regresión para modelos con una variable imaginaria (x_1) y una variable cuantitativa x_2: (a) sin interacción; (b) con interacción ■

Se podría pensar que la forma de manejar una situación de tres categorías es definir una sola variable numérica con valores codificados, como, por ejemplo, 0, 1 y 2 correspondientes a las tres categorías. Esto es incorrecto, porque impone un orden en las categorías que no está necesariamente implicado por el contexto del problema. El método correcto para incorporar tres categorías es definir *dos* variables imaginarias diferentes. Suponga, por ejemplo, que y es la vida útil de cierta herramienta de corte y x_1 la velocidad de corte, y que se están investigando tres marcas de herramienta. Entonces, sea

$$x_2 = \begin{cases} 1 & \text{si se usa la herramienta marca A} \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 & \text{si se usa la herramienta marca B} \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Cuando se hace una observación en una herramienta marca A, $x_2 = 1$ y $x_3 = 0$, mientras que para una herramienta marca B, $x_2 = 0$ y $x_3 = 1$. Una observación hecha en una herramienta marca C tiene $x_2 = x_3 = 0$, y no es posible que $x_2 = x_3 = 1$ porque una herramienta no puede ser al mismo tiempo marca A y marca B. El modelo sin interacción tendría sólo los predictores x_1, x_2 y x_3. El siguiente modelo con interacción permite que el cambio medio en la duración, asociado con un aumento de 1 unidad en la velocidad, dependa de la marca de la herramienta:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_1 x_2 + \beta_5 x_1 x_3 + \epsilon$$

La construcción de una imagen como la figura 13.14, con una gráfica para cada uno de los tres pares posibles (x_2, x_3), da tres líneas no paralelas (a menos que $\beta_4 = \beta_5 = 0$).

En forma más general, incorporar una variable categórica con c posibles categorías en un modelo de regresión múltiple requiere el uso de $c - 1$ variables indicadoras (por ejemplo, cinco marcas de herramientas necesitarían usar cuatro variables indicadoras). Por tanto, incluso una variable categórica puede sumar numerosos predictores a un modelo.

Estimación de parámetros

Los datos en regresión lineal simple constan de n pares $(x_1, y_1),\ldots, (x_n, y_n)$. Suponga que un modelo de regresión múltiple contiene dos variables predictoras, x_1 y x_2. Entonces, el conjunto de datos estará formado por n ternas (x_{11}, x_{21}, y_1), $(x_{12}, x_{22}, y_2),\ldots, (x_{1n}, x_{2n}, y_n)$. Aquí el primer subíndice de x se refiere al predictor y el segundo al número de observación. Más generalmente, con k predictores, los datos constan de $n(k + 1)$ tuplas $(x_{11}, x_{21},\ldots, x_{k1}, y_1)$, $(x_{12}, x_{22},\ldots, x_{k2}, y_2),\ldots, (x_{1n}, x_{2n},\ldots, x_{kn}, y_n)$, donde x_{ij} es el valor del i-ésimo predictor x_i asociado con el valor observado y_j. Se supone que las y_j han sido observadas independientemente entre sí de acuerdo con el modelo (13.15). Para estimar los parámetros $\beta_0, \beta_1,\ldots, \beta_k$ usando el principio de mínimos cuadrados, forme la suma de desviaciones cuadradas de las y_j observadas desde una función de ensayo $y = b_0 + b_1 x_1 + \cdots + b_k x_k$:

$$f(b_0, b_1, \ldots, b_k) = \sum_j [y_j - (b_0 + b_1 x_{1j} + b_2 x_{2j} + \cdots + b_k x_{kj})]^2 \qquad \textbf{(13.17)}$$

Las estimaciones de mínimos cuadrados son los valores de las b_i que minimizan $f(b_0,\ldots, b_k)$. Si se toma la derivada parcial de f respecto a cada una de las $b_i (i = 0, 1,\ldots, k)$ y se igualan a cero todas las parciales, se obtiene el siguiente sistema de **ecuaciones normales**:

$$\begin{aligned}
&b_0 n + b_1 \textstyle\sum x_{1j} + b_2 \sum x_{2j} + \cdots + b_k \sum x_{kj} = \sum y_j \\
&b_0 \textstyle\sum x_{1j} + b_1 \sum x_{1j}^2 + b_2 \sum x_{1j} x_{2j} + \cdots + b_k \sum x_{1j} x_{kj} = \sum x_{1j} y_j \\
&\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\vdots \\
&b_0 \textstyle\sum x_{kj} + b_1 \sum x_{1j} x_{kj} + \cdots + b_{k-1} \sum x_{k-1,j} x_{kj} + b_k \sum x_{kj}^2 = \sum x_{kj} y_j
\end{aligned} \qquad \textbf{(13.18)}$$

Estas ecuaciones son lineales en las incógnitas $b_0, b_1,\ldots, b_k$. Al resolver (13.18) se obtienen las estimaciones de mínimos cuadrados $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1,\ldots, \hat{\beta}_k$. Esto se hace mejor si se utiliza un paquete de software de estadística.

EJEMPLO 13.12 El artículo **"How to Optimize and Control the Wire Bonding Process: Part II" (*Solid State Technology*, enero de 1991: 67–72)** describe un experimento realizado para evaluar el impacto de las variables x_1 = fuerza (gm), x_2 = potencia (mW), x_3 = temperatura (°C) y

x_4 = tiempo (ms) en y = resistencia al corte (gm). Los datos siguientes* se generaron para ser consistentes con la información dada en el artículo:

Observación	Fuerza	Potencia	Temperatura	Tiempo	Resistencia
1	30	60	175	15	26.2
2	40	60	175	15	26.3
3	30	90	175	15	39.8
4	40	90	175	15	39.7
5	30	60	225	15	38.6
6	40	60	225	15	35.5
7	30	90	225	15	48.8
8	40	90	225	15	37.8
9	30	60	175	25	26.6
10	40	60	175	25	23.4
11	30	90	175	25	38.6
12	40	90	175	25	52.1
13	30	60	225	25	39.5
14	40	60	225	25	32.3
15	30	90	225	25	43.0
16	40	90	225	25	56.0
17	25	75	200	20	35.2
18	45	75	200	20	46.9
19	35	45	200	20	22.7
20	35	105	200	20	58.7
21	35	75	150	20	34.5
22	35	75	250	20	44.0
23	35	75	200	10	35.7
24	35	75	200	30	41.8
25	35	75	200	20	36.5
26	35	75	200	20	37.6
27	35	75	200	20	40.3
28	35	75	200	20	46.0
29	35	75	200	20	27.8
30	35	75	200	20	40.3

Un paquete computarizado de estadística dio los siguientes estimados de mínimos cuadrados:

$$\hat{\beta}_0 = -37.48 \quad \hat{\beta}_1 = .2117 \quad \hat{\beta}_2 = .4983 \quad \hat{\beta}_3 = .1297 \quad \hat{\beta}_4 = .2583$$

Por tanto, se estima que .1297 gm es el cambio promedio en resistencia asociado con un aumento de 1 grado en temperatura, cuando los otros tres predictores se mantienen fijos; los otros coeficientes estimados se interpretan de modo semejante.

La ecuación estimada de regresión es

$$y = -37.48 + .2117x_1 + .4983x_2 + .1297x_3 + .2583x_4$$

Una predicción puntual de resistencia que resulta de una fuerza de 35 gm, potencia de 75 mW, temperatura de 200° y tiempo de 20 ms es

$$\begin{aligned}\hat{y} &= -37.48 + (.2117)(35) + (.4983)(75) + (.1297)(200) + (.2583)(20) \\ &= 38.41 \text{ gm}\end{aligned}$$

* Del libro *Statistics Engineering Problem Solving*, de Stephen Vardeman, una excelente exposición del área que abordamos en este texto, aunque en un nivel un tanto más elevado.

Esta también es una estimación puntual de la media de la resistencia para los valores especificados de fuerza, potencia, temperatura y tiempo. ■

R^2 y $\hat{\sigma}^2$

La predicción o ajuste de valores, residuos y las diversas sumas de cuadrados se calculan como en la regresión lineal simple y con polinomio. El valor predicho de $\hat{y}_1$ resulta de la sustitución de los valores de los diferentes predictores desde la primera observación en la función de regresión estimada:

$$\hat{y}_1 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{11} + \hat{\beta}_2 x_{21} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{k1}$$

Los valores restantes predichos $\hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_n$ proceden de la sustitución de los valores de los predictores de la 2ª, 3ª,..., y finalmente la n-ésima observación en la función estimada. Por ejemplo, los valores de los cuatro predictores de la última observación en el ejemplo 13.12 son $x_{1,30} = 35$, $x_{2,30} = 75$, $x_{3,30} = 200$ y $x_{4,30} = 20$, por tanto,

$$\hat{y}_{30} = -37.48 + .2117(35) + .4983(75) + .1297(200) + .2583(20) = 38.41$$

Los residuos $y_1 - \hat{y}_1, \ldots, y_n - \hat{y}_n$ son las diferencias entre los valores observados y los valores predichos. El último residuo del ejemplo 13.12 es $40.3 - 38.41 = 1.89$. Cuanto más cerca de 0 se encuentren los residuos, mejor será el trabajo que haga la función de regresión estimada para predecir los valores correspondientes a las observaciones en la muestra.

La suma residual de error o de cuadrados es $\text{SSE} = \Sigma(y_i - \hat{y}_i)^2$. De nuevo esto se interpreta como una medida de cómo una gran variación en los valores observados de y no se explica por (no se atribuye a) la relación del modelo. El número de gl asociados con SSE es $n - (k + 1)$, ya que $k + 1$ gl se pierden en la estimación de $k + 1$ coeficientes β. La suma total de cuadrados, una medida de la variación total en los valores y observados, es $\text{SST} = \Sigma(y_i - \bar{y})^2$. La suma de regresión de cuadrados $\text{SSR} = \Sigma(\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \text{SST} - \text{SSE}$ es una medida de la variación explicada. Entonces el **coeficiente de determinación múltiple R^2** es

$$R^2 = 1 - \text{SSE/SST} = \text{SSR/SST}$$

Esto se interpreta como la proporción de la variación observada y que puede explicarse mediante el ajuste a los datos del modelo de regresión múltiple.

Debido a que no existe una visión preliminar de los datos de regresión múltiple similar a una gráfica de dispersión para los datos bivariantes, el coeficiente de determinación múltiple es nuestra primera indicación de si el modelo elegido tiene éxito en la explicación de la variación de y. Por desgracia, hay un problema con R^2: su valor puede ser inflado por la adición de un gran número de factores predictivos en el modelo, incluso si la mayoría de estos predictores son más bien frívolos. Por ejemplo, supongamos que y es el precio de venta de una casa. Los predictores sensibles incluyen x_1 = el tamaño interior de la casa, x_2 = el tamaño del terreno en el que la casa se asienta, x_3 = el número de dormitorios, x_4 = el número de cuartos de baño y x_5 = edad de la casa. Ahora, supongamos que añadimos x_6 = el diámetro de la manija de la puerta en el armario de los abrigos, x_7 = espesor de la tabla de picar en la cocina, x_8 = espesor de la losa del patio, etcétera. A menos que tengamos muy mala suerte en nuestra elección de los predictores, utilizando $n - 1$ predictores (uno menos que el tamaño de la muestra) resultará $R^2 = 1$. Por tanto, el objetivo en la regresión múltiple no es simplemente explicar la mayor parte de la variación observada de y, pero para hacerlo utilizamos un modelo con relativamente pocos predictores que son fáciles de interpretar. Por tanto, es deseable ajustar R^2, como se hizo en la regresión polinómica, para tener en cuenta el tamaño del modelo:

$$R_a^2 = 1 - \frac{\text{SSE}/(n - (k + 1))}{\text{SST}/(n - 1)} = 1 - \frac{n - 1}{n - (k + 1)} \cdot \frac{\text{SSE}}{\text{SST}}$$

Debido a que el cociente enfrente de la SSE/SST excede a 1, R_a^2 es menor que R^2. Además, cuanto mayor sea el número k de predictores en relación con el tamaño de la muestra n, R_a^2 menor será relativa a R^2. Este R^2 ajustado, incluso puede ser negativo, mientras que R^2 debe estar entre 0 y 1. Un valor R_a^2 que es sustancialmente más pequeño que R^2 es en sí una advertencia de que el modelo puede contener muchos predictores.

La raíz cuadrada positiva de R^2 se llama *coeficiente de correlación múltiple* y se denota por R. Se puede demostrar que R es el coeficiente de correlación muestral calculado a partir de los pares $(\hat{y}_i, y_i)$ (es decir, utilizar $\hat{y}_i$ en lugar de x_i en la fórmula para r de la sección 12.5).

SSE es también la base para estimar los parámetros restantes del modelo:

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{\text{SSE}}{n - (k + 1)} = \text{MSE}$$

EJEMPLO 13.13 Unos investigadores llevaron a cabo un estudio para ver la forma en que diversas características del concreto se ven afectadas por x_1 = % de piedra caliza en polvo y x_2 = proporción de agua y cemento; dicho estudio dio por resultado los datos que aparecen a continuación (**"Durability of Concrete with Addition of Limestone Powder"**, ***Magazine of Concrete Research*, 1996; 131–137**).

x_1	x_2	x_1x_2	Resist. a la compr. de 28 días (MPa)	Adsorción (%)
21	.65	13.65	33.55	8.42
21	.55	11.55	47.55	6.26
7	.65	4.55	35.00	6.74
7	.55	3.85	35.90	6.59
28	.60	16.80	40.90	7.28
0	.60	0.00	39.10	6.90
14	.70	9.80	31.55	10.80
14	.50	7.00	48.00	5.63
14	.60	8.40	42.30	7.43
			$\bar{y}$ = 39.317, SST = 278.52	$\bar{y}$ = 7.339, SST = 18.356

Considere primero la resistencia a la compresión como la variable dependiente y. El ajuste del modelo de primer orden da como resultado

$$y = 84.82 + .1643x_1 - 79.67x_2,\ \text{SSE} = 72.52\ (\text{gl} = 6),\ R^2 = .741,\ R_a^2 = .654$$

mientras que si se incluye un predictor de interacción dará

$$y = 6.22 + 5.779x_1 + 51.33x_2 - 9.357x_1x_2$$
$$\text{SSE} = 29.35\ (\text{gl} = 5) \qquad R^2 = .895 \qquad R_a^2 = .831$$

Con base en este último ajuste, una predicción para la resistencia a la compresión cuando el porcentaje de piedra caliza es 14 y la proporción de agua y cemento = .60 es

$$\hat{y} = 6.22 + 5.779(14) + 51.33(.60) - 9.357(8.4) = 39.32$$

Un ajuste de toda la relación cuadrática da por resultado que prácticamente no haya cambio en el valor de R^2. No obstante, cuando la variable dependiente es la adsorción, se obtienen los siguientes resultados: R^2 = .747 cuando se usan sólo dos predictores, .802 cuando se agrega el predictor de interacción y .889 cuando se usan los cinco predictores para toda la relación cuadrática. ■

En general, $\hat{\beta}_i$ se puede interpretar como una estimación del cambio promedio en Y, asociado con un aumento de 1 unidad en x_i mientras se mantengan fijos los valores de todos

los otros pronosticadores. A veces, sin embargo, es difícil y hasta imposible aumentar el valor de un predictor al tiempo que se mantienen fijos los demás. En situaciones como estas hay una interpretación alternativa de los coeficientes de regresión estimados. En síntesis, suponga que $k = 2$, y sea que $\hat{\beta}_1$ denote la estimación de β_1 en la regresión de y en los dos pronosticadores x_1 y x_2. Por tanto,

1. Haga regresión de y contra sólo x_2 (una regresión lineal simple) y denote con $g_1, g_2, \ldots, g_n$ los residuos resultantes. Estos residuos representan variación en y después de eliminar o ajustar los efectos de x_2.
2. Haga regresión de x_1 contra x_2 (esto es, considere x_1 como la variable dependiente y x_2 la variable independiente en esta regresión lineal simple) y denote los residuos por $f_1, \ldots, f_n$. Estos residuos representan variación en x_1 después de eliminar o ajustar los efectos de x_2.

Ahora considere graficar los residuos de la primera regresión contra los de la segunda; esto es, grafique los pares $(f_1, g_1), \ldots, (f_n, g_n)$. El resultado se denomina *gráfica parcial de residuos* o *gráfica ajustada de residuos*. Si ha de ajustarse una recta de regresión a los puntos de esta gráfica, la pendiente resulta ser exactamente $\hat{\beta}_1$ (además, los residuos de esta recta son exactamente los residuos $e_1, \ldots, e_n$ de la regresión múltiple de y en x_1 y x_2). Entonces, $\hat{\beta}_1$ se puede interpretar como los cambios estimados en y, asociados con un aumento de 1 unidad en x_1 después de eliminar o ajustar los efectos de cualesquier otro pronosticador del modelo. La misma interpretación se cumple para otros coeficientes estimados, cualquiera que sea el número de predictores del modelo (no hay algo especial respecto a $k = 2$; el argumento anterior permanece válido si se hace regresión de y contra todos los pronosticadores que no sean x_1 en el paso 1 y se hace regresión de x_1 contra los otros $k - 1$ pronosticadores del paso 2).

Por ejemplo, suponga que y es el precio de venta de un edificio de departamentos y que los predictores son números de departamento, antigüedad, tamaño de lote, número de espacios de estacionamiento y área total del edificio (pies). Puede no ser razonable aumentar el número de departamentos sin incrementar también el área total. No obstante, si $\hat{\beta}_5 = 16.00$, entonces se puede decir que un aumento de \$16 en el precio de venta está asociado con cada pie cuadrado extra de área total después de ajustar los efectos de los otros cuatro predictores.

Una prueba de utilidad de modelo

La ausencia de una imagen informativa de datos multivariantes y la ya mencionada dificultad con R^2 proporciona razones convincentes para la búsqueda de una prueba formal del modelo utilidad. La prueba de la utilidad de un modelo en regresión lineal simple comprendió la hipótesis nula H_0: $\beta_1 = 0$, según la cual no hay relación útil entre y y el predictor individual x. Aquí se considera la afirmación de que $\beta_1 = 0, \beta_2 = 0, \ldots, \beta_k = 0$, que dice que no hay relación útil entre y y *cualquiera* de los k predictores. Si al menos una de estas β no es 0, el predictor o los predictores correspondientes son útiles. La prueba está basada en un estadístico que tiene una distribución F particular cuando H_0 es verdadera.

Hipótesis nula: H_0: $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0$

Hipótesis alternativa: H_a: al menos una $\beta_i \neq 0$ $\quad (i = 1, \ldots, k)$

$$\text{Valor del estadístico de prueba: } f = \frac{R^2/k}{(1 - R^2)/[n - (k + 1)]}$$

$$= \frac{\text{SSR}/k}{\text{SSE}/[n - (k + 1)]} = \frac{\text{MSR}}{\text{MSE}} \qquad (13.19)$$

donde SSR = suma de cuadrados de regresión = SST − SSE

> Cuando H_0 es cierta la prueba estadística F tiene una distribución F con un numerador gl k y un denominador gl $n - (k + 1)$. La prueba es de cola superior, por lo que el valor P es el área bajo la curva $F_{k,n-(k+1)}$ del lado derecho de f.

Excepto para un múltiplo constante, el estadístico de prueba aquí es $R^2/(1 - R^2)$, que es la razón entre una variación explicada a una no explicada. Si la proporción de variación explicada es alta respecto a la no explicada, naturalmente H_0 se rechazaría y se confirmaría la utilidad del modelo; esto explica por qué la prueba es de cola superior (sólo valores grandes de f contradicen a H_0). No obstante, si k es grande respecto a n, el factor $[(n - (k + 1))/k]$ reducirá considerablemente a f.

EJEMPLO 13.14 Volviendo a los datos de resistencia del pegamento al corte del ejemplo 13.12 se ajustó un modelo con $k = 4$ predictores, de manera que las hipótesis relevantes son

H_0: $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$

H_a: al menos una de estas cuatro β no es 0

La figura 13.15 muestra el resultado impreso del paquete de estadística JMP. Los valores de s (raíz cuadrada del error de la media), R^2 y R^2 ajustada ciertamente sugieren un modelo útil. El valor del cociente F de utilidad del modelo es

$$f = \frac{R^2/k}{(1 - R^2)/[n - (k + 1)]} = \frac{.713959/4}{.286041/(30 - 5)} = 15.60$$

Response: strength

Summary of Fit

RSquare	0.713959
RSquare Adj	0.668193
Root Mean Square Error	5.157979
Mean of Response	38.40667
Observations (or Sum Wgts)	30

Parameter Estimates

Term	Estimate	Std Error	t Ratio	Prob>|t|
Intercept	-37.47667	13.09964	-2.86	0.0084
force	0.2116667	0.210574	1.01	0.3244
power	0.4983333	0.070191	7.10	<.0001
temp	0.1296667	0.042115	3.08	0.0050
time	0.2583333	0.210574	1.23	0.2313

Whole-Model Test

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Ratio
Model	4	1660.1400	415.035	15.6000
Error	25	665.1187	26.605	Prob>F
C Total	29	2325.2587		<.0001

Figura 13.15 Resultado de regresión múltiple del JMP para los datos del ejemplo 13.14

Este valor también aparece en la columna F Ratio de la tabla ANOVA de la figura 13.15. El máximo valor crítico F para grado de libertad de numerador 4 y denominador 25 en la tabla A.9 del apéndice es 6.49, que captura un área de cola superior de .001. De aquí el valor $P <$ .001. La tabla ANOVA de la salida impresa del JMP muestra que el valor $P <$.0001. Este es un resultado muy significativo. La hipótesis nula debería ser rechazada a cualquier nivel de significancia razonable. La conclusión es que *hay* una relación lineal útil entre y y *al menos uno* de los cuatro predictores del modelo. Esto no significa que los cuatro predictores sean útiles; más adelante se hablará más de esto. ■

Inferencias en regresión múltiple

Antes de construir hipótesis y los IC, y antes de hacer predicciones, la adecuación del modelo debe ser evaluada e investigado el impacto de las observaciones atípicas. Los métodos para hacer esto se describen al final de la presente sección y en la siguiente.

Debido a que cada β_i es una función lineal de las y_i, la desviación estándar de cada β_i es el producto de σ y una función de las x_{ij}, de modo que se obtiene una estimación $s_{\hat{\beta}_i}$ para esta desviación estándar al sustituir s con σ. La función de las x_{ij} es bastante complicada, pero todos los paquetes computarizados estándar de estadística calculan y muestran las $s_{\hat{\beta}_i}$. Las inferencias respecto a una sola β_i están basadas en la variable estandarizada

$$T = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{S_{\hat{\beta}_i}}$$

que tiene una distribución t con $n - (k + 1)$ grados de libertad.

La estimación puntual de $\mu_{Y \cdot x_1^*, \ldots, x_k^*}$, el valor esperado de Y cuando $x_1 = x_1^*, \ldots, x_k = x_k^*$, es $\hat{\mu}_{Y \cdot x_1^*, \ldots, x_k^*} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1^* + \cdots + \hat{\beta}_k x_k^*$. La desviación estándar estimada del estimador correspondiente es, nuevamente, una expresión complicada que comprende la muestra de las x_{ij}. No obstante, los mejores paquetes de estadística computarizados la calcularán cuando se les indique. Las inferencias alrededor de $\hat{\mu}_{Y \cdot x_1^*, \ldots, x_k^*}$ están basadas en estandarizar su estimador para obtener una variable t que tenga $n - (k + 1)$ grados de libertad.

1. Un intervalo de confianza $100(1 - \alpha)\%$ para β_i, el coeficiente de x_i en la función de regresión, es

$$\hat{\beta}_i \pm t_{\alpha/2, n-(k+1)} \cdot s_{\hat{\beta}_i}$$

2. Una prueba para H_0: $\beta_i = \beta_{i0}$ utiliza el valor estadístico t de $t = (\hat{\beta}_i - \beta_{i0})/s_{\hat{\beta}_i}$ basado en $n - (k + 1)$ grados de libertad. La prueba es de cola superior, cola inferior o de dos colas, según si H_a contiene la desigualdad $>$, $<$ o $\neq$. La hipótesis nula probada con más frecuencias en la práctica es: H_0: $\beta_i = 0$. La interpretación es que conforme todos los demás predictores $x_1, \ldots, x_i - 1, x_i + 1, \ldots, x_k$ se mantienen en el modelo, el predictor x_i no provee información útil adicional sobre y. La alternativa acostumbrada es H_a: $\beta_i \neq 0$, acorde con lo cual x_i provee información útil más allá de lo que está contenido en los demás predictores $i - 1$. El valor estadístico de prueba es el **cociente** t $\hat{\beta}_i/s_{\hat{\beta}_i}$, la razón del coeficiente estimado con su error estándar estimado.

3. Un intervalo de confianza $100(1 - \alpha)\%$ para $\mu_{Y \cdot x_1^*, \ldots, x_k^*}$ es

$$\hat{\mu}_{Y \cdot x_1^*, \ldots, x_k^*} \pm t_{\alpha/2, n-(k+1)} \cdot \{\text{DE estimada de } \hat{\mu}_{Y \cdot x_1^*, \ldots, x_k^*}\} = \hat{y} \pm t_{\alpha/2, n-(k+1)} \cdot s_{\hat{Y}}$$

donde $\hat{Y}$ es el estadístico $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1^* + \cdots + \hat{\beta}_k x_k^*$ y $\hat{y}$ es el valor calculado de $\hat{Y}$.

4. Un intervalo de predicción $100(1 - \alpha)\%$ para un valor futuro de y es

$$\hat{\mu}_{Y \cdot x_1^*, \ldots, x_k^*} \pm t_{\alpha/2, n-(k+1)} \cdot \{s^2 + (\text{DE estimada de } \hat{\mu}_{Y \cdot x_1^*, \ldots, x_k^*})^2\}^{1/2}$$
$$= \hat{y} \pm t_{\alpha/2, n-(k+1)} \cdot \sqrt{s^2 + s_{\hat{Y}}^2}$$

Los intervalos simultáneos para los cuales la confianza simultánea o nivel de predicción están controlados se pueden obtener al aplicar la técnica de Bonferroni.

EJEMPLO 13.15 El artículo **"Independent but Additive Effects of Fluorine and Nitrogen Substitution on Properties of a Calcium Aluminosilicate Glass" (*J. of the Amer. Ceramic Soc.*, 2012: 600–606)** utiliza análisis de regresión múltiple para investigar varias propiedades del vidrio en el sistema Ca-Si-Al-O-N-F. Los siguientes datos sobre la microdureza (GPa) son resultado de varias composiciones de vidrios de 28Ca:57Si:15Al:(100 − x − y)O:xN:yF.

Obs	N	F	microdureza
1	0	0	6.1
2	20	0	7.5
3	0	1	6.2
4	20	1	7.6
5	40	1	8.6
6	0	5	6.1
7	5	5	6.4
8	10	5	6.7
9	15	5	6.9
10	20	5	7.2
11	0	0	6.1
12	0	1	6.2
13	0	3	6.1
14	0	5	6.1
15	20	0	7.5
16	20	1	7.6
17	20	3	7.2
18	20	5	7.2

El modelo ajustado por los investigadores fue: $Y = \beta_0 + \beta_1 N + \beta_2 F + \epsilon$. La figura 13.16 muestra el resultado de Minitab:

```
Microdureza = 6.23 + 0.0618N − 0.0387F

Predictor       Coef    SE Coef        T       P
Constant     6.22769    0.04615   134.93   0.000
N           0.061823   0.002099    29.46   0.000
F           −0.03872    0.01122    −3.45   0.004

S = 0.100051   R−Sq = 98.4%   R−Sq(adj) = 98.2%

Source           DF       SS       MS       F       P
Regression        2   9.1348   4.5674  456.28   0.000
Residual Error   15   0.1502   0.0100
Total            17   9.2850
```

Figura 13.16 Resultado de Minitab para el ejemplo 13.15

Adicionalmente, cuando $N = 20$ y $F = 1$

$$\hat{\mu}_{Y \cdot 20,1} = \hat{y} = 6.22769 + (.061823)(20) - (.03872)(1) = 7.4254$$

y la desviación estándar estimada de $\hat{Y}$ para estos valores de los predictores es $s_{\hat{y}} = .0332$.

La R^2 tan grande indica que casi toda la variación observada en la microdureza puede ser atribuida a la relación del modelo y al hecho de que tanto el porcentaje de nitrógeno

como el de flúor están variando. Y el cociente F de 456.28 con un valor P correspondiente a 0.000 en la tabla ANOVA confirma rotundamente la utilidad del modelo ajustado.

Las inferencias acerca de los coeficientes de regresión individuales se basan en la distribución de t con $18 - (2 + 1) = 15$ gl (grados de libertad para el error en la tabla de ANOVA), y $t_{.025,15} = 2.131$. Un IC de 95% para β_1 es

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_1 \pm t_{.025,15} s_{\hat{\beta}_1} &= .061823 \pm (2.131)(.002099) \\ &= .061823 \pm .004473 \approx (.0573, .0663)\end{aligned}$$

Estimamos que el cambio esperado en la microdureza se asocia con un aumento de 1 % en N mientras F se mantiene fija entre .0573 GPa y .0663 GPa. Un cálculo similar da $(-.0626, -.0148)$ como un CI de 95% para β_2. La técnica de Bonferroni implica que el nivel de confianza simultánea para ambos intervalos es de al menos 90%.

El cociente t para probar H_0: $\beta_1 = 0$ contra H_a: $\beta_i \neq 0$ es $\hat{\beta}_1 / s_{\hat{\beta}_1} = .061823/.002099 = 29.46$. El valor P correspondiente es dos veces el valor bajo la curva t_{15} del lado derecho de 29.46 que, acorde con el resultado de Minitab, es .000. Así, incluso con una F restante en el modelo, el predictor N proporciona información útil sobre la microdureza. La evidencia para probar H_0: $\beta_2 = 0$ contra H_a: $\beta_2 \neq 0$ no es tan convincente; la figura 13.16 muestra que el valor P es de .004. Por tanto, al nivel de significancia de .05 o .01, H_0 sería rechazada; al parecer F también ofrece información útil por encima de lo que está contenido en N. No hay ninguna razón para eliminar a ningún predictor del modelo. Dado que ni un 95% de IC contiene a 0, no es de extrañar que ambas hipótesis nulas sean rechazadas en el nivel de significancia de .05.

Un IC de 95% para la dureza promedio verdadera cuando $N = 20$ y $F = 1$ es:

$$7.4254 \pm (2.131)(.0332) = 7.4254 \pm .0707 \approx (7.35, 7.50)$$

Un intervalo de predicción de 95% para la dureza resultan de una sola observación cuando $N = 20$ y $F = 1$ es

$$7.4254 \pm (2.131)\sqrt{(.100051)^2 + (.0332)^2} = 7.4254 \pm .2246 \approx (7.20, 7.65)$$

El IP es casi tres veces tan amplio como el IC, reflejando una incertidumbre extra a la predicción. ■

Una prueba F para un grupo de predictores La prueba de utilidad F del modelo era apropiada para probar si hay información útil acerca de la variable dependiente en *cualquiera* de los predictores k (es decir, si $\beta_1 = \cdots = \beta_k = 0$). En muchas situaciones uno construye primero un modelo que contenga k predictores y luego desea saber si cualquiera de los predictores de un subconjunto particular da información útil acerca de Y. Por ejemplo, un modelo a usar para predecir calificaciones de examen de estudiantes podría incluir un grupo de variables secundarias, como son ingreso familiar y niveles de educación, y también algunas variables escolares características tales como el tamaño del grupo o el gasto por alumno. Una hipótesis interesante es que los predictores escolares característicos pueden omitirse del modelo.

Los predictores se marcan como $x_1, x_2, \ldots, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_k$ de modo que sea la última $k - l$ que se está considerando omitir del modelo. La hipótesis relevante es la siguiente:

H_0: $\beta_{l+1} = \beta_{l+2} = \cdots = \beta_k = 0$

(de modo que el modelo "reducido" $Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_l x_l + \epsilon$ es correcto)

contra

H_a: al menos una entre $\beta_{l+1}, \ldots, \beta_k$ no es 0

(de modo que en el modelo "completo" $Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_k x_k + \epsilon$, al menos uno de los últimos predictores $k - l$ proporciona información útil)

La prueba se realiza al ajustar tanto el modelo completo como el reducido. Debido a que el modelo completo contiene no sólo los predictores del modelo reducido, sino también algunos predictores adicionales, se deben ajustar los datos al menos tan bien como el modelo reducido. Esto es, si se hace que SSE_k sea la suma de residuos al cuadrado para el modelo completo y que SSE_l sea la suma correspondiente para el modelo reducido, entonces $SSE_k \leq SSE_l$. Intuitivamente, si SSE_k es mucho menor que SSE_l, el modelo completo da un ajuste mucho mejor que el modelo reducido; el estadístico de prueba apropiado debe depender entonces de la reducción $SSE_l - SSE_k$ en variación inexplicada.

SSE_k = variación inexplicada para el modelo completo

SSE_l = variación inexplicada para el modelo reducido

$$\text{Valor del estadístico de prueba: } f = \frac{(SSE_l - SSE_k)/(k - l)}{SSE_k/[n - (k + 1)]} \qquad \textbf{(13.20)}$$

La prueba es de cola superior, el valor P es el área bajo la curva $F_{k-l,n-(k+1)}$ a la derecha de f.

EJEMPLO 13.16 La fibra dietética soluble (FDS) puede brindar beneficios a la salud bajando los niveles de colesterol y glucosa en la sangre. El artículo **"Effects of Twin-Screw Extrusion on Soluble Dietary Fiber and Physicochemical Properties of Soybean Residue" (*Food Chemistry*, 2013: 884–889)** reporta los siguiente datos para y = contenido de FDS (%) en residuos de soya y los tres predictores, temperatura de extrusión (x_1, en C°), humedad alimentada (x_2, en %) y velocidad del tornillo (x_3, en rpm), de un proceso de extrusión de doble tornillo.

obs	x_1	x_2	x_3	y
1	35	110	160	11.13
2	25	130	180	10.98
3	30	110	180	12.56
4	30	130	200	11.46
5	30	110	180	12.38
6	30	110	180	12.43
7	30	110	180	12.55
8	25	110	160	10.59
9	30	130	160	11.15
10	30	90	200	10.55
11	30	90	160	9.25
12	25	90	180	9.58
13	35	110	200	11.59
14	35	90	180	10.68
15	35	130	180	11.73
16	25	110	200	10.81
17	30	110	180	12.68

Los autores del artículo citado ajustan al modelo completo de segundo orden con predictores x_1, x_2, x_3, x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_1x_2, x_1x_3 y x_2x_3. La figura 13.17 muestra el resultado de Minitab que resulta de ajustar este modelo. Tenga en cuenta que la $R^2 = .987$, por lo que casi toda la variación observada en y puede explicarse por la relación del modelo, y R^2 ajustada es sólo ligeramente más pequeña que R^2 por sí misma. Además, la razón F para el modelo de utilidad es de 59.93 con un valor P correspondiente de .000 (el área bajo la curva de $F_{9,7}$ a la derecha de 59.93). Así que la hipótesis nula de que los nueve β_i correspondientes a los predictores que tienen valor 0 está rotundamente rechazada. No parece haber una relación útil entre la variable dependiente y al menos uno de los predictores.

```
The regression equation is
y = − 132 + 1.69 x1 + 0.777 x2 + 0.798 x3 − 0.0270 x1sqd − 0.00276 x2sqd
    − 0.00204 x3sqd − 0.000875 x1x2 + 0.000600 x1x3 − 0.000619 x2x3

Predictor          Coef    SE Coef        T      P
Constant       −131.61      10.41   −12.64  0.000
x1               1.6875     0.2764     6.10  0.000
x2              0.77688    0.06683    11.62  0.000
x3              0.79788    0.08484     9.40  0.000
x1sqd         −0.027000   0.003418   −7.90  0.000
x2sqd       −0.0027563  0.0002136  −12.90  0.000
x3sqd       −0.0020375  0.0002136   −9.54  0.000
x1x2        −0.0008750  0.0008767   −1.00  0.352
x1x3         0.0006000  0.0008767    0.68  0.516
x2x3        −0.0006188  0.0002192   −2.82  0.026

S = 0.175347    R−Sq = 98.7%    R−Sq(adj) = 97.1%

Analysis of Variance

Source            DF        SS       MS       F       P
Regression         9   16.5830   1.8426   59.93   0.000
Residual Error     7    0.2152   0.0307
Total             16   16.7982

Source   DF   Seq SS
x1        1   1.2561
x2        1   3.4585
x3        1   0.6555
x1sqd     1   2.5869
x2sqd     1   5.5393
x3sqd     1   2.7967
x1x2      1   0.0306
x1x3      1   0.0144
x2x3      1   0.2450
```

Figura 13.17 Resultado de Minitab del ajuste del modelo completo de segundo orden a los datos del ejemplo 13.16

¿Estará justificada la inclusión de los predictores de segundo orden? Esto es, si el modelo reducido consta sólo de los predictores x_1, x_2 y x_3 ($l = 3$) ¿se debe utilizar?

Las hipótesis para ser probadas son:

$$H_0: \beta_4 = \beta_5 = \cdots = \beta_9 = 0$$

contra

$$H_a: \text{al menos uno entre } \beta_4, \ldots, \beta_9 \text{ no es } 0$$

SSE = .2152 para el modelo completo (de la tabla de ANOVA de la figura 13.17). Ahora necesitamos SSE para el modelo reducido que contiene sólo los tres predictores de primer orden x_1, x_2 y x_3. En realidad no es necesario ajustar este modelo debido a la información de las "Sumas Secuenciales de cuadrados" en la parte inferior de la figura 13.17. Cada número en la última columna da el *aumento* en SSR (variación explicada) cuando otro predictor se introduce en el modelo. Por tanto, SSR para el modelo reducido es 1.2561 + 3.4585 + 0.6555 = 5.3701. Restando esto de SST = 16.7982 (que es el mismo para ambos modelos) da SSE = 11.4281. El valor de la estadística F es entonces

$$f = \frac{(11.4281 - .2152)/3}{.2152/[17 - (9 + 1)]} = \frac{3.7376}{.03074} = 121.6$$

El valor P es el área bajo la curva $F_{3,7}$ a la derecha de este valor que, como era de esperar, es 0. Así que la hipótesis nula es rotundamente rechazada. Hay bastante evidencia convincente para concluir que al menos uno de los indicadores de segundo orden está proporcionando

información útil más allá de lo previsto por los tres predictores de primer orden. Esta conclusión tiene sentido intuitivo debido a que el modelo completo deja muy poca variación no explicada (SSE bastante cercano a 0), mientras que el modelo reducido da lugar a una cantidad sustancial de variación relativa inexplicable a la SST.

Los cocientes de t de la figura 13.17 sugieren que al menos uno de los tres predictores de segundo orden proporciona información útil más allá de los tres predictores de primer orden. Por tanto, ahora vamos a considerar la prueba H_0: $\beta_7 = \beta_8 = \beta_9 = 0$ frente a la alternativa de que al menos uno de estos tres β_i no es 0. Una vez más la información de las sumas secuenciales de la figura 13.17 nos permite obtener SSE para el modelo reducido (que contiene sólo los seis predictores $x_1, x_2, x_3, x_1^2, x_2^2, x_3^2$) sin realmente ajustar ese modelo: SSR = la suma de los primeros seis números en la columna Seq SS = 16.2930, donde SSE = 16.7982 − 16.2930 = 0.5052. Por tanto,

$$f = [(.5052 - .2152)/3]/[.2152/(17 - (6 + 1))] = 4.49$$

La tabla A.9 da $F_{.05,3,10} = 3.71$ y $F_{.01,3,10} = 6.55$, lo cual implica que el valor P está entre .01 y .05. En particular, a un nivel de significancia de .01, la hipótesis nula no sería rechazada. La conclusión a ese nivel es que ninguno de los tres predictores de interacción proporciona información adicional útil. ■

Evaluación de lo adecuado de un modelo

Los residuos estandarizados en regresión múltiple resultan de dividir cada uno de los residuos entre su desviación estándar estimada; la fórmula para estas desviaciones estándar es considerablemente más complicada que en el caso de la regresión lineal simple. Se recomienda una gráfica de probabilidad normal de los residuos estandarizados como base para validar la suposición de normalidad. Si el patrón en esta gráfica se aleja sustancialmente de la linealidad, los procedimientos desarrollados en esta sección de t y F no deberán usarse para hacer inferencias. Las gráficas de residuos estandarizados en función de cada predictor y en función de $\hat{y}$ no deberían mostrar un patrón discernible. Las gráficas de residuos ajustadas también pueden ser útiles en este trabajo. El libro de Neter *et al.* es una referencia sumamente útil.

EJEMPLO 13.17 La figura 13.18 muestra una gráfica de probabilidad normal de los residuos estandarizados para los datos de microdureza y el modelo ajustado dados en el ejemplo 13.15. La rectitud de la gráfica arroja poca duda sobre la suposición de que la desviación aleatoria ϵ está normalmente distribuida.

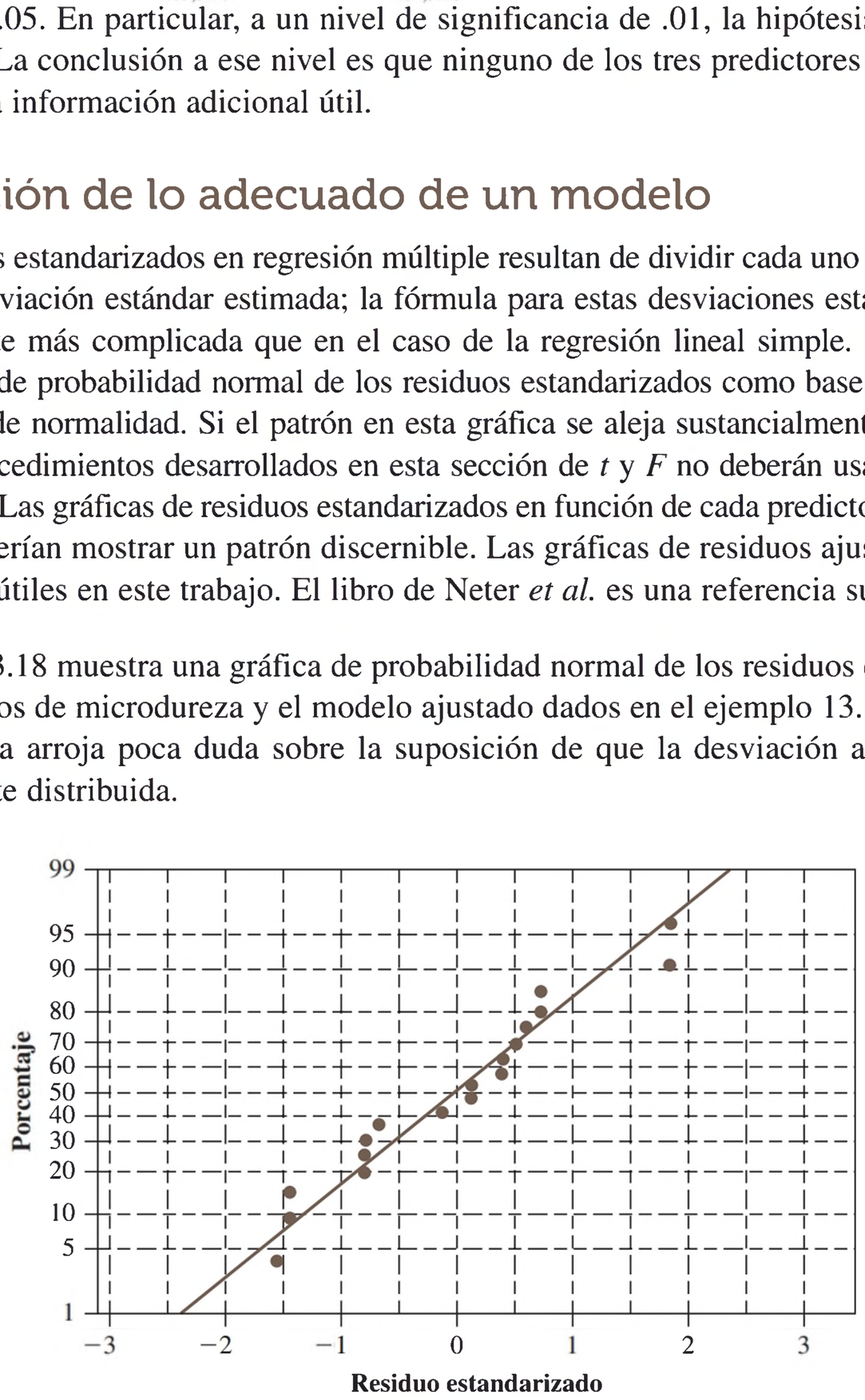


Figura 13.18 Una gráfica de probabilidad normal de los residuos estandarizados para los datos y modelo del ejemplo 13.15

La figura 13.19 muestra las otras gráficas sugeridas para los datos de microdureza (aparecen menos de 18 puntos porque varios valores observados y calculados están duplicados).

Dado el tamaño tan pequeño de la muestra, no hay mucha evidencia de un patrón en ninguna de las tres primeras gráficas que no sea el azar.

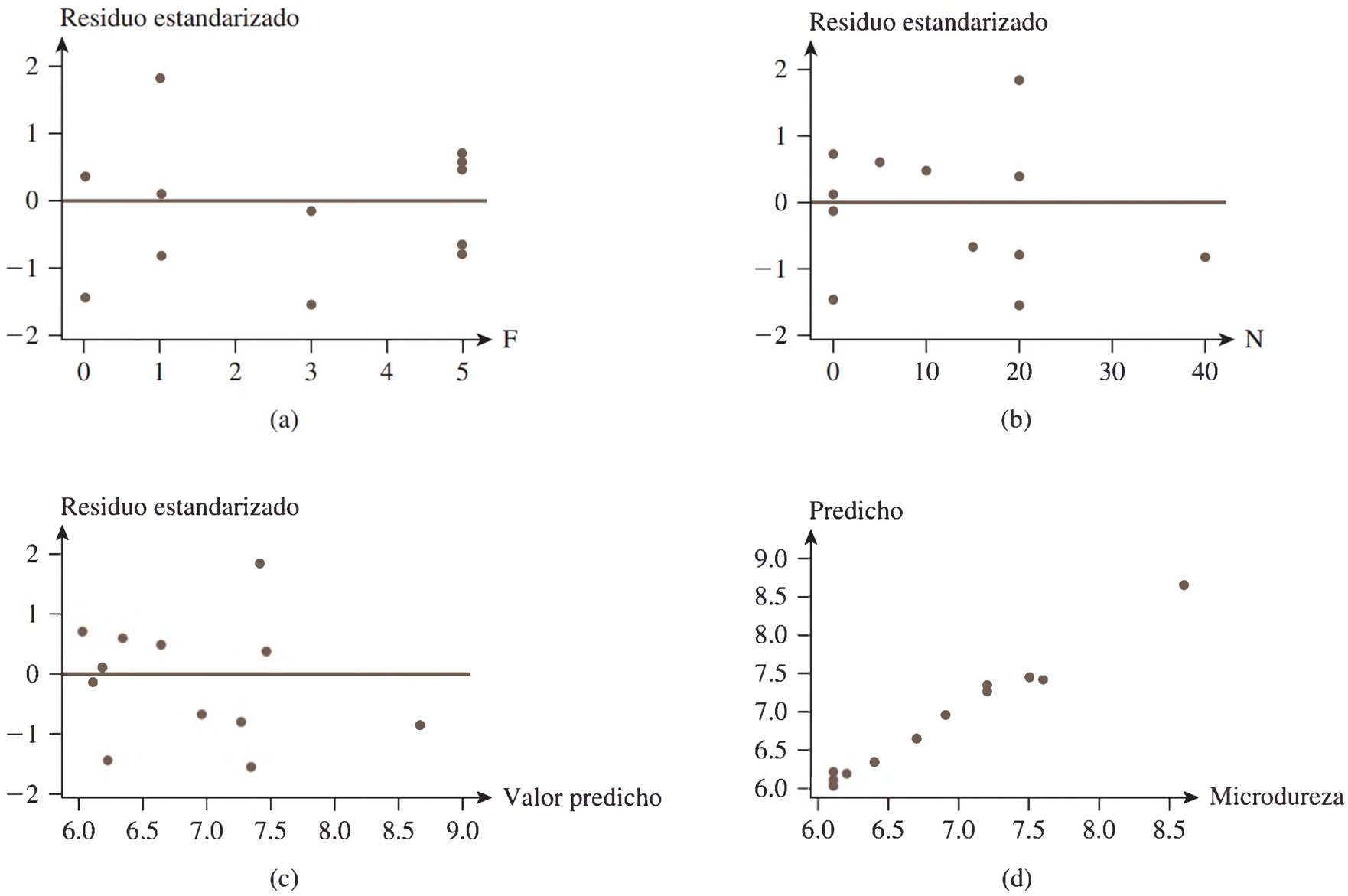


Figura 13.19 Gráficas de diagnóstico para los datos de microdureza: (a) residuos estandarizados en función de x_1; (b) residuos estandarizados en función de x_2; (c) residuos estandarizados en función de $\hat{y}$; (d) $\hat{y}$ en función de y ■

EJERCICIOS Sección 13.4 (36–54)

36. La salud cardiorrespiratoria es ampliamente reconocida como un componente importante del bienestar físico general. La medición directa de la inhalación máxima de oxígeno (VO_2 máx) es la mejor medición individual, pero es lenta y costosa. Por tanto, es deseable tener una ecuación de predicción para el VO_2máx en términos de cantidades que se puedan obtener con facilidad. Considere las variables

$y = VO_2max$ (L/mín) x_1 = peso (kg)
x_2 = edad (años)
x_3 = tiempo necesario para caminar 1 milla (mín)
x_4 = ritmo cardiaco al final de la caminata (pulsaciones/mín)

He aquí un posible modelo para estudiantes de sexo masculino, consistente con la información dada en el artículo **"Validation of the Rockport Fitness Walking Test in College Males and Females" (*Research Quarterly for Exercise and Sport*, 1994: 152–158)**:

$Y = 5.0 + .01x_1 - .05x_2 - .13x_3 - .01x_4 + \epsilon$
$\sigma = .4$

a. Interprete β_1 y β_3.
b. ¿Cuál es el valor esperado de VO_2máx con 76 kg de peso, 20 años de edad, 12 minutos de caminata y un ritmo cardiaco de 140 p/min?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que VO_2máx esté entre 1.00 y 2.60 para una sola observación hecha cuando los valores de los predictores sean como se expresa en el inciso b)?

37. Una compañía de transporte foráneo consideró un modelo de regresión múltiple para relacionar la variable dependiente y = tiempo total de viaje diario para uno de sus conductores (horas), con los predictores x_1 = distancia recorrida (millas) y x_2 = número de entregas hechas. Suponga que la ecuación del modelo es

$$Y = -.800 + .060x_1 + .900x_2 + \epsilon$$

a. ¿Cuál es la media del tiempo de viaje cuando la distancia recorrida es de 50 millas y se hacen tres entregas?
b. ¿Cómo se interpretaría $\beta_1 = .060$, el coeficiente del predictor x_1? ¿Cuál es la interpretación de $\beta_2 = .900$?

c. Si $\sigma = .5$ horas, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo de viaje sea a lo más de 6 horas cuando se hacen tres entregas y la distancia recorrida es de 50 millas?

38. Sea y = duración de un cojinete, x_1 = viscosidad de aceite y x_2 = carga. Suponga que el modelo de regresión múltiple que relaciona duración con viscosidad y carga es

$$Y = 125.0 + 7.75x_1 + .0950x_2 - .0090x_1x_2 + \epsilon$$

a. ¿Cuál es la media de la duración cuando la viscosidad es 40 y la carga es 1100?

b. Cuando la viscosidad es de 30, ¿cuál es el cambio en la duración media asociado con un aumento de 1 en carga? Cuando la viscosidad es de 40, ¿cuál es el cambio en la duración media asociado con un incremento de 1 en la carga?

39. Sea y = ventas de un restaurante de comida rápida (miles de dólares), x_1 = número de restaurantes competidores a una milla a la redonda, x_2 = población dentro de una milla de radio (miles de personas) y x_3 una variable indicadora igual a 1 si el restaurante tiene una ventanilla para automovilistas, y 0 si no la tiene. Suponga que el modelo de regresión verdadero es

$$Y = 10.00 - 1.2x_1 + 6.8x_2 + 15.3x_3 + \epsilon$$

a. ¿Cuál es la media de ventas cuando el número de restaurantes competidores es 2, hay 8000 habitantes en un radio de 1 milla y el restaurante tiene una ventanilla para automovilistas?

b. ¿Cuál es la media de las ventas de un restaurante sin ventanilla para automovilistas, que tiene tres restaurantes competidores y 5000 habitantes en un radio de 1 milla?

c. Interprete β_3.

40. El artículo citado en el ejercicio 49 del capítulo 7 aporta información resumida sobre una regresión en la cual la variable dependiente fue la potencia de salida (W) en una simulación de una carrera de 200 m y los predictores fueron x_1 = circunferencia del brazo (cm), x_2 = exceso del consumo de oxígeno posterior al ejercicio (ml/kg) y x_3 = lactato pos prueba inmediata (mmol/L). La ecuación estimada de regresión fue reportada como

$$y = -408.20 + 14.06x_1 + .76x_2 - 3.64x_3$$
$$(n = 11, R^2 = .91)$$

a. Realice la prueba de modelo de utilidad usando un nivel de significancia de 0.01. [*Nota*: Los tres predictores fueron determinados como importantes.]

b. Interprete el estimado 14.06.

c. Prediga la potencia de salida cuando la circunferencia del brazo es de 36 cm, el exceso del consumo de oxígeno es de 120 ml/kg, y el lactato es 10.0.

d. Calcule una estimación puntual para la potencia promedio verdadera cuando los valores de los predictores son como se dan en c).

e. Obtenga una estimación puntual para el cambio promedio real en la potencia de salida asociado con un aumento en el lactato de 1 mmol/L, mientras la circunferencia del brazo y el consumo de oxígeno permanecen fijos.

41. El artículo **"A Study of Factors Affecting the Human Cone Photoreceptor Density Measured by Adaptive Optics Scanning Laser Opthalmoscope"** (***Exptl. Eye Research*, 2013: 1–9**), incluye un resumen de análisis de regresión múltiple basado en una muestra de $n = 192$ ojos; la variable dependiente es la densidad de empaquetamiento de conos (células/mm^2) y las dos variables independientes fueron x_1 = excentricidad (mm) y x_2 = longitud axial (mm).

a. El coeficiente de determinación múltiple reportado fue .834. Interprete este valor y lleve a cabo una prueba de modelo de utilidad.

b. La función de regresión estimada fue $y = 35\,821.792 - 6294.729x_1 - 348.037x_2$. Calcule una predicción puntual para la densidad de empaquetamiento cuando la excentricidad es de 1 mm y la longitud axial es de 25 mm.

c. Interprete el coeficiente de x_1 en la función de regresión estimada en b).

d. El error estándar estimado de $\hat{\beta}_1$ era 203.702. Calcule e interprete un intervalo de confianza con un nivel de confianza del 95 % para β_1.

e. El error estándar estimado del coeficiente estimado de la longitud axial era de 134.350. Ponga a prueba la hipótesis nula H_0: $\beta_2 = 0$ frente a la alternativa H_a: $\beta_2 \neq 0$ usando un nivel de significancia de 0.05, e interprete el resultado.

42. Una investigación de un proceso de fundición a presión produjo los datos siguientes sobre x_1 = temperatura de horno, x_2 = tiempo de cierre de matriz, y y = diferencia de la temperatura en la superficie de la matriz (**"A Multiple-Objective Decision-Making Approach for Assessing Simultaneous Improvement in Die Life and Casting Quality in a Die Casting Process"**, ***Quality Engineering*, 1994: 371-383**).

x_1	1250	1300	1350	1250	1300
x_2	6	7	6	7	6
y	80	95	101	85	92
x_1	1250	1300	1350	1350	
x_2	8	8	7	8	
y	87	96	106	108	

A continuación se muestra el resultado de Minitab por ajuste del modelo de regresión múltiple con predictores x_1 y x_2.

```
The regression equation is
diftemp = −200 + 0.210 temphorno
                + 3.00 tiempocierre

Predictor        Coef     Stdev  t-ratio      p
Constant      −199.56     11.64   −17.14  0.000
temphorno    0.210000  0.008642    24.30  0.000
tiempocierre   3.0000    0.4321     6.94  0.000

s = 1.058  R-sq = 99.1%     R-sq(adj) = 98.8%

Analysis of Variance
SOURCE        DF      SS      MS       F      p
Regression     2  715.50  357.75  319.31  0.000
Error          6    6.72    1.12
Total          8  722.22
```

a. Efectúe la prueba de utilidad del modelo.

b. Calcule e interprete un intervalo de confianza de 95% para β_2, el coeficiente de regresión de población de x_2.

c. Cuando $x_1 = 1300$ y $x_2 = 7$, la desviación estándar estimada de $\hat{Y}$ es $s_{\hat{Y}} = .353$. Calcule un intervalo de confianza de 95% para una verdadera diferencia promedio de temperatura, cuando la temperatura del horno es de 1300 y el tiempo de cierre de matriz es de 7.

d. Calcule un intervalo de predicción de 95% para la diferencia de temperatura que resulte de un ciclo individual y experimental de fundición, con temperatura del horno de 1300 y tiempo de cierre de matriz de 7.

43. Un experimento realizado para estudiar el efecto del contenido molar del cobalto (x_1) y la temperatura de calcinación (x_2) en el área superficial de un catalizador de hidróxido de hierro-cobalto (y) produjo los datos siguientes (**"Structural Changes and Surface Properties of $CoxFe_{3-x}O_4$ Spinels", *J. of Chemical Tech. and Biotech.*, 1994: 161–170**). Una petición al paquete SAS para ajustar $\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3$, donde $x_3 = x_1 x_2$ (un predictor de interacción) generó lo siguiente.

x_1	.6	.6	.6	.6	.6	1.0	1.0
x_2	200	250	400	500	600	200	250
y	90.6	82.7	58.7	43.2	25.0	127.1	112.3
x_1	1.0	1.0	1.0	2.6	2.6	2.6	2.6
x_2	400	500	600	200	250	400	500
y	19.6	17.8	9.1	53.1	52.0	43.4	42.4
x_1	2.6	2.8	2.8	2.8	2.8	2.8	
x_2	600	200	250	400	500	600	
y	31.6	40.9	37.9	27.5	27.3	19.0	

a. Pronostique el valor del área superficial cuando el contenido de cobalto sea de 2.6 y la temperatura sea de 250, y calcule el valor del residuo correspondiente.

b. Debido a que $\hat{\beta}_1 = -46.0$, ¿será legítimo concluir que si el contenido de cobalto aumenta en 1 unidad, mientras sigan fijos los valores de los otros predictores, puede esperarse que el área superficial se reduzca en alrededor de 46 unidades? Explique su razonamiento.

c. ¿Será que hay una útil relación lineal entre y y los predictores?

d. Dado que el contenido de moles y la temperatura de calcinación permanecen en el modelo, ¿será que la interacción entre el predictor x_3 da información útil acerca de y? Exprese y pruebe las hipótesis apropiadas usando un nivel de significancia de .01.

e. La desviación estándar estimada de $\hat{Y}$, cuando el contenido de moles es de 2.0 y la temperatura de calcinación es 500, es $s_{\hat{Y}} = 4.69$. Calcule un intervalo de confianza de 95% para la media del área superficial bajo estas circunstancias.

44. El resultado adjunto de Minitab de regresión se basa en los datos que aparecen en el artículo **"Application of Design of Experiments for Modeling Surface Roughness in Ultrasonic Vibration Turning" (*J. of Engr. Manuf.*, 2009: 641–652)**. La variable de respuesta es la rugosidad superficial (μm) y las variables independientes son la amplitud de la vibración (mm), la profundidad del corte (mm), la velocidad de avance (mm/rev) y la velocidad de corte (m/min), respectivamente.

a. ¿Cuántas observaciones estaban en el conjunto de datos?

b. Interprete el coeficiente de determinación múltiple.

c. Lleve a cabo una prueba de hipótesis para decidir si el modelo especifica una relación útil entre la variable de respuesta y al menos uno de los predictores.

d. Interprete el número 18.2602 que aparece en la columna Coef.

e. Al nivel de significancia .10, ¿podrá eliminarse sólo uno de las predictores del modelo, siempre que los demás se conserven?

f. La DE estimada de $\overline{Y}$ cuando los valores de los cuatro predictores son 10, .5, .25 y 50, respectivamente, es .1178.

Resultado SAS para el ejercicio 43

```
Dependent Variable: AREASUP

                        Analysis of Variance

     Source     DF    Sum of Squares    Mean Square    F Value    Prob>F
     Model       3       15223.52829     5074.50943     18.924    0.0001
     Error      16        4290.53971      268.15873
   C Total      19       19514.06800

    Root MSE     16.37555     R-square      0.7801
    Dep Mean     48.06000     Adj R-sq      0.7389
    C.V.         34.07314

                      Parameter Estimates

                    Parameter       Standard      T for H0:      Prob
    Variable    DF    Estimate          Error    Parameter=0      >|T|
    INTERCEP     1  185.485740   21.19747682          8.750    0.0001
    CONTCO       1  -45.969466   10.61201173         -4.332    0.0005
    TEMP         1   -0.301503    0.05074421         -5.942    0.0001
    CONTEMP      1    0.088801    0.02540388          3.496    0.0030
```

Calcule un IC de rugosidad promedio real y un IP de la rugosidad de una sola muestra y compare los dos intervalos.

```
The regression equation is
Ra = − 0.972 − 0.0312a + 0.557d + 18.3f + 0.00282v

Predictor        Coef    SE Coef        T       P
Constant      −0.9723     0.3923   −2.48   0.015
a            −0.03117    0.01864   −1.67   0.099
d              0.5568     0.3185    1.75   0.084
f             18.2602     0.7536   24.23   0.000
v            0.002822   0.003977    0.71   0.480

S=0.822059 RSq=88.6% RSq(adj)=88.0%

Source           DF      SS      MS       F      P
Regression        4  401.02  100.25  148.35  0.000
Residual Error   76   51.36    0.68
Total            80  452.38
```

45. El artículo **"Analysis of the Modeling Methodologies for Predicting the Strength of Air-Jet Spun Yarns" (*Textile Res. J.*, 1997: 39–44)** reporta en un estudio llevado a cabo para relacionar la tenacidad del hilo (y, en g/tex) con la cantidad de hilo (x_1, en tex), porcentaje de poliéster (x_2), presión de la primera tobera (x_3, en kg/cm^2) y presión de la segunda tobera (x_4, en kg/cm^2). La estimación del término constante en la correspondiente ecuación de regresión múltiple fue de 6.121. Los coeficientes estimados para los cuatro predictores fueron −.082, .113, .256 y −.219, respectivamente, y el coeficiente de determinación múltiple fue de .946.

a. Suponiendo que el tamaño muestral fue de $n = 25$ exprese y pruebe las hipótesis apropiadas para determinar si el modelo especifica una relación lineal útil entre la variable dependiente y al menos uno de los cuatro predictores del modelo.

b. Una vez más, utilizando $n = 25$, calcule el valor de la R^2 ajustada.

c. Calcule un intervalo de confianza de 99% para una verdadera tenacidad media del hilo cuando la cantidad de este es 16.5, el hilo contiene 50% de poliéster, la presión de la primera tobera es 3 y la presión de la segunda tobera es 5, si la desviación estándar estimada de tenacidad bajo estas circunstancias es de .350.

46. Un análisis de regresión efectuado para relacionar y = tiempo de reparación para un sistema de filtración de agua (h), con x_1 = tiempo transcurrido desde el servicio previo (meses) y x_2 = tipo de reparación (1 si es eléctrico y 0 si es mecánico), dio el siguiente modelo basado en $n = 12$ observaciones: $y = .950 + .400x_1 + 1.250x_2$. Además, SST = 12.72, SSE = 2.09, y $s_{\hat{\beta}_2} = .312$.

a. ¿Será que hay una relación lineal útil entre el tiempo de reparación y los dos predictores del modelo? Realice una prueba de las hipótesis apropiadas usando un nivel de significancia de .05.

b. Dado que el tiempo transcurrido desde el último servicio sigue en el modelo, ¿será que el tipo de reparación da información útil acerca del tiempo de reparación? Exprese y pruebe las hipótesis apropiadas usando un nivel de significancia de .01.

c. Calcule e interprete un intervalo de confianza de 95% para β_2.

d. La desviación estándar estimada de una predicción para el tiempo de reparación, cuando el tiempo transcurrido sea de 6 meses y la reparación sea eléctrica, es de .192. Pronostique el tiempo de reparación bajo estas circunstancias al calcular un intervalo de predicción de 99%. ¿Será que el intervalo sugiere que el modelo estimado dará una predicción precisa? ¿Por qué sí o por qué no?

47. El diseño eficiente de ciertos tipos de incineradores de desechos municipales exige que se disponga de información acerca del contenido energético de los desechos. Los autores del artículo **"Modeling the Energy Content of Municipal Solid Waste Using Multiple Regression Analysis" (*J. of the Air and Waste Mgmnt. Assoc.*, 1996: 650-656)** bondadosamente nos proporcionaron la siguiente información acerca de y = contenido energético (kcal/kg), las tres variables físicas de composición x_1 = % de plástico por peso, x_2 = % de papel por peso y x_3 = % de basura por peso, y la variable próxima de análisis x_4 = % de humedad por peso para especímenes de desechos de cierta región.

Obs	Plástico	Papel	Basura	Agua	Contenido energético
1	18.69	15.65	45.01	58.21	947
2	19.43	23.51	39.69	46.31	1407
3	19.24	24.23	43.16	46.63	1452
4	22.64	22.20	35.76	45.85	1553
5	16.54	23.56	41.20	55.14	989
6	21.44	23.65	35.56	54.24	1162
7	19.53	24.45	40.18	47.20	1466
8	23.97	19.39	44.11	43.82	1656
9	21.45	23.84	35.41	51.01	1254
10	20.34	26.50	34.21	49.06	1336
11	17.03	23.46	32.45	53.23	1097
12	21.03	26.99	38.19	51.78	1266
13	20.49	19.87	41.35	46.69	1401
14	20.45	23.03	43.59	53.57	1223
15	18.81	22.62	42.20	52.98	1216
16	18.28	21.87	41.50	47.44	1334
17	21.41	20.47	41.20	54.68	1155
18	25.11	22.59	37.02	48.74	1453
19	21.04	26.27	38.66	53.22	1278
20	17.99	28.22	44.18	53.37	1153
21	18.73	29.39	34.77	51.06	1225
22	18.49	26.58	37.55	50.66	1237
23	22.08	24.88	37.07	50.72	1327
24	14.28	26.27	35.80	48.24	1229
25	17.74	23.61	37.36	49.92	1205
26	20.54	26.58	35.40	53.58	1221
27	18.25	13.77	51.32	51.38	1138
28	19.09	25.62	39.54	50.13	1295
29	21.25	20.63	40.72	48.67	1391
30	21.62	22.71	36.22	48.19	1372

El uso del Minitab para ajustar un modelo de regresión múltiple, con las cuatro variables citadas líneas antes como predictores de contenido energético, produjo el resultado siguiente:

```
The regression equation is
contener = 2245 + 28.9 plastico
                + 7.64 papel + 4.30 basura
                 −37.4 agua

Predictor        Coef     StDev         T        P
Constant       2244.9     177.9     12.62    0.000
plastico       28.925     2.824     10.24    0.000
papel           7.644     2.314      3.30    0.003
basura          4.297     1.916      2.24    0.034
agua          −37.354     1.834    −20.36    0.000

s = 31.48      R-Sq = 96.4%    R-Sq(adj) = 95.8%

Analysis of Variance

Source        DF       SS       MS        F       P
Regression     4   664931   166233   167.71   0.000
Error         25    24779      991
Total         29   689710
```

a. Interprete los valores de los coeficientes de regresión estimada $\hat{\beta}_1$ y $\hat{\beta}_4$.

b. Exprese y pruebe las hipótesis apropiadas para determinar si el ajuste del modelo a los datos especifica una relación lineal útil entre contenido energético y al menos uno de los cuatro predictores.

c. Dado que el % de plástico, el de papel y el de agua permanecen en el modelo, ¿el % de basura da información útil acerca del contenido energético? Exprese y pruebe las hipótesis apropiadas usando un nivel de significancia de .05.

d. Utilice el hecho de que $s_{\hat{Y}} = 7.46$ cuando $x_1 = 20$, $x_2 = 25$, $x_3 = 40$, y $x_4 = 45$ para calcular un intervalo de confianza de 95% para el verdadero contenido energético promedio bajo estas circunstancias. ¿Será que el intervalo resultante sugiere que el contenido energético medio ha sido estimado con precisión?

e. Use la información dada en el inciso d) para predecir el contenido energético, para una muestra de desechos que tenga las características especificadas, de modo que lleve información acerca de precisión y confiabilidad.

48. En el artículo **"Some Studies in Degumming of Silk with Organic Acids"** (*J. Society of Dyers and Colourists*, **1992: 79–86**) se describe un experimento para investigar los efectos de una nueva técnica para desengomar seda. Una variable de respuesta de interés fue y = pérdida de peso (%). Los experimentadores hicieron observaciones de pérdida de peso para diversos valores de tres variables independientes: x_1 = temperatura (°C)= 90, 100, 110; x_2 = tiempo de tratamiento (mín)= 30, 75, 120; x_3 = concentración de ácido tartárico (g/L) = 0, 8, 16. En los análisis de regresión, los tres valores de cada variable se codificaron como −1, 0 y 1, respectivamente y dieron los datos siguientes (el valor $y_8 = 19.3$ se reportó, pero el valor $y_8 = 20.3$ produjo una salida de regresión idéntica a la que aparece en el artículo).

Obs	1	2	3	4	5	6	7	8
x_1	−1	−1	1	1	−1	−1	1	1
x_2	−1	1	−1	1	0	0	0	0
x_3	0	0	0	0	−1	1	−1	1
y	18.3	22.2	23.0	23.0	3.3	19.3	19.3	20.3

Obs	9	10	11	12	13	14	15
x_1	0	0	0	0	0	0	0
x_2	−1	−1	1	1	0	0	0
x_3	−1	1	−1	1	0	0	0
y	13.1	23.0	20.9	21.5	22.0	21.3	22.6

Un modelo de regresión múltiple con $k = 9$ predictores x_1, x_2, x_3, $x_4 = x_1^2$, $x_5 = x_2^2$, $x_6 = x_3^2$, $x_7 = x_1x_2$, $x_8 = x_1x_3$ y $x_9 = x_1x_3$ se ajustó a los datos y dio por resultado $\hat{\beta}_0 = 21.967$, $\hat{\beta}_1 = 2.8125$, $\hat{\beta}_2 = 1.2750$, $\hat{\beta}_3 = 3.4375$, $\hat{\beta}_4 = -2.208$, $\hat{\beta}_5 = 1.867$, $\hat{\beta}_6 = -4.208$, $\hat{\beta}_7 = -.975$, $\hat{\beta}_8 = -3.750$, $\hat{\beta}_9 = -2.325$, SSE = 23.379 y $R^2 = .938$.

a. ¿Será que este modelo especifica una relación útil? Exprese y pruebe las hipótesis apropiadas usando un nivel de significancia de .01.

b. La desviación estándar estimada de $\hat{\mu}_Y$ cuando $x_1 = \cdots = x_9 = 0$ (es decir, cuando la temperatura = 100, el tiempo = 75, y la concentración = 8) es 1.248. Calcule un intervalo de confianza de 95% para la pérdida de peso esperada cuando la temperatura, el tiempo y la concentración tengan los valores especificados.

c. Calcule un intervalo de predicción de 95% para un solo valor de pérdida de peso observada cuando la temperatura, el tiempo y la concentración tengan valores de 100, 75 y 8, respectivamente.

d. El ajuste del modelo con sólo x_1, x_2 y x_3 como predictores dio $R^2 = .456$ y SSE = 203.82. ¿Será que al menos uno de los predictores de segundo orden proporciona información adicional de utilidad? Exprese y pruebe las hipótesis apropiadas.

49. Los investigadores llevaron a cabo un estudio para ver cómo y = máxima deformación (en milímetros) de vigas de cemento mixtas reforzadas de ultra-alta resistencia fueron influenciadas por x_1 = relación de lapso de corte y x_2 = resistencia a la tracción de división (MPa), lo cual se muestra en los siguientes datos (**"Shear Behavior of Reinforced Ultrahigh Toughness Cementitious Composite Beams without Transverse Reinforcement"**, ***J. of Materials in Civil Engr.*, 2012: 1283–1294**):

x_1	x_2	y	x_1	x_2	y
2.04	3.55	3.11	3.08	3.62	3.36
2.04	6.07	3.26	3.08	5.89	6.49
3.06	3.55	3.89	4.11	3.62	2.72
3.06	6.07	10.25	4.11	5.89	12.48
4.08	3.55	3.11	2.01	6.18	2.82
4.08	6.16	13.48	3.02	6.18	5.19
2.06	3.62	3.94	4.03	6.18	8.04
2.06	6.16	3.53			

a. En seguida se muestra un resultado de Minitab del modelo ajustado con los predictores x_1, x_2, x_3, $= x_1x_2$:

```
The regression equation is
y = 17.3 − 6.37 x1 − 3.66 x2 + 1.71 x1x2

Predictor      Coef    SE Coef         T        P
Constant     17.279      7.167      2.41    0.035
x1           −6.368      2.260     22.82    0.017
x2           −3.658      1.364     22.68    0.021
x1x2          1.7067     0.4314     3.96    0.002
```

```
S = 1.72225  R-Sq = 82.5%  R-Sq(adj) = 77.8%

Analysis of Variance

Source          DF        SS       MS       F       P
Regression       3   154.033   51.344   17.31   0.000
Residual        11    32.627    2.966
   Error
Total           14   186.660
```

Lleve a cabo un prueba de un modelo de utilidad.

b. ¿Se debe mantener al predictor de interacción en el modelo? Lleve a cabo una prueba de las hipótesis usando un nivel de significancia de .05.

c. La desviación estándar estimada de $\hat{Y}$ cuando $x_1 = 3$ y $x_2 = 6$ es $s_{\hat{Y}} = .555$. Calcule interprete el intervalo de predicción con un nivel de confianza de 95% para un promedio de desviación real bajo dichas circunstancias.

d. Use la información en c), calcule e interprete el intervalo de predicción con un nivel de confianza de 95% para un valor futuro de la desviación máxima observada cuando $x_1 = 3$ y $x_2 = 6$.

50. Cuando el modelo $Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1^2 + \beta_4 x_2^2 + \beta_5 x_1 x_2 + \epsilon$ se ajusta a los datos del ejercicio 49, el valor resultante de SSE es 28.947. Dado que los predictores x_1, x_2 y x_1x_2 permanecen en el modelo, ¿alguno de los predictores cuadráticos x_1^2 o x_2^2 proveen información útil adicional? Exprese y pruebe las hipótesis apropiadas.

51. El artículo **"Optimization of Surface Roughness in Drilling Using Vegetable-Based Cutting Oils Developed from Sunflower Oil" (*Industrial Lubrication and Tribology*, 2011: 271–276)** da los siguientes datos para x_1 = velocidad del cabezal (rpm), x_2 = tasa de alimentación (mm/rev), x_3 = profundidad de perforación (mm) y y = rugosidad de la superficie (μm) cuando se usó un fluido de corte semisintético:

x_1	x_2	x_3	y	e^*
320	.10	15	2.27	−1.32
320	.12	20	4.14	1.08
320	.14	25	4.69	0.26
420	.10	20	1.92	−0.40
420	.12	25	2.63	−0.79
420	.14	15	4.34	0.99
520	.10	25	2.03	1.64
520	.12	15	2.34	0.03
520	.14	20	2.67	−1.52

a. Aquí está el resultado parcial de Minitab del ajuste del modelo con x_1, x_2 y x_3 como predictores (los autores del artículo citado usaron Minitab para este propósito):

```
Predictor          Coef    SE Coef       T       P
Constant          0.099      1.871    0.05   0.960
x1             −0.006767   0.002231   −3.03   0.029
x2                45.67      11.16    4.09   0.009
x3              0.01333    0.04463    0.30   0.777
S = 0.546589  R-Sq = 83.9%  R-Sq(adj) = 74.2%
```

¿Será que la profundidad de perforación proporciona información útil sobre la rugosidad, dado que la velocidad del cabezal y la velocidad de alimentación permanecen en el modelo?

b. Aquí está el resultado de Minitab del ajuste del modelo con solamente x_1 y x_2 como predictores (el artículo citado no hace mención de este modelo):

```
Predictor          Coef    SE Coef       T       P
Constant          0.365      1.514    0.24   0.817
x1             −0.006767   0.002055   −3.29   0.017
x2                45.67      10.28    4.44   0.004
S = 0.503400  R-Sq = 83.6%  R-Sq(adj) = 78.1%
```

Lleve a cabo una prueba de modelo de utilidad mediante $\alpha = .05$.

c. Calcule e interprete un IC del 95% para el coeficiente de regresión de la población en x_1.

d. La desviación estándar estimada de la Y predicha cuando $x_1 = 400$ y y $x_2 = .125$ es .180. Calcule un IC del 95% para la rugosidad promedio verdadera bajo estas circunstancias.

e. Los valores de e^* que aparecen junto con los datos son de la regresión de b). Investigue la exactitud del modelo.

52. La utilización de sacarosa como fuente de carbono para la producción de sustancias químicas es antieconómica. La melaza de remolacha es un sustituto que se puede obtener con facilidad y es de bajo precio. El artículo **"Optimization of the Production of β-Carotene from Molasses by Blakeslea Trispora (*J. of Chemical Technology and Biotechnology*, 2002: 933–943)** llevó a cabo un análisis de regresión múltiple para relacionar la variable dependiente y = cantidad de β-caroteno (g/dm^3) con la cantidad de ácido linoleico de los tres predictores, cantidad de queroseno y cantidad de antioxidante (todos en g/dm^3).

Obs	Linoleico	Queroseno	Antioxidante	Betacaro
1	30.00	30.00	10.00	0.7000
2	30.00	30.00	10.00	0.6300
3	30.00	30.00	18.41	0.0130
4	40.00	40.00	5.00	0.0490
5	30.00	30.00	10.00	0.7000
6	13.18	30.00	10.00	0.1000
7	20.00	40.00	5.00	0.0400
8	20.00	40.00	15.00	0.0065
9	40.00	20.00	5.00	0.2020
10	30.00	30.00	10.00	0.6300
11	30.00	30.00	1.59	0.0400
12	40.00	20.00	15.00	0.1320
13	40.00	40.00	15.00	0.1500
14	30.00	30.00	10.00	0.7000
15	30.00	46.82	10.00	0.3460
16	30.00	30.00	10.00	0.6300
17	30.00	13.18	10.00	0.3970
18	20.00	20.00	5.00	0.2690
19	20.00	20.00	15.00	0.0054
20	46.82	30.00	10.00	0.0640

a. El ajuste del modelo completo de segundo orden en los tres predictores dio por resultado $R^2 = .987$ y R^2 ajustada igual a .974, mientras que el ajuste del modelo de primer orden dio $R^2 = .016$. ¿Qué se concluiría acerca de los dos modelos?

b.= Para $x_1 = x_2 = 30$, $x_3 = 10$, un paquete de software de estadística reportó que $\hat{y} = .66573$, $s_{\hat{Y}} = .01785$ con base en el modelo completo de segundo orden. Pronostique la cantidad de β-caroteno que resultaría de un solo ciclo experimental con los valores designados de las variables independientes y hágalo de modo que conlleve información acerca de precisión y confiabilidad.

53. Los campos nevados contienen un amplio espectro de contaminantes que pueden representar riesgos ambientales. El artículo **"Atmospheric PAH Deposition: Deposition Velocities and Washout Ratios" (*J. of Environmental Engineering*, 2002: 186–195)** se concentró en la precipitación de hidrocarburos poliaromáticos. Los autores propusieron un modelo de regresión múltiple para relacionar la precipitación en un tiempo especificado (y, en $\mu g/m^2$) contra dos predictores más bien complicados x_1 ($\mu g\text{-}s/m^3$) y x_2 ($\mu g/m^2$) definidos en términos de concentraciones de aire PAH para varias especies, tiempo total y cantidad total de precipitación. A continuación aparece la información sobre fluoranteno de especies y el correspondiente resultado de Minitab:

obs	x_1	x_2	fluoranteno
1	92017	.0026900	278.78
2	51830	.0030000	124.53
3	17236	.0000196	22.65
4	15776	.0000360	28.68
5	33462	.0004960	32.66
6	243500	.0038900	604.70
7	67793	.0011200	27.69
8	23471	.0006400	14.18
9	13948	.0004850	20.64
10	8824	.0003660	20.60
11	7699	.0002290	16.61
12	15791	.0014100	15.08
13	10239	.0004100	18.05
14	43835	.0000960	99.71
15	49793	.0000896	58.97
16	40656	.0026000	172.58
17	50774	.0009530	44.25

```
The regression equation is
fluoranteno = −33.5 + 0.00205 x1 + 29836 x2

Predictor        Coef     SE Coef        T      P
Constant       −33.46       14.90    −2.25  0.041
x1          0.0020548   0.0002945     6.98  0.000
x2              29836       13654     2.19  0.046

S = 44.28   R-Sq = 92.3%   R-Sq(adj) = 91.2%

Analysis of Variance

Source           DF      SS      MS       F      P
Regression        2  330989  165495  84.390.000
Residual Error   14   27454    1961
Total            16  358443
```

Formule preguntas y efectúe análisis apropiados para sacar conclusiones.

54. Usar aceros de alta resistencia (HSS) en lugar de aleaciones de aluminio y magnesio en las estructuras del cuerpo del automóvil reduce el peso del vehículo. Sin embargo, el uso de HSS sigue siendo un problema debido a las dificultades con conformabilidad limitada, el aumento de la recuperación elástica, las dificultades para unirse y la reducción de la vida del troquel. El artículo **"Experimental Investigation of Springback Variation in Forming of High Strength Steels" (*J. of Manuf. Sci. and Engr.*, 2008: 1–9)** incluyó datos sobre la recuperación elástica y = desde el ángulo de abertura de la pared y x_1 = presión del portapiezas (BHP, por sus siglas en inglés). También se utilizaron tres diferentes proveedores de materiales y tres diferentes regímenes de lubricación (sin lubricación, lubricante #1 y lubricante # 2).

a. ¿Qué predictores se utilizan en un modelo para incorporar a los proveedores y la información de lubricación, además del BHP?

b. El resultado adjunto de Minitab resulta de ajustar el modelo de a) (los autores del artículo también utilizaron Minitab; curiosamente, ellos emplearon un nivel de significancia de .06 en varias pruebas de hipótesis). ¿Será que hay una relación útil entre la variable de respuesta y al menos uno de los indicadores? Lleve a cabo una prueba formal de hipótesis.

c. Cuando el BHP es de 1000, el material es del proveedor 1 y sin lubricación se utiliza $s_{\hat{Y}} = .524$. Calcule un 95% de IP para la elasticidad que resulta de hacer una observación adicional en estas condiciones.

d. Al parecer, desde la salida el régimen de lubricación no puede proporcionar información útil. Una regresión con los predictores correspondientes eliminados da como resultado SSE = 48.426. ¿Cuál es el coeficiente de determinación múltiple para este modelo y qué se puede concluir acerca de la importancia del régimen de lubricación?

e. Un modelo con predictores de BHP, con proveedor y con el régimen de lubricación, así como predictores para las interacciones entre el BHP y ambos regímenes de proveedor y lubricación, se tradujo en SSE = 28.216 y $R^2 = .849$. ¿Será que este modelo parece mejorar en el modelo con sólo el BHP y los predictores de proveedor?

```
Predictor         Coef    SE Coef       T      P
Constant       21.5322     0.6782   31.75  0.000
BHP        −0.0033680  0.0003919   −8.59  0.000
Suppl_1        −1.7181     0.5977   −2.87  0.007
Suppl_2        −1.4840     0.6010   −2.47  0.019
Lub_1          −0.3036     0.5754   −0.53  0.602
Lub_2           0.8931     0.5779    1.55  0.133

S = 1.18413   R-Sq = 77.5%   R-Sq(adj) = 73.8%

Source           DF      SS      MS      F      P
Regression        5 144.915  28.983  20.67  0.000
Residual Error   30  42.065   1.402
Total            35 186.980
```

13.5 Otros problemas en regresión múltiple

En esta sección se tratan superficialmente varios problemas que pueden surgir cuando se efectúa un análisis de regresión múltiple. En las referencias de este capítulo consulte un tratamiento más extenso de cualquier tema particular.

Transformaciones

En ocasiones, las consideraciones teóricas sugieren una relación no lineal entre una variable dependiente y dos o más variables independientes, mientras que en otras ocasiones las gráficas de diagnóstico indican que debe usarse algún tipo de función no lineal. Es frecuente que una transformación vuelva lineal el modelo.

EJEMPLO 13.18 Los diamantes cristalinos naturales han sido ampliamente utilizados en mecanismos de ultraprecisión. Sin embargo, su aplicación para el corte de metales ferrosos ha sido problemático debido al desgaste significativo de la herramienta. El artículo **"Investigation on Frictional Wear of Single Crystal Diamond Against Ferrous Metals" (*Intl. J. of Refractory Metals and Hard Materials*, 2013: 174–179)** presenta los siguientes datos para x_1 = fuerza mecánica (N), x_2 = velocidad de deslizamiento (m/s), x_3 = contenido de carbono (%) y y = grado de grafitado, una medida de desgaste del diamante.

Obs	x_1	x_2	x_3	y
1	10	.84	.07	.18
2	10	1.05	.27	.19
3	10	1.26	.45	.22
4	20	.84	.27	.21
5	20	1.05	.45	.24
6	20	1.26	.07	.28
7	30	.84	.45	.26
8	30	1.05	.07	.30
9	30	1.26	.27	.33

Los investigadores propusieron y ajustaron al modelo multiplicativo de regresión de potencia $Y = \alpha x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} x_3^{\beta_3} \epsilon$. Tomando el logaritmo natural de ambos lados de esta ecuación da

$$\ln(Y) = \ln(\alpha) + \beta_1 \ln(x_1) + \beta_2 \ln(x_2) + \beta_3 \ln(x_3) + \ln(\epsilon) \qquad (13.21)$$

que es nuestra ecuación general de regresión múltiple aditiva, siendo la variable dependiente el logaritmo natural del grado de grafitado y los predictores $\ln(x_1)$, $\ln(x_2)$ y $\ln(x_3)$. Suponiendo que ϵ en la ecuación del modelo original tiene una distribución logarítmica normal, el error aleatorio en nuestro modelo transformado se distribuye normalmente. La plausibilidad de este supuesto se puede comprobar con una gráfica de probabilidad normal de los residuos estandarizados resultantes de ajustar el modelo transformado.

La tabla 13.4 muestra el resultado de Minitab del ajuste (13.21). El valor de R^2 es bastante impresionante, aproximadamente 98% de la variación observada en $\ln(y)$ se puede atribuir a la relación del modelo, la R^2 ajustada es sólo un poco más pequeña que la R^2 en sí. Por otra parte, el valor P para la prueba de utilidad de modelo F es .000 (el área bajo la curva $F_{3,5}$ a la derecha de 81.16), lo que implica una relación útil entre $\ln(y)$ y al menos uno de los tres predictores. Las estimaciones puntuales de β_1, β_2 y β_3 son .36557, .59366 y −.02074, respectivamente. La estimación puntual de $\ln(\alpha)$ es −2.53727, por lo que el punto de estimación de α en sí mismo es $e^{-2.53727} = .079082$. La función de regresión inicial estimada es entonces $.079x_1^{.366}x_2^{.594}x_3^{-.021}$; esto aparece en el artículo citado.

Table 13.4 Salida de Minitab de la regresión transformada en el ejemplo 13.18

```
The regression equation is
ln(y) = − 2.54 + 0.366 ln(x1) + 0.594 ln(x2) − 0.0207 ln(x3)

Predictor          Coef     SE Coef          T         P
Constant       −2.53727     0.08413     −30.16     0.000
ln(x1)          0.36557     0.02734      13.37     0.000
ln(x2)          0.59366     0.07480       7.94     0.001
ln(x3)         −0.02074     0.01580      −1.31     0.246

S = 0.0372066  R-Sq = 98.0%  R-Sq(adj) = 96.8%

Analysis of Variance
Source            DF         SS          MS         F         P
Regression         3    0.33706     0.11235     81.16     0.000
Residual Error     5    0.00692     0.00138
Total              8    0.34399

Predicted Values for New Observations
New Obs      Fit     SE Fit          95% CI                  95% PI
      1  −1.4134     0.0133  (−1.4477, −1.3791)  (−1.5150, −1.3118)
```

Una predicción puntal del valor del grado de grafitado cuando la fuerza = 20, velocidad = 1 y el contenido de carbono = .25 requiere que primero obtengamos una predicción puntal de ln(Y) mediante la sustitución de ln(20), ln(0) y ln(.25) en la ecuación de regresión estimada en la tabla 13.4. El resultado es $\ln(\hat{y}) = -1.4134$, que aparece en la última línea del resultado de Minitab. Por tanto, $\hat{y} = e^{-1.4134} = 0.243$. Del mismo modo, la salida proporciona un IP de 95% para ln(Y), por lo que el IP para Y en sí misma es $(e^{-1.5150}, e^{-1.3118}) = (.220, .269)$.

La gráfica de probabilidad normal de la figura 13.20 muestra un patrón lineal sustancial, validando la hipótesis de normalidad para ln (ϵ). Y la gráfica de los residuos estandarizados contra los valores previstos [de ln(y)] no muestra más que un patrón azaroso, indicando que no hay violación de los supuestos del modelo. Sin embargo, mirando hacia atrás en la tabla 13.4, el valor P para la prueba de H_0: $\beta_3 = 0$ es .246. Por tanto, parece que conforme ln(x_1) y ln(x_2) permanezcan en el modelo, no hay información útil acerca de la variable de respuesta contenida en el logaritmo natural del contenido de car-

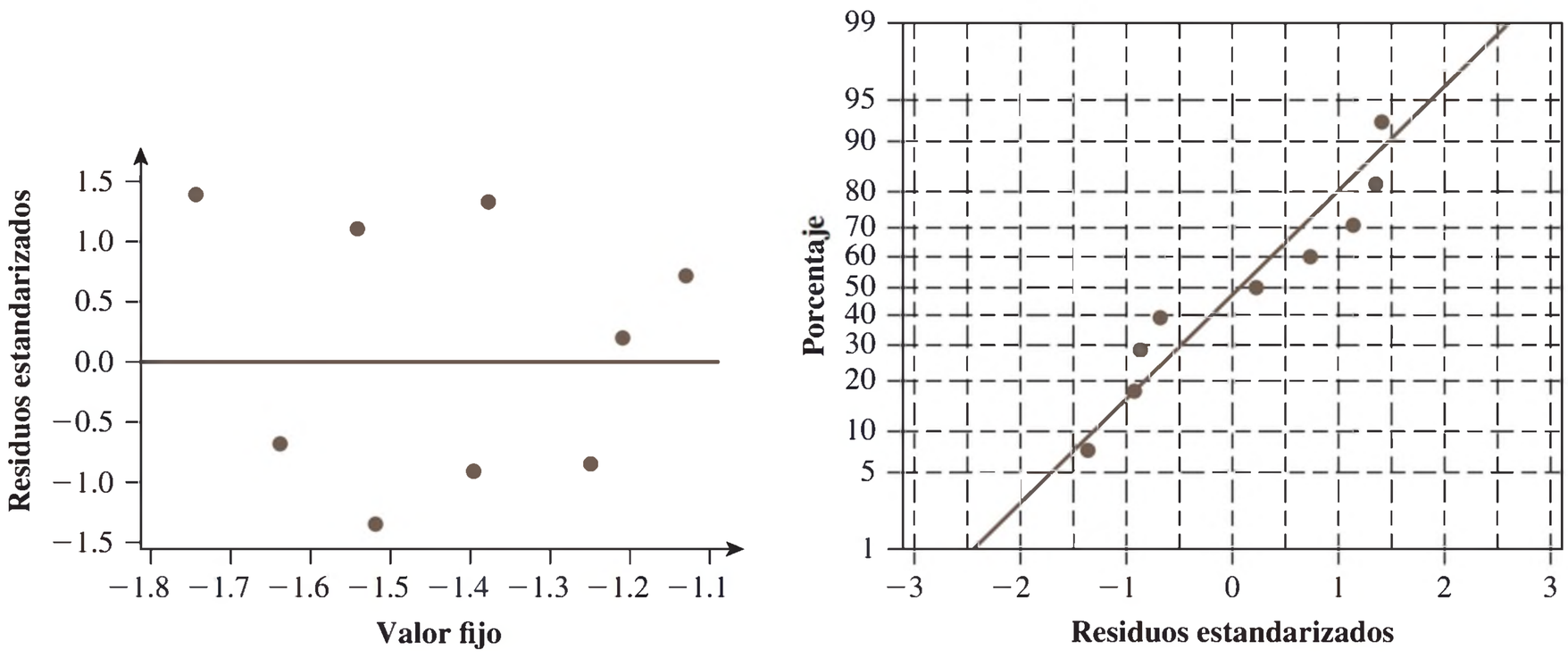


Figura 13.20 Gráfica de residuos estandarizados y gráfica de probabilidad normal para el ejemplo 13.18

bono. Al eliminar el predictor y reajustar se obtiene una $R^2 = .973$ y un cociente F de utilidad de modelo de 107.87. Las estimaciones de β_1 y β_2 son casi idénticas a las del modelo de tres predictores. Además, el modelo de regresión exponencial múltiple $Y = \alpha e^{\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2} \varepsilon$ [para los cuales se hace la regresión de $\ln(Y)$ contra x_1 y x_2 y no contra $\ln(x_1)$, y $\ln(x_2)$] ajusta los datos tan bien como lo hace el modelo de potencia. Nada de esto se menciona en el artículo citado. ■

En la sección 13.2 se introdujo el modelo de regresión logística para relacionar una variable dicotómica y con un solo predictor. Este modelo se puede extender en una forma obvia para incorporar más de un predictor. La probabilidad de éxito p es ahora una función de los predictores $x_1, x_2, \ldots, x_k$:

$$p(x_1, \ldots, x_k) = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_k x_k}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_k x_k}}$$

El álgebra simple produce una expresión para la probabilidad:

$$\frac{p(x_1, \ldots, x_k)}{1 - p(x_1, \ldots, x_k)} = e^{\alpha + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_k x_k}$$

La interpretación de β_i ($i = 1, \ldots, k$) es análoga a la interpretación de β_1 dada en la función logit que contiene sólo un predictor x. Es decir, el siguiente argumento muestra que las probabilidades cambian debido al factor multiplicativo e^{β_i} cuando x_i aumenta en 1 unidad y todos los demás predictores permanecen fijos.

$$\begin{aligned}
\frac{p(x_1, \ldots, x_i + 1, \ldots, x_k)}{1 - p(x_1, \ldots, x_i + 1, \ldots, x_k)} &= e^{\alpha + \beta_1 x_1 + \cdots \beta_i (x_i + 1) + \cdots + \beta_k x_k} \\
&= e^{\alpha + \beta_1 x_1 + \cdots \beta_i x_i + \cdots + \beta_k x_k + \beta_i} \\
&= \frac{p(x_1, \ldots, x_k)}{1 - p(x_1, \ldots, x_k)} e^{\beta_i}
\end{aligned}$$

Una vez más, debe utilizarse software estadístico para estimar los parámetros, calcular las desviaciones estándar pertinentes y proporcionar otra información inferencial.

EJEMPLO 13.19 La siguiente información fue obtenida de 189 mujeres que parieron durante un periodo determinado en el Centro Médico de Bayside en Springfield, MA, con el fin de identificar los factores asociados con el bajo peso al nacer. La salida siguiente de Minitab es el resultado de una regresión logística en la cual la variable dependiente indica si un niño (1) tuvo bajo peso al nacer, o (0) si no tuvo bajo peso al nacer (<2500 g) y los predictores fueron el peso de la madre en su último periodo menstrual, la edad de la madre y una variable indicadora de (1) si la madre fumó durante el embarazo o (0) si no fumó durante el embarazo.

```
Logistic Regression Table
                                                        Odds    95%     CI
Predictor       Coef  SE Coef     Z       P    Ratio  Lower  Upper
Constant     2.06239  1.09516   1.88   0.060
Peso       −0.01701  0.00686  −2.48   0.013   0.98   0.97   1.00
Edad       −0.04478  0.03391  −1.32   0.187   0.96   0.89   1.02
Fumadora     0.65480  0.33297   1.97   0.049   1.92   1.00   3.70
```

Al parecer la edad no es un importante predictor de bajo peso al nacer, a condición de que los otros dos predictores se conserven. Los otros dos parecen ser de carácter informativo. La estimación puntual del cociente de posibilidades asociado con el consumo de tabaco es 1.92 [cociente de las posibilidades de bajo peso al nacer para una fumadora, y las posibilidades de una persona no fumadora donde *posibilidades* $= P(Y = 1)/P(Y = 0)$]; en 95% de

nivel de confianza, las posibilidades de un niño de bajo peso al nacer podrían ser hasta 3.7 veces más alta para una fumadora que para una mujer que no fuma. ■

Por favor, consulte una de las referencias del capítulo para obtener más información sobre la regresión logística, incluidos los métodos para evaluar la eficacia y la adecuación del modelo.

Variables estandarizadas

En la sección 13.3 se consideró transformar x en $x' = x - \bar{x}$ antes de ajustar un polinomio. Para regresión múltiple, en especial cuando los valores de variables son grandes en magnitud, es ventajoso adelantar un paso más esta codificación. Sean $\bar{x}_i$ y s_i el promedio muestral y la desviación estándar muestral de las x_{ij} ($j = 1,\ldots, n$). Ahora se codifica cada variable x_i mediante $x_i' = (x_i - \bar{x})/s_i$. La variable codificada x_i' simplemente vuelve a expresar cualquier valor x_i en unidades de desviación estándar arriba o debajo de la media. Por tanto, si $\bar{x}_i = 100$ y $s_i = 20$, $x_i = 130$ se convierte en $x_i' = 1.5$ porque 130 está 1.5 desviaciones estándar arriba de la media de los valores de x_i. Por ejemplo, el modelo completo codificado de segundo orden con dos variables independientes tiene función de regresión.

$$\begin{aligned} E(Y) &= \beta_0 + \beta_1\left(\frac{x_1 - \bar{x}_1}{s_1}\right) + \beta_2\left(\frac{x_2 - \bar{x}_2}{s_2}\right) + \beta_2\left(\frac{x_1 - \bar{x}_1}{s_1}\right)^2 \\ &\quad + \beta_4\left(\frac{x_2 - \bar{x}_2}{s_2}\right)^2 + \beta_5\left(\frac{x_1 - \bar{x}_1}{s_1}\right)\left(\frac{x_2 - \bar{x}_2}{s_2}\right) \\ &= \beta_0 + \beta_1 x_1' + \beta_2 x_2' + \beta_3 x_3' + \beta_4 x_4' + \beta_5 x_5' \end{aligned}$$

Los beneficios de codificar son 1) precisión numérica mejorada en todos los cálculos, y 2) estimación más precisa que para los parámetros del modelo no codificado, porque los parámetros individuales del modelo codificado caracterizan el comportamiento de la función de regresión cerca del centro de los datos, en lugar de cerca del origen.

EJEMPLO 13.20 El artículo **"The Value and the Limitations of High-Speed Turbo-Exhausters for the Removal of Tar-Fog from Carburetted Water-Gas" (*J. of Soc. Chemical Industry*, 1946: 166–168)** presenta los datos (en la tabla 13.5) sobre y = contenido de alquitrán (granos/100 pies^3) de una corriente de gas como función de x_1 = velocidad del rotor (rpm) y x_2 = temperatura del gas de entrada (°F). La información también se considera en el artículo **"Some Aspects of Nonorthogonal Data Analysis" (*J. of Quality Technology*, 1973: 67–79)**, que sugiere el uso del modelo codificado ya descrito.

Las medias y desviaciones estándar son $\bar{x}_1 = 2991.13$, $s_1 = 387.81$, $\bar{x}_1 = 58.468$, y $s_2 = 6.944$, así $x_1' = (x_1 = 2991.13)/387.81$ y $x_2' = (x_2 - 58.468)/6.944$. Con $x_3' = (x_1')^2$, $x_4' = (x_2')^2$, $x_5' = x_1' \cdot x_2'$, el ajuste del modelo completo de segundo orden dio $\hat{\beta}_0 = 40.2660$, $\hat{\beta}_1 = -13.4041$, $\hat{\beta}_2 = 10.2553$, $\hat{\beta}_3 = 2.3313$, $\hat{\beta}_4 = -2.3405$ y $\hat{\beta}_5 = 2.5978$. La ecuación de regresión estimada es entonces

$$\hat{y} = 40.27 - 13.40x_1' + 10.26x_2' + 2.33x_3' - 2.34x_4' + 2.60x_5'$$

Entonces, si $x_1 = 3200$ y $x_2 = 57.0$, $x_1' = .539$, $x_2' = -.211$, $x_3' = (.593)^2 = .2901$, $x_4' = (-.211)^2 = .0447$ y $x_5' = (.539)(-.211) = -.1139$, de modo que

$$\begin{aligned} \hat{y} &= 40.27 - (13.40)(.539) + (10.26)(-.211) + (2.33)(.2901) \\ &\quad -(2.34)(.0447) + (2.60)(-.1139) = 31.16 \end{aligned}$$

■

Tabla 13.5 Datos para el ejemplo 13.20

Corrida	y	x_1	x_2	x_1'	x_2'
1	60.0	2400	54.5	−1.52428	−.57145
2	61.0	2450	56.0	−1.39535	−.35543
3	65.0	2450	58.5	−1.39535	.00461
4	30.5	2500	43.0	−1.26642	−2.22763
5	63.5	2500	58.0	−1.26642	−.06740
6	65.0	2500	59.0	−1.26642	.07662
7	44.0	2700	52.5	−.75070	−.85948
8	52.0	2700	65.5	−.75070	1.01272
9	54.5	2700	68.0	−.75070	1.37276
10	30.0	2750	45.0	−.62177	−1.93960
11	26.0	2775	45.5	−.55731	−1.86759
12	23.0	2800	48.0	−.49284	−1.50755
13	54.0	2800	63.0	−.49284	.65268
14	36.0	2900	58.5	−.23499	.00461
15	53.5	2900	64.5	−.23499	.86870
16	57.0	3000	66.0	.02287	1.08472
17	33.5	3075	57.0	.21627	−.21141
18	34.0	3100	57.5	.28073	−.13941
19	44.0	3150	64.0	.40966	.79669
20	33.0	3200	57.0	.53859	−.21141
21	39.0	3200	64.0	.53859	.79669
22	53.0	3200	69.0	.53859	1.51677
23	38.5	3225	68.0	.60305	1.37276
24	39.5	3250	62.0	.66752	.50866
25	36.0	3250	64.5	.66752	.86870
26	8.5	3250	48.0	.66752	−1.50755
27	30.0	3500	60.0	1.31216	.22063
28	29.0	3500	59.0	1.31216	.07662
29	26.5	3500	58.0	1.31216	−.06740
30	24.5	3600	58.0	1.57002	−.06740
31	26.5	3900	61.0	2.34360	.36465

Selección de variable

Supongamos que un investigador ha obtenido los datos en una variable y de respuesta, así como sobre los p candidatos predictores $x_1,..., x_p$. ¿Cómo puede un mejor modelo (en algún sentido) implicar un subconjunto de estos predictores para ser seleccionado? Recordemos que los predictores se añaden uno por uno en un modelo, la SSE no puede aumentar (un modelo más grande no puede explicar una menor variación que uno más pequeño) y, por lo general, se reducirá aunque tal vez por una pequeña cantidad. Por tanto, no hay misterio en cuanto a qué modelo da el mayor valor de R^2, debe ser el que contiene todos los predictores p. Lo que realmente nos gustaría es un modelo de participación con relativamente pocos predictores que sea fácil de interpretar y utilizar, sin embargo, explicando una cantidad relativamente grande de la variación y observada.

Para cualquier número fijo de predictores (por ejemplo, 5), es razonable identificar el mejor modelo de ese tamaño como aquel que tiene el mayor valor de R^2; de manera equivalente el menor valor de SSE. La cuestión más difícil se refiere a la selección de un criterio que permita la comparación de modelos de diferentes tamaños. Usaremos un subíndice k para denotar una cantidad calculada a partir de un modelo que contiene k predictores (por ejemplo, SSE_k). Tres criterios diferentes, cada uno una función simple de SSE_k, son ampliamente utilizados.

1. R_k^2, el coeficiente de determinación múltiple de un modelo k-predictor. Debido a que R_k^2 casi siempre aumenta a medida que k lo hace (y nunca puede disminuir), no estamos interesados en el k que maximiza R_k^2. En su lugar, queremos identificar una pequeña k para el cual R_k^2 es casi tan grande como R^2 para todos los predictores del modelo.
2. $\text{MSE}_k = \text{SSE}_k/(n - k - 1)$, el error medio cuadrático de un modelo k-predictor. Esto es a menudo usado en lugar de R_k^2, porque aunque R_k^2 no disminuye con el aumento de k, una pequeña disminución en SSE_k obtenida con un predictor adicional puede ser más que compensado por una disminución de 1 en el denominador de MSE_k. El objetivo es entonces encontrar el modelo que tiene el mínimo MSE_k. Dado que R_k^2 ajustada $= 1 - \text{MSE}_k/\text{MST}$, donde $\text{MST} = \text{SST}/(n - 1)$ es constante en k, la revisión de R_k^2 *ajustada* equivale a la consideración de MSE_k.
3. La razón para el tercer criterio, C_k, es más difícil de entender, pero el criterio es ampliamente utilizado por los analistas de datos. Supongamos que el modelo de regresión real es especificado por m predictores, es decir,

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_m + \epsilon \qquad V(\epsilon) = \sigma^2$$

de manera que

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_m$$

Considere ajustar un modelo mediante el uso de un subconjunto de k de estos m predictores; para más sencillez suponga que se usa $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Por tanto, al resolver el sistema de ecuaciones normales se obtienen estimaciones $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_k$ (pero, por supuesto, no las estimaciones de ninguna de las β correspondientes a los predictores que no están en el modelo ajustado). El verdadero valor esperado $E(Y)$ puede entonces ser estimado por $\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \cdots + \hat{\beta}_k x_k$. Ahora, considere el **error total de estimación esperado normalizado**

$$\Gamma_k = \frac{E\left(\sum_{i=1}^{n} [\hat{Y}_i - E(Y_i)]^2\right)}{\sigma^2} = \frac{E(\text{SSE}_k)}{\sigma^2} + 2(k + 1) - n \qquad \textbf{(13.21)}$$

La segunda igualdad en (13.21) debe tomarse de buena fe porque requiere un argumento complicado de valor esperado. Un subconjunto particular es entonces atractivo si su valor Γ_k es pequeño. Pero, desafortunadamente, $E(\text{SSE}_k)$ y σ^2 no se conocen. Para solucionar esto se denota con s^2 la estimación de σ^2 con base en el modelo que incluye todos los predictores para los cuales se dispone de información, y define

$$C_k = \frac{\text{SSE}_k}{s^2} + 2(k + 1) - n$$

Un modelo deseable es entonces especificado por un subconjunto de predictores para los cuales C_k es pequeña.

El número total de modelos que se pueden crear a partir de los predictores en el grupo de candidatos es 2^p (porque cada predictor se puede incluir dentro o al margen de cualquier modelo, uno de ellos es el modelo que no contiene predictores). Si $p \leq 5$, entonces no sería demasiado tedioso examinar todos los posibles modelos de regresión que implican estos predictores usando cualquier buen paquete de software estadístico. Pero el esfuerzo computacional requerido para todos los modelos posibles se vuelve prohibitivo como el tamaño de los incrementos de la lista de candidatos. Varios paquetes de software han incorporado algoritmos que tamizan a través de modelos de diferentes tamaños con el fin de identificar mejor uno o más modelos de cada tamaño en particular. Minitab, por ejemplo, lo hará para $p \leq 31$ y le permite al usuario especificar el número de modelos de

cada tamaño (1, 2, 3, 4 o 5) que serán identificados con mejores valores de criterio. Usted se preguntará por qué desearíamos ir más allá del mejor modelo único de cada tamaño. La respuesta es que el 2º o 3er mejor modelo puede ser más fácil de interpretar y utilizar que el mejor modelo, o puede ser más satisfactorio desde el punto de vista de adecuación del modelo. Por ejemplo, supongamos que la lista de candidatos incluye todos los predictores de un modelo cuadrático completo a partir de cinco variables independientes. Por tanto, el mejor modelo predictor-3 podría tener x_2, x_4^2 y x_3x_5 predictores, mientras que el segundo mejor modelo podría ser el único con predictores x_2, x_3 y x_2x_3.

EJEMPLO 13.21 El artículo de repaso de Ron Hocking citado en la bibliografía del capítulo reporta un análisis de datos tomados de las ediciones de 1974 de la revista *Motor Trend*. La variable dependiente y fue el rendimiento de combustible, hubo $n = 32$ observaciones y los predictores para los que se obtuvo información fueron x_1 = forma del motor (1 = en línea y 0 = en V), x_2 = número de cilindros, x_3 = tipo de transmisión (1 = manual y 0 = auto), x_4 = número de velocidades de la transmisión, x_5 = tamaño del motor, x_6 = potencia, x_7 = número de gargantas del carburador, x_8 = relación final de impulsión, x_9 = peso y x_{10} = tiempo en ¼ de milla. En la tabla 13.6 se presenta breve información del análisis. La tabla describe, para cada k, el subconjunto que tenga una SSE_k mínima; hacia abajo en la columna de las variables se indica cuál variable se agrega al pasar de k a $k + 1$ (al pasar de $k = 2$ a $k = 3$ se suman x_3 y x_{10}, y x_2 se elimina). La figura 13.21 contiene gráficas de R_k^2, R_k^2 ajustada, y C_k en función de k; estas gráficas son una ayuda visual importante al seleccionar un subconjunto. La estimación de σ^2 es $s^2 = 6.24$, que es MSE_{10}. Un modelo sencillo que se clasifica alto según todos los criterios es el que contiene los predictores x_3, x_9 y x_{10}.

Tabla 13.6 Mejores subconjuntos para datos de rendimiento de combustible del ejemplo 13.21

k = número de predictores	Variables	SSE_k	R_k^2	R_k^2 ajustada	C_k
1	9	247.2	.756	.748	11.6
2	2	169.7	.833	.821	1.2
3	3, 10, −2	150.4	.852	.836	.1
4	6	142.3	.860	.839	.8
5	5	136.2	.866	.840	1.8
6	8	133.3	.869	.837	3.4
7	4	132.0	.870	.832	5.2
8	7	131.3	.871	.826	7.1
9	1	131.1	.871	.818	9.0
10	2	131.0	.871	.809	11.0

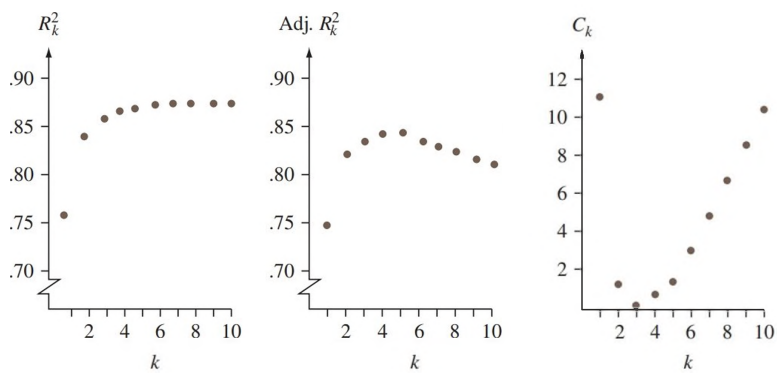


Figura 13.21 Gráficas de R_k^2 y C_k para los datos de rendimiento de combustible ■

En términos generales, cuando se usa un subconjunto de k predictores ($k <$ m) para ajustar un modelo los estimadores $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_k$ estarán sesgados por $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k$ y $\hat{Y}$ también será un estimador sesgado para la verdadera $E(Y)$ (todo esto porque $m - k$ predictores faltan en el modelo ajustado). No obstante, según sean medidas por el error esperado normalizado total Γ_k, las estimaciones basadas en un subconjunto pueden dar más precisión de la que se obtendría si se usan todos los predictores posibles; en esencia, esta mayor precisión se obtiene al precio de introducir un sesgo en los estimadores. Un valor de k para el que $C_k \approx k + 1$ indica que el sesgo asociado con este modelo de k predictores será pequeño.

EJEMPLO 13.22 La información de la resistencia de pegamento al corte, introducida en el ejemplo 13.12, contiene valores de cuatro variables independientes diferentes $x_1 - x_4$. Se encuentra que el modelo con sólo estas cuatro variables como predictores fue útil, y no hay razón obligatoria para considerar la inclusión de predictores de segundo orden. La figura 13.22 es el resultado de Minitab que resulta de una petición para identificar los dos mejores modelos de cada tamaño dado.

El mejor modelo de dos predictores, con predictores de potencia y temperatura, parece ser una muy buena opción en todas las cantidades: R^2 es considerablemente más alta que para modelos con menos predictores pero casi tan grande como en modelos más grandes, R^2 ajustada está casi a su máximo para estos datos, y C_2 es pequeña y cercana a $2 + 1 = 3$.

```
Response is resistencia

                                                    f     p
                                                o   o     t     t
                                                r   w     e     i
                                                c   e     m     m
Vars     R-sq     Adj. R-sq      C-p        s    e   r     p     e
   1     57.7          56.2     11.0   5.9289        X
   1     10.8           7.7     51.9   8.6045              X
   2     68.5          66.2      3.5   5.2070        X     X
   2     59.4          56.4     11.5   5.9136        X           X
   3     70.2          66.8      4.0   5.1590        X     X     X
   3     69.7          66.2      4.5   5.2078  X     X     X
   4     71.4          66.8      5.0   5.1580  X     X     X     X
```

Figura 13.22 Salida de la opción Mejores Subconjuntos de Minitab ■

Regresión por pasos Cuando el número de predictores es demasiado grande para tener en cuenta el examen explícito o implícito de todos los subconjuntos posibles, por lo general, varios procedimientos de selección alternativos identificarán buenos modelos. El procedimiento más sencillo es el método de **eliminación inversa** (BE, por sus siglas en inglés). Este método empieza con el modelo en el que se usan todos los predictores que se tienen considerados. Sea el conjunto de todos los predictores $x_1, \ldots, x_m$. Por tanto, se examina cada una de las t razones $\hat{\beta}_1 / s_{\hat{\beta}_i} (i = 1, \ldots, m)$ apropiadas para probar H_0: $\beta_i = 0$ en función de H_a: $\beta_i \neq 0$. Si la razón t con el valor absoluto más pequeño es menor que una constante t_{sal} especificada previamente, es decir, si

$$\min_{i=1,\ldots,m} \left| \frac{\hat{\beta}_i}{s_{\hat{\beta}_i}} \right| < t_{\text{sal}}$$

entonces el predictor que corresponde al cociente más pequeño se elimina del modelo. El modelo reducido se ajusta ahora, se examinan de nuevo las $m - 1$ razones t y se elimina otro predictor si corresponde a la razón t absoluta más pequeña que t_{sal}. De esta forma el algoritmo continúa hasta que, en alguna etapa, todas las razones t absolutas son al menos t_{sal}. El modelo utilizado es el que contiene todos los predictores que no fueron eliminados. Con frecuencia se recomienda el valor $t_{\text{sal}} = 2$ porque casi todos los valores $t_{.05}$ son cercanos a 2. Algunos paquetes de software se concentran en valores P más que en cocientes t.

EJEMPLO 13.23 (Continuación del ejemplo 13.20)

Para el modelo cuadrático completo codificado en el que y = contenido de alquitrán, los cinco predictores potenciales son x_1', x_2', $x_3' = x_1'^2$, $x_4' = x_2'^2$ y $x_5' = x_1'x_2'$ (de modo que $m = 5$). Sin especificar t_{sal}, el predictor con la razón t absoluta más pequeña (con asterisco) se eliminó en cada etapa, produciendo la secuencia de modelos que se muestra en la tabla 13.7.

Tabla 13.7 Resultados de eliminación inversa para los datos del ejemplo 13.20

		|Cociente t|				
Paso	**Predictores**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	1, 2, 3, 4, 5	16.0	10.8	2.9	2.8	1.8*
2	1, 2, 3, 4	15.4	10.2	3.7	2.0*	—
3	1, 2, 3	14.5	12.2	4.3*	—	—
4	1, 2	10.9	9.1*	—	—	—
5	1	4.4*	—	—	—	—

Con el uso de $t_{sal} = 2$, el modelo resultante estaría basado en x_1', x_2' y x_3' puesto que en el paso 3 no podría eliminarse ningún predictor. Puede verificarse que cada subconjunto es en realidad el mejor subconjunto de su tamaño, aunque bajo ninguna circunstancia no siempre es este el caso. ■

Una alternativa al procedimiento de eliminación inversa es la **selección directa** (FS, por sus siglas en inglés). FS empieza sin predictores en el modelo y considera ajustar a su vez el modelo con sólo x_1, sólo x_2,..., y finalmente sólo x_m. La variable que, cuando se ajusta, da el absoluto del cociente t más grande, entra al modelo siempre que el cociente rebase a la constante especificada t_{ent}. Suponga que x_1 entra al modelo. Entonces a su vez se consideran los modelos con (x_1, x_2), (x_1, x_3),...(x_1, x_m). La $|\hat{\beta}_j/s_{\hat{\beta}_j}|$ $(j = 2,\ldots, m)$ más grande especifica entonces el predictor entrante siempre que este máximo también exceda a t_{ent}. Esto continúa hasta que en algún paso ninguno de los absolutos de los cocientes t exceden de t_{ent}. Los predictores introducidos especifican entonces el modelo. El valor $t_{ent} = 2$ se usa con frecuencia por la misma razón que $t_{sal} = 2$ se usa en la eliminación inversa (BE). Para los datos de contenido de alquitrán, la selección directa (FS) produjo la secuencia de modelos dada en los pasos 5, 4,..., 1 de la tabla 13.7 y, por tanto, está de acuerdo con la BE. Este no será siempre el caso.

El procedimiento por pasos de más uso es una combinación de FS y BE, denotado por FB. Este procedimiento empieza igual que la selección directa, agregando variables al modelo, pero después de cada adición examina las variables previamente introducidas para ver si cualquiera de ellas es candidata a eliminarse. Por ejemplo, si hay ocho predictores bajo consideración y el conjunto actual consta de x_2, x_3, x_5 y x_6 con x_5 recién agregada, se examinan los cocientes t, $\hat{\beta}_2/s_{\hat{\beta}_2}$, $\hat{\beta}_3/s_{\hat{\beta}_3}$ y $\hat{\beta}_6/s_{\hat{\beta}_6}$. Si la razón absoluta más pequeña es menor que t_{sal}, entonces se elimina del modelo la variable correspondiente (algunos paquetes de software basan su decisión en $f = t^2$). La idea que hay detrás de FB es que con selección directa una sola variable puede estar más fuertemente relacionada con y que con cualquiera de las dos o más variables individualmente, pero la combinación de estas variables puede hacer que posteriormente la variable individual sea redundante. Esto ocurrió en realidad con los datos del rendimiento de combustible que se vio en el ejemplo 13.21, con x_2 entrando y, subsecuentemente, saliendo del modelo.

Aun cuando en casi todas las situaciones estos procedimientos de selección automática identificarán un buen modelo, no hay garantía de que resulte el mejor modelo o, aun, uno que se le aproxime. Debe hacerse un escrutinio minucioso de los conjuntos de datos para los cuales parece haber fuertes relaciones entre algunos de los potenciales predictores; más adelante se tratará esto último.

Identificación de observaciones influyentes

En regresión lineal simple es fácil ubicar una observación cuyo valor x sea mucho mayor o mucho menor que otros valores x de la muestra. Esta observación puede tener un gran impacto en la ecuación de regresión estimada (si en realidad depende de qué tan lejos se encuentre el punto (x, y) de la recta determinada por los demás puntos en la gráfica de dispersión). En regresión múltiple también es deseable saber si los valores de los predictores para una observación particular son tales como para que tenga el potencial de ejercer gran influencia en la ecuación estimada. Un método para identificar observaciones potencialmente influyentes está apoyado en el hecho de que como cada $\hat{\beta}_i$ es una función lineal de $y_1, y_2, \ldots, y_n$, cada valor y pronosticado de la forma $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \cdots + \hat{\beta}_k x_k$ también es una función lineal de las y_j. En particular, los valores pronosticados correspondientes a las observaciones muestrales se pueden escribir como sigue:

$$\begin{aligned}
\hat{y}_1 &= h_{11}y_1 + h_{12}y_2 + \cdots + h_{1n}y_n \\
\hat{y}_2 &= h_{21}y_1 + h_{22}y_2 + \cdots + h_{2n}y_n \\
&\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \\
\hat{y}_n &= h_{n1}y_1 + h_{n2}y_2 + \cdots + h_{nn}y_n
\end{aligned}$$

Cada coeficiente h_{ij} es una función de las x_{ij} de la muestra y no de las y_j. Se puede demostrar que $h_{ij} = h_{ji}$ y que $0 \le h_{jj} \le 1$.

Hay que centrarse en los coeficientes "diagonales" $h_{11}, h_{22}, \ldots, h_{nn}$. El coeficiente h_{jj} es el peso dado a y_j al calcular el correspondiente valor $\hat{y}_j$ pronosticado. Esta cantidad también se puede expresar como una medida de la distancia entre el punto $(x_{1j}, \ldots, x_{kj})$ en espacio k-dimensional y el centro de los datos $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k)$. Por tanto, es natural caracterizar una observación cuya h_{jj} es relativamente grande como una que tiene influencia potencialmente grande. A menos que haya una relación lineal perfecta entre los k predictores, $\Sigma_{j=1}^{n} h_{jj} = k + 1$, así el promedio de las h_{jj} es $(k + 1)/n$. Algunos estadísticos sugieren que si $h_{jj} > 2(k + 1)/n$, la j-ésima observación se cite como potencialmente influyente; otros usan $3(k + 1)/n$ como la línea divisoria.

EJEMPLO 13.24 Los datos siguientes aparecen en el artículo **"Testing for the Inclusion of Variables in Linear Regression by a Randomization Technique" (*Technometrics*, 1966: 695–699)** y se volvió a analizar en la obra de Hoaglin y Welsch, **"The Hat Matrix in Regression and ANOVA" (*Amer. Statistician*, 1978: 17–23)**. Las h_{ij} (con elementos debajo de la diagonal omitidos por simetría) les siguen a los datos.

Número de viga	Gravedad específica (x_1)	Contenido de humedad (x_2)	Resistencia (y)
1	.499	11.1	11.14
2	.558	8.9	12.74
3	.604	8.8	13.13
4	.441	8.9	11.51
5	.550	8.8	12.38
6	.528	9.9	12.60
7	.418	10.7	11.13
8	.480	10.5	11.70
9	.406	10.5	11.02
10	.467	10.7	11.41

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	.418	−.002	.079	−.274	−.046	.181	.128	.222	.050	.242
2		.242	.292	.136	.243	.128	−.041	.033	−.035	.004
3			.417	−.019	.273	.187	−.126	.044	−.153	.004
4				.604	.197	−.038	.168	−.022	.275	−.028
5					.252	.111	−.030	.019	−.010	−.010
6						.148	.042	.117	.012	.111
7							.262	.145	.277	.174
8								.154	.120	.168
9									.315	.148
10										.187

Aquí, $k = 2$, por lo que $(k + 1)/n = 3/10 = .3$; puesto que $h_{44} = .604 > 2(.3)$, el cuarto punto de datos se identifica como potencialmente influyente. ■

Otra técnica para evaluar la influencia de la j-ésima observación, que toma en cuenta y_j así como los valores predictores, comprende eliminar la j-ésima observación del conjunto de datos y efectuar una regresión con base en las observaciones restantes. Si los coeficientes estimados de la regresión de "observación borrada" difieren en gran medida de las estimaciones basadas en los datos completos, la j-ésima observación ha tenido claramente un impacto considerable en el ajuste. Una forma de juzgar si los coeficientes estimados cambian grandemente es expresar cada cambio con relación a la desviación estándar estimada del coeficiente:

$$\frac{(\hat{\beta}_i \text{ antes de la eliminación}) - (\hat{\beta}_i \text{ después de la eliminación})}{s_{\hat{\beta}_i}} = \frac{\text{cambio en } \hat{\beta}_i}{s_{\hat{\beta}_i}}$$

Existen fórmulas computacionales eficientes que permiten obtener toda esta información de la regresión "sin eliminar", de modo que otras n regresiones no son necesarias.

EJEMPLO 13.25 (Continuación del ejemplo 13.24)

Considere borrar por separado las observaciones 1 y 6 cuyos residuos son los más grandes y la observación 4, donde h_{ij} es grande. La tabla 13.12 contiene la información relevante.

Tabla 13.8 Cambios en coeficientes estimados para el ejemplo 13.25

			Cambio cuando el punto j es borrado		
Parámetro	**Estimaciones sin borrar**	**DE estimada**	$j = 1$	$j = 4$	$j = 6$
β_0	10.302	1.896	2.710	−2.109	−.642
β_1	8.495	1.784	−1.772	1.695	.748
β_2	.2663	.1273	−.1932	.1242	.0329
		e_j:	−3.25	−.96	2.20
		h_{jj}:	.418	.604	.148

Para borrar el punto 1 y el punto 4, el cambio en cada estimación se halla en el rango de 1–1.5 desviaciones estándar, que es razonablemente importante (esto no nos dice qué ocurriría si ambos puntos se omitieran al mismo tiempo.) Para el punto 6, no obstante, el cambio es casi .25 de una desviación estándar. Por tanto, los puntos 1 y 4, pero no el 6, bien podrían omitirse al calcular una ecuación de regresión. ■

Multicolinealidad

En numerosos conjuntos de datos de regresión múltiple, $x_1, x_2, \ldots, x_k$ son altamente interdependientes. Considere el modelo usual

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_k x_k + \epsilon$$

con los datos $(x_{1j}, \ldots, x_{kj}, y_j)(j = 1, \ldots, n)$ disponibles para el ajuste. Si se usa el principio de mínimos cuadrados para hacer regresión de x_i en los otros predictores $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k$, se obtiene

$$\hat{x}_i = a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_{i-1} x_{i-1} + a_{i+1} x_{i+1} + \cdots + a_k x_k$$

Se puede demostrar que

$$V(\hat{\beta}_i) = \frac{\sigma^2}{\sum_{j=1}^{n} (x_{ij} - \hat{x}_{ij})^2} \qquad (13.22)$$

Cuando los valores muestrales x_i se pueden predecir muy bien a partir de otros valores de pronóstico, el denominador de (13.22) será pequeño, de modo que $V(\hat{\beta}_i)$ será muy grande. Si este es el caso para al menos un predictor se dice que la información exhibe **multicolinealidad**. Es frecuente que la multicolinealidad sea sugerida por un resultado computarizado de regresión en la que R^2 es grande, pero algunas de las razones t, $\hat{\beta}_i / s_{\hat{\beta}_i}$ son pequeñas para predictores que, basados en información previa y en la intuición, parecen importantes. Otro indicio de la presencia de multicolinealidad está en un valor $\hat{\beta}_i$ que tiene el signo contrario de aquel que sugeriría la intuición, lo cual indica que otro predictor o conjunto de predictores está sirviendo como "apoderado" de x_i.

Se puede obtener una evaluación de la magnitud de la multicolinealidad si en los $k - 1$ predictores restantes se hace una regresión de cada predictor a la vez. Denote con R_i^2 el valor de la R^2 en la regresión con variable dependiente x_i y predictores $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k$. Se ha sugerido que existe una severa multicolinealidad si $R_i^2 > .9$ para cualquier i. Algunos paquetes de software estadístico rechazarán incluir un predictor en el modelo cuando su valor R_i^2 sea muy cercano a 1.

No hay consenso entre los expertos en estadística en lo que respecta a qué soluciones son apropiadas cuando se halle presente alguna multicolinealidad severa. Una posibilidad implica continuar con el uso de un modelo que incluya todos los predictores, pero estimando los parámetros con el uso de algo que no sean mínimos cuadrados. Para más detalles consulte una referencia del capítulo.

EJERCICIOS Sección 13.5 (55–64)

55. El artículo **"The Influence of Honing Process Parameters on Surface Quality, Productivity, Cutting Angle, and Coefficient of Friction"** (***Industrial Lubrication and Tribology*, 2012: 77–83**) incluye los siguientes datos para x_1 = velocidad de cortado (m/s), x_2 = presión específica del proceso de preafilado (N/mm^2), x_3 = presión específica del proceso de terminación de afilado, y y = productividad del proceso de afilado (mm^3/s) de una herramienta en particular, la productividad es el volumen del material cortado en un segundo

x_1	x_2	x_3	y	x_1	x_2	x_3	y
0.93	1.00	0.20	32.95	0.93	1.40	0.50	33.67
1.11	1.00	0.20	38.72	1.11	1.40	0.50	38.72
0.93	1.00	0.50	35.20	1.02	1.18	0.31	35.20
1.11	1.00	0.50	38.72	1.02	1.18	0.31	33.67
0.93	1.40	0.20	32.27	1.02	1.18	0.31	36.02
1.11	1.40	0.20	39.71	1.02	1.18	0.31	32.27

a. El artículo propone un modelo de potencia multivariado $Y = \alpha x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} x_3^{\beta_3} \epsilon$. El modelo de regresión lineal implicado involucra la regresión de $\ln(y)$ contra los tres predictores $\ln(x_1)$, $\ln(x_2)$ y $\ln(x_3)$. Una salida parcial de Minitab del ajuste del último modelo es como se muestra (la función correspondiente de la regresión de la potencia estimada aparece en el artículo citado).

```
Predictor      Coef  SE Coef      T      P
Constant    3.58797  0.04909  73.10  0.000
lnx1         0.8439   0.1952   4.32  0.003
lnx2        20.0280   0.1027  20.27  0.792
lnx3        0.02449  0.03768   0.65  0.534

S = 0.048848  R-Sq = 70.6%  R-Sq(adj) = 59.5%
```

Realice la prueba de modelo de utilidad con un nivel de significancia de 0.05.

b. El valor P grande correspondiente al cociente t para $\ln(x_2)$ sugiere que este predictor puede ser eliminado del modelo. Al hacer esto y reajustar los rendimientos se obtuvo el siguiente resultado de Minitab.

```
Predictor      Coef   SE Coef      T      P
Constant    3.58329   0.04355  82.28  0.000
lnx1         0.8440    0.1849   4.57  0.001
lnx3        0.02449   0.03569   0.69  0.510

S = 0.0462680  R-Sq = 70.3%  R-Sq(adj) = 63.7%
```

Dado que $\ln(x_1)$ permanece en el modelo, ¿será que $\ln(x_3)$ debe permanecer en este?

c. Ajuste el modelo de regresión lineal simple implicado para la conclusión en b) para los datos transformados, y lleve a cabo una prueba de modelo de utilidad.

d. Los residuos estandarizados para el ajuste referido en c) son .03, .33, 1.69, .33, −.49, .96, .57, .33, −.25, −1.28, .29, −2.26. Grafíquelos contra $\ln(x_1)$. ¿Qué sugiere el patrón observado?

e. Al ajustar el modelo de regresión cuadrática para relacionar $\ln(y)$ con $\ln(x_1)$ dio el siguiente resultado de Minitab. Realice el modelo de utilidad a un nivel de significancia de .05 (el patrón en la gráfica de residuos es satisfactorio). Después use el hecho de que $s_{\ln(\hat{Y}')} = 0.0178$ $[Y' = \ln(Y)]$ cuando $x_1 = 1$ para obtener un intervalo de predicción de 95% para la productividad.

```
Predictor      Coef   SE Coef      T      P
Constant    3.51879   0.01775 198.22  0.000
lnx1         0.6231    0.1683   3.70  0.005
lnx1 sqd      7.240     2.834   2.55  0.031

S = 0.0361358  R-Sq = 81.9%  R-Sq(adj) = 77.9%
```

56. En un experimento para estudiar factores que influyen en la gravedad específica de la madera (**"Anatomical Factors Influencing Wood Specific Gravity of Slash Pines and the Implications for the Development of a High-Quality Pulpwood", *TAPPI*, 1964: 401-404**) se obtuvo una muestra de 20 muestras de madera madura y se tomaron medidas en el número de fibras/mm^2 en la madera producida en primavera (x_1), número de fibras/mm^2 en la madera producida en verano (x_2), % de producción de madera de primavera (x_3), absorción de la luz en la madera producida en primavera (x_4) y absorción de luz en la madera producida en verano (x_5).

a. El ajuste de la función de regresión $\mu_{Y \cdot x_1, x_2, x_3, x_4, x_5} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_5 x_5$ dio por resultado $R^2 = .769$. ¿Indicarán los datos que hay una relación lineal entre gravedad específica y al menos uno de los predictores? Pruebe usando $\alpha = .01$.

b. Cuando x_2 se elimina del modelo, el valor de R^2 permanece en .769. Calcule una R^2 ajustada para el modelo completo y el modelo con x_2 eliminada.

c. Cuando x_1, x_2 y x_4 se eliminan, el valor resultante de R^2 es .654. La suma total de cuadrados es SST = .0196610. ¿Sugerirán los datos que x_1, x_2 y x_4 tienen coeficientes cero en el modelo de regresión verdadero? Pruebe las hipótesis relevantes al nivel .05.

d. La media y la desviación estándar de x_3 fueron 52.540 y 5.4447, respectivamente, mientras que las de x_5 fueron 89.195 y 3.6660, respectivamente. Cuando se ajustó el modelo que comprende estas dos variables estandarizadas, la ecuación de regresión estimada fue $y = .5255 - .0236x_3' + .0097x_5'$. ¿Qué valor de gravedad específica pronosticaría el lector para una muestra de madera con % de la madera producida en primavera = 50 y % de absorción de luz en la madera producida en verano = 90?

e. La desviación estándar estimada del coeficiente estimado $\hat{\beta}_3$ de x_3' (es decir, para $\hat{\beta}_3$ del modelo estandarizado) fue .0046. Obtenga un intervalo de confianza de 95% para β_3.

f. Usando la información de los incisos d) y e), ¿cuál es el coeficiente estimado de x_3 en el modelo no estandarizado (usando sólo predictores x_3 y x_5), y cuál es la desviación estándar estimada del estimador de coeficiente (es decir, $s_{\hat{\beta}_3}$ para $\hat{\beta}_3$ en el modelo no estandarizado)?

g. La estimación de σ para el modelo de dos predictores es $s = .02001$, mientras que la desviación estándar estimada de $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_3 x_3' + \hat{\beta}_5 x_5'$ cuando $x_3' = -.3747$ y $x_5' = -.2769$ (es decir, cuando $x_3 = 50.5$ y $x_5 = 88.9$) es .00482. Calcule un intervalo de predicción de 95% para gravedad específica cuando el % de la madera producida en primavera = 50.5 y el % de absorción de luz en la madera producida en verano = 88.9.

57. En la tabla siguiente se presenta la SSE más pequeña para cada número de predictores k ($k = 1, 2, 3, 4$) para un problema de regresión en el que y = calor acumulado de endurecimiento en cemento, x_1 = % de aluminato tricálcico, x_2 = % de silicato tricálcico, x_3 = % de ferrato de aluminio, y x_4 = % de silicato dicálcico.

Número de predictores *k*	**Predictores**	**SSE**
1	x_4	880.85
2	x_1, x_2	58.01
3	x_1, x_2, x_3	49.20
4	x_1, x_2, x_3, x_4	47.86

Además, $n = 13$, y SST = 2715.76.

a. Use los criterios estudiados en el texto para recomendar el uso de un modelo particular de regresión.

b. ¿Será que la selección directa produce el mejor modelo de dos predictores? Explique.

58. El artículo **"Response Surface Methodology for Protein Extraction Optimization of Red Pepper Seed" (*Food Sci. and Tech.*, 2010: 226–231)** dio datos sobre la variable de respuesta y = proteína producida (%) y las variables independientes x_1 = temperatura (°C), x_2 = pH, x_3 = tiempo de extracción (mín) y x_4 = cociente disolvente/alimento.

a. Ajustar el modelo con los cuatro x_i como predictores dio el siguiente resultado:

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Constant	−4.586	2.542	−1.80	0.084
x1	0.01317	0.02707	0.49	0.631
x2	1.6350	0.2707	6.04	0.000
x3	0.02883	0.01353	2.13	0.044
x4	0.05400	0.02707	1.99	0.058

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	4	19.8882	4.9721	11.31	0.000
Residual Error	24	10.5513	0.4396		
Total	28	30.4395			

Calcule e interprete los valores de R^2 y R^2 ajustado. ¿Parece útil el modelo?

b. Ajustar el modelo completo de segundo orden dio los siguientes resultados:

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Constant	−119.49	18.53	−6.45	0.000
x1	−0.1047	0.2839	−0.37	0.718
x2	28.678	3.625	7.91	0.000
x3	0.4074	0.1303	3.13	0.007
x4	0.2711	0.2606	1.04	0.316
x1sqd	−0.000752	0.002110	−0.36	0.727
x2sqd	−1.6452	0.2110	−7.80	0.000
x3sqd	0.0002121	0.0005275	0.40	0.694
x4sqd	−0.015152	0.002110	−7.18	0.000
x1x2	0.02150	0.02687	0.80	0.437
x1x3	0.000550	0.001344	0.41	0.688
x1x4	−0.000800	0.002687	−0.30	0.770
x2x3	−0.05900	0.01344	−4.39	0.001
x2x4	0.03900	0.02687	1.45	0.169
x3x4	0.002725	0.001344	2.03	0.062

S = 0.268703 RSq = 96.7% RSq(adj) = 93.4%

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	14	29.4287	2.1020	29.11	0.000
Residual Error	14	1.0108	0.0722		
Total	28	30.4395			

¿Parece útil al menos uno de los predictores de segundo orden? Lleve a cabo una prueba adecuada de la hipótesis.

c. Desde la salida en (b) una conjetura razonable es que ninguno de los predictores de la participación x_1 está proporcionando información útil. Cuando se eliminan estos predictores el valor de SSE para el modelo de regresión se reduce 1.1887. ¿Apoya esto último la conjetura?

d. Aquí se muestra el resultado de la mejor opción de subconjuntos Minitab, con sólo el subconjunto único y mejor de cada tamaño identificado. ¿Qué modelo consideraría usar (sujeto a comprobar la adecuación del modelo)?

Resultado de Minitab para el ejercicio 58d

			Mallows		1	2	3	4	x1sqd	x2sqd	x3sqd	x4sqd	x1x2	x1x3	x1x4	x2x3	x2x4	x3x4
Vars	R-Sq	R-Sq(adj)	Cp	S	x1	x2	x3	x4										
1	52.7	50.9	174.4	0.73030		X												
2	67.9	65.4	112.5	0.61349						X								X
3	77.7	75.0	73.1	0.52124		X					X							
4	83.4	80.7	50.8	0.45835		X		X			X							
5	90.9	88.9	21.4	0.34731		X					X							X
6	94.6	93.1	7.9	0.27422		X	X	X			X							
7	95.8	94.4	4.7	0.24683		X	X				X							X
8	96.2	94.6	5.1	0.24137		X	X				X							X
9	96.4	94.7	6.1	0.23962		X	X	X			X							X
10	96.6	94.6	7.5	0.24132		X	X	X	X		X							X
11	96.6	94.4	9.4	0.24716	X	X	X	X			X							X
12	96.6	94.1	11.2	0.25328	X	X	X	X			X							X
13	96.7	93.8	13.1	0.26041	X	X	X	X	X		X							X
14	96.7	93.4	15.0	0.26870	X	X	X	X	X		X							X

59. Reconsidere los datos de gravedad específica de madera del ejercicio 56.

a. En el siguiente resultado de computadora se utilizó la opción de Mejor Regresión de Minitab. ¿Qué modelos recomendaría el lector investigar en más detalle?

```
Response is graveespecifica

                                                  s     %     s
                                                  p  s  s  s  u
                                                  r  u  p  p  m
                                                  n  m  r  l  l
                                                  g  r  w  t  t
                                                  f  f  o  a  a
     R-Sq                                         i  i  o  b  b
Vars R-Sq  (adj)   C-p         s                  b  b  d  s  s
   1 56.4   53.9  10.6  0.021832                     X
   1 10.6    5.7  38.5  0.031245                        X
   1  5.3    0.1  41.7  0.032155                  X
   2 65.5   61.4   7.0  0.019975                     X  X
   2 62.1   57.6   9.1  0.020950                  X  X
   2 60.3   55.6  10.2  0.021439                  X
   3 72.3   67.1   4.9  0.018461                  X  X
   3 71.2   65.8   5.6  0.018807                  X  X  X
   3 71.1   65.7   5.6  0.018846                  X     X
   4 77.0   70.9   4.0  0.017353                  X  X  X
   4 74.8   68.1   5.4  0.018179                  X  X  X
   4 72.7   65.4   6.7  0.018919                  X  X  X
   5 77.0   68.9   6.0  0.017953                  X  X  X  X
```

b. El siguiente resultado impreso de Minitab resultó de aplicar el método de eliminación inversa y el método de selección directa. Para cada uno de los métodos explique qué ocurrió en cada iteración del algoritmo.

```
Response is graveespecifica on 5 predictors,
with N = 20

Step              1         2         3         4
Constant     0.4421    0.4384    0.4381    0.5179

fibra
primavera   0.00011   0.00011   0.00012
T-Value        1.17      1.95      1.98

fibra
verano      0.00001
T-Value        0.12

madera producida en
primavera  −0.00531  −0.00526  −0.00498  −0.00438
T-Value       −5.70     −6.56     −5.96     −5.20

piezasmadera
primavera1 −0.0018   −0.0019
T-Value       −1.63     −1.76

piezasmadera
verano1      0.0044    0.0044    0.0031    0.0027
T-Value        3.01      3.31      2.63      2.12

S            0.0180    0.0174    0.0185    0.0200
R-Sq          77.05     77.03     72.27     65.50

Step              1         2
Constant     0.7585    0.5179

%sprwood   −0.00444  −0.00438
T-Value       −4.82     −5.20

sumltabs                0.0027
T-Value                   2.12

S            0.0218    0.0200
R-Sq          56.36     65.50
```

60. La estabilidad de los pilares es uno de los factores más importantes para las condiciones de seguridad de una mina. Los autores de **"Developing Coal Pillar Stability Chart Using Logistic Regression"** (***Intl. J. of Rock Mechanics & Mining Sci.*, 2013: 55–60**) usaron un modelo de regresión lineal logística para predecir la estabilidad. El artículo reporta los siguientes datos para x_1 = relación de la altura del pilar con el ancho, x_2 = relación de la fuerza del pilar con el estrés, y el estado de estabilidad para 29 pilares de carbón.

ID	x_1	x_2	¿estable?	ID	x_1	x_2	¿estable?
1	1.80	2.40	Y	16	0.80	1.37	N
2	1.65	2.54	Y	17	0.60	1.27	N
3	2.70	0.84	Y	18	1.30	0.87	N
4	3.67	1.68	Y	19	0.83	0.97	N
5	1.41	2.41	Y	20	0.57	0.94	N
6	1.76	1.93	Y	21	1.44	1.00	N
7	2.10	1.77	Y	22	2.08	0.78	N
8	2.10	1.50	Y	23	1.50	1.03	N
9	4.57	2.43	Y	24	1.38	0.82	N
10	3.59	5.55	Y	25	0.94	1.30	N
11	8.33	2.58	Y	26	1.58	0.83	N
12	2.86	2.00	Y	27	1.67	1.05	N
13	2.58	3.68	Y	28	3.00	1.19	N
14	2.90	1.13	Y	29	2.21	0.86	N
15	3.89	2.49	Y				

Aquí se muestra la salida de R correspondiente a l regresión logística:

```
Coefficients:
             Estimate  Std. Error  z value  Pr(>|z|)
(Intercept)  −13.146       5.184   −2.536    0.0112
x1             2.774       1.477    1.878    0.0604
x2             5.668       2.642    2.145    0.0319
```

a. Use el resultado con $\alpha = .1$ para determinar cuáles de las dos variables de predictores parecen tener un impacto significativo sobre la estabilidad del pilar.

b. Proporcione interpretaciones para $e^{2.774}$ y $e^{5.668}$.

61. Reconsidere los datos de gravedad específica de madera que refiere el ejercicio 56. Los siguientes valores de R^2 resultaron de hacer regresión en cada predictor en los otros cuatro predictores (en la primera regresión, la variable dependiente era x_1 y los predictores fueron x_2–x_5, etc.): .628, .711, .341, .403 y .403. ¿Parece la multicolinearidad un problema importante? Explique.

62. Un estudio realizado para investigar la relación entre una variable de respuesta, que relaciona caídas de presión en una columna de burbujas de placa de filtros y los predictores x_1 = velocidad superficial del fluido, x_2 = viscosidad del líquido y x_3 = medida de mallas, produjo los datos siguientes (**"A Correlation of Two-Phase Pressure Drops in Screen-Plate Bubble Column"**, ***Canad. J. of Chem. Engr.*, 1993: 460–463**). Los residuos estandarizados y los valores h_{ii} resultaron del modelo con sólo x_1, x_2 y x_3 como predictores. ¿Habrá observaciones poco comunes?

Datos para el ejercicio 62

Observación	Velocidad	Viscosidad	Medida de mallas	Respuesta	Residuo estandarizado	h_{ii}
1	2.14	10.00	.34	28.9	2.01721	.202242
2	4.14	10.00	.34	26.1	1.34706	.066929
3	8.15	10.00	.34	22.8	.96537	.274393
4	2.14	2.63	.34	24.2	1.29177	.224518
5	4.14	2.63	.34	15.7	−.68311	.079651
6	8.15	2.63	.34	18.3	.23785	.267959
7	5.60	1.25	.34	18.1	.06456	.076001
8	4.30	2.63	.34	19.1	.13131	.074927
9	4.30	2.63	.34	15.4	−.74091	.074927
10	5.60	10.10	.25	12.0	−1.38857	.152317
11	5.60	10.10	.34	19.8	−.03585	.068468
12	4.30	10.10	.34	18.6	−.40699	.062849
13	2.40	10.10	.34	13.2	−1.92274	.175421
14	5.60	10.10	.55	22.8	−1.07990	.712933
15	2.14	112.00	.34	41.8	−1.19311	.516298
16	4.14	112.00	.34	48.6	1.21302	.513214
17	5.60	10.10	.25	19.2	.38451	.152317
18	5.60	10.10	.25	18.4	.18750	.152317
19	5.60	10.10	.25	15.0	−.64979	.152317

63. El resultado de regresión múltiple de Minitab, para los datos de hidrocarburos poliaromáticos (PAH), del ejercicio 53 de la sección anterior, incluye la siguiente información:

```
Unusual Observations
                floure-
Obs     x1       tano     Fit   SE Fit Residual St Resid
  6  243500     604.7   582.9    40.7     21.8     1.25X
  7   67793      27.7   139.3    12.3   −111.6    −2.62R

R denotes an observation with a large standardized residual

X denotes an observation whose X value gives it large influence.
```

¿Qué sugiere esto acerca de lo apropiado de usar la ecuación ajustada previamente dada como base para las inferencias? Los investigadores en realidad eliminaron la observación #7 e hicieron de nuevo una regresión. ¿Tiene esto sentido?

64. El artículo **"Bank Full Discharge of Rivers" (*Water Resources J.* 1978, 1141–1154)** informa sobre datos acerca de la cantidad de descarga (q, en m^3/s), área de flujo (a, en m^2) y pendiente de la superficie del agua (b, en m/m) obtenidos en diversas estaciones del área de inundación. A continuación aparece un subconjunto de los datos. El artículo propone un modelo multiplicativo de potencia $Q = \alpha a^{\beta} b^{\gamma} \epsilon$.

q	17.6	23.8	5.7	3.0	7.5
a	8.4	31.6	5.7	1.0	3.3
b	.0048	.0073	.0037	.0412	.0416
q	89.2	60.9	27.5	13.2	12.2
a	41.1	26.2	16.4	6.7	9.7
b	.0063	.0061	.0036	.0039	.0025

Sea $y = \ln(q)$, $x_1 = \ln(a)$ y $x_2 = \ln(b)$. Considere ajustar el modelo $Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \epsilon$.

a. Los h_{ii} son .138, .302, .266, .604, .464, .360, .215, .153, .214 y .284. ¿Alguna observación parece ser influyente?

b. Los coeficientes estimados son $\hat{\beta}_0 = 1.5652$, $\hat{\beta}_1 = .9450$ y $\hat{\beta}_2 = .1815$, y las correspondientes estimaciones de las desviaciones estándar son $s_{\hat{\beta}_0} = .7328$, $s_{\hat{\beta}_1} = .1528$ y $s_{\hat{\beta}_2} = .1752$. El segundo residuo estandarizado es $e_2^* = 2.19$. Cuando se omite la segunda observación en el conjunto de datos, los coeficientes estimados resultantes son $\hat{\beta}_0 = 1.8982$, $\hat{\beta}_1 = 1.025$ y $\hat{\beta}_2 = .3085$. ¿Alguno de estos cambios indican que la segunda observación es influyente?

c. Eliminar la cuarta observación (¿por qué?) produce $\hat{\beta}_0 = 1.4592$, $\hat{\beta}_1 = .9850$ y $\hat{\beta}_2 = .1515$. ¿Esta observación es influyente?

EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS (65–83)

65. Se sabe que curar el concreto es vulnerable a las vibraciones de choque que pueden causar agrietamiento o daños ocultos al material. Como parte de un estudio de fenómenos de vibración, el artículo **"Shock Vibration Test of Concrete" (*ACI Materials J.*, 2002: 361–370)** informa sobre los datos siguientes acerca de la velocidad máxima de una partícula (mm/s) y el cociente entre

la velocidad ultrasónica de un pulso después del choque y la velocidad antes del impacto en prismas de concreto.

Obs	vmp	Cociente	Obs	vmp	Cociente
1	160	.996	16	708	.990
2	164	.996	17	806	.984
3	178	.999	18	884	.986
4	252	.997	19	526	.991
5	293	.993	20	490	.993
6	289	.997	21	598	.993
7	415	.999	22	505	.993
8	478	.997	23	525	.990
9	391	.992	24	675	.991
10	486	.985	25	1211	.981
11	604	.995	26	1036	.986
12	528	.995	27	1000	.984
13	749	.994	28	1151	.982
14	772	.994	29	1144	.962
15	532	.987	30	1068	.986

En los últimos 12 prismas aparecieron grietas transversales, mientras que no se observó agrietamiento en los primeros 18 prismas.

a. Construya una gráfica de caja comparativa de la velocidad máxima de partículas (vmp) para los prismas agrietados y no agrietados y comente. A continuación estime la diferencia entre la vmp promedio verdadera para prismas agrietados y prismas no agrietados de modo que exprese información acerca de la precisión y la confiabilidad.

b. Los investigadores ajustaron el modelo de regresión lineal simple a todo el conjunto de datos formado por 30 observaciones, con la vmp como variable independiente y la relación como la variable dependiente. Utilice un paquete de software de estadística para ajustar varios modelos de regresión diferentes y saque las inferencias apropiadas.

66. El artículo **"Applying Regression Analysis to Improve Dyeing Process Quality: A Case Study" (*Intl. J. Of Advanced Manuf. Tech.*, 2010: 357–368)** revisa la práctica de ajustar el pH de la solución de tinción en una gran fábrica de tapetes para automóvil. La investigación estuvo basada en un conjunto de datos que consistió en 114 observaciones (incluidas en el artículo). La variable dependiente es y = pH *antes* de la adición de colorantes, y los predictores son x_1 = densidad del tapete (oz/yd^2), x_2 = peso del tapete (lb), x_3 = peso del colorante (g), x_4 = peso del colorante como porcentaje del peso del tapete (%) y x_5 = pH *después* de la adición de tintes.

a. Aquí se muestra el resultado de Minitab de la opción Mejor Regresión de Subconjuntos. ¿Qué modelos recomendaría y por qué?

			Mallows		x	x	x	x	x
Vars	R-Sq	R-Sq(adj)	Cp	S	1	2	3	4	5
1	63.7	63.4	16.6	0.34971					X
1	4.4	3.5	223.6	0.56773		X			
2	68.7	68.1	1.2	0.32630			X		X
2	68.6	68.0	1.6	0.32684				X	X
3	69.0	68.2	2.2	0.32616		X	X		X
3	68.9	68.0	2.5	0.32668			X	X	X
4	69.0	67.9	4.1	0.32754		X	X	X	X
4	69.0	67.9	4.1	0.32759	X	X	X		X
5	69.0	67.6	6.0	0.32894	X	X	X	X	X

b. El artículo citado recomienda un modelo con x_3 y x_5 como predictores solamente. El siguiente resultado de Minitab muestra los resultados del ajuste de ese modelo.

```
Predictor          Coef      SE Coef       T      P
Constant         0.9402       0.2814    3.34  0.001
x3          −0.00004639   0.00001104  −4.20  0.000
x5              0.73710      0.04813   15.31  0.000
S = 0.326304  R-Sq = 68.7%  R-Sq(adj) = 68.1%

Analysis of Variance
Source            DF      SS      MS       F      P
Regression         2  25.925  12.962  121.74  0.000
Residual Error   111  11.819   0.106
Total            113  37.744
```

¿Servirá este modelo para especificar una relación útil entre la variable respuesta y los predictores? [*Nota*: En una gráfica de probabilidad normal de los residuos estandarizados el patrón es muy lineal. Las gráficas de residuales estandarizados contra x_3 tanto como x_5 muestra un patrón no discernible. Hay una observación donde el valor x_3 es dos veces más grande como para cualquier otra observación, pero con una $n = 114$, esta observación tiene muy poca influencia sobre el ajuste].

c. ¿Deberá eliminarse del modelo alguno de los dos predictores previendo que el otro predictor se mantendrá? Explique su razonamiento.

d. Calcule e interprete los IC de 95% para los coeficientes β de los dos predictores modelo.

e. La desviación estándar estimada de Y cuando $x_3 = 1000$ y $x_5 = 6$ es .0336. Obtenga e interprete un IC de 95% para el pH promedio verdadero antes de la adición de colorantes bajo estas circunstancias.

67. El artículo **"Validation of the Rockport Fitness Walking Test in College Males and Females" (*Research Quarterly for Exercise and Sport*, 1994: 152–158)** recomendó la siguiente ecuación de regresión estimada para relacionar $y = VO_2max$ (L/min, una medida de la salud cardiorrespiratoria) con los predictores x_1 = género (femenino = 0, masculino = 1), x_2 = peso (lb), x_3 = tiempo para recorrer 1 milla (min), y x_4 = ritmo cardiaco al final de la caminata (pulsaciones/min)

$$y = 3.5959 + .6566x_1 + .0096x_2 - .0996x_3 - .0080x_4$$

a. ¿Cómo interpretaría el coeficiente estimado $\hat{\beta}_3 = -.0996$?

b. ¿Cómo interpretaría el coeficiente estimado $\hat{\beta}_1 = .6566$?

c. Suponga que lo observado en un hombre cuyo peso es de 170 lb, con tiempo de caminata de 11 minutos y ritmo cardiaco de 140 pulsaciones/min, produjo un VO_2max = 3.15. ¿Qué pronosticaría el lector para VO_2max en esta situación y cuál es el valor del residuo correspondiente?

d. Usando SSE = 30.1033 y SST = 102.3922, ¿qué proporción de variación observada en VO_2max se puede atribuir a la relación con el modelo?

e. Suponiendo un tamaño muestral de $n = 20$, realice una prueba de las hipótesis para determinar si el modelo seleccionado especifica una relación útil entre VO_2max y al menos uno de los predictores.

68. Reconocer las características de los modelos de superficies de piezas complicadas se está haciendo cada vez más importante en el desarrollo de sistemas de diseño asistido por computadora (CAD) eficientes. El artículo **"A Computationally Efficient Approach to Feature Abstraction in Design-Manufacturing Integration" (*J. of Engr. for Industry*, 1995: 16–27)** muestra una gráfica de $\log_{10}$(tiempo total de reconocimiento), con tiempo en segundos, en función de $\log_{10}$(número de aristas de una pieza), de la cual se leyeron los siguientes valores representativos:

Log(aristas)	1.1	1.5	1.7	1.9	2.0	2.1
Log(tiempo)	.30	.50	.55	.52	.85	.98
Log(aristas)	2.2	2.3	2.7	2.8	3.0	3.3
Log(tiempo)	1.10	1.00	1.18	1.45	1.65	1.84
Log(aristas)	3.5	3.8	4.2	4.3		
Log(tiempo)	2.05	2.46	2.50	2.76		

a. ¿Será que un diagrama de dispersión de log(tiempo) en función de log(aristas) sugiere una relación lineal aproximada entre estas dos variables?

b. ¿Qué modelo probabilístico para relacionar y = tiempo de reconocimiento con x = número de aristas está implicado por la relación de regresión lineal simple entre las variables transformadas?

c. Las cantidades calculadas en resumen a partir de los datos son

$$n = 16 \quad \Sigma x_i' = 42.4 \quad \Sigma y_i' = 21.69$$
$$\Sigma (x_i')^2 = 126.34 \quad \Sigma (y_i')^2 = 38.5305$$
$$\Sigma x_i' y_i' = 68.640$$

Calcule las estimaciones de los parámetros para el modelo del inciso b), y en seguida obtenga una predicción puntual del tiempo cuando el número de aristas es de 300.

69. La presión de aire (libras por pulgada cuadrada) y la temperatura (°F) fueron medidas para un proceso de compresión de cierto aparato de émbolo y cilindro y se produjeron los siguientes datos **(de *Introduction to Engineering Experimentation*, Prentice-Hall, Inc., 1996, p. 153)**:

Presión	20.0	40.4	60.8	80.2	100.4
Temperatura	44.9	102.4	142.3	164.8	192.2
Presión	120.3	141.1	161.4	181.9	201.4
Temperatura	221.4	228.4	249.5	269.4	270.8
Presión	220.8	241.8	261.1	280.4	300.1
Temperatura	291.5	287.3	313.3	322.3	325.8
Presión	320.6	341.1	360.8		
Temperatura	337.0	332.6	342.9		

a. ¿Ajustaría el lector el modelo de regresión lineal simple a los datos, y lo usaría como base para pronosticar la temperatura a partir de la presión? ¿Por qué sí o por qué no?

b. Encuentre un modelo probabilístico apropiado y, del modo más informativo posible, úselo como base para predecir el valor de la temperatura que resultaría de una presión de 200.

70. Un estudiante de ingeniería aeronáutica realizó un experimento para estudiar en qué forma la relación y = sustentación/resistencia al avance, relacionada con las variables x_1 = posición de cierta superficie elevadora hacia adelante respecto al ala principal, y x_2 = posición de la cola respecto al ala principal. Se obtuvieron los siguientes datos **(*Statistics for Engineering Problem Solving*, p. 133)**:

x_1 (pulgadas)	x_2 (pulgadas)	y
−1.2	−1.2	.858
−1.2	0	3.156
−1.2	1.2	3.644
0	−1.2	4.281
0	0	3.481
0	1.2	3.918
1.2	−1.2	4.136
1.2	0	3.364
1.2	1.2	4.018
		$\bar{y} = 3.428$, SST = 8.55

a. El ajuste del modelo de primer orden da SSE = 5.18, mientras que incluir $x_3 = x_1x_2$ como predictor produce SSE = 3.07. Calcule e interprete el coeficiente de determinación múltiple para cada modelo.

b. Efectúe una prueba de utilidad de modelo usando $\alpha = .05$ para cada uno de los modelos descritos en el inciso a). ¿Le sorprende alguno de los dos resultados?

71. Un baño de amoniaco es el más utilizado para depositar capas de aleación de Pd-Ni. El artículo **"Modelling of Palladium and Nickel in an Ammonia Bath in a Rotary Device" (*Plating and Surface Finishing*, 1997: 102–104)** informa sobre una investigación respecto a la forma en que las características de la composición del baño afectan las propiedades de la capa. Tenga en cuenta los siguientes datos en x_1 = concentración de Pd (g/dm^3), x_2 = concentración de Ni (g/dm^3),

x_3 = pH, x_4 = temperatura (°C), x_5 = densidad de corriente catódica (A/dm^2) y y = contenido de paladio (%) de la capa.

Obs	concenpd	concenni	pH	temp	currdens	pallcont
1	16	24	9.0	35	5	61.5
2	8	24	9.0	35	3	51.0
3	16	16	9.0	35	3	81.0
4	8	16	9.0	35	5	50.9
5	16	24	8.0	35	3	66.7
6	8	24	8.0	35	5	48.8
7	16	16	8.0	35	5	71.3
8	8	16	8.0	35	3	62.8
9	16	24	9.0	25	3	64.0
10	8	24	9.0	25	5	37.7
11	16	16	9.0	25	5	68.7
12	8	16	9.0	25	3	54.1
13	16	24	8.0	25	5	61.6
14	8	24	8.0	25	3	48.0
15	16	16	8.0	25	3	73.2
16	8	16	8.0	25	5	43.3
17	4	20	8.5	30	4	35.0
18	20	20	8.5	30	4	69.6
19	12	12	8.5	30	4	70.0
20	12	28	8.5	30	4	48.2
21	12	20	7.5	30	4	56.0
22	12	20	9.5	30	4	77.6
23	12	20	8.5	20	4	55.0
24	12	20	8.5	40	4	60.6
25	12	20	8.5	30	2	54.9
26	12	20	8.5	30	6	49.8
27	12	20	8.5	30	4	54.1
28	12	20	8.5	30	4	61.2
29	12	20	8.5	30	4	52.5
30	12	20	8.5	30	4	57.1
31	12	20	8.5	30	4	52.5
32	12	20	8.5	30	4	56.6

a. Ajuste el modelo de primer orden con los cinco predictores y evalúe su utilidad. ¿Todos los predictores parecen importantes?

b. Ajuste el modelo completo de segundo orden y evalúe su utilidad.

c. ¿Será que el grupo de predictores de segundo orden (de interacción y cuadráticos) aporta más información útil acerca de y, que aquella con la cual contribuyen los predictores de primer orden? Realice una prueba apropiada de las hipótesis.

d. Los autores del artículo citado recomendaron el uso de los cinco predictores de primer orden más el predictor adicional $x_6 = (\text{pH})^2$. Ajuste este modelo. ¿Parecen importantes los seis predictores?

72. El artículo **"An Experimental Study of Resistance Spot Welding in 1 mm Thick Sheet of Low Carbon Steel" (*J. of Engr. Manufacture*, 1996: 341–348)** examina un análisis estadístico cuyo objetivo básico es establecer una relación que pueda explicar la variación en la resistencia de las soldaduras (y), al relacionar la resistencia con las características del proceso, como son corriente de soldadura (wc), tiempo de soldadura (wt) y fuerza del electrodo (ef).

a. SST = 16.18555 y el ajuste del modelo completo de segundo orden dio SSE = .80017. Calcule e interprete el coeficiente de determinación múltiple.

b. Suponiendo que $n = 37$ efectúe una prueba de utilidad del modelo (la tabla ANOVA del artículo indica que $n - (k + 1) = 1$, pero otra información dada contradice esto y es consistente con el tamaño muestral sugerido).

c. El cociente F dado para la interacción entre corriente y tiempo fue de 2.32. Si todos los predictores se retienen en el modelo, ¿puede eliminarse este predictor de interacción? [*Sugerencia*: Al igual que en la regresión lineal simple, una relación F para un coeficiente es el cuadrado de su razón t.]

d. Los autores propusieron eliminar dos predictores de interacción y un predictor cuadrático, y recomendaron la ecuación estimada $y = 3.352 + .098\text{wc} + .222\text{wt} + .297\text{ef} - .0102(\text{wt})^2 - .037(\text{et})^2 + .0128(\text{wc})(\text{wt})$. Considere una corriente de soldadura de 10 kA, un tiempo de soldadura de 12 ciclos de ca y una fuerza de electrodo de 6 kN. Suponiendo que la desviación estándar estimada de la resistencia pronosticada en esta situación es .0750, calcule un intervalo de predicción de 95% para la resistencia. ¿Sugerirá el intervalo que el valor de la resistencia puede pronosticarse con precisión?

73. La siguiente información sobre x = frecuencia (MHz) y y = potencia de salida (W) para cierto tipo de configuración láser apareció en una gráfica del artículo **"Frequency Dependence in RF Discharge Excited Waveguide CO2 Lasers" (*IEEE J. of Quantum Electronics*, 1984: 509–514)**.

x	60	63	77	100	125	157	186	222
y	16	17	19	21	22	20	15	5

Un análisis computarizado dio la siguiente información para un modelo de regresión cuadrático: $\hat{\beta}_0 = -1.5127$, $\hat{\beta}_1 = .391901$, $\hat{\beta}_2 = -.00163141$, $s_{\hat{\beta}_2} = .00003391$, SSE= .29, SST= 202.88 y $s_{\hat{Y}} = .1141$ cuando $x = 100$.

a. ¿Será apropiado el modelo cuadrático para explicar la variación observada en potencia de salida al relacionarla con la frecuencia?

b. ¿Será el modelo de regresión lineal simple casi tan satisfactorio como el modelo cuadrático?

c. ¿Piensa usted que valdría la pena considerar un modelo cúbico?

d. Calcule un intervalo de confianza de 95% para la salida esperada de la potencia cuando la frecuencia es de 100.

e. Use un intervalo de predicción de 95% para predecir la potencia desde una sola prueba experimental cuando la frecuencia es de 100.

74. Los datos adjuntos en x_1 = tarjeta de velocidad del cilindro (rpm), tarjeta de tasa de producción (kg/h), x_3 = número de eliminaciones por duplicación de marco y y = tenacidad (RKM) aparecieron en el artículo **"Impact of Carding Parameters and Draw Frame Doubling on the Properties of Ring Spun Yarn" (*J. of Engineered Fibers and Fabrics*, 2013: 72–78)**.

Obs	x_1	x_2	x_3	tenacidad	Obs	x_1	x_2	x_3	tenacidad
1	700	80	6	18.29	9	800	80	5	16.59
2	900	80	6	17.97	10	800	120	5	17.10
3	700	120	6	17.12	11	800	80	7	15.64
4	900	120	6	17.46	12	800	120	7	16.54
5	700	100	5	17.29	13	800	100	6	17.81
6	900	100	5	16.35	14	800	100	6	17.68
7	700	100	7	16.77	15	800	100	6	18.11
8	900	100	7	16.11					

a. La opción Mejor Regresión de Subconjuntos de Minitab dio el siguiente resultado cuando se aplicó el modelo completo de segundo orden. Tenga en cuenta que el R^2 ajustado para el modelo que contiene todos los predictores es mucho menor que R^2 en sí, lo cual indica que el modelo contiene demasiados predictores en relación con el tamaño de la muestra. ¿Qué modelos recomendaría usted y por qué? [*Nota*: El artículo citado reporta resultados sólo para el modelo con todos los predictores de primer y segundo orden.]

								x1	x2	x3				
											x1	x1	x2	
								s	s	s	s	s	s	
			Mallows		x	x	x	q	q	q	x	x	x	
Vars	R-Sq	R-Sq(adj)	Cp	S	1	2	3	d	d	d	2	3	3	
1	10.9	4.0	11.6	0.76552								X		
1	10.3	3.3	11.7	0.76826						X				
2	73.4	69.0	−2.3	0.43510			X			X				
2	13.9	0.0	12.8	0.78320	X					X				
3	77.1	70.8	−1.2	0.42208	X		X			X				
3	77.1	70.8	−1.2	0.42229			X	X		X				
4	77.3	68.2	0.7	0.44046	X		X			X		X		
4	77.2	68.1	0.8	0.44115	X		X		X	X				
5	79.6	68.2	2.2	0.44073	X		X		X	X	X			
5	79.3	67.9	2.2	0.44302			X	X	X	X	X			
6	80.0	65.0	4.1	0.46247	X		X		X	X	X		X	
6	79.8	64.7	4.1	0.46426			X	X	X	X	X		X	
7	80.2	60.4	6.0	0.49156	X		X		X	X	X	X	X	
7	80.0	60.0	6.1	0.49408	X	X	X		X	X	X		X	
8	80.2	53.9	8.0	0.53059	X	X	X		X	X	X	X	X	
8	80.2	53.8	8.0	0.53094	X		X	X	X	X	X	X	X	
9	80.2	44.7	10.0	0.58123	X	X	X	X	X	X	X	X	X	

b. Cuando el modelo con los predictores x_3, x_3^2 y x_1 fue ajustado, el cociente t correspondiente al coeficiente de x_1 fue de −1.32. Si los dos primeros predictores permanecen en el modelo, ¿se justificará la inclusión de x_1? Explique su razonamiento.

c. Aquí se muestra el resultado de Minitab que relaciona y con x_3 en el modelo de regresión cuadrática. Una gráfica de probabilidad normal de los residuos estandarizados es bastante recta, y la gráfica de e^* frente a $\hat{y}$ muestra un patrón no discernible. ¿Especifica este modelo una relación útil, y deberá ser retenido en el modelo el predictor cuadrático?

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Constant	−24.743	8.040	−3.08	0.010
x3	14.457	2.707	5.34	0.000
x3 sqd	−1.2284	0.2252	−5.46	0.000

S = 0.435097 R-Sq = 73.4% R-Sq(adj) = 69.0%

d. Para el modelo del inciso c) la desviación estándar de un valor predicho de Y cuando $x_3 = 6$ es 0.164. Prediga la tenacidad en esta situación de una manera que transmita información acerca de la precisión y la confiabilidad.

75. En el artículo **"Manganese Deficiency and Toxicity Effects on Growth, Development and Nutrient Composition in Wheat" (*Agronomy J.*, 1984: 213-217)** se examina el efecto del manganeso (Mn) en el crecimiento del trigo. Se utilizó un modelo de regresión cuadrático para relacionar y = altura de la planta (cm) con $x = \log_{10}$(Mn agregado), con μM como las unidades para el Mn agregado. La siguiente información aparece en el artículo en un diagrama de dispersión.

x	−1.0	−.4	0	.2	1.0
y	32	37	44	45	46
x	2.0	2.8	3.2	3.4	4.0
y	42	42	40	37	30

Además, $\hat{\beta}_0 = 41.7422$, $\hat{\beta}_1 = 6.581$, $\hat{\beta}_2 = 22.3621$, $s_{\hat{\beta}_0} = .8522$, $s_{\hat{\beta}_1} = 1.002$, $s_{\hat{\beta}_2} = .3073$ y SSE = 26.98.

a. ¿Es útil el modelo cuadrático para describir la relación entre x y y? [*Sugerencia*: La regresión cuadrática es un caso especial de regresión múltiple con $k = 2$, $x_1 = x$ y $x_2 = x^2$.] Aplique un procedimiento apropiado.

b. ¿Debe eliminarse el predictor cuadrático?

c. Estime la altura esperada para el trigo tratado con 10 μM de Mn usando un intervalo de confianza de 90%. [*Sugerencia*: La desviación estándar estimada de $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2$ es 1.031].

76. El artículo **"Chemithermomechanical Pulp from Mixed High Density Hardwoods" (*TAPPI*, julio de 1988: 145–146)** informa acerca de un estudio en el que se obtuvo la información siguiente para relacionar y = área superficial específica (cm²/g) con x_1 = % de NaOH utilizado como sustancia química de tratamiento previo y x_2 = tiempo de tratamiento (min) para un lote de pulpa.

x_1	x_2	y
3	30	5.95
3	60	5.60
3	90	5.44
9	30	6.22
9	60	5.85
9	90	5.61
15	30	8.36
15	60	7.30
15	90	6.43

El siguiente resultado de Minitab resultó de una petición para ajustar el modelo $Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \epsilon$.

```
The regression equation is
AREA = 6.05 + 0.142 NAOH − 0.0169 TIEMPO

Predictor        Coef      Stdev  t-ratio      p
Constant       6.0483     0.5208    11.61  0.000
NAOH          0.14167    0.03301     4.29  0.005
TIEMPO     −0.016944   0.006601    −2.57  0.043

s = 0.4851      R-sq = 80.7%     R-sq(adj) = 74.2%

Analysis of Variance

SOURCE       DF        SS       MS      F      p
Regression    2    5.8854   2.9427  12.51  0.007
Error         6    1.4118   0.2353
Total         8    7.2972
```

a. Qué proporción de variación observada en un área superficial específica puede ser explicada por la relación del modelo?

b. ¿Especificará el modelo seleccionado una relación útil entre la variable dependiente y los predictores?

c. Siempre que el % de NaOH permanezca en el modelo, ¿sugeriría usted que se eliminara el *tiempo de tratamiento* del predictor?

d. Calcule un intervalo de confianza de 95% para el cambio esperado en el área superficial específica asociada con un aumento de 1% en NaOH cuando el tiempo de tratamiento se mantiene fijo.

e. Minitab reportó que la desviación estándar estimada de $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1(9) + \hat{\beta}_2(60)$ es .162. Calcule un intervalo de predicción para el valor del área superficial específica a observar cuando el % de NaOH = 9 y el tiempo de tratamiento = 60.

77. El artículo **"Sensitivity Analysis of a 2.5 kW Proton Exchange Membrane Fuel Cell Stack by Statistical Method" (*J. of Fuel Cell Sci. and Tech.*, 2009: 1–6)** utiliza el análisis de regresión para investigar la relación entre la potencia de la celda de combustible (W) y las variables independientes x_1 = presión de H_2 (lb/pulg²), x_2 = flujo de H_2 (stoc), x_3 = presión de aire (lb/pulg²) y x_4 = flujo de aire (stoc).

a. En seguida se muestra el resultado de Minitab de ajuste del modelo con las variables ya mencionadas como predictores independientes (ajustadas también por los autores del artículo):

```
Predictor       Coef    SE Coef        T        P
Constant      1507.3      206.8     7.29    0.000
x1           −4.282      4.969   −0.86    0.407
x2             7.46      62.11     0.12    0.907
x3          −0.9162     0.6227   −1.47    0.169
x4            90.60      24.84     3.65    0.004

S = 4.6885  R-Sq = 59.6%  R-Sq(adj) = 44.9%

Source           DF      SS     MS      F      P
Regression        4   40048  10012   4.06  0.029
Residual Error   11   27158   2469
Total            15   67206
```

a. ¿Habrá una relación útil entre la potencia y al menos uno de los indicadores? Realice una prueba formal de hipótesis.

b. Ajuste el modelo con predictores x_3, x_4 y la interacción x_3x_4 dio $R^2 = .834$. ¿Será útil este modelo? ¿Podría utilizarse una prueba de F para comparar este modelo con el de a)? Explique.

c. Ajuste el modelo con predictores $x_1 - x_4$, así como todas las interacciones de segundo orden dieron $R^2 = .960$ (este modelo también se ajusta por los investigadores). ¿Será que al menos uno de los predictores de la interacción proporciona información útil sobre la potencia más allá de lo previsto por los predictores de primer orden? Establezca y ponga a prueba las hipótesis adecuadas con un nivel de significancia de .05.

78. La fibra de coco, derivada del coco, es un material amable con el ambiente, con un gran potencial para su uso en la construcción. El artículo **"Seepage Velocity and Piping Resistance of Coir Fiber Mixed Soils" (*J. of Irrig. and Drainage Engr.*, 2008: 485–492)** incluye varios análisis de regresión múltiple. Los autores del artículo proporcionaron los siguientes datos x_1 = el contenido de fibra (%), x_2 = longitud de la fibra (mm), x_3 = gradiente hidráulico (sin unidades) y y = velocidad de infiltración (cm/s).

Obs	cont	longitud	grad	vel
1	0.0	0	0.400	0.027
2	0.0	0	0.716	0.050
3	0.0	0	0.925	0.080
4	0.0	0	1.098	0.099
5	0.0	0	1.226	0.107
6	0.0	0	1.427	0.140
7	0.0	0	1.709	0.178
8	0.0	0	1.872	0.200
9	0.5	50	0.380	0.022
10	0.5	50	0.774	0.040
11	0.5	50	1.056	0.060
12	0.5	50	1.329	0.111
13	0.5	50	1.598	0.158
14	0.5	50	1.799	0.188
15	1.0	50	0.410	0.026
16	1.0	50	0.577	0.038
17	1.0	50	0.748	0.049
18	1.0	50	0.927	0.060
19	1.0	50	1.090	0.070
20	1.0	50	1.239	0.088
21	1.0	50	1.496	0.111
22	1.0	50	1.744	0.134
23	1.0	50	1.915	0.145
24	1.5	50	0.444	0.014
25	1.5	50	0.821	0.037
26	1.5	50	1.141	0.058
27	1.5	50	1.474	0.082
28	1.5	50	1.581	0.112
29	1.5	50	1.983	0.144
30	1.0	25	0.462	0.028
31	1.0	25	0.705	0.059
32	1.0	25	0.987	0.084
33	1.0	25	1.154	0.101
34	1.0	25	1.479	0.150
35	1.0	25	1.786	0.194
36	1.0	25	1.957	0.218
37	1.0	40	0.419	0.030
38	1.0	40	0.705	0.050
39	1.0	40	0.979	0.068
40	1.0	40	1.226	0.091
41	1.0	40	1.470	0.126
42	1.0	40	1.744	0.168
43	1.0	60	0.436	0.034
44	1.0	60	0.650	0.051
45	1.0	60	0.889	0.068
46	1.0	60	1.222	0.093
47	1.0	60	1.477	0.112
48	1.0	60	1.726	0.139
49	1.0	60	1.983	0.173

a. La siguiente es la salida de ajuste del modelo con los tres x_i como predictores:

```
Predictor          Coef    SE Coef       T      P
Constant     −0.002997   0.007639   −0.39  0.697
contfibra    −0.012125   0.007454   −1.63  0.111
longfibra   −0.0003020  0.0001676   −1.80  0.078
gradhi-
draulico       0.102489   0.004711   21.76  0.000


S = 0.0162355  R-Sq = 91.6%  R-Sq(adj) = 91.1%

Source           DF        SS        MS      F      P
Regression        3  0.129898  0.043299 164.27  0.000
Residual Error   45  0.011862  0.000264
Total            48  0.141760
```

¿Cómo se interpretará el número –.0003020 en la columna Coef en la salida?

b. Siempre que la longitud de la fibra y el gradiente hidráulico permanezcan en el modelo, ¿proporcionará el contenido de fibra información útil acerca de la velocidad? Lleve a cabo una prueba de hipótesis.

c. Ajustar el modelo con una longitud de fibra exacta y el gradiente hidráulico como predictores dio los coeficientes de regresión estimados $\hat{\beta}_0 = -.005315$, $\hat{\beta}_1 = -0004968$ y $\hat{\beta}_2 = .102204$ (los cocientes t para estas dos variables predictoras son altamente significativas). Además, $s_{\hat{Y}} = .00286$ cuando la longitud de fibra = 25 y el gradiente hidráulico = 1.2. ¿Habrá pruebas convincentes de que la velocidad promedio real es algo más que .1 en esta situación? Lleve a cabo una prueba con un nivel de significancia de .05.

d. El ajuste del modelo completo de segundo orden (tal como hicieron los autores del artículo) dio lugar a SSE = .003579. ¿Será que al menos uno de los predictores de segundo orden proporciona información útil por encima de lo previsto por los tres predictores de primer orden? Pruebe las hipótesis pertinentes.

79. El artículo **"A Statistical Analysis of the Notch Toughness of 9% Nickel Steels Obtained from Production Heats"** (***J. of Testing and Eval.*, 1987: 355–363**) informa de los resultados de un análisis de regresión múltiple que relaciona la resistencia Charpy de canal en v y (en joules) con las siguientes variables: x_1 = grosor de placa (mm), x_2 = contenido de carbono (%), x_3 = contenido de manganeso (%), x_4 = contenido de fósforo (%), x_5 = contenido de azufre (%), x_6 = contenido de silicio (%), x_7 = contenido de níquel (%), x_8 = punto de fluencia (Pa) y x_9 = resistencia a la tensión (Pa).

a. Los mejores subconjuntos posibles involucraron sumar variables en el orden x_5, x_8, x_6, x_3, x_2, x_7, x_9, x_1 y x_4. Los valores de R_k^2, MSE_k y C_k son como sigue:

Núm. de predictores	1	2	3	4
R_k^2	.354	.453	.511	.550
MSE_k	2295	1948	1742	1607
C_k	314	173	89.6	35.7

Núm. de predictores	5	6	7	8	9
R_k^2	.562	.570	.572	.575	.575
MSE_k	1566	1541	1535	1530	1532
C_k	19.9	11.0	9.4	8.2	10.0

¿Qué modelo recomendaría usted? Explique la justificación de su elección.

b. Los autores también consideraron modelos de segundo orden que comprendían predictores x_j^2 y $x_i x_j$. La información sobre los mejores de estos modelos, comenzando con las variables x_2, x_3, x_5, x_6, x_7 y x_8 es como sigue (al pasar del

mejor modelo de cuatro predictores al mejor modelo de cinco predictores, x_8 se eliminó y se introdujeron x_2x_6 y x_7x_8; x_8 se volvió a introducir en una etapa posterior):

Núm. de predictores	1	2	3	4	5
R_k^2	.415	.541	.600	.629	.650
MSE_k	2079	1636	1427	1324	1251
C_k	433	109	104	52.4	16.5

Núm. de predictores	6	7	8	9	10
R_k^2	.652	.655	.658	.659	.659
MSE_k	1246	1237	1229	1229	1230
C_k	14.9	11.2	8.5	9.2	11.0

¿Cuál de estos modelos recomendaría y por qué? [*Nota*: Los modelos basados en ocho de las variables originales no dio ninguna mejoría marcada sobre aquellas que hemos considerado aquí.]

80. Se seleccionó una muestra de $n = 20$ compañías, y se determinaron los valores de y = precio de acción y $k = 15$ variables (por ejemplo, dividendos trimestrales, utilidades del año previo y relación de deuda). Cuando el modelo de regresión múltiple que utilizó estos 15 predictores se ajustó a los datos, resultó $R^2 = .90$.

a. ¿Especificará el modelo una relación útil entre y y las variables predictoras? Efectúe una prueba usando nivel de significancia .05. [*Sugerencia*: El valor crítico F para grado de libertad de numerador 15 y denominador 4 es 5.86.]

b. Con base en el resultado del inciso a), ¿implicará el valor de R^2 por sí mismo que un modelo es útil? ¿Bajo qué circunstancias tendría que ser suspicaz respecto a un modelo con un alto valor de R^2?

c. Con n y k como se dieron previamente, ¿qué tan grande tendría que ser R^2 para que el modelo sea juzgado como útil al nivel de significancia .05?

81. ¿Será que la exposición a la contaminación del aire provoca una menor esperanza de vida? Esta pregunta se analiza en el artículo **"Does Air Pollution Shorten Lives?" (*Statistics and Public Policy*, Reading, MA. Addison-Wesley, 1977)**. Los datos sobre

y = porcentaje total de mortalidad (muertes por 10 000)

x_1 = lectura media de partículas suspendidas ($\mu g/m^3$)

x_2 = lectura más baja de sulfato ($[\mu g/m^3)] \times 10$)

x_3 = densidad de población (personas/millas^2)

x_4 = (porcentaje de raza no blanca) $\times$ 10

x_5 = (porcentaje de más de 65 años) $\times$ 10

para el año 1960 fueron registrados para $n = 117$ áreas estadísticas metropolitanas estándar seleccionadas al azar. La ecuación de regresión estimada fue

$$y = 19.607 + .041x_1 + .071x_2 + .001x_3 + .041x_4 + .687x_5$$

a. Para este modelo, $R^2 = .827$. Usando un nivel de significancia de .05 efectúe una prueba de utilidad del modelo.

b. La desviación estándar de $\hat{\beta}_1$ fue de .016. Calcule e interprete un intervalo de confianza de 90% para β_1.

c. Dado que la desviación estándar estimada para $\hat{\beta}_4$ es .007, determine si el porcentaje no de raza blanca es una variable importante en el modelo. Utilice un nivel de significancia de .01.

d. En 1960 los valores de x_1, x_2, x_3, x_4 y x_5 para Pittsburgh fueron de 166, 60, 788, 68 y 95, respectivamente. Utilice la ecuación de regresión dada para predecir la tasa de mortalidad de Pittsburgh. ¿Cómo compara su predicción con el valor real de 1960 de 103 muertes por 10 000?

82. Dado que $R^2 = .723$ para el modelo que contiene los predictores x_1, x_4, x_5 y x_8 y $R^2 = .689$ para el modelo con predictores x_1, x_3, x_5 y x_6, ¿qué se puede decir acerca de R^2 para el modelo que contiene los siguientes predictores?:

a. x_1, x_3, x_4, x_5, x_6 y x_8. Explique.

b. x_1 y x_4. Explique

83. Un artículo publicado en ***Lubrication Engr.* ("Accelerated Testing of Solid Film Lubricants", 1972: 365–372)** reporta en una investigación de la vida útil (y, en horas) para un lubricante de film sólido. Se llevaron a cabo tres series de pruebas en un film de tipo Mil-L-8937 en cada combinación de tres velocidades (x_1, en rpm) y tres cargas (x_2, en miles de horas). Los valores de x_1 para las 27 observaciones resultantes eran 20, 20,..., 20, 60,..., 60, 100,..., 100, y los valores de x_2 eran 3, 3, 3, 6, 6, 6, 10, 10, 10, 3, 3, 3,..., 10, 10, 10. Los valores correspondientes de y = vida útil (h) fueron 300.2, 310.8, 333.0, 99.6, 136.2, 142.4, 20.2, 28.2, 102.7, 67.3, 77.9, 93.9, 43.0, 44.5, 65.9, 10.7, 34.1, 39.1, 26.5, 22.3, 34.8, 32.8, 25.6, 32.7, 2.3, 4.4 y 5.8

Los investigadores comentan que una distribución log-normal es adecuada para Y porque se sabe que $\ln(Y)$ sigue una ley normal, y proponen el modelo multiplicativo de regresión de potencia $Y = \alpha x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \epsilon$.

a. Estime los parámetros del modelo.

b. Interprete R^2 para el modelo transformado y luego lleve a cabo una prueba de modelo de utilidad.

c. ¿Será que ambos predictores proporcionan información importante sobre la vida útil?

d. Prediga la vida útil cuando la velocidad es de 50 y la carga, de 5 de modo que transmita información sobre la precisión y la confiabilidad.

BIBLIOGRAFÍA

Chatterjee, Samprit y Ali Hadi, *Regression Analysis by Example* (4a. ed.), Wiley, Nueva York, 2006. Un breve pero informativo estudio de temas seleccionados, en especial la multicolinealidad y el uso de métodos sesgados de estimación.

Daniel, Cuthbert y Fred Wood, *Fitting Equations to Data* (2a. ed.), Wiley, Nueva York, 1980. Contiene muchas ideas y métodos que evolucionaron a partir de la gran experiencia de consulta de los autores.

Draper, Norman y Harry Smith, *Applied Regression Analysis* (3a. ed.) Wiley. Nueva York, 1999. Véase la bibliografía del capítulo 12.

Hoaglin, David y Roy Welsch, "The Hat Matrix in Regression and ANOVA", *American Statistician*, 1978: 17–23. Describe métodos para detectar observaciones influyentes en un conjunto de datos de regresión.

Hocking, Ron, "The Analysis and Selection of Variables in Linear Regression", *Biometrics*, 1976: 1–49. Un excelente examen del tema.

Neter, John *et al.*, *Applied Linear Statistical Models* (5a. ed.), Irwin, Homewood, IL, 2004. Véase la bibliografía del capítulo 12.

Pruebas de bondad de ajuste y análisis de datos categóricos

14

INTRODUCCIÓN

En el tipo más sencillo de situación que se ha considerado en este capítulo cada observación en una muestra se clasifica como parte de un número finito de categorías (por ejemplo, el tipo de sangre podría ser una de cuatro categorías O, A, B o AB). Con p_i se denota la probabilidad de que cualquier observación particular pertenezca a la categoría i (o la proporción de la población que pertenece a la categoría i). Se desea probar una hipótesis nula que satisfaga por completo los valores de todas las p_i (por ejemplo H_0: $p_1 = .45$, $p_2 = .35$, $p_3 = .15$, $p_4 = .05$ cuando hay cuatro categorías). El estadístico de prueba será una medida de la discrepancia entre los números observados de las categorías y los correspondientes números esperados cuando H_0 es verdadera. Debido a que la distribución de referencia para determinar el valor P es una distribución ji-cuadrada, el procedimiento recibe el nombre de prueba de bondad de ajuste ji-cuadrada.

A veces la hipótesis nula especifica que las p_i dependen de algún número más pequeño de parámetros sin especificar los valores de estos parámetros. Por ejemplo, con tres categorías la hipótesis nula podría indicar que $p_1 = \theta^2$, $p_2 = 2\theta(1 - \theta)$, y $p_3 = (1 - \theta)^2$. Para efectuar una prueba ji-cuadrada los valores de cualesquiera parámetros no especificados deben estimarse a partir de los datos muestrales. Estos problemas se estudian en la sección 14.2. Los métodos se aplican entonces para probar una hipótesis nula que exprese que la muestra proviene de una familia particular de distribuciones, como la familia Poisson (con μ estimada desde la muestra), o la familia normal (con μ y σ estimadas). En resumen, para la hipótesis nula de la normalidad de la población se presenta una prueba basada en una gráfica de probabilidad normal.

Las pruebas ji-cuadrada para dos situaciones diferentes se presentan en la sección 14.3. En la primera la hipótesis nula expresa que las p_i son iguales para varias poblaciones diferentes. El segundo tipo de situación consiste en tomar una muestra

de una población individual y clasificar a cada individuo respecto a dos factores categóricos diferentes (por ejemplo, la preferencia religiosa y el registro de partido político). La hipótesis nula en esta situación es que los dos factores son independientes dentro de la población.

14.1 Pruebas de bondad de ajuste cuando las probabilidades categóricas son dadas por completo

Un experimento binomial consiste en una secuencia de intentos independientes en la que cada intento puede resultar en uno de dos posibles resultados, S (por éxito) y F (por fracaso). La probabilidad de éxito, denotada por p, se supone constante de un intento a otro, y el número n de intentos se fija al principio del experimento. En el capítulo 8 se presentó una prueba z de muestra grande para probar H_0: $p = p_0$. Note que esta hipótesis nula especifica tanto para $P(S)$ como para $P(F)$, porque si $P(S) = p_0$, entonces $P(F) = 1 - p_0$. Si se denota $P(F)$ por q y $1 - p_0$ por q_0: la hipótesis nula se puede escribir alternativamente como H_0: $p = p_0$, $q = q_0$. La prueba z es de dos colas cuando la alternativa de interés es $p \neq p_0$.

Un **experimento multinomial** generaliza un experimento binomial al permitir que cada intento resulte en uno de k posibles resultados, donde $k > 2$. Por ejemplo, suponga que una tienda acepta tres tipos diferentes de tarjetas de crédito. Un experimento multinomial resultaría de observar el tipo de tarjeta de crédito, ya sea tipo 1, tipo 2 o tipo 3, que utiliza cada uno de los siguientes n clientes que pagan con tarjeta de crédito. En general, referiremos como categorías los k posibles resultados en una tirada dada y p_i denotará la probabilidad de un resultado en dicha categoría i. Si el experimento consiste en seleccionar n individuos u objetos de una población y clasificarlos, entonces p_i es la proporción de la población que se halla en la i-ésima categoría (un experimento como este será aproximadamente multinomial siempre que n sea mucho menor que el tamaño de la población).

La hipótesis nula de interés especificará el valor de cada p_i. Por ejemplo, en el caso de $k = 3$, se podría tener H_0: $p_1 = .5$, $p_2 = .3$, $p_3 = .2$. La hipótesis alternativa indicará que H_0 no es verdadera, es decir, al menos una de las p_i tiene un valor diferente de lo expresado por H_0 (en cuyo caso al menos dos deben ser distintas, dado que suman 1). El símbolo p_{i0} representará el valor de p_i indicado por la hipótesis nula. En el ejemplo que hemos visto, $p_{10} = .5$, $p_{20} = .3$ y $p_{30} = .2$.

Antes de llevar a cabo el experimento multinomial, el número de intentos que da por resultado la categoría i ($i = 1, 2,...,$ o k) es una variable aleatoria, de la misma forma que el número de éxitos y el número de fracasos en un experimento binomial son variables aleatorias. Esta variable aleatoria estará denotada por N_i y su valor observado por n_i. En vista de que cada intento da por resultado exactamente una de las k categorías, $\Sigma N_i = n$, y lo mismo es verdadero para las n_i. Por ejemplo, un experimento con $n = 100$ y $k = 3$ podría dar $N_1 = 46$, $N_2 = 35$ y $N_3 = 19$.

El número esperado de éxitos y el número esperado de fracasos en un experimento binomial son np y nq, respectivamente. Cuando H_0: $p = p_0$, $q = q_0$ es verdadera, los números esperados de éxitos y fracasos son np_0 y nq_0, respectivamente. Del mismo modo, en un experimento multinomial el número esperado de intentos que resulte en la categoría i es $E(N_i) = np_i$ ($i = 1,..., k$). Cuando H_0: $p_1 = p_{10},..., p_k = p_{k0}$ es verdadera, estos valores esperados se convierten en $E(N_1) = np_{10}$, $E(N_2) = np_{20},..., E(N_k) = np_{k0}$. Para el caso en el que $k = 3$, H_0: $p_1 = .5$, $p_2 = .3$, $p_3 = .2$ y $n = 100$, las frecuencias esperadas cuando H_0 es verdadera son $E(N_1) = 100(.5) = 50$, $E(N_2) = 30$ y $E(N_3) = 20$. Las n_i y sus correspondientes frecuencias esperadas a menudo son mostradas en formato tabular tal como se ilustra en

la tabla 14.1. Los valores esperados cuando H_0 es verdadera se muestran justo debajo de los valores observados. Las N_i y las n_i suelen llamarse *cantidades de celda observadas* (o *frecuencias de celda observadas*), y np_{10}, np_{20},..., np_{k0} son las correspondientes *cantidades de celda esperadas* bajo H_0.

Tabla 14.1 Cantidades de celda observadas y esperadas

Categoría	$i = 1$	$i = 2$	. . .	$i = k$	**Total de fila**
Observada	n_1	n_2	. . .	n_k	n
Esperada	np_{10}	np_{20}	. . .	np_{k0}	n

Las n_i deben estar razonablemente cerca de las correspondientes np_{i0} cuando H_0 es verdadera. Por otra parte, varias de las cantidades observadas deben diferir en forma considerable de estas cantidades esperadas cuando los valores reales de las p_i difieran marcadamente de lo que indica la hipótesis nula. El procedimiento de prueba comprende evaluar la discrepancia entre las n_i y las np_{i0}, con H_0 rechazada cuando la discrepancia es lo suficientemente grande. Es natural basar una medida de discrepancia en los cuadrados de las desviaciones $(n_1 - np_{10})^2$, $(n_2 - np_{20})^2$,..., $(n_k - np_{k0})^2$. Una forma aparente de combinarlas en una medida general es sumarlas para obtener $\Sigma(n_i - np_{i0})^2$. No obstante, suponga que $np_{10} = 100$ y $np_{20} = 10$. Entonces si $n_1 = 95$ y $n_2 = 5$, las dos categorías contribuyen con las mismas desviaciones al cuadrado a la medida propuesta. Pero n_1 es sólo 5% menor de lo que se esperaría cuando H_0 es verdadera, mientras que n_2 es 50% menor. Para tomar en cuenta las magnitudes relativas de las desviaciones, cada desviación cuadrática se divide entre la correspondiente cantidad esperada.

Antes de dar una descripción más detallada se debe analizar un tipo de distribución de probabilidad llamada *distribución ji-cuadrada* (χ^2) Esta distribución se introdujo primero en la sección 4.4 y se usó en el capítulo 7 para obtener un intervalo de confianza para la varianza σ^2 de una población normal. La distribución ji-cuadrada tiene un solo parámetro ν, llamado número de grados de libertad (gl) de la distribución, con posibles valores 1, 2, 3,... . Si $Y \sim \chi^2$ con ν grados de libertad, $E(Y) = \nu$ y $V(Y) = 2\nu$. La figura 14.1 muestra una curva de densidad típica χ^2; está sesgada positivamente, pero se mueve hacia la derecha y se vuelve más simétrica y se extiende conforme ν aumenta.

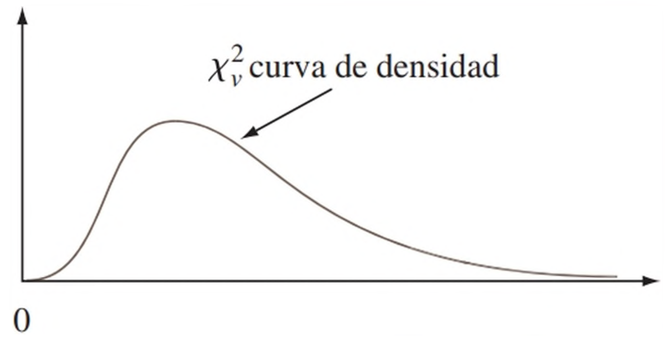


Figura 14.1 Una curva de densidad ji-cuadrada típica

TEOREMA

Siempre que $np_i \geq 5$ para toda $i (i = 1, 2,..., k)$, la variable

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{\text{todas las celdas}} \frac{(\text{observado} - \text{esperado})^2}{\text{esperado}}$$

tiene aproximadamente una distribución ji-cuadrada con $k - 1$ grados de libertad.

El hecho de que gl $= k - 1$ es una consecuencia de la restricción $\Sigma N_i = n$. Aun cuando haya k cuentas de celdas observadas, una vez conocidas cualesquiera $k - 1$, la restante se

determina de manera única. Esto es, hay sólo $k - 1$ cuentas de celdas "determinadas libremente" y, por tanto, $k - 1$ grados de libertad.

Si np_{i0} se sustituye por np_i en χ^2, la estadística de prueba resultante tiene una distribución ji-cuadrada cuando H_0 es verdadera Entre más diferían las frecuencias observadas de las frecuencias esperadas, mayor será el valor de χ^2. Puesto que el estadístico de prueba utiliza frecuencias esperadas, al suponer que H_0 es verdadera, cualquier valor del estadístico de prueba mayor que la χ^2 calculada será aún más contradictorio a H_0 que este valor calculado. La implicación es que la prueba es de cola superior: el valor P será el área bajo la curva ji-cuadrada correspondiente a la derecha del valor calculado χ^2.

Hipótesis nula: H_0: $p_1 = p_{10}, p_2 = p_{20}, \ldots, p_k = p_{k0}$
Hipótesis alternativa: H_a: al menos una p_i no es igual a p_{i0}

Valor del estadístico de prueba: $\chi^2 = \sum_{\text{todas las celdas}} \frac{(\text{observado} - \text{esperado})^2}{\text{esperado}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_{i0})^2}{np_{i0}}$

Siempre que $np_{i0} \geq 5$ para toda i, el valor P es (aproximadamente) el área bajo la curva χ^2_{k-1} a la derecha del valor calculado χ^2. Si $np_{i0} < 5$ para al menos una i, se deben combinar categorías de una manera razonable para corregir esta deficiencia.

La tabla A.7 da valores críticos de ji-cuadrada $\chi^2_{\alpha,\nu}$ que captura áreas α específicas bajo diversas curvas ji-cuadrada (similar a lo que $t_{\alpha,\nu}$, hace con curvas t). Pero ya que la tabla es de sólo cinco pequeños valores de α, existe información limitada sobre un valor P. Por tanto, se ha incluido otra tabla en el apéndice, similar a las áreas de cola de curva t de la tabla A.8, que facilita hacer enunciados de valor P más precisos.

El hecho de que las curvas t estuvieran centradas en cero permitió tabular áreas de cola de curva t de forma relativamente compacta, con el margen izquierdo, con valores que van de 0.0 a 4.0 en la escala horizontal t y varias columnas mostrando áreas correspondientes de la parte superior de la cola de diferentes grados de libertad. El movimiento hacia la derecha de curvas ji-cuadrada aumenta los grados de libertad lo que requiere un tipo de tabulación diferente. El margen izquierdo de la tabla A.11 del apéndice muestra diferentes áreas de la parte superior de la cola: .100, .095, 090,..., .005 y 001. Cada columna de la tabla es para un diferente valor de grado de libertad y las entradas son valores en el eje horizontal de ji-cuadrada que capturan estas áreas de cola correspondientes. Por ejemplo, al moverse hacia abajo del área de cola .085 y a través de la columna 4 grados de libertad, vemos que el área a la derecha de 8.18 debajo de la curva ji-cuadrada de 4 grados de libertad es .085 (véase la figura 14.2). Para capturar la misma área de cola superior debajo de la curva de 10 grados de libertad se requiere ir a 16.54.

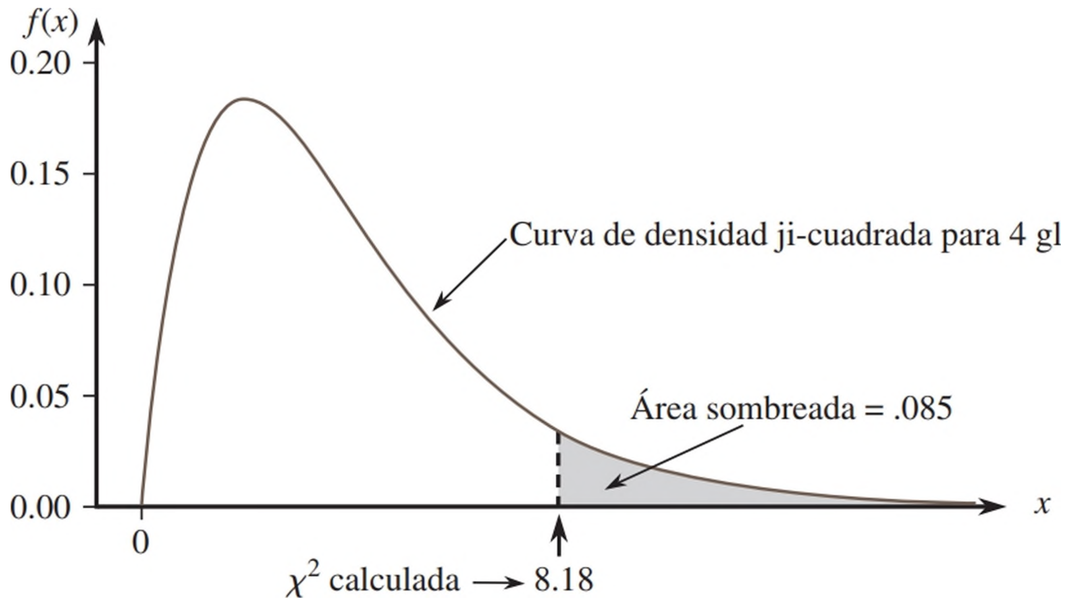


Figura 14.2 Un valor P para una prueba ji-cuadrada de cola superior

Volviendo a la columna de 4 grados de libertad de la tabla A.8, vemos que el área debajo de la curva χ^2_4 a la derecha de 8.33 es .08. Así, el valor calculado $\chi^2 = 8.20$, lo cual implica que .08 < valor P <.085. En este caso H_0 sería rechazado en el nivel de significancia de.10 pero no a niveles de .05 o de .01. La fila superior de la columna de 4 grados de libertad muestra que si el valor de la variable ji-cuadrada calculada es menor que 7.77, el área de cola capturada (el valor P) es superior a .10. Del mismo modo, la fila de abajo en esta columna indica que si el valor calculado excede 18.46, el área de cola es menor que .001 (valor $P < .001$).

EJEMPLO 14.1 La genética proporciona una zona rica para la aplicación de la prueba ji-cuadrada. Si se concentra en dos características diferentes de un organismo, cada uno controlado por un solo gen, y se cruza una variedad pura que tenga genotipo *AABB* con una variedad pura que tenga genotipo *aabb* (las letras mayúsculas denotan alelos dominantes; las minúsculas, alelos recesivos), el genotipo resultante será *AaBb*. Si estos organismos de primera generación se cruzan entre sí (un cruce dihíbrido), habrá cuatro fenotipos que dependan de si está presente un alelo dominante de alguno de los dos tipos. Las leyes de Mendel de la herencia implican que estos cuatro fenotipos deben tener probabilidades 9/16, 3/16, 3/16 y 1/16 de aparecer en cualquier cruce dihíbrido determinado.

El artículo **"Linkage Studies of the Tomato" (*Trans. Royal Canadian Institute*, 1931: 1–19)** publica los siguientes datos sobre fenotipos de un cruce dihíbrido de tomates altos de hoja cortada con tomates enanos de hoja de papa. Hay $k = 4$ categorías que corresponden a los cuatro fenotipos posibles, con la hipótesis nula

$$H_0: p_1 = \frac{9}{16},\ p_2 = \frac{3}{16},\ p_3 = \frac{3}{16},\ p_4 = \frac{1}{16}$$

Las cantidades esperadas de celdas son $9n/16$, $3n/16$, $3n/16$ y $n/16$ y la prueba está basada en $k - 1 = 3$ grados de libertad. El tamaño muestral total fue $n = 1611$. Las cantidades observadas y esperadas se dan en la tabla 14.2.

Tabla 14.2 Cantidades observadas y esperadas de celdas para el ejemplo 14.1

	$i = 1$ Alto, hoja cortada	$i = 1$ Alto, hoja de papa	$i = 1$ Enano, hoja cortada	$i = 1$ Enano, hoja de papa
n_i	926	288	293	104
np_{i0}	906.2	302.1	302.1	100.7

La contribución a χ^2 desde la primera celda es

$$\frac{(n_1 - np_{10})^2}{np_{10}} = \frac{(926 - 906.2)^2}{906.2} = .433$$

Las celdas 2, 3 y 4 contribuyen con .658, .274 y .108, respectivamente, de modo que $\chi^2 = .433 + .658 + .274 + .108 = 1.473$. La tabla A.11 muestra que .10 es el área a la derecha de 6.25 bajo la curva ji-cuadrada con 3 grados de libertad. Por tanto, el área bajo esta curva a la derecha de 1.473 excede considerablemente.10. Es decir, valor $P > .10$, por lo que H_0 no puede ser rechazada incluso a este nivel más bien grande de significancia. La información es bastante consistente con las leyes de Mendel. ■

Aun cuando hemos desarrollado la prueba ji-cuadrada para situaciones en las que $k > 2$, también se puede usar cuando $k = 2$. La hipótesis nula en este caso se puede expresar como $H_0: p_1 = p_{10}$, porque las relaciones $p_2 = 1 - p_1$ y $p_{20} = 1 - p_{10}$ hacen redundante

la inclusión de $p_2 = p_{20}$ en H_0. La hipótesis alternativa es H_a: $p_1 \neq p_{10}$. Estas hipótesis también se pueden probar usando una prueba z de dos colas con estadístico de prueba

$$Z = \frac{(N_1/n) - p_{10}}{\sqrt{\dfrac{p_{10}(1 - p_{10})}{n}}} = \frac{\hat{p}_1 - p_{10}}{\sqrt{\dfrac{p_{10}p_{20}}{n}}}$$

Sorprendentemente, los dos procedimientos son por completo equivalentes. Esto es porque se puede demostrar que $Z^2 = \chi^2$ y $(z_{\alpha/2})^2 = \chi^2_{1,\alpha}$, para que las áreas de cola correspondientes (valores P) sean idénticas.* Si la hipótesis alternativa es H_a: $p_1 > p_{10}$ o H_a: $p_1 < p_{10}$, la prueba ji-cuadrada no se puede usar. Se debe entonces revertir a una prueba z de cola superior o inferior.

Al igual que en el caso con todos los procedimientos de prueba, se debe tener cuidado de no confundir significación estadística con significación práctica. Una χ^2 calculada que exceda de $\chi^2_{\alpha,k-1}$ puede resultar de un tamaño muestral más grande que cualesquiera diferencias prácticas entre las p_{i0} hipotéticas y las verdaderas p_i. Entonces, si $p_{10} = p_{20} = p_{30} = 1/3$, pero las p_i verdaderas tienen valores de .330, .340 y .330, es seguro que aparecerá un valor grande de χ^2 con una n lo suficientemente grande. Antes de rechazar H_0, las $\hat{p}_i$ deben examinarse para ver si sugieren un modelo diferente del de H_0 desde un punto de vista práctico.

χ^2 cuando las p_i son funciones de otros parámetros

Es frecuente que las p_i sean hipotéticas para depender de un número menor de parámetros $\theta_1,\ldots, \theta_m$ $(m < k)$. Entonces una hipótesis específica que comprenda las θ_i da las p_{i0} específicas que, por tanto, se usan en la prueba χ^2.

EJEMPLO 14.2 En un famoso artículo sobre genética (**"The Progeny in Generations F12 to F17 of a Cross Between a Yellow-Wrinkled and a Green-Round Seeded Pea", *J. of Genetics*, 1923: 255–331**) G. U. Yule, uno de los primeros expertos en estadística, analiza los datos que resultan de cruzar chícharos producidos en un jardín. Los alelos dominantes en el experimento fueron Y = color amarillo y R = redondos, que dieron por resultado el YR dominante doble. Yule examinó 269 vainas de cuatro semillas que resultaron de un cruce dihíbrido y contó el número de semillas YR de cada vaina. Denotando con X el número de los YR de una vaina seleccionada al azar, los posibles valores X son 0, 1, 2, 3, 4, que se identifican con las celdas 1, 2, 3, 4 y 5 de una tabla rectangular (entonces, por ejemplo, una vaina con $X = 4$ da una cantidad observada en la celda 5).

La hipótesis de que las leyes de Mendel son operativas, y que los genotipos de semillas individuales dentro de una vaina son independientes entre sí, implica que X tiene una distribución binomial con $n = 4$ y $\theta = 9/16$. Entonces se desea probar H_0: $p_1 = p_{10},\ldots, p_5 = p_{50}$, donde

$$\begin{aligned} p_{i0} &= P(i - 1 \text{ YR entre 4 semillas cuando } H_0 \text{ es verdadera}) \\ &= \binom{4}{i-1} \theta^{i-1}(1 - \theta)^{4-(i-1)} \qquad i = 1, 2, 3, 4, 5;\ \theta = \frac{9}{16} \end{aligned}$$

Los datos y cálculos de Yule se muestran en la tabla 14.3 con cantidades de celda esperadas $np_{i0} = 269p_{i0}$.

* El hecho de que $(z_{\alpha/2})^2 = \chi^2_{1,\alpha}$ es una consecuencia de la relación entre la distribución normal estándar y la distribución ji-cuadrada con 1 grado de libertad; Si $Z \sim N(0, 1)$, entonces Z^2 tiene una distribución ji-cuadrada con $\nu = 1$.

Tabla 14.3 Cantidades de celdas observadas y esperadas para el ejemplo 14.2

Celda *i*	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Chícharos YR por vaina	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Observadas	16	45	100	82	26
Esperadas	9.86	50.68	97.75	83.78	26.93
$\frac{(\text{observadas} - \text{esperadas})^2}{\text{esperadas}}$	3.823	.637	.052	.038	.032

Entonces $\chi^2 = 3.823 + \cdots + .032 = 4.582$. La tabla A.11 del apéndice muestra que puesto que $4.582 < 7.77$, el valor P para la prueba excede de .10. H_0 no debe ser rechazada a ningún nivel razonable de significancia. ■

χ^2 cuando la distribución básica es continua

Hasta aquí se ha supuesto que las k categorías están naturalmente definidas en el contexto del experimento que se está considerando. La prueba χ^2 también se puede usar para probar si una muestra proviene de una distribución continua básica específica. Denote con X la variable que se muestrea y suponga que la función de densidad de probabilidad (fdp) hipotética de X es $f_0(x)$. Al igual que en la construcción de una distribución de frecuencia en el capítulo 1, subdivida la escala de medición de X en k intervalos $[a_0, a_1)$, $[a_1, a_2)$,..., $[a_{k-1}, a_k)$, donde el intervalo $[a_{i-1}, a_i)$ incluye el valor a_{i-1} pero no a_i. Las probabilidades de celda especificadas por H_0 son, por tanto,

$$p_{i0} = P(a_{i-1} \le X < a_i) = \int_{a_{i-1}}^{a_i} f_0(x)\,dx$$

Las celdas deben escogerse de modo que $np_{i0} = 5$ para $i = 1,..., k$. Es frecuente que se seleccionen de modo que las np_{i0} sean iguales.

EJEMPLO 14.3 Para ver si el tiempo de inicio del trabajo de parto en mujeres está uniformemente distribuido en todo un día de 24 horas, se puede dividir un día en k periodos, cada uno con duración $24/k$. La hipótesis nula expresa que $f(x)$ es la función de densidad de probabilidad uniforme en el intervalo [0, 24], de modo que $p_{i0} = 1/k$. El artículo **"The Hour of Birth" (*British J. of Preventive and Social Medicine*, 1953: 43–59)** habla de 1186 tiempos de inicio, que se clasificaron en $k = 24$ intervalos de 1 hora que comenzaban a la media noche, y resultaron en cuentas de celda de 52, 73, 89, 88, 68, 47, 58, 47, 48, 53, 47, 34, 21, 31, 40, 24, 37, 31, 47, 34, 36, 44, 78 y 59. Cada una de las cantidades esperadas de celda es $1186 \cdot 1/24 = 49.42$, y el valor resultante de χ^2 es 162.77. El software estadístico da un valor $P = .000$, por lo que H_0 es rechazada en cualquier nivel de significancia razonable. Hablando en términos generales, parece que es mucho más probable que el trabajo de parto se inicie ya bien entrada la noche que durante las horas hábiles normales. ■

Para probar si una muestra proviene de una distribución normal específica, los parámetros fundamentales son $\theta_1 = \mu$ y $\theta_2 = \sigma$, y cada p_{i0} será una función de estos parámetros.

EJEMPLO 14.4 En cierta universidad se supone que los exámenes finales duran 2 horas. El departamento de psicología construyó un examen final departamental para un curso elemental que se pensaba que podría satisfacer los siguientes criterios: 1) el tiempo real requerido para completar el examen está distribuido de manera normal, 2) $\mu = 100$ min y 3) exactamente 90% de todos los estudiantes terminará. dentro del periodo de 2 horas. Para ver

si este es realmente el caso se seleccionaron al azar 120 estudiantes y se registraron sus tiempos para terminar el examen. Se decidió que debían emplearse $k = 8$ intervalos. Los criterios implican que el 90º percentil de la distribución del tiempo de terminación es $\mu + 1.28\sigma = 120$. Dado que $\mu = 100$, esto implica que $\sigma = 15.63$.

Los ocho intervalos que dividen la escala normal estándar en ocho segmentos igualmente probables son [0, .32), [.32, .675), [.675, 1.15) y [1.15, ∞), y sus cuatro similares en el otro lado de 0. Para $\mu = 100$ y $\sigma = 15.63$, estos intervalos se convierten en [100, 105), [105, 110.55), [110.55, 117.97) y [117.97, ∞). Así, $p_{i0} = 1/8 = .125$ ($i = 1,..., 8$) de modo que cada cantidad de celdas esperada es $np_{i0} = 120(.125) = 15$. Las cantidades de celdas observadas fueron 21, 17, 12, 16, 10, 15, 19 y 10, que dan por resultado una χ^2 de 7.73. La columna 8 de grados de libertad de la tabla A.11 muestra que el valor $P > .10$, por lo que no hay evidencia para concluir que los criterios no se han satisfecho. ■

EJERCICIOS Sección 14.1 (1–11)

1. ¿Cuál conclusión sería apropiada para una prueba ji-cuadrada de cola superior en cada una de las situaciones siguientes?

a. $\alpha = .05$, gl $= 4$, $\chi^2 = 12.25$

b. $\alpha = .01$, gl $= 3$, $\chi^2 = 8.54$

c. $\alpha = .10$, gl $= 2$, $\chi^2 = 4.36$

d. $\alpha = .01$, $k = 6$, $\chi^2 = 10.20$

2. El artículo **"Racial Stereotypes in Children's Television Commercials" (*J. of Adver. Res.*, 2008: 80–93)** reporta las siguientes frecuencias con las cuales los caracteres étnicos aparecieron en anuncios registrados que salieron al aire en las estaciones de televisión de Filadelfia.

Grupo étnico:	Afro-americanos	Asiáticos	Caucásicos	Hispanos
Frecuencia:	57	11	330	6

Las proporciones de estos cuatro grupos étnicos del censo de 2000 son .177, .032, .734 y .057, respectivamente. ¿Sugerirán los datos que la proporción de anuncios es diferente de las proporciones del censo? Lleve a cabo una prueba de hipótesis apropiada con un nivel de significancia de .01.

3. Se ha supuesto que cuando los pichones que regresan a su palomar están desorientados de algún modo no muestran preferencia por ninguna dirección al alzar el vuelo (de modo que la dirección X debería estar uniformemente distribuida en el intervalo de 0° a 360°). Para probar esto se desorienta a 120 pichones, se les suelta y se registra la dirección de vuelo que toma cada uno; a continuación aparecen los datos resultantes. Utilice una prueba ji-cuadrada al nivel .10 para ver si la información apoya la hipótesis.

Dirección	0–<45°	45–<90°	90–<135°
Frecuencia	12	16	17
Dirección	135–<180°	180–<225°	225–<270°
Frecuencia	15	13	20

4. El artículo **"Application of Methods for Central Statistical Monitoring in Clinical Trials" (*Clinical Trials*, 2013: 783–806)** es un caso fuerte del monitoreo estadístico central como una alternativa para la verificación de datos en los sitios más caros. El artículo sugiere varios métodos para identificar las características de la información tales como datos atípicos, fechas incorrectas, patrones de datos anómalos, estructuras de correlación inusual y dígitos preferentes. El ejercicio 3.21 de este libro introdujo la ley de Benford, que da un modelo de probabilidad para el primer dígito significativo en muchos conjuntos de datos grandes: $p(x) = \log_{10}((x + 1)/x)$ para $x = 1, 2,..., 9$. El citado artículo dio las siguientes frecuencias para el primer dígito significativo en una variedad de variables cuyos valores fueron determinados en un ensayo clínico particular:

Dígito	1	2	3	4
Frecuencia	342	180	164	155
Dígito	5	6	7	8	9
Frecuencia	86	65	54	47	56

Realice una prueba de hipótesis para ver si estas frecuencias son consistentes con la ley de Benford (el citado artículo da información del valor P).

5. Un sistema para recuperar información tiene 10 lugares de almacenamiento. Se ha guardado información con la esperanza de que la proporción de peticiones a largo plazo para la posición i, sea dada por $p_i = (5.5 - |i - 5.5|)/30$. Una muestra de 200 peticiones de recuperación dio las siguientes frecuencias para las posiciones 1–10, respectivamente: 4, 15, 23, 25, 38, 31, 32, 14, 10 y 8. Utilice una prueba ji-cuadrada al nivel de significancia de .10 para determinar si la información es consistente con las proporciones *a priori*.

6. El artículo **"The Gap Between Wine Expert Ratings and Consumer Preferences" (*Intl. J. of Wine Business Res.*, 2008: 335–351)** estudia las diferencias entre las calificaciones de los expertos y las de los consumidores al considerar la medalla de

evaluación para los vinos, que podrían ser de oro (G), plata (S) o bronce (B). A continuación se establecieron tres categorías: 1. La clasificación es la misma [(G, G), (B, B), (S, S)], 2. La clasificación difiere en una medalla [(G, S), (S, G), (S, B), (B, S)], y 3. La clasificación difiere por dos medallas [(G, B), (B, G)]. Las frecuencias observadas para estas tres categorías fueron 69, 102 y 45, respectivamente. En la hipótesis de las calificaciones igualmente probables de los expertos y las de los consumidores, que se asignaron completamente al azar, cada uno de los nueve pares de medallas tiene una probabilidad de 1/9. Lleve a cabo una prueba adecuada ji-cuadrada con un nivel de significancia de .10.

7. Durante mucho tiempo los criminólogos han debatido sobre si hay una relación entre las condiciones climáticas y la incidencia de delitos violentos. El autor del artículo **"Is There a Season for Homicide?" (*Criminology*, 1988: 287–296)** clasificó 1361 homicidios según la estación del año y se obtuvieron los siguientes datos. Pruebe la hipótesis nula de iguales proporciones usando $\alpha = .01$

Invierno	Primavera	Verano	Otoño
328	334	372	327

8. El artículo **"Psychiatric and Alcoholic Admissions Do Not Occur Disproportionately Close to Patients' Birthdays" (*Psychological Reports*, 1991: 944–946)** se centra en si existe alguna relación entre la fecha de ingreso de un paciente para recibir tratamiento por alcoholismo y la fecha de su cumpleaños. Suponiendo un año de 365 días (es decir, excluyendo un año bisiesto), en ausencia de cualquier relación, es probable que la fecha de admisión de un paciente sea cualquiera de los 365 días. Los investigadores establecieron cuatro diferentes categorías de admisión: 1) no más de 7 días a partir de la fecha de cumpleaños, 2) entre 8 y 30 días, inclusive, a partir del cumpleaños, 3) entre 31 y 90 días, inclusive, a partir del cumpleaños, y 4) más de 90 días después del cumpleaños. Una muestra de 200 pacientes dio frecuencias observadas de 11, 24, 69 y 96 para las categorías 1, 2, 3 y 4, respectivamente. Exprese y pruebe las hipótesis relevantes usando un nivel de significancia de .01.

9. Se ha teorizado el tiempo de respuesta de un sistema computarizado, a una petición de cierto tipo de información, como una distribución exponencial con parámetro $\lambda = 1$ segundo (de modo que si X = tiempo de respuesta, la función de densidad de probabilidad de X bajo H_0 es $f_0(x) = e^{-x}$ para $x \geq 0$).

a. Si se hubiera observado $X_1, X_2, \ldots, X_n$ y se deseara usar la prueba ji-cuadrada con cinco intervalos de clase de igual probabilidad bajo H_0, ¿cuáles serían los intervalos de clase resultantes?

b. Realice la prueba ji-cuadrada usando los siguientes datos de una muestra aleatoria de 40 tiempos de respuesta:

.10	.99	1.14	1.26	3.24	.12	.26	.80
.79	1.16	1.76	.41	.59	.27	2.22	.66
.71	2.21	.68	.43	.11	.46	.69	.38
.91	.55	.81	2.51	2.77	.16	1.11	.02
2.13	.19	1.21	1.13	2.93	2.14	.34	.44

10. **a.** Demuestre que otra expresión para el estadístico ji-cuadrada es

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{N_i^2}{np_{i0}} - n$$

¿Por qué es más eficiente calcular χ^2 usando esta fórmula?

b. Cuando la hipótesis nula es H_0: $p_1 = p_2 = \cdots = p_k = 1/k$ (es decir, $p_{i0} = 1/k$ para toda i) ¿cómo se simplifica la fórmula del inciso a)? Utilice la expresión simplificada para calcular χ^2 para los datos pichón/dirección del ejercicio 4.

11. **a.** Habiendo obtenido una muestra aleatoria de una población, el lector desea usar una prueba ji-cuadrada para determinar si la distribución de población es normal estándar. Si basa la prueba en seis intervalos de clase que tengan igual probabilidad bajo H_0, ¿cuáles deberían ser los intervalos de clase?

b. Si desea usar una prueba ji-cuadrada para probar H_0: la distribución poblacional es normal con $\mu = .5$, $\sigma = .002$ y la prueba deberá basarse en seis intervalos de clase igualmente probables (bajo H_0), ¿cuáles deben ser estos intervalos?

c. Use la prueba ji-cuadrada con los intervalos del inciso b) para determinar, con base en los siguientes 45 diámetros de tornillos, si el diámetro de éstos es una variable normalmente distribuida con $\mu = .5$ pulgadas, $\sigma = .002$ pulgadas.

.4974	.4976	.4991	.5014	.5008	.4993
.4994	.5010	.4997	.4993	.5013	.5000
.5017	.4984	.4967	.5028	.4975	.5013
.4972	.5047	.5069	.4977	.4961	.4987
.4990	.4974	.5008	.5000	.4967	.4977
.4992	.5007	.4975	.4998	.5000	.5008
.5021	.4959	.5015	.5012	.5056	.4991
.5006	.4987	.4968			

14.2 Pruebas de bondad de ajuste para hipótesis compuestas

En la sección anterior se presentó una prueba de bondad de ajuste basada en un estadístico χ^2 para decidir entre H_0: $p_1 = p_{10}, \ldots, p_k = p_{k0}$ y la alternativa H_a que expresa que H_0 no es verdadera. La hipótesis nula fue una **hipótesis simple** en el sentido de que cada p_{i0} era un

número dado, de modo que las cantidades esperadas de celda cuando H_0 es verdadera eran números determinados de manera única.

En diversas situaciones hay k categorías que ocurren naturalmente, pero H_0 sólo expresa que las p_i son funciones de otros parámetros $\theta_1,\ldots, \theta_m$ sin especificar los valores de estos parámetros θ. Por ejemplo, una población puede estar en equilibrio respecto a las proporciones de los tres genotipos AA, Aa y aa. Con p_1, p_2 y p_3 denotando estas proporciones (probabilidades) se deseará probar

$$H_0: p_1 = \theta^2,\ p_2 = 2\theta(1-\theta),\ p_3 = (1-\theta)^2 \tag{14.1}$$

donde θ representa la proporción del gen A en la población. Esta hipótesis es **compuesta**, ya que saber que H_0 es verdadera no determina de manera única las probabilidades de celda y las cantidades esperadas de celda, sino sólo su forma general. Para llevar a cabo una prueba χ^2 los parámetros θ_i desconocidos deben estimarse en primer término.

Del mismo modo puede haber interés en probar si una muestra provino de una familia particular de distribuciones sin especificar ningún miembro particular de la familia. Para usar la prueba χ^2 con el fin de ver si la distribución es Poisson, por ejemplo, debe estimarse el parámetro μ. Además, debido a que en realidad hay un número infinito de posibles valores de una variable Poisson, estos valores deben agruparse de manera que haya un número finito de celdas. Si H_0 expresa que la distribución básica es normal, el uso de una prueba χ^2 debe estar precedido por una selección de celdas y estimación de μ y σ.

χ^2 cuando se estiman parámetros

Al igual que antes, k denotará el número de categorías o celdas y p_i denotará la probabilidad de una observación que caiga en la i-ésima celda. La hipótesis nula indica ahora que cada p_i es una función de un pequeño número de parámetros $\theta_1,\ldots, \theta_m$ con los θ_i especificados de otro modo:

$$\begin{aligned} &H_0: p_1 = \pi_1(\theta),\ldots, p_k = \pi_k(\theta) \qquad \text{donde } \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m) \\ &H_a: \text{la hipótesis } H_0 \text{ no es verdadera} \end{aligned} \tag{14.2}$$

Por ejemplo, para H_0 de (14.1), $m = 1$ (sólo hay un θ), $\pi_1(\theta) = \theta^2$, $\pi_2(\theta) = 2\theta(1-\theta)$ y $\pi_3(\theta) = (1-\theta)^2$.

En el caso de $k = 2$, realmente hay sólo una variable aleatoria, N_1 (dado que $N_1 + N_2 = n$), que tiene una distribución binomial. La probabilidad conjunta de que $N_1 = n_1$ y $N_2 = n_2$ es, por tanto,

$$P(N_1 = n_1, N_2 = n_2) = \binom{n}{n_1} p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \propto p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2}$$

donde $p_1 + p_2 = 1$ y $n_1 + n_2 = n$. Para k general, la distribución conjunta de $N_1,\ldots, N_k$ es la distribución multinomial (sección 5.1) con

$$P(N_1 = n_1,\ldots, N_k = n_k) \propto p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \cdots \cdot p_k^{n_k} \tag{14.3}$$

Cuando H_0 es verdadera, (14.3) se convierte en

$$P(N_1 = n_1,\ldots, N_k = n_k) \propto [\pi_1(\theta)]^{n_1} \cdot \cdots \cdot [\pi_k(\theta)]^{n_k} \tag{14.4}$$

Para aplicar una prueba ji-cuadrada debe estimarse $\theta = (\theta_1,\ldots, \theta_m)$

MÉTODO DE ESTIMACIÓN

Sea que $n_1, n_2,\ldots, n_k$ denote los valores observados de $N_1,\ldots, N_k$. Por tanto, $\hat{\theta}_1,\ldots, \hat{\theta}_m$ son los valores de los θ_i que maximizan (14.4).

Los estimadores resultantes $\hat{\theta}_1,\ldots, \hat{\theta}_m$ son los estimadores de máxima probabilidad de $\theta_1,\ldots, \theta_m$; este principio de estimación se discutió en la sección 6.2.

EJEMPLO 14.4 Entre los seres humanos hay un grupo sanguíneo, el MN, compuesto por personas con uno de los tres tipos de sangre M, MN y N. El tipo está determinado por dos alelos y no hay predominio, de modo que los tres posibles genotipos dan lugar a tres fenotipos. Una población formada por personas del grupo MN estará en equilibrio si

$$P(\mathrm{M}) = p_1 = \theta^2$$
$$P(\mathrm{MN}) = p_2 = 2\theta(1-\theta)$$
$$P(\mathrm{N}) = p_3 = (1-\theta)^2$$

para algún θ. Suponga que una muestra de esa población dio los resultados que se muestran en la tabla 14.4.

Tabla 14.4 Cantidades observadas para el ejemplo 14.5

Tipo	M	MN	N	
Observada	125	225	150	$n = 500$

Por tanto,

$$[\pi_1(\theta)]^{n_1}[\pi_2(\theta)]^{n_2}[\pi_3(\theta)]^{n_3} = [(\theta^2)]^{n_1}[2\theta(1-\theta)]^{n_2}[(1-\theta)^2]^{n_3}$$
$$= 2^{n_2} \cdot \theta^{2n_1+n_2} \cdot (1-\theta)^{n_2+2n_3}$$

Al maximizar esto respecto a θ (o bien, lo que es lo mismo, al maximizar el logaritmo natural de esta cantidad, que es más fácil de derivar) se obtiene

$$\hat{\theta} = \frac{2n_1 + n_2}{[(2n_1 + n_2) + (n_2 + 2n_3)]} = \frac{2n_1 + n_2}{2n}$$

Con $n_1 = 125$ y $n_2 = 225$, $\hat{\theta} = 475/1000 = .475$. ■

Una vez que $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$ ha sido estimado por $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_m)$, las cantidades de celdas esperadas estimadas son los $n\pi_i(\hat{\theta})$. Ahora estos se usan en lugar de los np_{i0} de la sección 14.1 para especificar un estadístico χ^2.

TEOREMA

En condiciones generales de "regularidad" en $\theta_1, \ldots, \theta_m$ y las $\pi_i(\theta)$, si $\theta_1, \ldots, \theta_m$ se estiman mediante el método de máxima probabilidad tal como ya se describió y n es grande,

$$\chi^2 = \sum_{\substack{\text{todas} \\ \text{las celdas}}} \frac{(\text{observado} - \text{esperado estimado})^2}{\text{esperado estimado}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{[N_i - n\pi_i(\hat{\theta})]^2}{n\pi_i(\hat{\theta})}$$

tiene aproximadamente una distribución ji-cuadrada con $k - 1 - m$ grados de libertad cuando H_0 de (14.2) es verdadera. Por tanto, el valor P es (aproximadamente) el área bajo la curva χ^2_{k-1-m} a la derecha de la χ^2 calculada. En la práctica, la prueba puede utilizarse si $n\pi_i(\hat{\theta}) \geq$ para toda i.

Note que *el número de grados de libertad es reducido por el número de los θ_i estimados.*

EJEMPLO 14.6 (Continuación del ejemplo 14.5) Con $\hat{\theta} = .475$ y $n = 500$, las cantidades de celdas esperadas estimadas son $n\pi_1(\hat{\theta}) = 500\,(\hat{\theta})^2 = 112.81$, $n\pi_2(\hat{\theta}) = (500)(2)(.475)(1.475) = 249.38$ y $n\pi_3(\hat{\theta}) = 500 - 112.81 - 249.38 = 137.81$. Por tanto,

$$\chi^2 = \frac{(125 - 112.81)^2}{112.81} + \frac{(225 - 249.38)^2}{249.38} + \frac{(150 - 137.81)^2}{137.81} = 4.78$$

La tabla A.11 del apéndice muestra que para grados de libertad = 3 − 1 − 1 = 1, el valor $P \approx .029$. Por tanto, se rechaza H_0 al nivel de significancia de .05 (pero no a un nivel .01). ■

EJEMPLO 14.7 Considere una serie de juegos entre dos equipos, I y II, que termina tan pronto como un equipo ha ganado cuatro juegos (sin posibilidad de empate). Un modelo simple de probabilidad para dicha serie supone que los resultados de juegos sucesivos son independientes, y que la probabilidad de que el equipo I gane cualquier juego en particular es una constante θ. De manera arbitraria se designa al equipo I como el mejor, de modo que $\theta \geq .5$. Cualquier serie particular puede terminar entonces después de 4, 5, 6 o 7 juegos. Sean $\pi_1(\theta),\pi_2(\theta),\pi_3(\theta),\pi_4(\theta)$ la probabilidad de terminar en 4, 5, 6 y 7 juegos, respectivamente. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\pi_1(\theta) &= P(\text{I gana en 4 juegos}) + P(\text{II gana en 4 juegos}) \\
&= \theta^4 + (1-\theta)^4 \\
\pi_2(\theta) &= P(\text{I gana 3 de los primeros 4 y el quinto}) \\
&\quad + P(\text{I pierde 3 de los primeros 4 y el quinto}) \\
&= \binom{4}{3}\theta^3(1-\theta)\cdot\theta + \binom{4}{1}\theta(1-\theta)^3\cdot(1-\theta) \\
&= 4\theta(1-\theta)[\theta^3 + (1-\theta)^3] \\
\pi_3(\theta) &= 10\theta^2(1-\theta)^2[\theta^2 + (1-\theta)^2] \\
\pi_4(\theta) &= 20\theta^3(1-\theta)^3
\end{aligned}$$

El artículo **"Seven-Game Series in Sports" de Groeneveld y Meeden (*Mathematics Magazine*, 1975: 187-192)** probó el ajuste de este modelo a los resultados de juegos para determinar el campeonato de la National Hockey League, durante el periodo 1943–1967 (cuando la membresía de la liga era estable). Los datos aparecen en la tabla 14.5.

Tabla 14.5 Cantidades observadas y esperadas para el modelo simple

Celda	**1**	**2**	**3**	**4**	
Número de juegos jugados	**4**	**5**	**6**	**7**	
Frecuencia observada	15	26	24	18	$n = 83$
Frecuencia esperada estimada	16.351	24.153	23.240	19.256	

Las cantidades de celda esperadas estimadas son $83\pi_i(\hat{\theta})$, donde $\hat{\theta}$ es el valor de θ que maximiza

$$\begin{aligned}
&\{\theta^4 + (1-\theta)^4\}^{15}\cdot\{4\theta(1-\theta)[\theta^3 + (1-\theta)^3]\}^{26} \\
&\quad\cdot\{10\theta^2(1-\theta)^2[\theta^2 + (1-\theta)^2]\}^{24}\cdot\{20\theta^3(1-\theta)^3\}^{18}
\end{aligned} \tag{14.5}$$

Los métodos estándar de cálculo no proporcionan una fórmula sencilla para el valor que lleva al máximo a $\hat{\theta}$, de modo que debe calcularse usando métodos numéricos. El resultado es $\hat{\theta} = .645$, del que se calculan $\pi_i(\hat{\theta})$ y las cantidades de celda esperadas estimadas. El valor calculado de χ^2 es .360. Según la columna de grados de libertad de la tabla A.11 $k - 1 - m = 4 - 1 - 1 = 2$, el valor $P > .10$. Por tanto, no hay razón para rechazar el modelo simple como se aplica a la serie de juegos para decidir el campeonato de la NHL.

El artículo citado también considera información de la Serie Mundial (de béisbol) para el periodo 1903-1973. Para el modelo simple, $\chi^2 = 5.97$. De la tabla A.11 se tiene valor $P \approx .05$. Con un nivel de significancia de .10 el modelo es de dudosa validez. La razón sugerida para esto es que

$$P(\text{la serie dura seis juegos} \mid \text{la serie dura al menos seis juegos}) \geq .5 \tag{14.6}$$

mientras que, de las 38 series que en realidad duraron al menos seis juegos, sólo 13 duraron exactamente seis. Se introduce entonces el siguiente modelo alternativo:

$$\pi_1(\theta_1, \theta_2) = \theta_1^4 + (1 - \theta_1)^4$$
$$\pi_2(\theta_1, \theta_2) = 4\theta_1(1 - \theta_1)[\theta_1^3 + (1 - \theta_1)^3]$$
$$\pi_3(\theta_1, \theta_2) = 10\theta_1^2(1 - \theta_1)^2\theta_2$$
$$\pi_4(\theta_1, \theta_2) = 10\theta_1^2(1 - \theta_1)^2(1 - \theta_2)$$

Las primeras dos π_i son idénticas al modelo simple, mientras que θ_2 es la probabilidad condicional de (14.6) (que ahora puede ser cualquier número entre 0 y 1). Los valores de $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ que maximizan la expresión análoga a la expresión (14.5) se determinan numéricamente como $\hat{\theta}_1 = .614$, $\hat{\theta}_2 = .342$. En la tabla 14.6 aparece un resumen, y $\chi^2 = .384$. Puesto que se estiman dos parámetros, el grado de libertad es igual a $k - 1 - m = 1$. El valor P excede considerablemente de .10 lo cual indica un buen ajuste de la información al nuevo modelo.

Tabla 14.6 Cantidades observadas y esperadas para el modelo más complejo

Número de juegos jugados	**4**	**5**	**6**	**7**
Frecuencia observada	12	16	13	25
Frecuencia esperada estimada	10.85	18.08	12.68	24.39

Una de las condiciones en las θ_i del teorema es que son funcionalmente independientes una de otra. Esto es, ningún θ_i se puede determinar a partir de los valores de otros θ_i, de modo que m es el número de parámetros estimados funcionalmente independientes. Una regla empírica general para los grados de libertad en una prueba ji-cuadrada es la siguiente.

$$\chi^2 \text{ gl} = \begin{pmatrix}\text{número de cantidades de celdas}\\ \text{determinadas libremente}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{número de parámetros}\\ \text{independientes estimados}\end{pmatrix}$$

Esta regla se usará en relación con diversas pruebas ji-cuadrada diferentes en la siguiente sección.

Bondad de ajuste para distribuciones discretas

Numerosos experimentos comprenden la observación de una muestra aleatoria $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de alguna distribución discreta. Por tanto, se desearía investigar si la distribución básica es miembro de una familia particular, por ejemplo, la familia Poisson o la familia negativa binomial. En ambos casos el conjunto de posibles valores es infinito, de modo que los valores deben agruparse en k subconjuntos antes de que pueda usarse una prueba ji-cuadrada. Las agrupaciones deben hacerse de modo que la frecuencia esperada en cada celda (grupo) sea al menos 5. La última celda corresponderá entonces a X valores de c, $c + 1$, $c + 2, \ldots$ para algún valor c.

Esta agrupación puede complicar de manera considerable el cálculo de los $\hat{\theta}$ y las cantidades de celda esperadas estimadas. Esto se debe a que el teorema exige que las $\hat{\theta}$ se obtengan de las cantidades de celda $N_1, \ldots, N_k$ más que los valores muestrales $X_1, \ldots, X_n$.

EJEMPLO 14.8 La tabla 14.7 presenta información de cantidades sobre el número de plantas *Larrea divaricata* halladas en cada uno de los 48 cuadrantes de muestreo, como se publica en el artículo **"Some Sampling Characteristics of Plants and Arthropods of the Arizona Desert" (*Ecology*, 1962: 567–571)**.

Tabla 14.7 Cantidades observadas para el ejemplo 14.8

Celda	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Número de plantas	**0**	**1**	**2**	**3**	**≥4**
Frecuencia	9	9	10	14	6

El autor del artículo ajustó una distribución Poisson a los datos. Sea μ el parámetro de Poisson y suponga por el momento que las seis cantidades de la celda 5 eran en realidad 4, 4, 5, 5, 6, 6. Por tanto, denotando los valores muestrales por $x_1,\ldots, x_{48}$, nueve de las x_i fueron 0, nueve fueron 1 y así sucesivamente. La probabilidad de la muestra observada es

$$\frac{e^{-\mu}\mu^{x_1}}{x_1!}\cdot\cdots\cdot\frac{e^{-\mu}\mu^{x_{48}}}{x_{48}!}=\frac{e^{-48\mu}\mu^{\Sigma x_i}}{x_1!\cdot\cdots\cdot x_{48}!}=\frac{e^{-48\mu}\mu^{101}}{x_1!\cdot\cdots\cdot x_{48}!}$$

El valor de μ para el cual esto se maximiza es $\hat{\mu}=\Sigma x_i/n=101\text{y}48=2.10$ (el valor publicado en el artículo).

No obstante, la $\hat{\mu}$ requerida para χ^2 se obtiene de maximizar la expresión (14.4) más que la probabilidad de la muestra completa. Las probabilidades de celda son

$$\pi_i(\mu)=\frac{e^{-\mu}\mu^{i-1}}{(i-1)!}\qquad i=1,2,3,4$$

$$\pi_5(\mu)=1-\sum_{i=0}^{3}\frac{e^{-\mu}\mu^{i}}{i!}$$

de modo que el lado derecho de (14.4) se convierte en

$$\left[\frac{e^{-\mu}\mu^{0}}{0!}\right]^{9}\left[\frac{e^{-\mu}\mu^{1}}{1!}\right]^{9}\left[\frac{e^{-\mu}\mu^{2}}{2!}\right]^{10}\left[\frac{e^{-\mu}\mu^{3}}{3!}\right]^{14}\left[1-\sum_{i=0}^{3}\frac{e^{-\mu}\mu^{i}}{i!}\right]^{6}$$

No hay una fórmula fácil para $\hat{\mu}$, el valor de μ para maximizar, en esta última expresión, por lo que debe obtenerse numéricamente. ■

Debido a que las estimaciones del parámetro suelen ser mucho más difíciles de calcular del grupo de datos que de la muestra completa, prácticamente siempre se calculan usando este último método. Si se usan estos estimadores "completos" en el estadístico ji-cuadrada, la distribución del estadístico, cuando H_0 es verdadera, es bastante complicada, por lo que no se puede determinar el valor P real. Sin embargo, el resultado generalmente nos permite llegar a una conclusión en el nivel de significancia deseado α.

TEOREMA

Sean $\hat{\theta}_1,\ldots, \hat{\theta}_m$ los máximos estimadores de probabilidad de $\theta_1,\ldots, \theta_m$ con base en la muestra completa $X_1,\ldots, X_n$, y sea que χ^2 denote el estadístico basado en estos estimadores.

También sea que

P_1 = valor P de una prueba ji-cuadrada de cola superior basada en $k-1$ grados de libertad

P_2 = valor P para una prueba ji-cuadrada de cola superior basada en $k-1-m$ grados de libertad

Por tanto, podrá demostrarse que

$$P_1 \le \text{valor } P \le P_2 \tag{14.7}$$

Es decir, el valor P para la prueba que se está considerando se intercala entre los valores P para las dos pruebas ji-cuadradas "puras" de cola superior basadas en diferentes grados de libertad. El procedimiento de prueba implicado por (14.7) tiene la característica inusual de que bajo algunas circunstancias el juicio debe ser retenido hasta que haya más datos disponibles.

Se selecciona un nivel de significancia α. Después
Si $\alpha \leq P_1$, no se rechaza H_0
Si $\alpha \geq P_2$, se rechaza H_0 (14.8)
Si $P_1 < \alpha < P_2$, se detiene el juicio

Suponga, por ejemplo, que $k = 6$, $m = 2$ y $\alpha = .05$. Los dos grados de libertad importantes son $6 - 1 = 5$ y $6 - 1 - 2 = 3$. Por tanto, si $\chi^2 = 7.0$, en la tabla A.11 se muestra que el valor P para la prueba con 3 grados de libertad es aproximadamente .07 y el valor P para la prueba con 5 grados de libertad supera.10. Así entonces, no podremos rechazar H_0 porque .05 es el más pequeño de los dos valores P de las pruebas ji-cuadradas puras. Si, no obstante, $\chi^2 = 15$, entonces el valor P con 3 grados de libertad es aproximadamente .002 y el valor P con 5 grados de libertad es aproximadamente .01. Debido a que .05 es el menor de estos valores P puros, se permite entonces rechazar H_0. Sólo si .05 se encuentra entre los dos valores P puros de las pruebas ji-cuadradas no se podrá llegar a ninguna conclusión.

EJEMPLO 14.9 (Continuación del ejemplo 14.8)

Con el uso de $\hat{\mu} = 2.10$ las cantidades de celda esperadas estimadas se calculan a partir de $n\pi_i(\hat{\mu})$, donde $n = 48$. Por ejemplo,

$$n\pi_1(\hat{\mu}) = 48 \cdot \frac{e^{-2.1}(2.1)^0}{0!} = (48)(e^{-2.1}) = 5.88$$

Del mismo modo, $n\pi_2(\hat{\mu}) = 12.34$, $n\pi_3(\hat{\mu}) = 12.96$, $n\pi_4(\hat{\mu}) = 9.07$ y $n\pi_5(\hat{\mu}) = = 48 - 5.88 - \cdots - 9.07 = 7.75$. Así,

$$\chi^2 = \frac{(9 - 5.88)^2}{5.88} + \cdots + \frac{(6 - 7.75)^2}{7.75} = 6.31$$

Los grados de libertad correspondientes son $5 - 1 = 4$ y $5 - 2 = 3$. Entonces la tabla A.11 muestra que el valor P para la prueba con 3 grados de libertad es .0955 y que para la prueba con 4 grados de libertad supera los .10. Por tanto en el nivel de significancia .05, H_0 no puede ser rechazada porque P supera .0955 y, por tanto, sin duda excede .05. En este nivel, es factible que la distribución real sea de Poisson. Sin embargo, si el nivel de significancia seleccionado fuera, en cambio, .10 estaríamos en la situación no concluyente porque el valor P podría ser (ligeramente) más pequeño que .10 o más grande que .10. ■

A veces hasta las estimaciones de máxima probabilidad basadas en la muestra completa son muy difíciles de calcular. Este es el caso, por ejemplo, para la distribución binomial negativa (generalizada) de dos parámetros. Con frecuencia, en tales situaciones, se usan las estimaciones del método de momentos, aunque no se sabe hasta qué punto el uso de los estimadores de momentos afecta la distribución nula de χ^2.

Bondad de ajuste para distribuciones continuas

La prueba ji-cuadrada también se puede usar para probar si la muestra proviene de una familia específica de distribuciones continuas, como es el caso de la familia exponencial o la familia normal. La elección de celdas (intervalos de clase) es todavía más arbitraria en el caso continuo que en el discreto. Para asegurar que la prueba ji-cuadrada es válida, las celdas deben escogerse independientemente de las observaciones muestrales. Una vez escogidas las celdas, casi siempre es difícil estimar parámetros no especificados (por ejemplo μ y σ en el caso normal) a partir de las cantidades de celda observadas, de modo que en

su lugar se calculan estimadores de máxima probabilidad basados en la muestra completa. El procedimiento de prueba de nuevo está dado por (14.7) y (14.8).

EJEMPLO 14.10 El artículo **"Class Start Times, Sleep, and Academic Performance in College: A Path Analysis" (*Chronobiology International*, 2012: 318–335)** informa sobre un estudio en el que se encuestó a estudiantes acerca de diversos aspectos de la conducta del sueño durante un determinado periodo de dos semanas. A continuación se presentan los datos acerca del tiempo promedio por día (h) para 100 de los estudiantes:

5.75	5.93	5.96	6.00	6.19	6.36	6.36	6.43	6.50	6.51
6.51	6.57	6.69	6.78	6.93	7.04	7.05	7.05	7.11	7.18
7.21	7.25	7.26	7.30	7.32	7.39	7.40	7.43	7.43	7.50
7.50	7.52	7.53	7.54	7.57	7.60	7.61	7.63	7.64	7.64
7.64	7.67	7.71	7.73	7.75	7.79	7.81	7.83	7.83	7.84
7.86	7.86	7.87	7.88	7.89	7.93	7.96	7.98	7.99	8.00
8.00	8.04	8.07	8.11	8.17	8.18	8.18	8.20	8.21	8.21
8.29	8.29	8.43	8.49	8.49	8.52	8.54	8.59	8.61	8.68
8.71	8.71	8.75	8.79	8.81	8.82	8.88	8.89	8.93	9.00
9.05	9.15	9.19	9.25	9.32	9.80	9.85	9.87	9.96	10.62

¿Será razonable suponer que la distribución de la población del tiempo del sueño promedio es al menos aproximadamente normal? El histograma en la figura 14.3 no es convincente. Por tanto, realicemos una prueba ji-cuadrada de la hipótesis nula de que la distribución es normal.

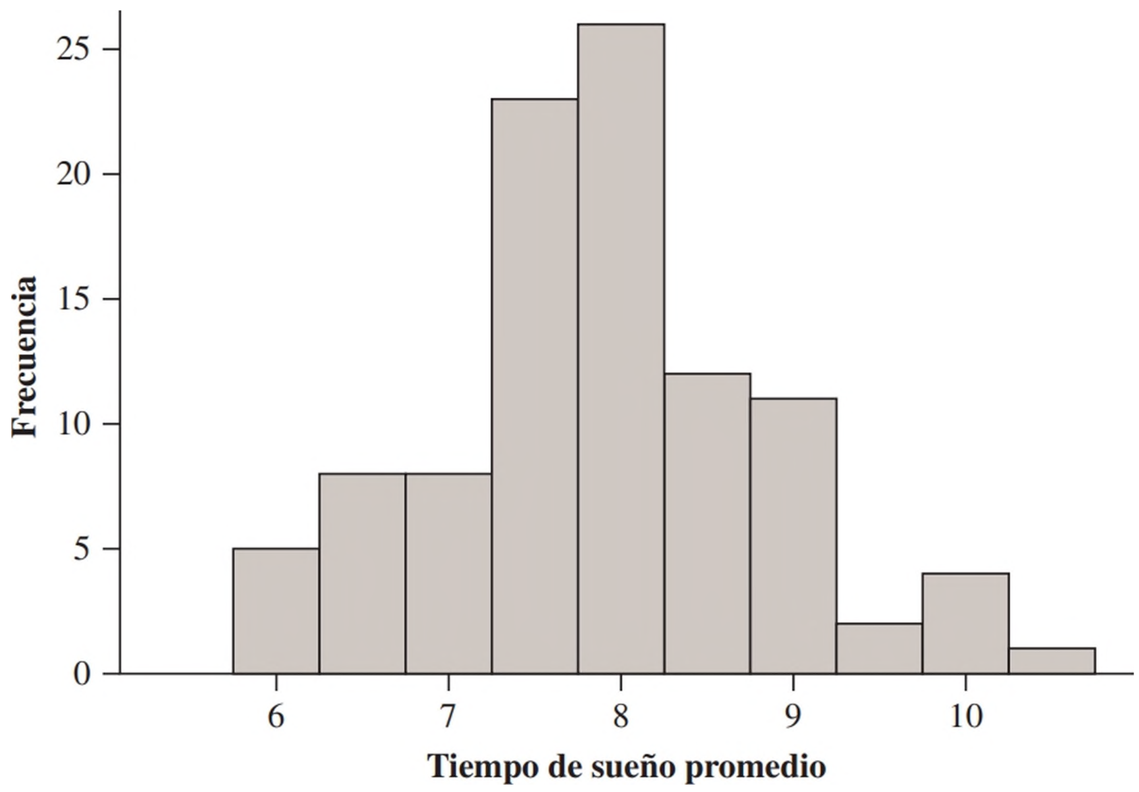


Figura 14.3 Histograma de los datos de tiempo de sueño del ejemplo 14.10

Suponga que antes del muestreo se pensaba que los valores factibles de μ y σ eran 8 y 1, respectivamente. Los ocho intervalos de clase *equiprobables* de la distribución normal estándar (cada uno con probabilidad .125) son $(-\infty, -1.15)$, $[-1.15, -.67)$, $[-.67, -.32)$, $[-.32, 0)$, $[0, .32)$, $[.32, .67)$, $[.67, .1.15)$, y $[1.15, \infty)$, con cada extremo también dando la distancia en las desviaciones estándar de la media para cualquier otra distribución normal. Para $\mu = 8$ y $\sigma = 1$ estos intervalos se transforman en $(-\infty, 6.85)$, $[6.85, 7.33)$, $[7.33, 7.68)$, $[7.68, 8.00)$, $[8.00, 8.32)$, $[8.32, 8.67)$, $[8.67, 9.15)$ y $[9.15, \infty)$.

Para obtener las probabilidades estimadas de celdas $\pi_1(\hat{\mu}, \hat{\sigma}),..., \pi_8(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$, primero necesitamos las de los estimadores de máxima probabilidad $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}$. En el capítulo 6 se demostró que el estimador de máxima probabilidad de σ es $[\Sigma(x_i - \bar{x})^2/n]^{1/2}$ (en lugar de s), así con $s = .9481$.

$$\hat{\mu} = \bar{x} = 7.876 \qquad \hat{\sigma} = \left[\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} \right]^{1/2} = \left[\frac{(n-1)s^2}{n} \right]^{1/2} = .9433$$

Cada $\pi_i(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$ es entonces la probabilidad de que una variable aleatoria normal X con media 7.876 y con desviación estándar .9433 se halla en el i-ésimo intervalo de clase. Por ejemplo,

$$\pi_2(\hat{\mu}, \hat{\sigma}) = P(6.85 < X < 7.33) = P(-1.09 < Z < -.58) = .1431$$

por lo que $\pi_2(\hat{\mu}, \hat{\sigma}) = 100(.1431) = 14.31$. Las cantidades observadas y esperadas estimadas se muestran en la tabla 14.8.

Tabla 14.8 Cantidades observadas y esperadas para el ejemplo 14.10

Celda	**(−∞, 6.85)**	**[6.85, 7.33)**	**[7.33, 7.68)**	**[7.68, 8.00)**
Observada	14	11	17	9
Esperada estimada	13.79	14.31	13.58	13.49

Celda	**[8.00, 8.32)**	**[8.32, 8.67)**	**[8.67, 9.15)**	**[9.15, ∞)**
Observada	11	8	12	8
Esperada estimada	12.91	11.87	11.20	8.85

El valor calculado de χ^2 es 5.56. Con $k = 8$ celdas y $m = 2$ parámetros estimados, las columnas 7 grados de libertad y 5 grados de libertad de la tabla A.11 muestran que ambos valores P de las pruebas ji-cuadrada puras exceden a .10. Por tanto, nuestro valor P sin duda supera cualquier α razonable, lo que indica que no se puede rechazar la hipótesis nula de normalidad de la población. La evidencia de toda la muestra con $n = 253$ estudiantes apoya un poco menos a H_0. El valor P de la prueba especial de la normalidad descrita en la subsección siguiente es .086. ■

EJEMPLO 14.11 El artículo **"Some Studies on Tuft Weight Distribution in the Opening Room" (*Textile Research J.*, 1976: 567–573)** publica los siguientes datos sobre la distribución del peso X (mg) en el peso de mechones de salida de fibras de algodón para el peso de entrada $x_0 = 70$.

Intervalo	**0–8**	**8–16**	**16–24**	**24–32**	**32–40**	**40–48**	**48–56**	**56–64**	**64–70**
Frecuencia observada	20	8	7	1	2	1	0	1	0
Frecuencia esperada	18.0	9.9	5.5	3.0	1.8	.9	.5	.3	.1

Los autores postulan una distribución exponencial truncada:

$$H_0: f(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda x_0}} \qquad 0 \le x \le x_0$$

La media de esta distribución es

$$\mu = \int_0^{x_0} x f(x)\, dx = \frac{1}{\lambda} - \frac{x_0 e^{-\lambda x_0}}{1 - e^{-\lambda x_0}}$$

El parámetro λ se estimó al sustituir μ con $\bar{x} = 13.806$ y al resolver la ecuación resultante para obtener $\hat{\lambda} = .0742$ (de modo que $\hat{\lambda}$ es una estimación del método de momentos y no un estimador de máxima probabilidad). Entonces con $\hat{\lambda}$ sustituyendo a λ en $f(x)$, las frecuencias de celda esperadas estimadas, tal como se exhibieron antes, se calculan como

$$40\pi_i(\hat{\lambda}) = 40P(a_{i-1} \le X < a_i) = 40\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\,dx = \frac{40(e^{-\hat{\lambda}a_{i-1}} - e^{-\hat{\lambda}a_i})}{1 - e^{-\hat{\lambda}x_0}}$$

donde $[a_{i-1}, a_i)$ es el i-ésimo intervalo de clase. Para obtener cantidades de celda esperadas de al menos 5, las últimas seis celdas se combinan para dar cantidades observadas de 20, 8, 7, 5 y cantidades esperadas de 18.0, 9.9, 5.5, 6.6. El valor calculado de ji-cuadrada es entonces $\chi^2 = 1.34$ con un valor P correspondiente que supera los 10. Por tanto, H_0 no se puede rechazar al nivel de significancia de .05, así que el modelo exponencial truncado proporciona un buen ajuste. ■

Una prueba especial para normalidad

Las gráficas de probabilidad se introdujeron en la sección 4.6, como un método informal para evaluar la posibilidad de que cualquier distribución poblacional dada sea como de la que se seleccionó la muestra dada. Cuanto más recta sea la gráfica de probabilidad, más posible es la distribución en la que está basada la gráfica. Se emplea una gráfica de probabilidad normal para verificar si es posible *cualquier* miembro de la familia de distribución normal. Cuando estén ordenadas de menor a mayor, denote las x_i muestrales por $x_{(1)}, x_{(2)},\ldots, x_{(n)}$. Por tanto, la gráfica sugerida para verificar normalidad fue una gráfica de los puntos $(x_{(i)}, y_i)$, donde $y_i = \Phi^{-1}((i - .5)/n)$.

Una medida cuantitativa de la magnitud a la que los puntos se agrupan alrededor de una recta es el coeficiente r de correlación muestral introducido en el capítulo 12. Considere calcular r para los n pares $(x_{(1)}, y_1),\ldots, (x_{(n)}, y_n)$. Aquí las y_i no son valores observados en una muestra aleatoria de una población y, de modo que las propiedades de esta r son muy diferentes de las descritas en la sección 12.5. No obstante, es cierto que cuanto más se desvíe r de 1 menor será la probabilidad de que la gráfica se asemeje a una recta (recuerde que una gráfica de probabilidad debe tener pendiente ascendente). Esto implica que la prueba es de cola inferior: el valor P es el área bajo la curva de densidad de R (la variable aleatoria cuyo valor calculado es r) cuando H_0 es verdadera a la izquierda de r. Desafortunadamente la distribución de R es muy complicada. Los desarrolladores del software Minitab han proporcionado valores críticos que capturan áreas de cola inferior de .10, .05 y .01 para diversos tamaños de la muestra, que se incluyen en nuestra tabla A.12. Estos valores críticos están basados en una definición ligeramente diferente de las y_i que las dadas antes.

Minitab también construirá una gráfica de probabilidad normal con estas y_i. Tendrá un aspecto casi idéntico al basado en las y_i previas. Cuando haya varias $x_{(i)}$ empatadas, Minitab calcula r usando el promedio de las correspondientes y_i como el segundo número de cada par.

Sea $y_i = \Phi^{-1}[(i - .375)/(n + .25)]$ y calcule el coeficiente r de correlación muestral para los n pares $(x_{(1)}, y_1),\ldots, (x_{(n)}, y_n)$. La **prueba Ryan-Joiner** de

H_0: la distribución poblacional es normal

contra

Ha: la distribución poblacional no es normal

usa la prueba estadística R (obtenida mediante la sustitución de la $x(i)$ de r por $X_{(i)}$). Si r coincide con el valor crítico de la tabla A.12 tenemos un valor P exacto (.10, .05 y .01). Por otra parte, podemos decir que cualquier valor $P > .10$, $.05 <$ valor $P < .10$, $.01 <$ valor $P < .05$, o valor $P < .01$.

EJEMPLO 14.12 La siguiente muestra de $n = 20$ observaciones sobre voltaje de ruptura dieléctrico de una pieza de resina epóxica apareció primero en el ejemplo 4.89.

y_i	−1.871	−1.404	−1.127	−.917	−.742	−.587	−.446	−.313	−.186	−.062
$x_{(i)}$	24.46	25.61	26.25	26.42	26.66	27.15	27.31	27.54	27.74	27.94

y_i	.062	.186	.313	.446	.587	.742	.917	1.127	1.404	1.871
$x_{(i)}$	27.98	28.04	28.28	28.49	28.50	28.87	29.11	29.13	29.50	30.88

Se le pidió a Minitab que realizara la prueba de Ryan-Joiner y el resultado aparece en la figura 14.4. El valor del estadístico de prueba es $r = .9881$ y la tabla A.12 del apéndice da .9600 como el valor crítico que captura el área de cola inferior .10, bajo la curva de distribución muestral r cuando $n = 20$ y la distribución básica en realidad es normal. Debido a que $.9881 > .9600$, el valor P excede a .10. Por tanto, la hipótesis nula de normalidad no puede ser rechazada incluso para un nivel de significancia de hasta .10.

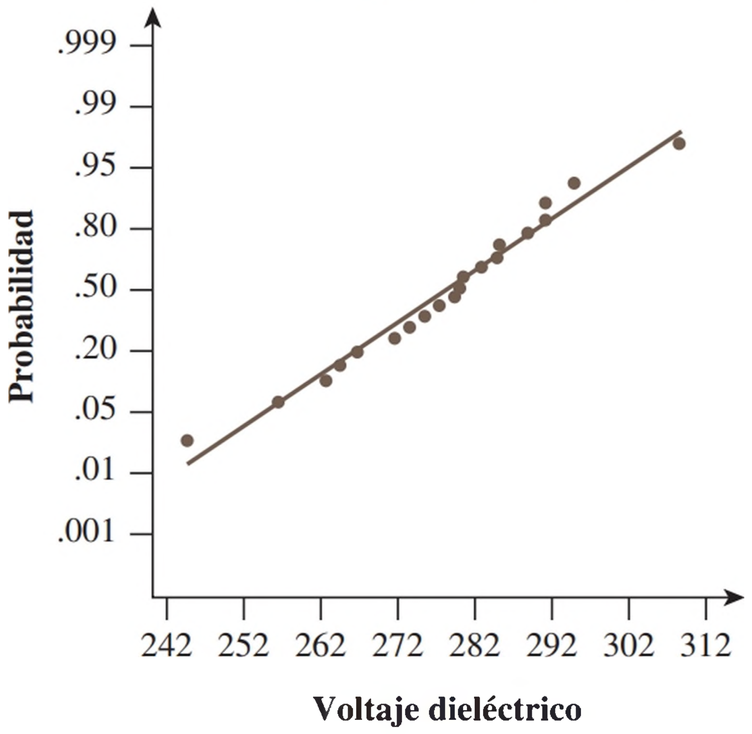


Figura 14.4 Salida de Minitab de la prueba Ryan-Joiner para los datos del ejemplo 14.12 ■

EJERCICIOS Sección 14.2 (12–23)

12. Considere una gran población de familias en las que cada una tiene exactamente tres hijos. Si los géneros de los tres hijos de cualquier familia son independientes entre sí, el número de varones de una familia seleccionada al azar tendrá una distribución binomial basada en tres intentos.

a. Suponga que una muestra aleatoria de 160 familias da los resultados siguientes. Pruebe las hipótesis relevantes procediendo como en el ejemplo 14.5.

Número de varones	0	1	2	3
Frecuencia	14	66	64	16

b. Suponga que una muestra aleatoria de familias de una población que no es de seres humanos dio como resultado frecuencias observadas de 15, 20, 12 y 3, respectivamente. ¿La prueba ji-cuadrada estaría basada en el mismo número de grados de libertad que la prueba del inciso a)? Explique.

13. Un estudio de esterilidad en moscas de la fruta (**"Hybrid Dysgenesis in *Drosophila melanogaster*: The Biology of Female and Male Sterility", *Genetics*, 1979: 161–174**) publica los datos siguientes sobre el número de ovarios desarrollados por cada mosca hembra en una muestra de 1388. Un modelo de esterilidad unilateral expresa que cada ovario se desarrolla con alguna probabilidad p, independientemente del otro ovario. Pruebe el ajuste de este modelo usando χ^2.

x = **Número de ovarios desarrollados**	0	1	2
Cantidad observada	1212	118	58

14. El artículo **"Feeding Ecology of the Red-Eyed Vireo and Associated Foliage-Gleaning Birds" (*Ecological Monographs*, 1971: 129–152)** presenta los datos siguientes sobre la variable X = número de saltos antes del primer vuelo y precedidos de un vuelo. El autor propuso y ajustó una distribución de probabilidad

geométrica [$p(x) = P(X = x) = p^{x-1} \cdot q$ para $x = 1, 2,...$, donde $q = 1 - p$] a los datos. El tamaño total muestral fue $n = 130$.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Número de veces que se observa x	48	31	20	9	6	5	4	2	1	1	2	1

a. La probabilidad es $(p^{x_1-1} \cdot q) \cdot \cdots \cdot (p^{x_n-1} \cdot q) = p^{\Sigma x_i - n} \cdot q^n$. Demuestre que los estimadores de máxima probabilidad de p están dados por $\hat{p} = (\Sigma x_i - n)/\Sigma x_i$ y calcule $\hat{p}$ para la información dada.

b. Estime las cantidades esperadas de celdas usando $\hat{p}$ del inciso a) [cantidades esperadas de celdas $= n \cdot (\hat{p})^{x-1} \cdot \hat{q}$ para $x = 1, 2,...$], y pruebe el ajuste del modelo usando una prueba χ^2 al combinar las cantidades para $x = 7, 8,...,$ y 12 en una celda ($x \geq 7$).

15. Cierto tipo de linterna eléctrica se vende con las cuatro baterías incluidas. Se obtiene una muestra aleatoria de 150 linternas y se determina el número de baterías defectuosas; el resultado son los datos siguientes:

Número defectuosas	0	1	2	3	4
Frecuencia	26	51	47	16	10

Sea X el número de baterías defectuosas de una linterna seleccionada al azar. Pruebe la hipótesis nula de que la distribución de X es Bin(4, θ). Esto es, con $p_i = P(i$ defectuosas), pruebe

$$H_0: p_i = \binom{4}{i} \theta^i (1 - \theta)^{4-i} \qquad i = 0, 1, 2, 3, 4$$

[*Sugerencia:* Para obtener los estimadores de máxima probabilidad de θ, escriba la probabilidad (la función a ser maximizada) como $\theta^u(1 - \theta)^v$, donde los exponentes u y v son funciones lineales de las cantidades de celdas. Luego tome el logaritmo natural, derive respecto a θ, e iguale a cero el resultado y despeje a $\hat{\theta}$.]

16. Sea X = el número de contactos con policías adultos de un individuo seleccionado al azar quien previamente había tenido al menos un contacto antes de los 18 años. Las siguientes frecuencias se calculan a partir de información dada en el artículo **"Examining the Prevalence of Criminal Desistance" (*Criminology*, 2003: 423–448)**; el tamaño de la muestra difiere ligeramente de lo reportado debido al redondeo.

x	0	1	2	3	4	5	6	7
f	1627	421	219	130	107	51	15	22

x	8	9	10	11	12	13	14	15
f	8	14	5	8	5	0	3	2

a. ¿Será factible que la distribución de la población del número de contactos sea de Poisson? Efectúe una prueba ji-cuadrada.

b. El artículo citado ni siquiera contempla la posibilidad de una distribución de Poisson. En su lugar se proponen varios otros modelos. Uno de ellos se basa en la idea de que el número de cada uno de los contactos tiene una distribución de Poisson cuya media μ es una variable aleatoria con una distribución gamma. Este razonamiento conduce a una distribución binomial negativa generalizada con dos parámetros que luego deben estimarse de los datos. Después de ello el artículo divulga el siguiente estimado de probabilidades correspondientes a los anteriores valores de x: .6099, .1657, .0838, .0489, .0305, .0197, .0130, .0088, .0060, .0041, .0029, .0020, .0014, .0010, .0007 y .0005. Pruebe la factibilidad de este modelo en el nivel de significancia .05 combinando todos los valores de x superiores a 11 en una sola categoría (esto se hace en el artículo citado, el cual incluyó un valor P).

17. En un experimento de genética los investigadores observaron 300 cromosomas de un tipo particular y contaron el número de intercambios de hermana cromátida en cada uno (**"On the Nature of Sister-Chromatid Exchanges in 5-Bromodeoxyuridine-Substituted Chromosomes", *Genetics*, 1979: 1251–1264**). Se teorizó un modelo de Poisson para la distribución del número de intercambios. Pruebe el ajuste de una distribución de Poisson a los datos, estimando primero μ y luego combinando las cantidades para $x = 8$ y $x = 9$ en una celda.

x = número de intercambios	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cantidades observadas	6	24	42	59	62	44	41	14	6	2

18. El artículo **"A Probabilistic Analysis of Dissolved Oxygen–Biochemical Oxygen Demand Relationship in Streams" (*J. Water Resources Control Fed.*, 1969: 73–90)** publica datos sobre la rapidez de oxigenación en los arroyos a 20°C en cierta región. La media muestral y desviación estándar se calcularon como $\bar{x} = .173$ y $s = .066$, respectivamente. Con base en la distribución de frecuencia siguiente, ¿puede concluirse que la rapidez de oxigenación es una variable normalmente distribuida? Use la prueba ji-cuadrada con $\alpha = .05$.

Rapidez (por día)	**Frecuencia**
Abajo de .100	12
.100–abajo de .150	20
.150–abajo de .200	23
.200–abajo de .250	15
.250 o más	13

19. Cada faro delantero de un auto sometido a inspección anual puede enfocarse ya sea demasiado alto (H), demasiado bajo (L) o de modo apropiado (N). La verificación de los dos faros simultáneamente (y sin distinguir entre izquierdo y derecho) da los seis posibles resultados *HH, LL, NN, HL, HN* y *LN*. Si las posibilidades (proporciones poblacionales) para la dirección del enfoque de un solo faro son $P(H) = \theta_1$, $P(L) = \theta_2$ y $P(N) = 1 - \theta_1 - \theta_2$, y si los dos faros se enfocan de modo independiente uno del otro, las probabilidades de los seis resultados para un auto seleccionado al azar son las siguientes:

$$p_1 = \theta_1^2 \qquad p_2 = \theta_2^2 \qquad p_3 = (1 - \theta_1 - \theta_2)^2$$
$$p_4 = 2\theta_1\theta_2 \qquad p_5 = 2\theta_1(1 - \theta_1 - \theta_2)$$
$$p_6 = 2\theta_2(1 - \theta_1 - \theta_2)$$

Use los siguientes datos para probar la hipótesis nula

$$H_0: p_1 = \pi_1(\theta_1, \theta_2), \ldots, p_6 = \pi_6(\theta_1, \theta_2)$$

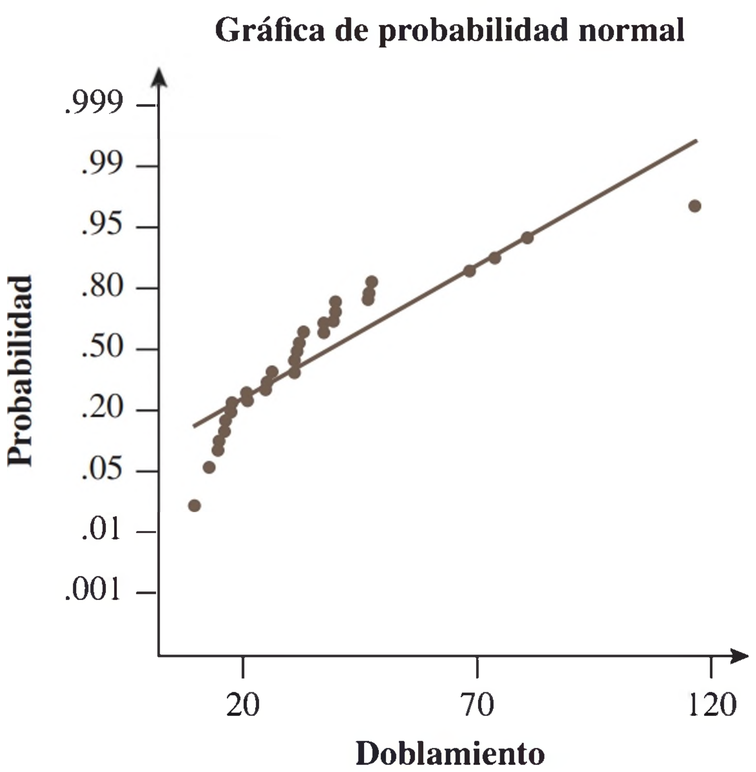
donde las $\pi_i(\theta_1, \theta_2)$ se dieron previamente.

Resultado	*HH*	*LL*	*NN*	*HL*	*HN*	*LN*
Frecuencia	49	26	14	20	53	38

[*Sugerencia:* Escriba la probabilidad como una función de θ_1 y θ_2, tome el logaritmo natural, luego calcule $\partial/\partial\theta_1$ y $\partial/\partial\theta_2$, iguálelas a cero y despeje para $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$.]

20. El artículo **"Compatibility of Outer and Fusible Interlining Fabrics in Tailored Garments" (*Textile Res. J.*, 1997: 137–142)** dio las siguientes observaciones sobre rigidez al doblamiento ($\mu N \cdot m$) para especímenes de telas de mediana calidad, de las cuales se obtuvo la siguiente salida Minitab:

24.6	12.7	14.4	30.6	16.1	9.5	31.5	17.2
46.9	68.3	30.8	116.7	39.5	73.8	80.6	20.3
25.8	30.9	39.2	36.8	46.6	15.6	32.3	



Promedio:	37.4217	Prueba W para normalidad	
DE:	25.8101	R:	0.9116
Núm. de datos:	23	Valor p (aprox.):	< 0.0100

¿Usaría usted un intervalo de confianza *t* de una muestra para estimar un promedio verdadero de rigidez al doblamiento? Explique su razonamiento.

21. El artículo del que se obtuvo la información del ejercicio 20 también dio los siguientes datos sobre la proporción de masa compuesta/masa de tela exterior para especímenes de tela de alta calidad.

1.15	1.40	1.34	1.29	1.36	1.26	1.22	1.40
1.29	1.41	1.32	1.34	1.26	1.36	1.36	1.30
1.28	1.45	1.29	1.28	1.38	1.55	1.46	1.32

Minitab dio $r = .9852$ como el valor del estadístico de prueba Ryan-Joiner e indicó que el valor *P* es $> .10$. ¿Utilizaría usted la prueba *t* de una muestra para probar las hipótesis acerca del valor del verdadero promedio de la relación? ¿Por qué sí o por qué no?

22. El artículo **"A Method for the Estimation of Alcohol in Fortified Wines Using Hydrometer Baumé and Refractometer Brix" (*Amer. J. of Enol. and Vitic.*, 2006: 486–490)** dio las mediciones duplicadas sobre el contenido de alcohol destilado (%) para una muestra de 35 vinos de Oporto. Estos son los promedios de las medidas por duplicado:

15.30	16.20	16.35	17.15	17.48	17.73	17.75
17.85	18.00	18.68	18.82	18.85	19.03	19.07
19.08	19.17	19.20	19.20	19.33	19.37	19.45
19.48	19.50	19.58	19.60	19.62	19.90	19.97
20.00	20.05	21.22	22.25	22.75	23.25	23.78

Use la prueba de Ryan-Joiner para decidir un nivel de significancia de .05, si una distribución normal proporciona un modelo factible de contenido de alcohol.

23. El artículo **"Nonbloated Burned Clay Aggregate Concrete" (*J. of Materials*, 1972: 555–563)** publica los siguientes datos sobre la resistencia flexional durante 7 días de muestras de concreto con agregado de arcilla quemada sin curar (en libras por pulgada cuadrada):

257	327	317	300	340	340	343	374	377	386
383	393	407	407	434	427	440	407	450	440
456	460	456	476	480	490	497	526	546	700

Pruebe al nivel .10 para determinar si la resistencia flexional es una variable distribuida normalmente.

14.3 Tablas de contingencia mutuas (o bidireccionales)

En los escenarios de las secciones 14.1 y 14.2 las frecuencias observadas fueron mostradas en un solo renglón dentro de una tabla rectangular. Ahora estudiaremos problemas en los que los datos también están formados por cantidades o frecuencias, pero la tabla de información ahora tendrá *I* filas ($I \geq 2$) y *J* columnas, por tanto, *IJ* celdas. Por lo general se presentan dos situaciones en las que se muestran los datos:

1. Hay *I* poblaciones de interés, cada una correspondiente a una fila diferente de la tabla, y cada población está dividida en las mismas *J* categorías. Se toma una muestra de la *i*-ésima población ($i = 1, \ldots, I$) y las cantidades se introducen en las celdas de la *i*-ésima fila de la tabla. Por ejemplo, los clientes de cada una de las $I = 3$ cadenas de tiendas

departamentales podrían disponer de las mismas $J = 5$ categorías de pago: contado, cheque, tarjeta de crédito de la tienda, Visa y MasterCard.

2. Hay una sola población de interés, con cada individuo de la población clasificado respecto a dos factores diferentes. Hay I categorías asociadas con el primer factor y J categorías asociadas con el segundo factor. Se toma una sola muestra y el número de individuos pertenecientes a la categoría i del factor 1, y la categoría j del factor 2 se introduce en la celda de la fila i, columna j ($i = 1,..., I$; $j = 1,..., J$). Así como en el ejemplo, los clientes que hagan una compra pueden clasificarse de acuerdo con el departamento en el que hicieron la compra, con $I = 6$ departamentos y, de acuerdo con la forma de pago, con $J = 5$ tal como en 1) líneas arriba.

Denote con n_{ij} el número de individuos de las muestras que caen en la (i, j)-ésima celda (fila i, columna j) de la tabla; es decir, la (i, j)-ésima cantidad de celda. La tabla que presenta las n_{ij} se denomina **tabla de contingencia mutua**; en la tabla 14.9 se muestra un prototipo.

Tabla 14.9 Una tabla de contingencia mutua

	1	**2**	**. . .**	***j***	**. . .**	***J***
1	n_{11}	n_{12}	. . .	n_{1j}	. . .	n_{1J}
2	n_{21}					⋮
⋮	⋮					
i	n_{i1}	. . .		n_{ij}	. . .	
⋮	⋮					
I	n_{I1}	. . .				n_{IJ}

En situaciones del tipo 1 se desea investigar si las proporciones de las diferentes categorías son iguales para todas las poblaciones. La hipótesis nula expresa que las poblaciones son *homogéneas* respecto a estas categorías. En situaciones del tipo 2 se investiga si las categorías de los dos factores se presentan independientemente una de otra en la población.

Prueba de homogeneidad

Se supone que cada uno de los individuos de las poblaciones I pertenece exactamente a una de las J categorías. Una muestra de n_i individuos se toma de la i-ésima población; sea $n = \Sigma n_i$ y

$$n_{ij} = \text{número de individuos de la } i\text{-ésima muestra que caen en la categoría } j$$

$$n_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{I} n_{ij} = \begin{array}{l}\text{número total de individuos entre la muestra } n \\ \text{que están en la categoría } j\end{array}$$

Las n_{ij} se registran en una tabla de contingencia mutua con I filas y J columnas. La suma de las n_{ij} de la i-ésima fila es n_i, mientras que la suma de entradas de la j-ésima columna es $n_{\cdot j}$.

Sea

$$P_{ij} = \text{proporción de individuos de la población } i \text{ que están en la categoría } j$$

Así, para la población 1 las proporciones J son $p_{11}, p_{12},..., p_{1J}$ (que suman 1) y de manera similar para otras poblaciones. La **hipótesis nula de homogeneidad** expresa que la proporción de individuos de la categoría j es la misma para cada población y que esto es así para toda categoría, es decir, para toda j, $p_{1j} = p_{2j} = \cdots = p_{Ij}$.

Cuando H_0 es verdadera se puede usar $p_1, p_2,..., p_J$ para denotar las proporciones poblacionales de las J categorías diferentes; estas proporciones son comunes para todas las poblaciones I. El número esperado de individuos en la i-ésima muestra que están en la j-ésima categoría cuando H_0 es verdadera es entonces $E(N_{ij}) = n_i \cdot p_j$. Para estimar $E(N_{ij})$, primero se debe estimar p_j, la proporción de la categoría j. Entre la muestra total de n individuos, $N_{\cdot j}$ está en la categoría j, de modo que se usa $\hat{p}_j = N_{\cdot j}/n$ como el estimador (se puede demostrar que éste es el estimador de máxima probabilidad de p_j). La sustitución de la estimación $\hat{p}_j$ para p_j en $n_j p_j$ da una fórmula sencilla para cantidades esperadas estimadas bajo H_0:

$$\begin{aligned}\hat{e}_{ij} &= \text{cantidad esperada estimada en celda } (i, j) = n_i \cdot \frac{n_{\cdot j}}{n} \\ &= \frac{(\text{total de } i\text{-ésima fila})(\text{total de } j\text{-ésima columna})}{n}\end{aligned} \tag{14.9}$$

El estadístico de prueba tiene la misma forma que en las secciones 14.1 y 14.2. El número de grados de libertad proviene de la regla empírica general. En cada fila de la tabla 14.9 hay $J - 1$ cantidades de celdas determinadas libremente (cada tamaño muestral n_i es fijo), de modo que hay un total de $I(J - 1)$ celdas determinadas libremente. Los parámetros $p_1,..., p_J$ se estiman, pero debido a que $\Sigma p_j = 1$, sólo $J - 1$ de estos son independientes. Por tanto, $\text{gl} = I(J - 1) - (J - 1) = (J - 1)(I - 1)$.

Hipótesis nula: H_0: $p_{1j} = p_{2j} = \cdots = p_{Ij} \qquad j = 1, 2,\ldots, J$
Hipótesis alternativa: H_a: H_0 no es verdadera

Valor del estadístico de prueba:

$$\chi^2 = \sum_{\substack{\text{todas} \\ \text{las celdas}}} \frac{(\text{observada} - \text{estimado esperado})^2}{\text{estimado esperado}} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} \frac{(n_{ij} - \hat{e}_{ij})^2}{\hat{e}_{ij}}$$

Cuando H_0 es verdadera y $\hat{e}_{ij} \geq 5$ para todas las i, j, la estadística de prueba tiene aproximadamente una distribución ji-cuadrada con $(I - 1)(J - 1)$ grados de libertad. La prueba es otra vez de cola superior, por lo que el valor P es el área bajo la curva $\chi^2_{(I-1)(J-1)}$ a la derecha de χ^2 calculada. La tabla A.11 puede utilizarse para obtener información del valor P tal como se describe en la sección 14.1.

EJEMPLO 14.13 Una compañía empaca un producto particular en latas de tres tamaños diferentes, cada una con una línea de producción distinta. La mayor parte de las latas se apegan a las especificaciones, pero un ingeniero de control de calidad ha detectado las siguientes razones por las que no está conforme:

1. Defecto en la lata
2. Grieta en la lata
3. Ubicación incorrecta del arillo
4. Falta el arillo
5. Otras

Se selecciona una muestra de unidades fuera de especificación de cada una de las tres líneas, y cada unidad se clasifica según la razón por la que está fuera de la especificación, lo que da por resultado la siguiente información de tabla de contingencia:

		Razón para estar fuera de especificación					
		Defecto	**Grieta**	**Ubicación**	**Faltantes**	**Otras muestras**	**Tamaño de la muestra**
Línea de producción	**1**	31	68	17	21	13	150
	2	19	47	30	19	10	125
	3	33	26	16	14	11	100
	Total	83	141	63	54	34	375

¿Sugiere esta información que las proporciones que caen en las diversas categorías fuera de especificación no son iguales para las tres líneas? Los parámetros de interés son las diversas proporciones, y las hipótesis relevantes son

H_0: las líneas de producción son homogéneas respecto a las cinco categorías fuera de especificación; es decir, $p_{1j} = p_{2j} = p_{3j}$ para $j = 1,..., 5$

H_a: las líneas de producción no son homogéneas respecto a las categorías

Ahora deben calcularse las frecuencias esperadas estimadas (suponiendo homogeneidad). Considere la primera categoría fuera de especificación para la primera línea de producción. Cuando las líneas son homogéneas,

$$\text{número esperado estimado entre las 150 unidades seleccionadas que se echaron a perder} = \frac{(\text{total de primera fila})(\text{total de primera columna})}{\text{total de tamaños de muestra}} = \frac{(150)(83)}{375} = 33.20$$

La contribución de la celda de la esquina superior izquierda a χ^2 es, por tanto,

$$= \frac{(\text{observada} - \text{estimado esperado})^2}{\text{estimado esperado}} = \frac{(31 - 33.20)^2}{33.20} = .146$$

Las otras contribuciones se calculan de manera semejante. La figura 14.5 muestra un resultado de Minitab para la prueba ji-cuadrada. La cantidad observada es el número de la parte superior de cada celda, y directamente debajo de ella está la cantidad esperada estimada. La contribución de cada celda a χ^2 aparece debajo de las cantidades, y el valor del estadístico de

```
Expected counts are printed below observed counts
Chi-Square contributions are printed below expected counts

                                                    Otras
       Defecto   Grieta  Ubicación Faltantes   muestras   Total
1           31       68         17        21         13     150
         33.20    56.40      25.20     21.60      13.60
         0.146    2.386      2.668     0.017      0.026

2           19       47         30        19         10     125
         27.67    47.00      21.00     18.00      11.33
         2.715    0.000      3.857     0.056      0.157

3           33       26         16        14         11     100
         22.13    37.60      16.80     14.40       9.07
         5.335    3.579      0.038     0.011      0.412

Total       83      141         63        54         34     375

Chi-Sq = 21.403, DF = 8, P-Value = 0.006
```

Figura 14.5 Resultados de Minitab para la prueba ji-cuadrada del ejemplo 14.13

prueba es $\chi^2 = 21.403$. Todas las cantidades esperadas estimadas son al menos 5, de modo que no es necesario combinar categorías. La prueba está basada en $(3 - 1)(5 - 1) = 8$ grados de libertad. La tabla A.11 del apéndice muestra que el área bajo la curva ji-cuadrada de 8 grados de libertad a la derecha de 20.09 es .010 y el área a la derecha de 21.95 es .005. Por tanto, podemos decir que .005 $<$ valor $P <$ .01; Minitab da un valor $P = .006$. Utilizando un nivel de significancia de .01 puede rechazarse la hipótesis nula de homogeneidad en favor de la alternativa que dice que la distribución de la razón para la no conformidad de alguna manera es diferente para las tres líneas de producción.

En este punto es conveniente buscar una explicación de por qué es inverosímil la hipótesis de homogeneidad. La figura 14.6 muestra una gráfica de barras comparativa de datos apilados. Las tres líneas son relativamente homogéneas respecto a las categorías Faltantes y Otras pero no respecto a las categorías de Ubicación, Grieta y Defecto. La tasa de incidencia de la línea 1 de inconformidades de grieta es mucho mayor que para las otras dos líneas, mientras que las inconformidades de ubicación parecen ser más un problema para la línea 2 que para las otras dos líneas, y las inconformidades de defecto ocurren con mucho más frecuencia para la línea 3 que para las otras dos líneas.

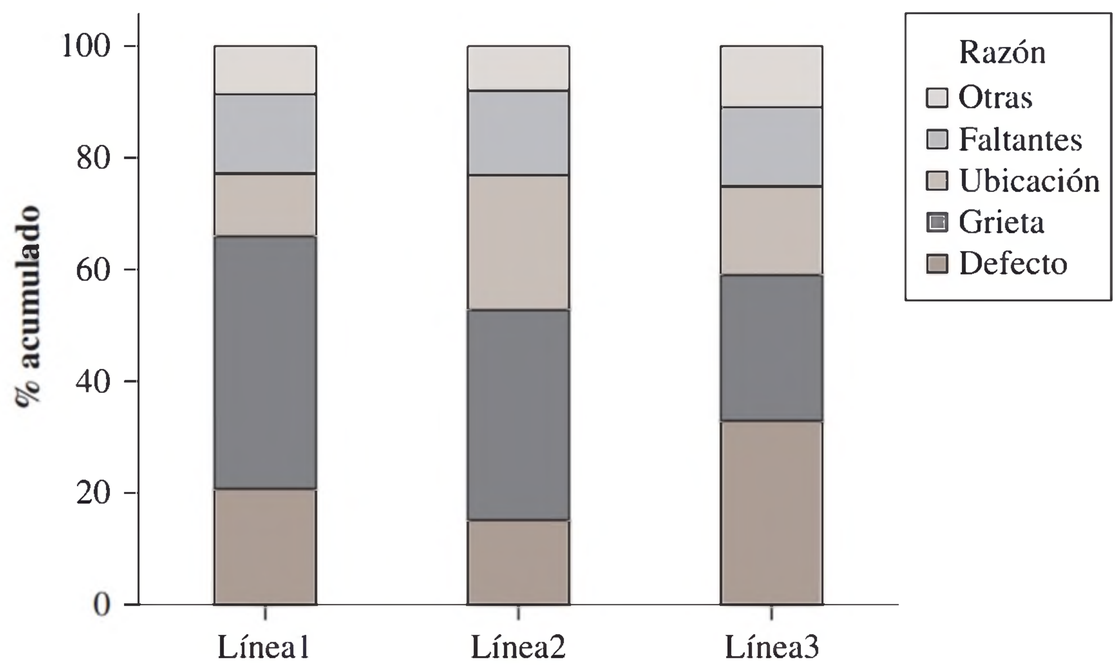


Figura 14.6 Gráfica de barras comparativa de datos apilados del ejemplo 14.13 ■

Prueba de independencia (alta de asociación)

Ahora el tema se centra en la relación entre dos factores diferentes de una población individual. Cada individuo de la población pertenece exactamente a una de las I categorías, asociada con el primer factor, y exactamente a una de las J categorías asociada con el segundo factor. Por ejemplo, la población de interés podría estar formada por todos los individuos que por lo regular ven por televisión las noticias nacionales, donde el primer factor es una cadena preferida (ABC, CBS, NBC o PBS, de modo que $I = 4$) y el segundo factor, la tendencia política (liberal, moderado o conservador, que da $J = 3$).

Para una muestra de n individuos tomada de la población denote con n_{ij} el número entre los n que se encuentran en la categoría i del primer factor y la categoría j del segundo factor. Las n_{ij} se pueden exhibir en una tabla de contingencia mutua con I filas y J columnas. En el caso de homogeneidad para I poblaciones los totales de fila se fijaron por anticipado, y sólo los totales de la columna J fueron aleatorios. Ahora sólo el tamaño muestral total es fijo y las $n_{i\cdot}$ y las $n_{\cdot j}$ son valores observados de variables aleatorias. Para expresar las hipótesis de interés, sea

P_{ij} = la proporción de individuos de la población que pertenece a la categoría i del factor 1 y a la categoría j del factor 2

= P(un individuo seleccionado al azar cae en la categoría i del factor 1 y en la categoría j del factor 2)

Por tanto,

$$p_{i\cdot} = \sum_j p_{ij} = P(\text{un individuo seleccionado al azar cae en la categoría } i \text{ del factor 1})$$

$$p_{\cdot j} = \sum_i p_{ij} = P(\text{un individuo seleccionado al azar cae en la categoría } j \text{ del factor 2})$$

Recuerde que dos eventos, A y B son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. *La hipótesis nula aquí dice que la categoría de un individuo respecto al factor 1 es independiente de la categoría respecto al factor 2*. En símbolos, esto se convierte en $P_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}$ para todo par (i, j).

La cantidad esperada en la celda (i, j) es $n \cdot p_{ij}$, de modo que cuando la hipótesis nula es verdadera, $E(N_{ij}) = n \cdot p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}$. Para obtener un estadístico de ji-cuadrada se deben estimar, por tanto, las $p_{i\cdot}(i = 1,..., I)$ y las $p_{\cdot j}(j = 1,..., J)$. Los estimadores (de máxima probabilidad) son

$$\hat{p}_{i\cdot} = \frac{n_{i\cdot}}{n} = \text{proporción muestral para la categoría } i \text{ del factor 1}$$

y

$$\hat{p}_{\cdot j} = \frac{n_{\cdot j}}{n} = \text{proporción muestral para la categoría } j \text{ del factor 2}$$

Esto da cantidades estimadas de celdas esperadas idénticas a las del caso de homogeneidad.

$$\hat{e}_{ij} = n \cdot \hat{p}_{i\cdot} \cdot \hat{p}_{\cdot j} = n \cdot \frac{n_{i\cdot}}{n} \cdot \frac{n_{\cdot j}}{n} = \frac{n_{i\cdot} \cdot n_{\cdot j}}{n}$$
$$= \frac{(\text{total de la } i\text{-ésima fila})(\text{total de la } j\text{-ésima columna})}{n}$$

El estadístico de prueba también es idéntico al empleado en pruebas de homogeneidad, como es el número de grados de libertad. Esto es porque el número de cantidades de celda determinadas libremente es $IJ - 1$, aunque sólo el n total se fija por anticipado. Hay I de $p_{i\cdot}$ estimadas, pero sólo $I - 1$ son estimadas de manera independiente porque $\Sigma p_{i\cdot} = 1$; y, de forma similar $J - 1 p_{\cdot j}$ son estimadas de manera independiente, de modo que los parámetros $I + J - 2$ se estiman independientemente. Ahora la regla empírica da grados de libertad $= IJ - 1 - (I + J - 2) = IJ - I - J + 1 = (I - 1) \cdot (J - 1)$.

Hipótesis nula: H_0: $p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}$ $\quad i = 1,\ldots, I; j = 1,\ldots, J$
Hipótesis alternativa: H_a: H_0 no es verdadera

Valor de estadístico de prueba:

$$\chi^2 = \sum_{\substack{\text{todas} \\ \text{las celdas}}} \frac{(\text{observada} - \text{estimado esperado})^2}{\text{estimado esperado}} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \frac{(n_{ij} - \hat{e}_{ij})^2}{\hat{e}_{ij}}$$

Cuando H_0 es verdadera y $\hat{e}_{ij} \geq 5$ para todas las i, j, el estadístico de prueba tiene aproximadamente una distribución ji-cuadrada con $(I - 1)(J - 1)$ grados de libertad. La prueba es otra vez de cola superior, por lo que el valor P es el área bajo la curva $\chi^2_{(I-1)(J-1)}$ a la derecha de χ^2 calculada. La tabla A.11 puede utilizarse para obtener información del valor P, tal como se describe en la sección 14.1.

EJEMPLO 14.14 La tabla adjunta de dos vías de Minitab (tabla 14.10) da una clasificación cruzada en la que el factor de la fila es el nivel paterno de educación (terminó la universidad, universidad parcial, secundaria, secundaria parcial) y el factor de la columna representa el cuartil de la ganancia de peso del neonato (es decir, del recién nacido) (Q1 = 25% más bajo, Q2 = siguiente 25% más bajo, Q3, Q4); los datos aparecen en el artículo **"Impact of Neonatal Growth on IQ and Behavior at Early School Age" (*Pediatrics*, julio de 2013, e53–60)**. ¿Le parece que el nivel educativo es independiente de la ganancia de peso neonatal en la población muestreada?

Tabla 14.10 Cantidades esperadas observadas y estimadas del ejemplo 14.14

```
Expected counts are printed below observed counts
Chi-Square contributions are printed below expected counts

              Q1          Q2          Q3          Q4     Total
E1           422         433         429         414      1698
          411.63      444.79      422.64      418.93
           0.261       0.313       0.096       0.058

E2          1493        1655        1556        1605      6309
         1529.44     1652.65     1570.35     1556.56
           0.868       0.003       0.131       1.508

E3          1239        1276        1243        1179      4937
         1196.84     1293.25     1228.85     1218.06
           1.485       0.230       0.163       1.252

E4            61         110          73          74       318
           77.09       83.30       79.15       78.46
           3.358       8.558       0.478       0.253

Total       3215        3474        3301        3272     13262
```

La contribución a χ^2 de la celda en la esquina superior izquierda es $(422 - 411.63)^2/411.63 = .261$. Las otras 15 contribuciones se calculan de la misma manera. Entonces $\chi^2 = .261 + \cdots + .253 = 19.016$. Cuando H_0 es cierto, la estadística de prueba tiene aproximadamente una distribución ji-cuadrada con $(4 - 1)(4 - 1) = 9$ grados de libertad. El valor esperado de una variable aleatoria ji-cuadrada es sólo su número de grados de libertad, así $E(\chi^2) = 9$ bajo el supuesto de independencia. Claramente el valor de la estadística de prueba excede lo que se esperaría si los dos factores fueran independientes, pero ¿será suficiente para sugerir la inverosimilitud de esta hipótesis nula? La tabla A.11 muestra que .025 es el área a la derecha de 19.02 bajo la curva ji-cuadrada con 9 grados de libertad. Así, el valor P para la prueba es aproximadamente .025 (que es el valor calculado por Minitab; en el citado artículo es .03). En el nivel de significación .05, la hipótesis nula de independencia sería rechazada, dado que el valor de $P \approx .025 \leq .05 = \alpha$. Sin embargo, esta conclusión no estaría justificada en un nivel de significancia de .01. El valor P es tal que las personas podrían argüir qué conclusión es apropiada.

Alguien convencido de nuestro análisis para rechazar la afirmación de independencia querría mirar más de cerca los datos para buscar una explicación para esa conclusión. Quizá, por ejemplo, en un cuartil superior tienden a tener niveles educativos más altos. La figura 14.7 muestra los histogramas (gráficas de barras) de los porcentajes en las distintas categorías de nivel educativo para cada uno de los cuatro cuartiles diferentes. Los cuatro histogramas parecen ser muy similares; la impresión visual es que la distribución en los cuatro niveles educativos depende mucho del cuartil NWG. Aparentemente esto contradice la búsqueda de significancia estadística. Ahora observe que el tamaño de la muestra aquí es muy grande, y esto infla el valor del estadístico ji-cuadrada. Con los mismos porcentajes que en la figura 14.7, pero con un tamaño de muestra mucho más moderado, el valor de χ^2 sería mucho menor y el valor P mucho más grande. Nuestro resultado alcanzó significancia estadística, pero no parece tener ningún significado práctico.

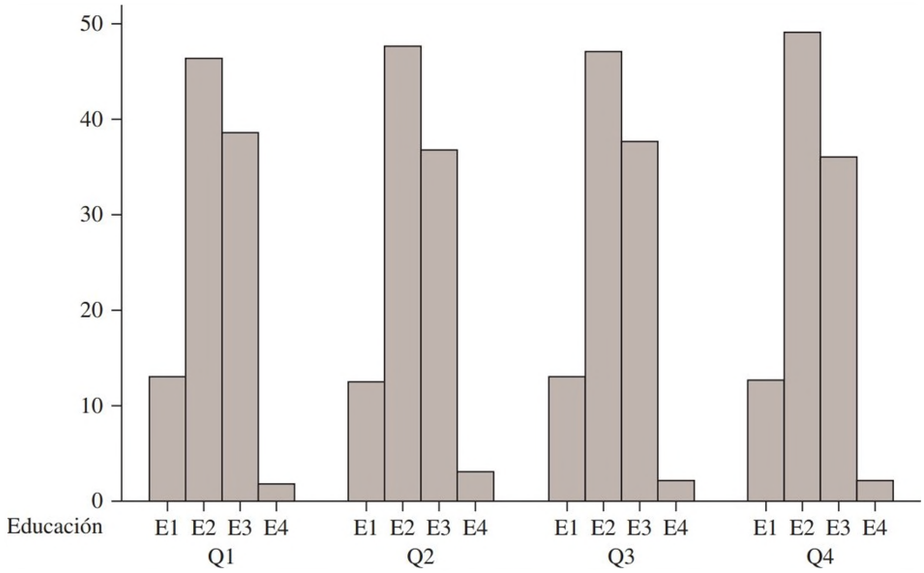


Figura 14.7 Histogramas de base de datos del ejemplo 14.14

En varias de las referencias de este capítulo se estudian los modelos y métodos para analizar datos, y en los que cada individuo es clasificado respecto a tres o más factores (tablas de contingencia multidimensionales).

EJERCICIOS Sección 14.3 (24–36)

24. La siguiente tabla bidireccional se construyó con datos del artículo **"Television Viewing and Physical Fitness in Adults"** (***Research Quarterly for Exercise and Sport*, 1990: 315–320**). El autor esperaba determinar si el tiempo que la gente pasa viendo televisión está asociado con las condiciones físicas cardiovasculares. A los sujetos se les preguntó sobre sus hábitos para ver televisión y se clasificaron como físicamente en buenas condiciones si entraban en la categoría de excelente o muy bueno en un examen de caminata. Aquí se incluye una salida de Minitab de un análisis de ji-cuadrada. Los cuatro grupos corresponden a diferentes cantidades de tiempo por día dedicados a ver televisión (0, 1–2, 3–4 o 5 o más horas). Los 168 individuos representados en la primera columna fueron los que se evaluaron en buenas condiciones físicas. Las cantidades esperadas aparecen abajo de las cantidades observadas, y Minitab exhibe la contribución a χ^2 desde cada celda. Exprese y pruebe las hipótesis apropiadas usando $\alpha = .05$.

```
              1          2      Total
1            35        147        182
          25.48     156.52
2           101        629        730
         102.20     627.80
3            28        222        250
          35.00     215.00
4             4         34         38
           5.32      32.68
Total       168       1032       1200

ChiSq = 3.557 + 0.579 +
        0.014 + 0.002 +
        1.400 + 0.228 +
        0.328 + 0.053 = 6.161
df = 3
```

25. En una investigación sobre consumo de alcohol entre estudiantes universitarios, se categorizó a cada hombre de una muestra de acuerdo con su grupo de edad y según el número de veces dentro de los 30 días anteriores bebieron en exceso (**"Alcohol Use in Students Seeking Primary Care Treatment at University Health Services", *J. of Amer. College Health*, 2012: 217–225**).

		Grupo de edad		
		18–20	**21–23**	**≥24**
	Ninguno	357	293	592
	1–2	218	285	354
# Episodios	**3–4**	184	218	185
	≥5	328	331	147

¿Habrá alguna relación entre el grado de consumo excesivo de alcohol y el grupo de edad en la población de la cual fue seleccionada la muestra? Realice una prueba de hipótesis en el nivel de significancia .01.

26. La contaminación de diversos productos alimenticios es un problema constante en todo el mundo. El artículo **"Prevalence and Quantitative Detection of Salmonella in Retail Raw Chicken in Shaanxi, China" (*J. of Food Production*, 2013)** registra los siguientes datos sobre la incidencia de salmonella en tres tipos de pollo: 1) refrigerado de supermercado, 2) congelado de supermercado y 3) fresco del mercado.

		Tamaño de la muestra	# muestras positivas de salmonella
	1.	60	27
Tipo	**2.**	60	32
	3.	120	45

¿Le parece que la tasa de incidencia de aparición de la salmonella depende del tipo de pollo? Formule y demuestre las hipótesis apropiadas utilizando un nivel de significancia de .05.

27. El artículo **"Human Lateralization from Head to Foot: Sex-Related Factors" (*Science*, 1978: 1291–1292)** informa que para una muestra de hombres diestros y una muestra de mujeres diestras, el número de individuos con la misma talla de calzado tenían el pie izquierdo más grande que el derecho (una diferencia de medio punto en el calzado o más) o el pie derecho más grande que el izquierdo.

	L > R	L = R	L < R	Tamaño muestral
Hombres	2	10	28	40
Mujeres	55	18	14	87

¿Indicará esta información que el género tiene un fuerte efecto en el desarrollo de asimetría en los pies? Exprese las hipótesis nula y alternativa apropiadas.

28. Se seleccionó una muestra aleatoria de 175 estudiantes de la Cal Poly State University y se determinó para cada uno tanto el proveedor de servicios de correo electrónico como el de telefonía celular, lo que resultó en los siguientes datos. Establezca y pruebe las hipótesis adecuadas.

		Provedor de telefonía celular		
		ATT	**Verizon**	**Otro**
	gmail	28	17	7
Proveedor de *e-mail*	**Yahoo**	31	26	10
	Otro	26	19	11

29. En el artículo **"Conflict Between Religion and Science Among Academic Scientists" (*J. for the Scientific Study of Religion*, 2009: 276–292)** se muestran los datos que acompañan el grado de espiritualidad para las muestras de científicos naturales y sociales en la investigación en las universidades, así como una muestra de no académicos con título de posgrado.

	Grado de espiritualidad			
	Alto	**Moderado**	**Ligero**	**Ninguno**
C.N.	56	162	198	211
C.S.	56	223	243	239
G.A.	109	164	74	28

a. ¿Habrá evidencia sustancial para concluir que los tres tipos de individuos no son homogéneos respecto a su grado de espiritualidad? Establezca y pruebe las hipótesis adecuadas.

b. Teniendo en cuenta sólo a los científicos naturales y a los científicos sociales, ¿habrá evidencia de la falta de homogeneidad?

30. Se consideran tres configuraciones diferentes de diseño para un componente particular. Hay cuatro posibles modos de falla para el componente. Un ingeniero obtuvo la siguiente información sobre el número de fallas en cada modo para cada una de las tres configuraciones. ¿Tendrá la configuración algún efecto sobre el tipo de falla?

		Modo de falla			
		1	**2**	**3**	**4**
	1	20	44	17	9
Configuración	**2**	4	17	7	12
	3	10	31	14	5

31. Se obtuvo al azar una muestra de fumadores y se clasificó a cada individuo respecto al género y respecto a la edad a la que comenzó a fumar. Los datos en la tabla adjunta son consistentes con los resultados que se reportan en el resumen del artículo **"Cigarette Tar Yields in Relation to Mortality in the Cancer Prevention Study II Prospective Cohort" (*British Med. J.*, 2004: 72–79).**

		Género	
		Hombre	**Mujer**
Edad	**<16**	25	10
	16–17	24	32
	18–20	28	17
	>20	19	34

a. Calcule la proporción de hombres en cada categoría de edad, y luego haga lo mismo para las mujeres. Con base en estas proporciones, ¿será que hay alguna asociación entre el género y la edad a la que un individuo empieza a fumar?

b. Lleve a cabo una prueba de hipótesis para decidir si existe una asociación entre ambos factores.

32. La eclosión se refiere al brote de un insecto adulto a partir de un huevo. Los siguientes datos sobre las tasas de eclosión cuando las ninfas fueron expuestas al calor durante varios periodos se obtuvieron a partir del artículo **"High Temperature Determines the Ups and Downs of Small Brown Planthopper Laodelphax Striatellus Population" (*Insect Science*, 2012: 385–392).**

Duración (d)	0	1	2	3	5	10	15
Tamaño muestral	120	41	47	44	46	42	10
# apariciones:	101	38	44	40	38	35	7

Realice una prueba ji-cuadrada para decidir si es factible que la tasa de eclosión no dependa del tiempo de exposición (el citado artículo incluye información que resume la prueba).

33. Demuestre que el estadístico ji-cuadrada para la prueba de independencia se puede escribir en la forma

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \left(\frac{N_{ij}^2}{\hat{E}_{ij}} \right) - n$$

¿Por qué esta fórmula es más eficiente en cuanto a programas de computación que la fórmula de definición para χ^2?

34. Suponga que cada estudiante ha sido clasificado respecto a sus simpatías políticas, consumo de mariguana y preferencia religiosa, esta última con las subcategorías protestante, católica y otras. La información podría exhibirse en tres tablas bidireccionales diferentes, una correspondiente a cada categoría del tercer factor. Con $p_{ijk} = P$(categoría de política i, categoría de consumo de mariguana j y categoría de religión k), la hipótesis nula de independencia de los tres factores expresa que $p_{ijk} = p_{i\cdot\cdot}p_{\cdot j\cdot}p_{\cdot\cdot k}$. Sea n_{ijk} la frecuencia observada en celda (i, j, k). Demuestre cómo estimar las cantidades esperadas de celda suponiendo que H_0 es verdadera ($\hat{e}_{ijk} = n\hat{p}_{ijk}$ de modo que las $\hat{p}_{ijk}$ deban determinarse). A continuación utilice la regla empírica para determinar el número de grados de libertad para el estadístico ji-cuadrada.

35. Suponga que en un estado particular formado por cuatro regiones distintas, una muestra aleatoria de n_k votantes se obtiene de la k-ésima región para $k = 1, 2, 3, 4$. Cada votante se clasifica de acuerdo a cuál candidato (1, 2 o 3) prefiere y según su filiación política (1 = demócrata, 2 = republicano, 3 = independiente). Sea p_{ijk} la proporción de votantes de la región k que pertenecen a la categoría de candidato i y a la categoría de registro j. La hipótesis nula de las regiones homogéneas es H_0: $p_{ij1} = p_{ij2} = p_{ij3} = p_{ij4}$ para toda i, j (es decir, la proporción dentro de la cual cada combinación candidato/registro es igual para las cuatro regiones). Suponiendo que H_0 es verdadera determine $\hat{p}_{ijk}$ y $\hat{e}_{ijk}$ como funciones de las n_{ijk} observadas, y use la regla empírica para obtener el número de grados de libertad para la prueba ji-cuadrada.

36. Considere la siguiente tabla 2×3 que presenta las proporciones muestrales que cayeron en las diversas combinaciones de categorías (por ejemplo, 13% de las de la muestra estuvieron en la primera categoría de ambos factores).

	1	2	3
1	.13	.19	.28
2	.07	.11	.22

a. Suponga que la muestra estuvo formada por $n = 100$ personas. Utilice la prueba ji-cuadrada para independencia con nivel de significancia .10.

b. Repita el inciso a) suponiendo que el tamaño muestral fue de $n = 1000$.

c. ¿Cuál es el tamaño muestral n más pequeño para el cual estas proporciones observadas darían por resultado el rechazo de la hipótesis de independencia?

EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS (37–49)

37. El artículo **"Birth Order and Political Success"** (***Psych. Reports*, 1971: 1239-1242**) publica que entre 31 candidatos a ocupar puestos de elección popular seleccionados al azar, provenientes de familias con cuatro hijos, 12 eran primogénitos, 11 intermedios y 8 eran los menores entre los hermanos. Utilice esta información para probar la hipótesis nula de que es igualmente probable que un candidato político, proveniente de una de estas familias, esté en cualquiera de las cuatro posiciones ordinales.

38. ¿Las fases de la Luna tendrán alguna incidencia en la tasa de natalidad? Cada uno de los 222 784 nacimientos que se produjeron durante un periodo que abarca 24 ciclos lunares completos fue clasificado de acuerdo con la fase lunar. Los siguientes datos son consistentes con las cantidades de resumen que aparecen en el artículo **"The Effect of the Lunar Cycle on Frequency of Births and Birth Complications"** (***Amer. J. of Obstetrics and Gynecology*, 2005: 1462–1464**).

Fase lunar	# días en la fase	# nacimientos
Luna nueva	24	7680
Luna nueva visible	152	48 442
Cuarto creciente	24	7579
Luna gibosa creciente	149	47 814
Luna llena	24	7711
Luna gibosa menguante	150	47 595
Cuarto menguante	24	7733
Luna menguante	152	48 230

Establezca y pruebe las hipótesis adecuadas para responder a la pregunta planteada al principio de este ejercicio.

39. Cada individuo en una muestra de pacientes ancianos fue clasificado en forma cruzada respecto a su estado cognitivo (deterioro normal o suave, deterioro moderado, debilitación severa) y respecto al estado de consumo de medicamentos (medicamentos psicotrópicos con cambio, usuario de psicotrópicos sin

cambio, no hay medicación psicotrópica). El siguiente es el resultado de Minitab de una petición para realizar un análisis ji-cuadrada.

	Cambio de medicamento	Sin cambio	No medicamento	Total
Normal	83	60	46	189
	90.06	64.11	34.83	
	0.554	0.263	3.584	
Moderado	237	151	70	458
	218.25	155.35	84.40	
	1.611	0.122	2.456	
Severo	86	78	41	205
	97.69	69.54	37.78	
	1.398	1.030	0.275	
Total	406	289	157	852

Chi-Sq = 11.294, DF = 4, P-Value = 0.023

(**"Psychotropic Drug Initiation or Increased Dosage and the Acute Risk of Falls,"** ***BMC Geriatrics*****, 2013: 13:19**).

a. Verifique la frecuencia esperada y la contribución a χ^2 en la celda de cambio normal–medicamento de la tabla de dos vías.

b. ¿Habrá alguna asociación entre el estado cognitivo y el estado de consumo de medicamento? Formule y demuestre las hipótesis apropiadas utilizando un nivel de significancia .01. [*Nota*: El artículo citado reporta un valor *P*.]

40. Los autores del artículo **"Predicting Professional Sports Game Outcomes from Intermediate Game Scores"** (***Chance*****, 1992: 18–22**) usaron una prueba ji-cuadrada para determinar si hay algún mérito en la idea de que los juegos de baloncesto no se deciden hasta el último cuarto, mientras que los juegos de béisbol se deciden a partir de la séptima entrada. También consideraron futbol y hockey. Se recolectó información de 189 juegos de baloncesto, 92 juegos de béisbol, 80 de hockey y 93 de futbol. Los juegos analizados se muestrearon al azar de todos los encuentros realizados durante la temporada de 1990 para béisbol y futbol, y durante la temporada 1990–1991 de baloncesto y hockey. Para cada juego se determinó el líder de final de juego y luego se observó si en realidad terminó ganando el partido. La información resultante se resume en la tabla siguiente.

Deporte	Gana líder de final de juego	Pierde líder de final de juego
Baloncesto	150	39
Béisbol	86	6
Hockey	65	15
Futbol	72	21

Los autores señalan que "*líder de final de juego* se define como el equipo que va adelante después del tercer cuarto en baloncesto y futbol, luego de dos tiempos en hockey y después de siete entradas en béisbol. El valor ji-cuadrada con tres grados de libertad es 10.52 ($P < .015$)".

a. Exprese las hipótesis relevantes y llegue a una conclusión usando $\alpha = .05$.

b. ¿Considera que su conclusión en el inciso a) puede atribuirse a que un solo deporte es una anomalía?

41. La siguiente tabla bidireccional de frecuencias aparece en el artículo **"Marijuana Use in College"** (***Youth and Society*****, 1979: 323–334**). Cada uno de los 445 estudiantes universitarios fue clasificado según su frecuencia de consumo de mariguana y si sus padres consumían alcohol y drogas psicoactivas. ¿La información sugiere que la adicción de los padres y la de los estudiantes son independientes en la población de la cual se extrajo la muestra?

		Nivel estándar de consumo de mariguana		
		Nunca	**Ocasional**	**Regular**
Uso de alcohol y drogas de los padres	**Ninguno**	141	54	40
	Uno	68	44	51
	Ambos	17	11	19

42. Se ha puesto mucha atención en la incidencia de las conmociones cerebrales entre los atletas. Se seleccionaron diferentes muestras de jugadores de futbol, atletas y no atletas. La tabla que se presenta a continuación es el resultado de determinar el número de conmociones cerebrales de cada individuo reportadas en un cuestionario de historia médica (**"No Evidence of Impaired Neurocognitive Performance in Collegiate Soccer Players",** ***Amer. J. of Sports Med.*****, 2002: 157–162**).

	# de conmociones			
	0	**1**	**2**	**≥ 3**
Futbol	45	25	11	10
Atletas NF	68	15	8	5
No atletas	45	5	3	0

¿Será diferente la distribución de los números de las conmociones cerebrales para los tres tipos de personas? Lleve a cabo una prueba de hipótesis.

43. En un estudio para investigar el límite al cual las personas perciben olores industriales en cierta región (**"Annoyance and Health Reactions to Odor from Refineries and Other Industries in Carson, California",** ***Environmental Research*****, 1978: 119–132**), se obtuvo de una muestra de individuos de cada una de las tres regiones cercanas a instalaciones industriales. A cada individuo se le preguntó si percibía algún olor 1) todos los días, 2) al menos una vez a la semana, 3) al menos una vez al mes, 4) menos de una vez al mes y 5) nada en absoluto; se obtuvo la información del resultado SPSS en la parte superior de la siguiente página. Exprese y pruebe las hipótesis apropiadas.

44. Numerosos compradores han expresado su descontento porque las tiendas de abarrotes han dejado de poner los precios en artículos individuales. El artículo **"The Impact of Item Price**

Removal on Grocery Shopping Behavior" (*J. of Marketing*, 1980: 73–93) publica un estudio en el que cada comprador de una muestra se clasificó por edad y por si sentía la necesidad de que se pusieran los precios. Con base en la información siguiente, ¿la necesidad de que se pongan los precios en los artículos es independiente de la edad?

	Edad				
	<30	**30–39**	**40–49**	**50–59**	**≥60**
Número en muestra	150	141	82	63	49
Número de quienes desean que se pongan precios	127	118	77	61	41

45. Denote con p_1 la proporción de éxitos en una población particular. El valor del estadístico de prueba del capítulo 8 para la prueba H_0: $p_1 = p_{10}$ fue $z = (\hat{p}_1 - p_{10})/\sqrt{p_{10}p_{20}/n}$, donde $p_{20} = 1 - p_{10}$. Demuestre que para el caso $k = 2$, el valor del estadístico de prueba ji-cuadrada de la sección 14.1 satisface $\chi^2 = z^2$. [*Sugerencia:* Primero demuestre que $(n_1 - np_{10})^2 = (n_2 - np_{20})^2$.]

46. El torneo de baloncesto de la NCAA empieza con 64 equipos que se reparten en cuatro torneos regionales, cada uno con 16 equipos. Los 16 equipos de cada región se clasifican entonces (sembrados) de 1 a 16. Durante el periodo de 12 años de 1991 a 2002 el equipo clasificado en primer lugar ganó 22 veces su torneo regional, el equipo clasificado en segundo lugar ganó 10 veces, el clasificado en tercer lugar ganó 5 veces, y los 11 torneos regionales restantes fueron ganados por equipos clasificados más abajo del tercer lugar. Denote con P_{ij} la probabilidad de que el equipo clasificado i en su región sea ganador en el juego contra el equipo clasificado j. Una vez disponibles las P_{ij} es posible calcular la probabilidad de que cualquier sembrado particular gane su torneo regional (un cálculo complicado porque el número de resultados del espacio muestral es muy grande). El artículo **"Probability Models for the NCAA Regional Basketball Tournaments" (*American Statistician*, 1991: 35–38)** propuso diversos modelos diferentes para las P_{ij}.

a. Un modelo postuló $P_{ij} = .5 - \lambda(i - j)$ con $\lambda = 1/32$ (de donde $P_{16,1} = \lambda$, $P_{16,2} = 2\lambda$, etc.). Con base en esto, P(sembrado #1 gana) = .27477, P(sembrado #2 gana) = .20834 y P(sembrado #3 gana) = .15429. ¿Dará este modelo un buen ajuste a la información?

b. Un modelo más refinado tiene probabilidades de juego $P_{ij} = .5 + .2813625\,(z_i - z_j)$, donde las z son medidas de resistencias relativas a percentiles normales estándar [los percentiles para equipos sembrados ganadores están más cerca entre sí que los equipos sembrados más abajo, y .2813625 asegura que el rango de probabilidades es igual para el modelo del inciso a)]. Las probabilidades resultantes de que los sembrados 1, 2 o 3 ganen sus torneos regionales son .45883, .18813 y .11032, respectivamente. Evalúe el ajuste de este modelo.

SPSS output for Ejercicio 43

Crosstabulation: AREA POR CATEGORIA

CATEGORIA → / AREA	Count / Exp / Row / Col / Val / Pct	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	Row Total
1.00		20	28	23	14	12	97
		12.7	24.7	18.0	16.0	25.7	33.3%
		20.6%	28.9%	23.7%	14.4%	12.4%	
		52.6%	37.8%	42.6%	29.2%	15.6%	
2.00		14	34	21	14	12	95
		12.4	24.2	17.6	15.7	25.1	32.6%
		14.7%	35.8%	22.1%	14.7%	12.6%	
		36.8%	45.9%	38.9%	29.2%	15.6%	
3.00		4	12	10	20	53	99
		12.9	25.2	18.4	16.3	26.2	34.0%
		4.0%	12.1%	10.1%	20.2%	53.5%	
		10.5%	16.2%	18.5%	41.7%	68.8%	
Column Total		38	74	54	48	77	291
		13.1%	25.4%	18.6%	16.5%	26.5%	100.0%

Chi-Square	D.F.	Significance	Min E.F.	Cells with E.F. < 5
70.64156	8	.0000	12.405	None

47. ¿Se ha preguntado alguna vez si los jugadores de futbol soccer sufren de efectos negativos cuando "cabecean" el balón? Los autores del artículo **"No Evidence of Impaired Neurocognitive Performance in Collegiate Soccer Players"** (***Amer. J. of Sports Medicine*, 2002: 157–162**) investigaron este problema desde varias perspectivas.

a. El artículo informó que 45 de los 91 jugadores de futbol soccer de su muestra sufrieron al menos una concusión, 28 de los 96 atletas no futbolistas habían sufrido al menos una concusión y sólo 8 de 53 controles de estudiantes habían sufrido al menos una concusión. Analice esta información y saque conclusiones apropiadas.

b. Para los futbolistas el coeficiente de correlación muestral de los valores de x = exposición al futbol (número total de temporadas de competencia jugadas antes de inscribirse en el estudio) y y = calificación en un examen de recordatorio de memoria inmediata, fue $r = -.220$. Interprete este resultado.

c. A continuación se muestra un resumen de información sobre las calificaciones de un examen oral controlado de asociación de palabras para atletas futbolistas y no futbolistas:

$n_1 = 26,\ \bar{x}_1 = 37.50,\ s_1 = 9.13$

$n_2 = 56,\ \bar{x}_2 = 39.63,\ s_2 = 10.19$

Analice esta información y saque conclusiones apropiadas.

d. Considerando el número de concusiones previas en jugadores no futbolistas, los valores de la media $\pm$ desviación estándar para los tres grupos fueron $.30 \pm .67$, $.49 \pm .87$ y $.19 \pm .48$. Analice esta información y saque conclusiones apropiadas.

48. ¿Será que los dígitos sucesivos de la expansión decimal de π se comportan como si fueran seleccionados de una tabla de números aleatorios (o de un generador de números aleatorios de una computadora)?

a. Sea p_0 la proporción a largo plazo de dígitos de la expansión que son iguales a 0, y defina $p_1, \ldots, p_9$ análogamente. ¿Qué hipótesis acerca de estas proporciones deben probarse, y cuál es el grado de libertad para la prueba de ji-cuadrada?

b. H_0 del inciso a) no sería rechazada para la sucesión no aleatoria 012…901…901…. Considere grupos de dos dígitos que no se traslapen y denote con p_{ij} la proporción a largo plazo de grupos para los cuales el primer dígito es i y el segundo es j. ¿Qué hipótesis acerca de estas proporciones deben probarse, y cuál es el grado de libertad para la prueba ji-cuadrada?

c. Considere grupos de 5 dígitos que no se traslapen. ¿Podría una prueba ji-cuadrada de hipótesis apropiadas acerca de las p_{ijklm} estar basada en los primeros 100 000 dígitos? Explique.

d. El artículo **"Are the Digits of π an Independent and Identically Distributed Sequence?"** (***American Statistician*, 2000: 12–16**) consideró los primeros 1, 254, 540 dígitos de π, y publicó los siguientes valores P para tamaños grupales de 1,..., 5: .572, .078, .529, .691, .298. ¿Cuál sería su conclusión?

49. La secuencia de números de Fibonacci se da en diversos contextos científicos. Los dos primeros números de la secuencia son 1, 1. Entonces, cada número sucesivo es la suma de los dos números anteriores: 1, 1, 1 + 1 = 2, 1 + 2 = 3, 2 + 3 = 5, 8, 13, 21,... . El primer dígito de un número en esta secuencia puede ser 1, 2,..., o 9. Las frecuencias de los primeros dígitos para los primeros 85 números en la secuencia son los siguientes: 25 (1), 16 (2), 11, 7, 7, 5, 4, 6, 4. ¿Será que la distribución de los primeros dígitos en la secuencia de Fibonacci está en concordancia con la distribución de la ley de Benford que se describe en el ejercicio 21 del capítulo 3? Establezca y pruebe las hipótesis pertinentes.

BIBLIOGRAFÍA

Agresti, Alan, *An Introduction to Categorical Data Analysis* (2a. ed.), Wiley, Nueva York, 2007. Un excelente examen de diversos aspectos del análisis de datos categóricos por uno de los más prominentes investigadores en este campo.

Everitt, B. S., *The Analysis of Contingency Tables* (2a. ed.), Halsted Press, Nueva York, 1992. Un estudio breve pero informativo de los métodos para analizar datos categóricos, expuesto con un mínimo de matemáticas.

Mosteller, Frederick y Richard Rourke, *Sturdy Statistics,* Addison-Wesley, Reading, MA, 1973. Contiene diversos capítulos sencillos de leer sobre los variados usos de la ji-cuadrada.

15 Procedimientos libres de distribución

INTRODUCCIÓN

Cuando la población o las poblaciones fundamentales no son normales, las pruebas t y F y los intervalos de confianza t de los capítulos 7–13 tendrán en general niveles de significación reales o niveles de confianza que difieren de los niveles nominales (los prescritos por el experimentador mediante la selección, por ejemplo, de $t_{.025}$, $F_{.01}$, etc.) α y $100(1 - \alpha)\%$, aun cuando la diferencia entre niveles reales y nominales puede no ser grande cuando la desviación desde la normalidad tampoco es demasiado grande. Debido a que los procedimientos t y F requieren la suposición de distribución de normalidad, no son procedimientos alternativos "libres de distribución" debido a que están basados en una familia paramétrica particular de distribuciones (normal), no son procedimientos "no paramétricos".

En este capítulo se describen procedimientos que son válidos [nivel real α o nivel de confianza $100(1 - \alpha)\%$, simultáneamente para muchos tipos diferentes de distribuciones fundamentales. Estos procedimientos se denominan **libres de distribución** o **no paramétricos.** Se presentan procedimientos de prueba para 1 y 2 muestras en las secciones 15.1 y 15.2, respectivamente. En la sección 15.3 se analizan intervalos de confianza libres de distribución. La sección 15.4 describe procedimientos ANOVA sin distribución. Todos estos procedimientos son competidores de los procedimientos paramétricos (t y F), descritos en capítulos anteriores, de modo que es importante comparar el funcionamiento de los dos tipos de procedimientos bajo modelos poblacionales normales y no normales. Hablando en términos generales, los procedimientos libres de distribución funcionan casi igual de bien como sus similares t y F en el "terreno" de la distribución normal y con frecuencia dan una mejora considerable bajo condiciones no normales.

15.1 La prueba Wilcoxon de rango con signo

Un químico investigador realizó un experimento químico particular un total de diez veces bajo condiciones idénticas, obteniendo los siguientes valores ordenados de temperatura de reacción:

$$-.57 \quad -.19 \quad -.05 \quad .76 \quad 1.30 \quad 2.02 \quad 2.17 \quad 2.46 \quad 2.68 \quad 3.02$$

Por supuesto que la distribución de temperatura de reacción es continua. Asuma que el investigador está dispuesto a suponer que la distribución de la temperatura de reacción es simétrica; es decir, hay un punto de simetría tal que la curva de densidad a la izquierda de ese punto es la imagen en espejo de la curva de densidad a la derecha. Este punto de simetría es la mediana $\tilde{\mu}$ de la distribución (y también es la media μ siempre que la media sea finita). La suposición de simetría puede parecer al principio bastante aventurada, pero recuerde que cualquier distribución normal es simétrica, de modo que la simetría es en realidad una suposición más débil que la normalidad.

Ahora consideremos probar que H_0: $\tilde{\mu} = 0$ contra H_a: $\tilde{\mu} > 0$ Esto equivale a decir que una temperatura de cualquier magnitud particular, por ejemplo 1.50, no es más probable que sea positiva (+1.50) de lo que puede ser negativa (−1.50). Una mirada a los datos sugiere que esta hipótesis no es muy sostenible; por ejemplo, la mediana muestral es 1.66, que es mucho mayor que la magnitud de cualquiera de las tres observaciones negativas.

La figura 15.1 presenta dos diferentes funciones de densidad de probabilidad simétricas, una para la cual H_0 es verdadera y una para la cual H_a es verdadera. Cuando H_0 es verdadera se espera que las magnitudes de las observaciones negativas de la muestra sean comparables a las magnitudes de las observaciones positivas. No obstante, si H_0 es "excesivamente" no verdadera como en la figura 15.1(b), entonces las observaciones de magnitud absoluta grande tenderán a ser positivas en lugar de negativas.

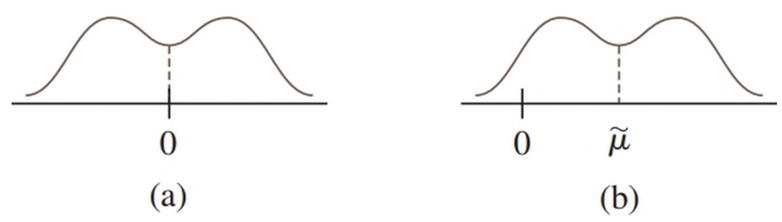


Figura 15.1 Distribuciones para las cuales (a) $\tilde{\mu} = 0$; (b) $\tilde{\mu} \gg 0$

Para la muestra de diez temperaturas de reacción por ahora no hay que hacer caso de los signos de observaciones y ordene las magnitudes absolutas de 1 a 10, con la mínima de 1, la segunda más pequeña de 2, y así sucesivamente. A continuación aplique el signo de cada observación al rango correspondiente para obtener los **rangos con signo**. Típicamente, algunos rangos con signo serán negativos (por ejemplo −3), mientras que otros serán positivos (por ejemplo, 8). El estadístico de prueba será S_+ = la suma de los rangos con signo positivo.

Magnitud absoluta	.05	.19	.57	.76	1.30	2.02	2.17	2.46	2.68	3.02
Rango	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Rango con signo	−1	−2	−3	4	5	6	7	8	9	10

$$s_+ = 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 49$$

Cuando la mediana de la distribución es mucho mayor a 0, casi todas las observaciones con magnitudes absolutas grandes deberían ser positivas, resultando en rangos de signo positivo y un valor grande de s_+. Por otra parte, si la mediana es 0, las magnitudes de las observaciones con signo positivo deberían estar mezcladas con las observaciones de signo negativo, en cuyo caso s_+ no será muy grande. Así, por un valor de s_+ más grande proporciona más evidencia para rechazar la H_0 que un valor pequeño. Esto implica que la prueba es de cola superior: el valor P será $P_0(S_+ \geq s_+)$ donde P_0 representa la probabilidad calculada asumiendo que H_0 no es verdadera. Por tanto, se debe determinar la distribución de S_+ cuando la hipótesis nula sea verdadera; es decir, de *distribución nula*.

Considere $n = 5$, en cuyo caso hay $2^5 = 32$ formas de aplicar signos a los cinco rangos 1, 2, 3, 4 y 5 (cada rango podría tener un signo $-$ o un signo $+$). El punto clave es que cuando H_0 es verdadera, *cualquier conjunto de cinco rangos con signo tiene la misma probabilidad que cualquier otro conjunto*. Esto es, es igual de probable que la observación más pequeña en magnitud absoluta sea positiva o negativa, y lo mismo ocurre para la segunda observación más pequeña en magnitud absoluta, y así sucesivamente. Por tanto, el conjunto $-1, 2, 3, -4, 5$ de rangos con signo es tan probable como el conjunto $1, 2, 3, 4, -5$ y tan probable como cualquiera de las otras 30 posibilidades.

La tabla 15.1 es una lista de 32 posibles secuencias de rango con signo cuando $n = 5$ junto con el valor s_+ para cada secuencia. Esto inmediatamente da la "distribución nula" de S_+ que se ve en la tabla 15.2. Por ejemplo, la tabla 15.1 muestra que tres de las 32 secuencias posibles tienen $s_+ = 8$, de modo que $P_0(S_+ = 8$ cuando H_0 es verdadera$) = 1/32 + 1/32 + 1/32 = 3/32$. Note que la distribución nula es simétrica alrededor de 7.5 [en general, distribuida simétricamente sobre los posibles valores $0, 1, 2, \ldots, n(n+1)/2$]. Esta

Tabla 15.1 Posibles secuencias de rango con signo para $n = 5$

Secuencia					s_+	Secuencia					s_+
−1	−2	−3	−4	−5	0	−1	−2	−3	+4	−5	4
+1	−2	−3	−4	−5	1	+1	−2	−3	+4	−5	5
−1	+2	−3	−4	−5	2	−1	+2	−3	+4	−5	6
−1	−2	+3	−4	−5	3	−1	−2	+3	+4	−5	7
+1	+2	−3	−4	−5	3	+1	+2	−3	+4	−5	7
+1	−2	+3	−4	−5	4	+1	−2	+3	+4	−5	8
−1	+2	+3	−4	−5	5	−1	+2	+3	+4	−5	9
+1	+2	+3	−4	−5	6	+1	+2	+3	+4	−5	10
−1	−2	−3	−4	+5	5	−1	−2	−3	+4	+5	9
+1	−2	−3	−4	+5	6	+1	−2	−3	+4	+5	10
−1	+2	−3	−4	+5	7	−1	+2	−3	+4	+5	11
−1	−2	+3	−4	+5	8	−1	−2	+3	+4	+5	12
+1	+2	−3	−4	+5	8	+1	+2	−3	+4	+5	12
+1	−2	+3	−4	+5	9	+1	−2	+3	+4	+5	13
−1	+2	+3	−4	+5	10	−1	+2	+3	+4	+5	14
+1	+2	+3	−4	+5	11	+1	+2	+3	+4	+5	15

Tabla 15.2 Distribución nula de S_+ cuando $n = 5$

s_+	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(s_+)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{2}{32}$	$\frac{2}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{32}$

s_+	8	9	10	11	12	13	14	15
$p(s_+)$	$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{2}{32}$	$\frac{2}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$

simetría es importante para relacionar la región de rechazo de pruebas de cola inferior y de dos colas con la prueba de cola superior.

Para $n = 10$ hay $2^{10} = 1024$ posibles secuencias de rango con signo, de modo que elaborar una lista sería objeto de un gran esfuerzo. Cada secuencia, no obstante, tendría una probabilidad $1/1024$ cuando H_0 es verdadera, de la que la distribución de S_+ cuando H_0 es verdadera, se puede obtener fácilmente.

Ahora se puede calcular el valor P para probar H_0: $\tilde{\mu} = 0$ contra H_a: $\tilde{\mu} > 0$ cuando $n = 5$. Suponga que $s_+ = 13$. Entonces

$$\begin{aligned}\text{Valor } P &= P(S_+ \geq 13 \text{ cuando } H_0 \text{ es verdadera})\\ &= P_0(S_+ = 13, 14 \text{ o } 15)\\ &= \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{3}{32}\\ &= .094\end{aligned}$$

Si $s_+ = 14$, entonces el valor $P = 2/32 = .063$. Para la muestra $x_1 = .58$, $x_2 = 2.50$, $x_3 = -.21$, $x_4 = 1.23$, $x_5 = .97$, la secuencia de rango con signo es $-1, +2, +3, +4, +5$, de tal manera que $s_+ = 14$. Por tanto, H_0 será rechazada en un nivel de significancia de .10 debido a que el valor $P = .063 \leq .10 = \alpha$. Sin embargo, en un nivel de significancia de .05 y .01 no habrá suficiente evidencia para justificar el rechazo de la hipótesis nula.

Descripción general de la prueba

Debido a que suponemos que la distribución fundamental es simétrica, $\mu = \tilde{\mu}$, de modo que las hipótesis de interés se expresarán en términos de μ más que de $\tilde{\mu}$.*

SUPOSICIÓN

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de una distribución de probabilidad continua y simétrica con media (y mediana) μ.

Cuando el valor teorizado de μ es μ_0, las diferencias $|x_1 - \mu_0|, \ldots, |x_n - \mu_0|$ deben ordenarse de menor a mayor.

Hipótesis nula: H_0: $\mu = \mu_0$
Valor de estadístico de prueba: s_+ = suma de los rangos asociados con las $(x_i - \mu_0)$ positivas

Hipótesis alternativa	Determinación del valor P
H_a: $\mu > \mu_0$	$P_0(S_+ \geq s_+)$
H_a: $\mu < \mu_0$	$P_0(S_+ \leq s_+) = P_0(S_+ \geq n(n+1)/2 - s_+)$
H_a: $\mu \neq \mu_0$	$2P_0(S_+ \geq \text{máx}\{s_+, n(n+1)/2 - s_+\})$

La tabla A.13 del apéndice cita que $P_0(S_+ \geq c) = P(S_+ \geq c$ cuando H_0 es verdadera) para aquellos valores de c para los que esta probabilidad es más cercana a .1, .05, .025, .01 y .005. Esto permite concluir a niveles de significancia que están al menos cercanos a .10, .05 y .01.

Suponga, por ejemplo, que la prueba es de cola superior y está basada en $n = 10$. La tabla A.13 muestra que $P_0(S_+ \geq 41) = .097$ y $P_0(S_+ \geq 44) = .053$. De tal manera que si $s_+ =$

* Si las colas de la distribución son "demasiado gruesas", como fue el caso con la distribución de Cauchy mencionada en el capítulo 6, entonces μ no existirá. En tales casos, la prueba Wilcoxon todavía será válida para pruebas referentes a $\tilde{\mu}$.

40, entonces el valor P excede .10. El valor $s_+ = 42$ implica que .05 < valor P < .10, permitiendo que se rechace la hipótesis nula a un nivel de significancia de .10, pero no a un nivel de .05. Si $s_+ = 44$ faltaría poco en un nivel de significancia de .05.

En el caso de una prueba de cola inferior basada en $n = 10$, el valor $s_+ = 13$ resulta en un valor P, $P_0(S_+ \leq 13)$. Por simetría de la distribución nula esto es idéntico a $P_0(S_+ \geq 10(11)/2 - 13) = P_0(S_+ \geq 42)$. El valor P está entonces entre .05 y .10. Si una prueba de dos colas da como resultado $s_+ = 44$ cuando $n = 10$, máx{44, 55 − 44} = 44. Por tanto, el valor P es $2P_0(S_+ \geq 44) = 2(.053) = .106$. Este también sería el valor P si $s_+ = 11$, dado que máx{11, 55 − 11} = 44; el valor 11 está justo tan abajo en la cola inferior de la distribución nula como 44 está en la cola superior.

EJEMPLO 15.1 Un fabricante de planchas eléctricas, deseando probar la precisión del control del termostato en la posición de ajuste de 500°F, da instrucciones a una ingeniera de pruebas para obtener temperaturas reales en esa posición de ajuste para 15 planchas que usan termopar. Las mediciones resultantes son como sigue:

494.6	510.8	487.5	493.2	502.6	485.0	495.9	498.2
501.6	497.3	492.0	504.3	499.2	493.5	505.8	

La ingeniera piensa que es razonable suponer que una desviación de temperatura de cualquier magnitud, desde los 500°, es probable que sea tanto positiva como negativa (la suposición de simetría), pero desea protegerse contra una posible situación fuera de normalidad de la distribución real de temperatura, de modo que decide usar la prueba Wilcoxon de rango con signo para ver si la información da una fuerte sugerencia de calibración incorrecta de la plancha.

Las hipótesis son: H_0: $\mu = 500$ en función de H_a: $\mu \neq 500$, donde μ = promedio verdadero de temperatura real en la posición de ajuste de 500°F. Restando 500 de cada x_i se tiene

−5.6	10.8	−12.5	−6.8	2.6	−15.0	−4.1	−1.8	1.6	−2.7
−8.0	4.3	−.8	−6.5	5.8					

Los rangos se obtienen al ordenarlos de menor a mayor, cualquiera que sea su signo.

Magnitud absoluta	.8	1.6	1.8	2.6	2.7	4.1	4.3	5.6	5.8	6.5	6.8	8.0	10.8	12.5	15.0
Rango	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Signo	−	+	−	+	−	−	+	−	+	−	−	−	+	−	−

Así, $s_+ = 2 + 4 + 7 + 9 + 13 = 35$. Cuando $n(n + 1)/2 = 120$, el valor P para una prueba de dos colas es $2P_0(S_+ \leq 35) = 2P_0(S_+ \geq 85)$. De la tabla A.13 del apéndice, $P_0(S_+ \geq 89) = .053$, por lo que el valor $P > 2(.053) = .106$. Aun a un nivel de significancia de .10, la hipótesis nula no puede ser rechazada, por lo que seguramente no puede ser rechazada a un nivel de .05. El software da como resultado .164 como el valor P. No hay razón para cuestionar la factibilidad de que 500 sea la media de la población así como su mediana. ■

Aun cuando una implicación teórica de la continuidad de la distribución fundamental es que no ocurrirán empates, es frecuente que en la práctica sí ocurran, debido a lo discreto de los instrumentos de medida. Si hay diversos valores de información con la misma magnitud absoluta, entonces se les asigna el promedio de los rangos que recibirían si fueran muy ligeramente distintos entre sí. Así, en el ejemplo 15.1 $x_8 = 498.2$ se cambia a 498.4, entonces dos valores diferentes de $(x_i - 500)$ tendrían magnitud absoluta de 1.6. Los rangos a ser promediados serían 2 y 3, por lo que a cada uno se le asignaría rango 2.5.

Observaciones apareadas

Cuando los datos consisten en $(X_1, Y_1),..., (X_n, Y_n)$ y las diferencias $D_1 = X_1 - Y_1,..., D_n = X_n - Y_n$ estuvieron normalmente distribuidas, en el capítulo 9 se usó una prueba t apareada para probar hipótesis acerca de la diferencia esperada μ_D. Si no se supone normalidad, las hipótesis acerca de μ_D se pueden probar usando la prueba Wilcoxon de rango con signo en las D_i siempre que la distribución de las diferencias sea continua y simétrica. *Si X_i y Y_i tienen distribuciones continuas que difieren sólo respecto a sus medias, entonces D_i tendrá una distribución simétrica continua* (*no* es necesario que las distribuciones X y Y sean simétricas individualmente). La hipótesis nula es H_0: $\mu_D = \Delta_0$, y el estadístico de prueba S_+ es la suma de los rangos asociados con las $(D_i - \Delta_0)$ positivas.

EJEMPLO 15.2 El ayuno intermitente (AI) consiste en episodios repetidos de ayuno a corto plazo. Es de interés potencial, ya que puede proporcionar una herramienta simple para mejorar la sensibilidad a la insulina en individuos con resistencia a la misma (esta aumenta la probabilidad de diabetes tipo 2 y enfermedades cardiacas). El artículo **"Intermittent Fasting Does Not Affect Whole-Body Glucose, Lipid, or Protein Metabolism"** (***Amer. J. of Clinical Nutr.*, 2009: 1244–1251**) informa sobre un estudio en el que el gasto energético en reposo (kcal/día) fue determinado en una muestra de $n = 8$ sujetos, que están en un régimen de AI y en una dieta estándar. Los autores del artículo amablemente proporcionan los siguientes datos:

Sujeto	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Régimen AI	1753.7	1604.4	1576.5	1279.7	1754.2	1695.5	1700.1	1717.0
Dieta estándar	1755.0	1691.1	1697.1	1477.7	1785.2	1669.7	1901.3	1735.3
Diferencia	−1.3	−86.7	−120.6	−198.0	−31.0	25.8	−201.2	−18.3
Rango con signo	−1	−5	−6	−7	−4	3	−8	−2

El artículo utiliza en las diferencias la prueba de rangos con signo de Wilcoxon para decidir si existe alguna diferencia entre el REE promedio real para el régimen AI y la dieta estándar. Las hipótesis relevantes son

$$H_0: \mu_D = 0 \text{ contra } H_a: \mu_D \neq 0$$

El valor estadístico de prueba es claramente $s_+ = 3$ (sólo ese rango con signo es positivo). Para una prueba de dos colas el valor P es $2P_0(S_+ \leq 3)$. En el caso en que $n = 8$, hay $2^8 = 256$ posibles conjuntos de rangos con signo, todos los cuales tienen la misma probabilidad de que la hipótesis nula sea cierta. Los conjuntos de rangos con signo que resultan de los valores del estadístico de prueba son menores o más pequeños que el valor 3 que vino de los datos como sigue (sólo se muestran rangos con signo positivos):

rangos con signo no positivo ($s_+ = 0$); 1($s_+ = 1$); 2($s_+ = 2$); 1, 2 ($s_+ = 3$); 3 ($s_+ = 3$)

Así, el valor P es $2(5/256) = .039$. Por tanto, la hipótesis nula sería rechazada al nivel de significancia .05, pero no al de .01. El artículo sólo que el valor $P < .05$.

Aquí está el resultado del paquete de software R:

```
Wilcoxon signed rank test
data: y
V = 3, p-value = 0.03906
alternative hypothesis: true location is not equal to 0
Wilcoxon signed rank test with continuity correction
data: y
V = 3, p-value = 0.04232
alternative hypothesis: true location is not equal to 0
```

Este último valor P de .042, que también reporta Minitab, se basa en la aproximación normal descrita en la subsección siguiente, junto con una corrección de continuidad. ■

Una aproximación de muestra grande

La tabla A.13 del apéndice da valores críticos para pruebas α sólo cuando $n \leq 20$. Para $n > 20$ se puede demostrar que S_+ tiene aproximadamente una distribución normal con

$$\mu_{S_+} = \frac{n(n+1)}{4} \qquad \sigma^2_{S_+} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24}$$

cuando H_0 es verdadera.

La media y la varianza resultan de observar que cuando H_0 es verdadera (la distribución simétrica está centrada en μ_0), entonces es igual de probable que el rango i reciba un signo + que un signo −. Por tanto,

$$S_+ = W_1 + W_2 + W_3 + \cdots + W_n$$

donde

$$W_1 = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } .5 \\ 0 & \text{con probabilidad } .5 \end{cases} \quad \cdots \quad W_n = \begin{cases} n & \text{con probabilidad } .5 \\ 0 & \text{con probabilidad } .5 \end{cases}$$

($W_i = 0$ es equivalente a que el rango i sea asociado con un −, de modo que i no contribuye a S_+.)

S_+ es, por tanto, una suma de variables aleatorias y cuando H_0 es verdadera se puede demostrar que estas W_i son independientes. La aplicación de las reglas de valor esperado y varianza da la media y la varianza de S_+. Puesto que las W_i no están distribuidas de manera idéntica nuestra versión del teorema de límite central tampoco se puede aplicar, pero hay una versión más general del teorema que se puede usar para justificar la conclusión de normalidad. Al poner estos resultados juntos tenemos la siguiente prueba estadística de muestra grande.

$$Z = \frac{S_+ - n(n+1)/4}{\sqrt{n(n+1)(2n+1)/24}} \tag{15.1}$$

Un valor P se calcula utilizando la tabla del apéndice A.3 tal como se hizo para las pruebas z en los capítulos 8 y 9.

EJEMPLO 15.2 Se ha diseñado un tipo particular de viga de acero para que tenga una resistencia a la compresión (lb/pulg^2) de al menos 50 000. Se determinó la resistencia a la compresión para cada viga de una muestra de 25 vigas y se presenta en la tabla 15.3. Suponiendo que la resistencia real a la compresión está distribuida simétricamente alrededor del verdadero

Tabla 15.3 Datos para el ejemplo 15.3

$x_i - 50\,000$	Rango con signo	$x_i - 50\,000$	Rango con signo	$x_i - 50\,000$	Rango con signo
−10	−1	−99	−10	165	+18
−27	−2	113	+11	−178	−19
36	+3	−127	−12	−183	−20
−55	−4	−129	−13	−192	−21
73	+5	136	+14	−199	−22
−77	−6	−150	−15	−212	−23
−81	−7	−155	−16	−217	−24
90	+8	−159	−17	−229	−25
−95	−9				

valor promedio, utilice la prueba Wilcoxon $a = .01$ para determinar si la verdadera resistencia promedio a la compresión es menor que el valor especificado. Esto es, pruebe que H_0: $\mu = 50\ 000$ en función de H_a: $\mu < 50\ 000$ (en favor de la afirmación de que el promedio de resistencia a la compresión es al menos 50 000).

La suma de los rangos con signo positivo es $3 + 5 + 8 + 11 + 14 + 18 = 59$, $n(n + 1)/4 = 162.5$ y $n(n + 1)(2n + 1)/24 = 1381.25$, de modo que

$$z = \frac{59 - 162.5}{\sqrt{1381.25}} = -2.78$$

El valor P para esta prueba de cola inferior es $\Phi(-2.78) = .0027$. Dado que es menor que .01, se rechaza H_0 en favor de la conclusión de que el valor promedio verdadero de la fuerza de compresión es menor a 50 000. ■

Cuando hay empates en las magnitudes absolutas, de modo que deban usarse rangos promedio, todavía es correcto estandarizar S_+ al restar $n(n + 1)/4$, pero debe usarse la siguiente fórmula corregida para la varianza:

$$\sigma^2_{S_+} = \frac{1}{24} n(n + 1)(2n + 1) - \frac{1}{48} \sum (\tau_i - 1)(\tau_i)(\tau_i + 1) \qquad (15.2)$$

donde τ_i es el número de empates en el i-ésimo conjunto de valores empatados y la suma es mayor que todos los conjuntos de valores empatados. Si, por ejemplo, $n = 10$ y los rangos con signo son 1, 2, −4, −4, 4, 6, 7, 8.5, 8.5 y 10, entonces hay dos conjuntos empatados con $\tau_1 = 3$ y $\tau_2 = 2$, de modo que la suma es $(2)(3)(4) + (1)(2)(3) = 30$ y $\sigma^2_{S_+} = 96.25 - 30/48 = 95.62$. El denominador de (15.1) debe ser sustituido por la raíz cuadrada en (15.2) aun cuando, como revela este ejemplo, la corrección suele ser insignificante.

Eficiencia de la prueba Wilcoxon de los rangos con signo

Cuando la distribución fundamental que se muestrea es normal se puede usar la prueba t o la prueba de rangos con signo para probar una hipótesis acerca de μ. La prueba t es la mejor en esta situación porque entre todos los niveles de pruebas α es la que tiene β mínima. Puesto que en general se conviene que hay numerosas situaciones experimentales en las cuales la normalidad se puede suponer razonablemente, así como hay algunas en las que esto no debería ser, hay dos preguntas que deben abordarse en un intento por comparar las dos pruebas:

1. Cuando la distribución fundamental es normal (el "terreno" de la prueba t), ¿cuánto se pierde al usar la prueba de rangos con signo?
2. Cuando la distribución fundamental no es normal, ¿puede lograrse una mejoría importante al usar la prueba de rangos con signo?

Si la prueba Wilcoxon no se afecta mucho respecto a la prueba t en el "terreno" de esta última, y funciona considerablemente mejor que la prueba t para un gran número de otras distribuciones, entonces habrá una fuerte inclinación para usar la prueba Wilcoxon.

Por desgracia, no hay respuestas sencillas a estas preguntas. Si se reflexiona, no es de sorprenderse que la prueba t pueda funcionar mal cuando la distribución fundamental tiene "colas gruesas" (es decir, cuando los valores observados que se encuentran lejos de μ son relativamente más probables de lo que son cuando la distribución es normal). Esto es porque el comportamiento de la prueba t depende de la media muestral, que puede ser muy inestable en presencia de colas gruesas. La dificultad en la producción de respuestas a las dos preguntas es que β para la prueba Wilcoxon es muy difícil de obtener y estudiar para *cualquier* distribución fundamental, y lo mismo se puede decir para la prueba t cuando la distribución no es normal. Incluso si β pudiera obtenerse con facilidad, cualquier medida de eficiencia dependería claramente de qué distribución fundamental se postuló. Los expertos en estadística han propuesto varias medidas diferentes de eficiencia; una que muchos de ellos consideran

creíble se denomina **eficiencia asintótica relativa** (ARE, por sus siglas en inglés). La ARE de una prueba respecto a otra es en esencia la razón limitadora de los tamaños muestrales para obtener idénticas probabilidades de error para las dos pruebas. Entonces, si la ARE de una prueba respecto a una segunda es .5, entonces cuando los tamaños muestrales sean grandes se requerirá un tamaño muestral el doble de grande de la primera prueba para que funcione tan bien como la segunda prueba. Aun cuando la ARE no caracteriza una operación de prueba para tamaños de muestra pequeños, se puede demostrar que se cumplen los siguientes resultados:

1. Cuando la distribución fundamental es normal la ARE de la prueba Wilcoxon respecto a la prueba t es aproximadamente .95.
2. Para cualquier distribución la ARE será al menos .86 y para muchas distribuciones será mucho mayor a 1.

Se pueden resumir estos resultados diciendo que, en problemas de muestras grandes, la prueba Wilcoxon nunca es mucho menos eficiente que la prueba t y puede ser más eficiente si la distribución fundamental está lejos de ser normal. Aun cuando el problema está lejos de ser resuelto, en el caso de tamaños muestrales obtenidos en casi todos los problemas prácticos, los estudios hechos han demostrado que la prueba Wilcoxon funciona razonablemente y por ello es una alternativa viable para la prueba t.

EJERCICIOS Sección 15.1 (1–9)

1. Proporcione tanta información como pueda sobre el valor P para la prueba de Wilcoxon en cada una de las siguientes situaciones.
- **a.** $n = 12$, prueba de cola superior, $s_+ = 56$
- **b.** $n = 12$, prueba de cola superior, $s_+ = 62$
- **c.** $n = 12$, prueba de cola inferior, $s_+ = 20$
- **d.** $n = 14$, prueba de dos colas, $s_+ = 21$
- **e.** $n = 25$, prueba de dos colas, $s_+ = 300$

2. Aquí se muestran de nuevo los datos sobre la tasa de gasto (%) para una muestra de 20 fundas introducida en el ejercicio 1.53.

1.03	1.23	1.10	1.64	1.30	1.27	1.25
.78	1.05	.64	.94	.86	1.05	.75
.09	0.79	1.61	1.26	.93	.84	

Un gráfico de probabilidad normal muestra un patrón no linear distintivo debido a un solo grupo externo en cada extremo de los datos. Sin embargo, una gráfica de puntos y una gráfica de caja exhiben un grado de simetría razonable. Asumiendo que la población se distribuye de manera simétrica, los datos proporcionan evidencia suficiente para concluir que la tasa de gasto medio de la población excede 1%. Utilice la prueba de Wilcoxon a un nivel de significancia de .1. [*Nota*: La tasa de gasto media para la población de las 825 fundas es de hecho de 1.08.]

3. La información siguiente es un subconjunto de la publicada en el artículo **"Synovial Fluid pH, Lactate, Oxygen and Carbon Dioxide Partial Pressure in Various Joint Diseases"** (***Arthritis and Rheumatism*, 1971: 476–477**). Las observaciones son valores de pH del fluido sinovial (que lubrica articulaciones y tendones) tomado de las rodillas de personas que sufren artritis. Suponiendo que el pH promedio real para personas no artríticas es de 7.39, pruebe al nivel .05 para ver si la información indica una diferencia entre valores del pH promedio para personas artríticas y no artríticas.

7.02	7.35	7.34	7.17	7.28	7.77	7.09
7.22	7.45	6.95	7.40	7.10	7.32	7.14

4. Se seleccionó una muestra aleatoria de 15 mecánicos certificados para trabajar en cierto tipo de auto, y se determinó el tiempo (en minutos) necesario para que cada uno de ellos diagnosticara un problema particular; la información resultante fue la siguiente:

30.6	30.1	15.6	26.7	27.1	25.4	35.0	30.8
31.9	53.2	12.5	23.2	8.8	24.9	30.2	

Utilice la prueba Wilcoxon en el nivel de significancia .10 para determinar si la información sugiere que el promedio verdadero del tiempo de diagnóstico es menor a 30 minutos.

5. Un método gravimétrico y uno espectrofotométrico están bajo consideración para determinar el contenido de fosfato de un material particular. Se obtienen 12 muestras del material, cada una se divide por la mitad, y se hace la determinación de cada mitad usando uno de los dos métodos; los datos resultantes son los siguientes:

Muestra	1	2	3	4
Gravimétrico	54.7	58.5	66.8	46.1
Espectrofotométrico	55.0	55.7	62.9	45.5

Muestra	5	6	7	8
Gravimétrico	52.3	74.3	92.5	40.2
Espectrofotométrico	51.1	75.4	89.6	38.4
Muestra	9	10	11	12
Gravimétrico	87.3	74.8	63.2	68.5
Espectrofotométrico	86.8	72.5	62.3	66.0

Use la prueba Wilcoxon para determinar si una técnica da, en promedio, un valor diferente al de la otra técnica para este tipo de material.

6. Reconsidere la situación descrita en el ejercicio 39 de la sección 9.3 y use la prueba Wilcoxon para probar las hipótesis apropiadas.

7. Use la versión de muestra grande de la prueba Wilcoxon en el nivel de significancia .05, en los datos del ejercicio 37 de la sección 9.3, para determinar si la diferencia media verdadera entre concentraciones interiores y exteriores es mayor a .20.

8. Reconsidere los datos de alcohol contenido en el Oporto, del ejercicio 14.22. Una gráfica de probabilidad normal arroja algunas dudas sobre el supuesto de normalidad de la población. Sin embargo, una gráfica de puntos muestra una cantidad razonable de simetría y la media, la mediana y la media recortada a 5% son 19.257, 19.200 y 19.209, respectivamente. Use la prueba Wilcoxon al nivel de significancia .01 para decidir si existe evidencia sustancial para concluir que el contenido promedio real excede 18.5.

9. Suponga que se hacen observaciones $X_1, X_2, \ldots, X_n$ en un proceso, en tiempos 1, 2,..., n. Con base en estos datos se desea probar

H_0: las X_i constituyen una secuencia independiente y distribuida de manera idéntica

contra

H_a: X_{i+1} tiende a ser mayor que X_i para $i = 1, \ldots, n$ (una tendencia creciente)

Suponga que las X_i están ordenadas de 1 a n. Entonces, cuando H_a es verdadera los rangos más grandes tienden a presentarse más tarde en la secuencia, en tanto que si H_0 es verdadera, los rangos grandes y pequeños tienden a mezclarse. Sea R_i el rango de X_i y considere el estadístico de prueba $D = \Sigma_{i=1}^{n}(R_i - i)^2$. Entonces los valores pequeños de D dan apoyo a H_a (por ejemplo, el valor más pequeño es 0 para $R_1 = 10$, $R_2 = 2, \ldots, R_n = n$). Cuando H_0 es verdadera, cualquier secuencia de rangos tiene probabilidad 1/n! Use esto para determinar el valor P en el caso $n = 4$, $d = 2$. [*Sugerencia*: Haga una lista de las secuencias de rango 4!, calcule d para cada una y luego obtenga la distribución nula de D. Para más información vea el libro de Lehmann (en la bibliografía de este capítulo), p. 290.]

15.2 Prueba Wilcoxon de suma de rangos

La prueba t de dos muestras se basa en el supuesto de que ambas distribuciones poblacionales son normales. Hay situaciones, sin embargo, en las que un investigador desea usar una prueba válida, incluso si las distribuciones fundamentales son bastante no normales. A continuación se describe esa prueba llamada **prueba Wilcoxon de suma de rangos**. Un nombre alternativo para el procedimiento es la prueba Mann-Whitney, aun cuando el estadístico de esta prueba se expresa a veces de una forma ligeramente diferente de la prueba Wilcoxon. El procedimiento de la prueba Wilcoxon es libre de distribución porque tendrá el nivel deseado de significancia para una clase muy grande de distribuciones fundamentales.

SUPOSICIONES

> $X_1, \ldots, X_m$ y $Y_1, \ldots, Y_n$ son dos muestras aleatorias independientes de distribuciones continuas con medias μ_1 y μ_2, respectivamente. Las distribuciones X y Y tienen la misma forma y dispersión, la única diferencia posible entre las dos estando en los valores de μ_1 y μ_2.

La hipótesis nula H_0: $\mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$ afirma que la distribución X es desplazada por una cantidad Δ_0 a la derecha de la distribución Y.

Desarrollo de la prueba cuando $m = 3$, $n = 4$

Suponga que las hipótesis relevantes son H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ contra H_a: $\mu_1 - \mu_2 > 0$. Si μ_1 es en realidad mucho mayor que μ_2, entonces casi todas las x observadas caerán a la derecha

de las y observadas. No obstante, si H_0 es verdadera, entonces los valores observados de las dos muestras deben estar entremezclados. El estadístico de prueba arrojará cuánta mezcla hay en las dos muestras.

Considere el caso $m = 3$, $n = 4$. Entonces si las tres x observadas estuvieran a la derecha de las cuatro y observadas, esto sería una fuerte evidencia para rechazar H_0 en favor de H_a. Suponga que se agrupan las X y las Y en una muestra combinada de tamaño $m + n = 7$ y se ordenan estas observaciones de menor a mayor, con la más pequeña recibiendo el rango 1 y la mayor, el rango 7. Si casi todos los rangos más grandes o los rangos más pequeños se asociaran con observaciones X, se empezaría a dudar de H_0. Esto sugiere el estadístico de prueba

$$W = \text{la suma de los rangos de la muestra combinada asociada con observaciones de } X \tag{15.3}$$

Para los valores de m y n que se están considerando el valor más pequeño posible de W es $w = 1 + 2 + 3 = 6$ (si las tres x son menores que las cuatro y), y el máximo valor posible es $w = 5 + 6 + 7 = 18$ (si las tres x son mayores que las cuatro y).

Por ejemplo, suponga que $x_1 = -3.10$, $x_2 = 1.67$, $x_3 = 2.01$, $y_1 = 5.27$, $y_2 = 1.89$, $y_3 = 3.86$ y $y_4 = .19$. Entonces la muestra agrupada y sus rangos correspondientes son:

Muestra agrupada ordenada:	−3.10	.19	1.67	1.89	2.01	3.86	5.27
Muestra:	x	y	x	y	x	y	y
Rango:	1	2	3	4	5	6	7

Por tanto, $w = 1 + 3 + 5 = 9$

Para la alternativa que se está considerando, un valor mayor de W proporciona más evidencia contra la H_0 que un valor pequeño. Esto implica que la prueba es de cola superior: valor $P = P_0(W \geq w)$, donde nuevamente P_0 denota la probabilidad calculada asumiendo que H_0 es verdadera. Por tanto, se necesita una "distribución nula para probar el estadístico. Para este fin, recuerde que cuando H_0 es verdadera las siete observaciones provienen de la misma población. Esto significa que bajo H_0, cualquier posible terna de rangos asociada con las tres x, tales como (1, 4, 5), (3, 5, 6) o (5, 6, 7) tiene la misma probabilidad que cualquier otra posible terna de rangos. Dado que hay $\binom{7}{3} = 35$ posibles ternas de rangos, bajo H_0 cada terna de rangos tiene probabilidad de $1/35$. De una lista de las 35 ternas de rangos y el valor w asociado con cada una la distribución de probabilidad de W puede determinarse de inmediato. Por ejemplo, hay cuatro ternas de rangos que tienen valor w de 11; (1, 3, 7), (1, 4, 6), (2, 3, 6) y (2, 4, 5), por lo que $P(W = 11) = 4/35$. El resumen de la lista y los cálculos aparecen en la tabla 15.4.

Tabla 15.4 Distribución de probabilidad de W($m = 3$, $n = 4$) cuando H_0 es verdadera

w	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$P_0(W = w)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{2}{35}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{5}{35}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{2}{35}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{35}$

La distribución de la tabla 15.4 es simétrica alrededor del valor $w = (6 + 18)/2 = 12$, que es el valor central de la lista ordenada de posibles valores de W. Esto es porque las dos ternas de rangos (r, s, t) (con $r < s < t$) y ($8 - t$, $8 - s$, $8 - r$) tienen valores de w simétricos alrededor de 12, de modo que para cada terna con valor w debajo de 12, hay una terna con valor w arriba de 12 en la misma cantidad.

Para la hipótesis que se está considerando el estadístico de prueba $w = 16$ resulta en un valor $P = P_0(W \geq 16) = 2/35 + 1/35 + 1/35 = .114$. Seríamos incapaces de rechazar la hipótesis nula a un nivel de significancia de .05. La prueba es de cola inferior si la hipótesis alternativa es H_a: $\mu_1 - \mu_2 < 0$. El valor del estadístico de prueba $w = 7$ da un valor

$P = P_0(W \leq 7) = 1/35 + 1/35 = .057$. En el caso de la hipótesis alternativa H_a: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$, la prueba es de dos colas. Suponga, por ejemplo, que $w = 17$. Entonces 17 y 18 son tan contradictorios a H_0 como el valor obtenido de W, como también lo son 7 y 6; estos últimos dos valores están tan abajo en la cola inferior de la distribución nula como lo están los primeros dos en la cola superior. El valor P es entonces $P_0(W \geq 17 \text{ o } \leq 7) = 1/35 + 1/35 + 1/35 + 1/35 = .114$.

Descripción general de la prueba

La hipótesis nula H_0: $\mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$ se maneja restando Δ_0 de cada X_i y usando las $(X_i - \Delta_0)$ tal como las X_i se usaron previamente. Recordando que para cualquier entero positivo K, la suma de los primeros K enteros es $K(K + 1)/2$, el mínimo valor posible del estadístico W es $m(m + 1)/2$, que se presenta cuando las $(X_i - \Delta_0)$ están todas a la izquierda de la muestra Y. El máximo valor posible de W se presenta cuando las $(X_i - \Delta_0)$ están por completo a la derecha de las Y; en este caso, $W = (n + 1) + \cdots + (m + n) =$ (suma de los primeros $m + n$ enteros) $-$ (suma de los primeros n enteros), que da $m(m + 2n + 1)/2$. Al igual que con el caso especial $m = 3$, $n = 4$, la distribución de W es simétrica alrededor del valor que está a la mitad entre los valores mínimo y máximo; este valor central es $m(m + n + 1)/2$. Debido a esta simetría, los valores P para pruebas de cola inferior y de dos colas se obtienen fácilmente a partir de una tabla de distribución de probabilidades nulas de cola superior.

Hipótesis nula: H_0: $\mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$

Valor estadístico de prueba: $w = \sum_{i=1}^{m} r_i$ donde r_i = rango de $(x_i - \Delta_0)$ en la muestra combinada de las $m + n$ $(x - \Delta_0)$ y las y

Hipótesis alternativa	Determinación del valor P
H_a: $\mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$	$P_0(W \geq w)$
H_a: $\mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$	$P_0(W \leq w) = P_0(W \geq m(m + n + 1) - w)$
H_a: $\mu_1 - \mu_2 \neq 2\Delta_0$	$2P_0(W \geq \text{máx}\{w, m(m + n + 1) - w\})$

La tabla del apéndice A.14 indica que $P_0(W \geq c) = P(W \geq c$ cuando H_0 es verdadera) para valores de c para los cuales la probabilidad está más cercana a .05, .025, .01 y .005. Esto permite que se concluya a niveles de significancia que están al menos cerca de .05 y .01.

La tabla da información sólo para $m = 3, 4, \ldots, 8$ y $n = m, m + 1, \ldots, 8$ (es decir, $3 \leq m \leq n \leq 8$). Para valores de m y n que excedan de 8 se puede usar una aproximación normal. No obstante, para usar la tabla para m y n pequeñas *las muestras X y Y deben marcarse para que* $m \leq n$.

EJEMPLO 15.4 Los norovirus son una de las causas principales de la gastroenteritis aguda, y hasta diciembre de 2011 no existía una vacuna disponible para combatir este virus. Un experimento involucró a 15 pacientes, 8 de los cuales recibieron una nueva vacuna de manera aleatoria; los otros 7 individuos recibieron un placebo. Los siguientes son datos sobre la duración (h) de la enfermedad provocada por el virus Norwalk:

Vacuna:	1.0	6.2	9.2	13.4	22.1	36.1	40.2	63.5
Placebo:	5.7	16.6	22.0	38.2	45.8	81.5	107.0	

¿Será distinto el valor promedio verdadero de la duración de la enfermedad entre ambos tratamientos?

Dado que para utilizar la tabla A.14 del apéndice se necesita $m \leq n$, sea que μ_1 denote el verdadero promedio de la duración cuando es administrado el placebo y que μ_2 represente el promedio verdadero de la duración cuando se administra la vacuna.

Se desea probar

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \text{ contra } H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

utilizando la prueba Wilcoxon de suma de rangos a un nivel de significancia de .05. Los rangos de x (placebo) para la muestra conjunta, que consiste en 15 observaciones son 2, 6, 7, 10, 12, 14 y 15, de donde $w = 2 + \cdots + 15 = 66$. Dado que máx$\{w, m(m + n + 1) - w\}$ = máx$\{66, 46\} = 66$.

$$\text{valor } P = 2P_0(W \geq 66) > 2P_0(W \geq 71) = 2(.047) = .094$$

($P_0(W \geq 71)$ viene de la tabla A.14. El valor P claramente excede .05, por lo que a este nivel de significancia no se puede rechazar la hipótesis nula. No hay evidencia suficiente para concluir que la duración promedio verdadera es diferente para la vacuna que para el placebo. Con ayuda del software se obtiene un valor P de .27, el cual es muy acorde con el valor de .28 basado en muestras mayores que se reportan en el artículo **"Norovirus Vaccine against Experimental Human Norwalk Virus Illness" (*New England J. of Medicine*, 2011: 2178–2187)**. Un gran número de artículos en esta revista incluye resúmenes de los análisis de datos utilizando la prueba de Wilcoxon de rangos con signo, la prueba de suma de rangos o ambas. ■

Teóricamente, la suposición de continuidad de las dos distribuciones asegura que todas las $(m + n)$ x y y observadas tengan valores diferentes. En la práctica, no obstante, con frecuencia habrá empates en los valores observados. Al igual que con la prueba Wilcoxon de rango con signo, la práctica común al trabajar con empates es asignar a cada una de las observaciones enlazadas de un conjunto particular de empates el promedio de los rangos que recibirían si fueran ligeramente diferentes entre sí.

Una aproximación normal para W

Cuando m y n exceden de 8 la distribución de W puede ser aproximada por una curva normal apropiada, y esta aproximación se puede usar en lugar de la tabla A.14 del apéndice. Para obtener la aproximación se necesita μ_W y σ_W^2 cuando H_0 es verdadera. En este caso, el rango R_i de $X_i - \Delta_0$ es igualmente probable que sea cualquiera de los posibles valores 1, 2, 3,..., $m + n$ (R_i tiene una distribución uniforme discreta en los primeros $m + n$ enteros positivos), de modo que $\mu_{R_i} = (m + n + 1)/2$. Dado que $W = \Sigma R_i$, esto da

$$\mu_W = \mu_{R_1} + \mu_{R_2} + \cdots + \mu_{R_m} = \frac{m(m + n + 1)}{2} \tag{15.4}$$

La varianza de R_i también se calcula fácilmente para ser $(m + n + 1)$ $(m + n - 1)/12$. No obstante, puesto que las R_i no son variables independientes, $V(W) \neq mV(R_i)$. Usando el hecho de que para cualesquiera dos enteros distintos a y b entre 1 y $m + n$ inclusive, $P(R_i = a, R_j = b) = 1/[(m + n)(m + n - 1)]$ (se muestrean dos momentos sin reemplazo), $\text{Cov}(R_i, R_j) = -(m + n + 1)/12$, lo que da

$$\sigma_W^2 = \sum_{i=1}^{m} V(R_i) + \sum\sum_{i \neq j} \text{Cov}(R_i, R_j) = \frac{mn(m + n + 1)}{12} \tag{15.5}$$

Es posible usar un teorema de límite central para concluir que cuando H_0 es verdadera el *estadístico de prueba*

$$Z = \frac{W - m(m + n + 1)/2}{\sqrt{mn(m + n + 1)/12}}$$

tiene aproximadamente una distribución normal estándar. Se calcula un valor P utilizando la tabla A.3 del apéndice de la misma manera que en el caso de pruebas z anteriores.

EJEMPLO 15.5 El artículo **"A Lining for the Thermal Comfort of Trekking Boots–Experimental and Numerical Studies" (*Research J. of Textile and Apparel*, 2011: 50–61)** estudia el diseño y el desarrollo de los revestimientos para zapatos. Los investigadores utilizaron la prueba de suma de rangos para decidir si la acumulación de humedad (g) promedio verdadera era diferente para dos tipos de botas. No se proporcionan los tamaños de muestra ni el valor de W; suponga que $m = n = 9$ y $w = 37$. Por tanto,

$$\mu_W = 9(19)/2 = 85.5, \quad \sigma_W = \sqrt{9(9)(19)/12} = \sqrt{128.25} = 11.325$$

de donde $z = (37 - 85.5)/11.325 = -4.28$ (este es el valor de z dado en el artículo citado). El valor P es $2\Phi(-4.28)$, el cual es menor que $2\Phi(-3.49) = .0004$. A un nivel de significancia de .01, o incluso .001, se rechaza la hipótesis nula y se concluye que la acumulación de humedad promedio verdadera es diferente para los dos tipos de botas. ■

Si hay empates en los datos, el numerador de Z todavía es apropiado, pero el denominador debe ser sustituido por la raíz cuadrada de la varianza ajustada

$$\sigma_W^2 = \frac{mn(m+n+1)}{12} - \frac{mn}{12(m+n)(m+n-1)} \sum (\tau_i - 1)(\tau_i)(\tau_i + 1) \tag{15.6}$$

donde τ_i es el número de observaciones empatadas del i-ésimo conjunto de empates y la suma es sobre todos los conjuntos de enlaces. A menos que haya un gran número de empates, hay poca diferencia entre las ecuaciones (15.6) y (15.5).

Eficiencia de la prueba Wilcoxon de suma de rangos

Cuando las distribuciones que se muestrean son normales con $\sigma_1 = \sigma_2$ y, por tanto, tienen las mismas formas y dispersiones, se puede usar la prueba t agrupada o la prueba Wilcoxon (la prueba t de dos muestras supone normalidad pero no varianzas iguales, de modo que las suposiciones que sirven de base a su uso son más restrictivas en un sentido y menos en otro que las suposiciones para la prueba Wilcoxon). En esta situación la prueba t agrupada es mejor entre todas las pruebas posibles en el sentido de minimizar β para cualquier α fija. Sin embargo, un investigador nunca puede estar absolutamente seguro de que se satisfacen las suposiciones fundamentales. Por tanto, es importante preguntar 1) cuánto se pierde al usar la prueba de Wilcoxon, en lugar de la prueba t agrupada, cuando las distribuciones son normales con varianzas iguales; y 2) cómo se compara W con T en situaciones que no son normales.

El concepto de eficiencia de prueba se discutió en la sección previa en relación con una prueba t de una muestra y la prueba Wilcoxon de rango con signo. Los resultados para las pruebas de dos muestras son iguales que los de las pruebas de una muestra. Cuando se cumplen tanto normalidad como varianzas iguales, la prueba de la suma de rangos es aproximadamente 95% de eficiente que la prueba t agrupada en muestras grandes. Es decir, la prueba t dará las mismas probabilidades de error que la prueba Wilcoxon que usa tamaños muestrales ligeramente más pequeños. Por otra parte, la prueba Wilcoxon siempre será al menos 86% de eficiente que la prueba t agrupada y puede ser más eficiente si las distribuciones fundamentales son, en gran medida, no normales, en especial con colas gruesas. La comparación de la prueba Wilcoxon con la prueba t de dos muestras (no agrupada) es menos clara. No se sabe que la prueba t sea la mejor prueba en ningún sentido, de modo que parece seguro concluir que mientras las distribuciones de población tengan formas y dispersiones semejantes, el comportamiento de la prueba Wilcoxon debe compararse en forma bastante favorable con la prueba t de dos muestras.

Por último, se observa que los cálculos β para la prueba Wilcoxon son muy difíciles. Esto es porque la distribución de W, cuando H_0 es falsa, depende no sólo de $\mu_1 - \mu_2$, sino también de las formas de las dos distribuciones. Para casi todas las distribuciones fundamentales la

distribución no nula de W es prácticamente insoluble. Esta es la razón por la cual los expertos en estadística han creado una eficiencia de muestra grande (asintótica relativa) como medio de comparar pruebas. Con la capacidad de los modernos paquetes de software, otro método para el cálculo de β es realizar un experimento de simulación.

EJERCICIOS Sección 15.2 (10–16)

10. Diga lo más que pueda sobre el valor P para la prueba de suma de rangos en cada una de las situaciones siguientes:

- **a.** $m = 5, n = 6, w = 41$, prueba de cola superior.
- **b.** $m = 5, n = 6, w = 22$, prueba de cola inferior.
- **c.** $m = 5, n = 6, w = 45$, prueba de dos colas.
- **d.** $m = n = 12$, prueba de cola superior, rangos de $x = 4, 7, 8, 11, 12, 15, 17, 19, 20, 22, 23, 24$.

11. En un experimento para comparar la resistencia al pegamento de dos adhesivos diferentes, se utilizó cada adhesivo en cinco uniones de dos superficies y para cada unión se determinó la fuerza necesaria para separar las superficies. Para el adhesivo 1 los valores resultantes fueron 229, 286, 245, 299 y 250, mientras que las observaciones para el adhesivo 2 fueron 213, 179, 163, 247 y 225. Denote con μ_i el promedio verdadero de resistencia al pegamento del adhesivo tipo i. Utilice la prueba Wilcoxon de suma de rangos al nivel .05 para probar H_0: $\mu_1 = \mu_2$ en función de H_a: $\mu_1 > \mu_2$.

12. El artículo **"A Study of Wood Stove Particulate Emissions" (*J. of the Air Pollution Control Assoc.*, 1979: 724–728)** publica la información siguiente sobre el tiempo de combustión (en horas) para muestras de roble y pino. Pruebe al nivel .05 para ver si hay alguna diferencia en el promedio verdadero del tiempo de combustión para los dos tipos de madera.

Roble	1.72	.67	1.55	1.56	1.42	1.23	1.77	.48
Pino	.98	1.40	1.33	1.52	.73	1.20		

13. La concentración de fluoruro en la orina (partes por millón) se midió tanto para una muestra de ganado que pasta en un área previamente expuesta a contaminación por fluoruro y para una muestra similar que pasta en una región no contaminada.

Contaminada	21.3	18.7	23.0	17.1	16.8	20.9	19.7
No contaminada	14.2	18.3	17.2	18.4	20.0		

¿Indicarán los datos, de manera contundente, que la concentración promedio verdadera de fluoruro para los animales que pastan en la región contaminada es mayor que para los animales que pastan en la región no contaminada? Utilice la prueba de suma de rangos de Wilcoxon con un nivel de $\alpha = .01$.

14. El artículo **"Multimodal Versus Unimodal Instruction in a Complex Learning Environment" (*J. of Experimental Educ.*, 2002: 215–239)** describe un experimento que se llevó a cabo para comparar el dominio de los estudiantes de un determinado software aprendido de dos formas diferentes. El primer método de aprendizaje (instrucción multimodal) implicó el uso de un manual visual. La segunda técnica (instrucción unimodal) empleó un manual de texto. Los siguientes son los resultados del aprendizaje para los dos grupos al final del experimento (la asignación a los grupos fue al azar):

Método 1:	44.85	46.59	47.60	51.08	52.20
	56.87	57.03	57.07	60.35	60.82
	67.30	70.15	70.77	75.21	75.28
	76.60	80.30	81.23		
Método 2:	51.95	56.54	57.40	57.60	61.16
	39.91	42.01	43.58	48.83	49.07
	49.48	49.57	49.63	50.75	64.55
	65.31	68.59	72.40		

¿Sugieren los datos que la puntuación promedio real depende de cuál método de aprendizaje se utiliza?

15. El artículo **"Measuring the Exposure of Infants to Tobacco Smoke" (*New Engl. J. of Med.*, 1984: 1075–1078)** informa sobre un estudio en el que se tomaron varias medidas de una muestra aleatoria de infantes expuestos al humo dentro de una casa, así como de una muestra de infantes no expuestos al humo. La información siguiente consta de observaciones en concentración de cotanina urinaria, importante metabolito de la nicotina (los valores son un subconjunto de la información original y se obtuvieron de una gráfica que se publica en el artículo). ¿Sugerirá la información que el promedio verdadero de nivel de cotanina es más alto, en más de 25, en infantes expuestos que en los no expuestos? Realice una prueba al nivel de significancia de .05.

No expuestos	8	11	12	14	20	43	111	
Expuestos	35	56	83	92	128	150	176	208

16. Reconsidere la situación descrita en el ejercicio 81 del capítulo 9 y la siguiente salida Minitab (la letra griega eta se emplea para denotar una mediana).

```
Mann-Whitney Confidence Interval and Test
buena                N=8                Median=0.540
mala                 N=8                Median=2.400
Point estimate for ETA1-ETA2 is                -1.155
  95.9 Percent CI for ETA1-ETA2 is (−3.160, −0.409)
W = 41.0

Test of ETA1 = ETA2 vs ETA1 < ETA2 is
significant at 0.0027
```

- **a.** Verifique que el valor del estadístico de prueba de Minitab es correcto.
- **b.** Realice una prueba apropiada de las hipótesis usando un nivel de significancia de .01

15.3 Intervalos de confianza libres de distribución

El método empleado hasta aquí para construir un intervalo de confianza (IC) se puede describir como sigue: inicie con una variable aleatoria (Z, T, χ^2, F u otras semejantes) que dependa del parámetro de interés y un enunciado de probabilidad que comprenda la variable, manipule las desigualdades del enunciado para despejar el parámetro entre puntos extremos aleatorios y, finalmente, sustituya los valores calculados para variables aleatorias. Otro método general para obtener intervalos de confianza toma ventaja de una relación entre procedimientos de prueba e intervalos de confianza. Un intervalo de confianza de $100(1 - \alpha)\%$ para un parámetro θ se puede obtener de una prueba de nivel α para H_0: $\theta = \theta_0$ contra H_a: $\theta \neq \theta_0$. Este método se utilizará para deducir intervalos asociados con la prueba Wilcoxon de rango con signo y la prueba Wilcoxon de suma de rangos.

PROPOSICIÓN

Suponga que se tiene un procedimiento de prueba de nivel α para probar H_0: $\theta = \theta_0$ contra H_a: $\theta \neq \theta_0$. Para valores muestrales fijos, denote con A el conjunto de todos los valores θ_0 para los cuales H_0 no es rechazada. Por tanto, A es un intervalo de confianza de $100(1 - \alpha)\%$ para θ.

Esto adquiere sentido debido a que el intervalo de confianza consiste en todos los valores del parámetro que son posibles en un nivel de confianza seleccionado, y no queremos rechazar H_0 en favor de H_a si θ_0 es un valor posible.

En realidad hay ejemplos patológicos en los que el conjunto A definido en la proposición no es un intervalo de valores θ, sino que es el complemento de un intervalo o algo todavía más extraño. Para ser más precisos, se debería sustituir realmente la idea de un intervalo de confianza con la de un conjunto de confianza. En los casos de interés aquí, el conjunto A resulta ser un intervalo.

El intervalo Wilcoxon de rango con signo

Para probar H_0: $\mu = \mu_0$ contra H_a: $\mu \neq \mu_0$ usando la prueba Wilcoxon de rango con signo, donde μ es la media de una distribución simétrica continua, los valores absolutos $|x_1 - \mu_0|$, ..., $|x_n - \mu_0|$ se ordenan de menor a mayor, con el más pequeño recibiendo rango 1 y, el mayor, rango n. A cada rango se le da entonces el signo de su $x_i - \mu_0$ asociada, y el estadístico de prueba es la suma de los rangos con signo positivo. La prueba de dos colas rechaza H_0 si s_+ es $\geq c$ o $\leq n(n + 1)/2 - c$, donde c se obtiene de la tabla A.13 del apéndice, una vez especificado el nivel deseado de significancia α. Para x_1,..., x_n fijas, el intervalo de rango con signo $100(1 - \alpha)\%$ estará formado por todas las μ_0 para las cuales H_0: $\mu = \mu_0$ no es rechazada al nivel α. Para identificar este intervalo es conveniente expresar el estadístico de prueba S_+ de otra forma.

S_+ = el número de promedios por pares $(X_i + X_j)/2$ con $i \leq j$ que son $\geq \mu_0$

Esto es, si se promedia cada una de las x_j de la lista con cada una de las x_i a su izquierda, incluyendo $(x_j + x_j)/2$ (que es sólo x_j), y se cuenta el número de estos promedios que son $\geq \mu_0$, resulta s_+. Al moverse de izquierda a derecha en la lista de valores muestrales, simplemente se está promediando cada par de observaciones de la muestra [otra vez incluyendo $(x_j + x_j)/2$] exactamente una vez, de modo que no es importante el orden en que se ponen en lista las observaciones antes de promediarse. La equivalencia de los dos métodos para calcular s_+

no es difícil de verificar. El número de promedios por pares es $\binom{n}{2} + n$ (el primer término se debe a promediar diferentes observaciones y el segundo a promediar cada x_i consigo misma), que es igual a $n(n + 1)/2$. Si demasiados o muy pocos de estos promedios por pares son $\geq \mu_0$, H_0 es rechazada.

EJEMPLO 15.6 Las siguientes observaciones son valores de ritmo metabólico cerebral para monos rhesus: $x_1 = 4.51$, $x_2 = 4.59$, $x_3 = 4.90$, $x_4 = 4.93$, $x_5 = 6.80$, $x_6 = 5.08$, $x_7 = 5.67$.
Los 28 promedios por pares son, en orden creciente,

4.51	4.55	4.59	4.705	4.72	4.745	4.76	4.795	4.835	4.90
4.915	4.93	4.99	5.005	5.08	5.09	5.13	5.285	5.30	5.375
5.655	5.67	5.695	5.85	5.865	5.94	6.235	6.80		

Los primeros pocos y los pocos últimos de estos se presentan en un eje de mediciones en la figura 15.2.

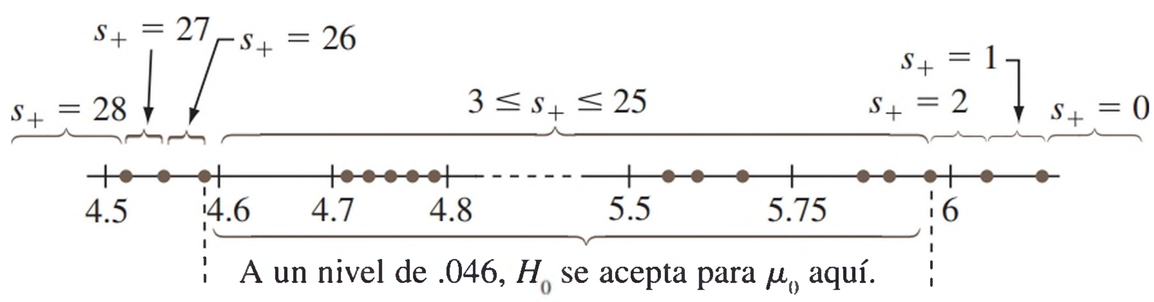


Figura 15.2 Gráfica de los datos para el ejemplo 15.6

Debido a que S_+ es una variable aleatoria discreta, $\alpha = .05$ no se puede obtener de manera exacta. La tabla A.13 del apéndice muestra que el valor P para una prueba de dos colas es $2(.023) = .046$ si $s_+ = 26$ o 2. Por tanto, H_0 no se rechazará en un nivel de significancia de .046 si $3 \leq s_+ \leq 25$. De este modo, si el número de promedios por pares $\geq \mu_0$ está entre 3 y 25, inclusive, H_0 no es rechazada. De la figura 15.2 el intervalo de confianza (aproximado) de 95% para μ es (4.59, 5.94). ■

En general, una vez que los promedios por pares sean ordenados de menor a mayor, los puntos extremos del intervalo Wilcoxon son dos de los promedios "extremos". Para expresar esto con precisión, denote con $\bar{x}_{(1)}$ el promedio por pares más pequeño, el siguiente más pequeño con $\bar{x}_{(2)}$,..., y el más grande con $\bar{x}_{(n\,(n+1)/2)}$.

PROPOSICIÓN

Si la prueba Wilcoxon de rango con signo de nivel α para H_0: $\mu = \mu_0$ contra H_a: $\mu \neq \mu_0$ sirve para rechazar H_0 si $s_+ \geq c$ o $s_+ \leq n(n + 1)/2 - c$, entonces un intervalo de confianza $100(1 - \alpha)\%$ para μ es

$$(\bar{x}_{(n(n+1)/2-c+1)}, \bar{x}_{(c)}) \qquad (15.7)$$

En otras palabras, el intervalo se extiende desde el promedio d-ésimo más pequeño por pares al promedio d-ésimo más grande, donde $d = n(n + 1)/2 - c + 1$. La tabla A.15 del apéndice da los valores de c que corresponden a los niveles de confianza acostumbrados para $n = 5, 6,..., 25$.

EJEMPLO 15.7 (Continuación del ejemplo 15.6)

Para $n = 7$ el valor P para una prueba de dos colas es $2(.055) = .11$ si $s_+ = 24$ o $s_+ = 4$. Por tanto, la hipótesis nula será rechazada a un nivel de .11 si $s_+ = 0, 1, 2, 3, 4, 24, 25, 26, 27$ o 28. Por tanto, un intervalo de 89.0% (aproximadamente 90%) con el uso de $c = 24$. El intervalo es $(\bar{x}_{(28-24+1)}, \bar{x}_{(24)}) = (\bar{x}_{(5)}, \bar{x}_{(24)}) = (4.72, 5.85)$, que se extiende desde el quinto promedio más pequeño al quinto promedio por pares más grande. ■

La deducción del intervalo dependía de tener una sola muestra de una distribución simétrica continua con media (mediana) μ. Cuando la información es apareada, el intervalo construido desde las diferencias $d_1, d_2, \ldots, d_n$ es un intervalo de confianza para la diferencia media (mediana) μ_D. En este caso no es necesario suponer la simetría de las distribuciones X y Y; mientras las distribuciones X y Y tengan la misma forma, la distribución $X - Y$ será simétrica, por lo que sólo se requiere continuidad.

Para $n > 20$ la aproximación de muestra grande a la prueba Wilcoxon, basada en estandarizar S_+ da una aproximación a c en (15.7). El resultado [para un intervalo $100(1 - \alpha)\%$] es

$$c \approx \frac{n(n+1)}{4} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}$$

La eficiencia del intervalo Wilcoxon respecto al intervalo t es aproximadamente igual que el de la prueba Wilcoxon respecto a la prueba t. En particular para muestras grandes cuando la población fundamental es normal el intervalo Wilcoxon tenderá a ser un poco más largo que el intervalo t, pero si la población es no normal en suficiente grado (simétrica pero con colas gruesas), entonces el intervalo Wilcoxon tenderá a ser mucho más corto que el intervalo t.

El intervalo Wilcoxon de suma de rangos

La prueba Wilcoxon de suma de rangos para probar H_0: $\mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$ se realiza al combinar primeramente $(X_i - \Delta_0)$ y las Y_j en una muestra de tamaño $m + n$, y ordenarlas de menor (rango 1) a mayor (rango $m + n$). El estadístico de prueba W es entonces la suma de los rangos de las $(X_i - \Delta_0)$. Para la alternativa de dos lados, H_0 es rechazada si w es demasiado pequeña o demasiado grande.

Para obtener el intervalo de confianza asociado para las x_i y las y_j fijas se debe determinar el conjunto de todos los valores Δ_0 para los cuales H_0 no es rechazada. Esto es más fácil de hacer si primero se expresa el estadístico de prueba en una forma ligeramente diferente. El valor más pequeño posible de W es $m(m + 1)/2$, correspondiente a cada $(X_i - \Delta_0)$ menor que cada Y_j, y hay mn diferencias de la forma $(X_i - \Delta_0) - Y_j$. Un poco de manipulación da

$$\begin{aligned} W &= [\text{número de } (X_i - Y_j - \Delta_0)\text{'s} \geq 0] + \frac{m(m+1)}{2} \\ &= [\text{número de } (X_i - Y_j) \geq \Delta_0] + \frac{m(m+1)}{2} \end{aligned} \tag{15.8}$$

El valor P será a lo más α, llevando al rechazo de la hipótesis nula, si w es relativamente pequeña (cercana a 0) o grande (cercana a $m(m + 2n + 1)/2$. Esto equivale a rechazar H_0 si el número de $(x_i - y_j) \geq \Delta_0$ es demasiado pequeño o demasiado grande.

La expresión (15.8) sugiere calcular $x_i - y_j$ para cada i y j y ordenar estas diferencias mn de menor a mayor. Entonces, si el valor nulo Δ_0 no es más pequeño que la mayoría de las diferencias ni mayor que casi todas, H_0: $\mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$ no es rechazada. La variación de Δ_0 muestra ahora que un intervalo de confianza para $\mu_1 - \mu_2$ tendrá como su punto extremo inferior una de las $(x_i - y_j)$, y análogamente para el punto extremo superior.

PROPOSICIÓN

Sean $x_1,\ldots, x_m$ y $y_1,\ldots, y_n$ los valores observados en dos muestras independientes de distribuciones continuas que difieren sólo en ubicación (y no en forma). Con $d_{ij} = x_i - y_j$ y las diferencias ordenadas denotadas por $d_{ij(1)}, d_{ij(2)},\ldots, d_{ij(mn)}$, la forma general de un intervalo de confianza $100(1 - \alpha)\%$ para $\mu_1 - \mu_2$ es

$$(d_{ij(mn-c+1)}, d_{ij(c)}) \tag{15.9}$$

donde c es la constante crítica para la prueba Wilcoxon de suma de rangos de nivel α de dos colas.

Note que la forma del intervalo Wilcoxon de suma de rangos (15.9) es muy semejante al intervalo Wilcoxon de rango con signo (15.7); este emplea promedios por pares de una sola muestra, mientras que (15.9) usa diferencias por pares de dos muestras. La tabla A.16 del apéndice da valores de c para valores seleccionados de m y n.

EJEMPLO 15.8 El artículo **"Some Mechanical Properties of Impregnated Bark Board" (*Forest Products J.* 1977: 31–38)** publica la siguiente información sobre la máxima resistencia a la compresión (libras por pulgada cuadrada) para una muestra de tabla de corteza de impregnación epóxica y para una muestra de tabla de corteza impregnada con otro polímero:

Epóxica (de *x*)	10 860	11 120	11 340	12 130	14 380	13 070
Otro (de *y*)	4590	4850	6510	5640	6390	

Obtenga un intervalo de confianza de 95% para el promedio verdadero de diferencia en resistencia a la compresión entre la tabla de impregnación epóxica y la tabla con el otro tipo.

De la tabla A.16 del apéndice, puesto que el tamaño muestral más pequeño es 5 y el tamaño muestral más grande es 6, $c = 26$ para un nivel de confianza de aproximadamente 95%. Las d_{ij} aparecen en la tabla 15.5. Las cinco d_{ij} más pequeñas $[d_{ij(1)},\ldots, d_{ij(5)}]$ son 4350, 4470, 4610, 4730 y 4830 y las cinco más grandes son (en orden descendente 9790, 9530, 8740, 8480 y 8220. Así, el intervalo de confianza es $(d_{ij(5)}, d_{ij(26)}) = (4380, 8220)$.

Tabla 15.5 Diferencias para el intervalo de suma de rangos del ejemplo 15.8

		y_j				
	d_{ij}	**4590**	**4850**	**5640**	**6390**	**6510**
x_i	**10 860**	6270	6010	5220	4470	4350
	11 120	6530	6270	5480	4730	4610
	11 340	6750	6490	5700	4950	4830
	12 130	7540	7280	6490	5740	5620
	13 070	8480	8220	7430	6680	6560
	14 380	9790	9530	8740	7990	7870

■

Cuando m y n son grandes el estadístico de prueba Wilcoxon tiene aproximadamente una distribución normal. Esta se puede usar para deducir una aproximación de muestra grande para el valor c en el intervalo (15.12). El resultado es

$$c \approx \frac{mn}{2} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{mn(m+n+1)}{12}}$$

Al igual que con el intervalo de rango con signo, el intervalo de prueba de rangos (15.9) es muy eficiente respecto al intervalo *t*; en muestras grandes tenderá a ser sólo un poco más larga que el intervalo *t*, cuando las poblaciones fundamentales son normales; y puede ser considerablemente más corta que el intervalo *t* si las poblaciones fundamentales tienen colas más gruesas que las poblaciones normales.

EJERCICIOS Sección 15.3 (17–22)

17. El artículo **"The Lead Content and Acidity of Christchurch Precipitation" (*New Zealand J. of Science*, 1980: 311–312)** publica los datos siguientes sobre la concentración de plomo (*mg*/L) en muestras tomadas durante diferentes lluvias en verano: 17.0, 21.4, 30.6, 5.0, 12.2, 11.8, 17.3 y 18.8. Suponiendo que la distribución del contenido de plomo es simétrica, utilice el intervalo Wilcoxon de rango con signo para obtener un intervalo de confianza de 95% para μ.

18. Calcule un intervalo de rango con signo de 99% para el promedio verdadero de pH, μ (suponiendo simetría) usando los datos del ejercicio 15.3. [*Sugerencia:* Trate de calcular sólo los promedios apareados que tengan valores relativamente pequeños o grandes (más que los 105 promedios).]

19. Se realizó un experimento para comparar las capacidades de dos diferentes disolventes para extraer la creosota impregnada en la prueba de los registros. Cada uno de los ocho registros se dividió en dos segmentos, a continuación se seleccionó al azar un segmento para la aplicación del primer solvente, mientras que el otro segmento recibió el segundo solvente.

Log	1	2	3	4	5	6	7	8
Solvente 1	3.92	3.79	3.70	4.08	3.87	3.95	3.55	3.76
Solvente 2	4.25	4.20	4.41	3.89	4.39	3.75	4.20	3.90

Calcule un intervalo de confianza con un nivel de confianza de aproximadamente 95% de la diferencia entre la cantidad promedio real extraída mediante primer solvente y la cantidad promedio real extraída mediante el segundo solvente.

20. Las siguientes observaciones son cantidades de emisiones de hidrocarburos, que resultan del desgaste en pavimento de los neumáticos de banda en diagonal bajo una carga de 522 kg, infladas a 228 kPa y corriendo a 64 km/h durante 6 horas **("Characterization of Tire Emissions Using an Indoor Test Facility", *Rubber Chemistry and Technology*, 1978: 7–25)**: .045, .117, .062 y .072. ¿Qué niveles de confianza se pueden alcanzar para este tamaño muestral si se usa el intervalo de rango con signo? Seleccione un nivel de confianza apropiado y calcule el intervalo.

21. Calcule el intervalo de confianza de suma de rangos de 90% para $\mu_1 - \mu_2$ usando los datos del ejercicio 11.

22. Calcule un intervalo de confianza de 99% para $\mu_1 - \mu_2$ usando los datos del ejercicio 12.

15.4 ANOVA libres de distribución

El modelo ANOVA de un solo factor del capítulo 10 para comparar I medias de una población o tratamiento significa suponer que para $i = 1, 2, \ldots, I$ se extrajo de una población normal una muestra aleatoria de tamaño J_i con media μ_i y varianza σ^2. Esto se puede escribir como

$$X_{ij} = \mu_i + \epsilon_{ij} \qquad j = 1, \ldots, J_i;\ i = 1, \ldots, I \tag{15.10}$$

donde las ϵ_{ij} están independiente y normalmente distribuidas con media cero y varianza σ^2. Aun cuando se requirió la suposición de normalidad para la validez de la prueba F descrita en el capítulo 10, el siguiente procedimiento para probar la igualdad de las μ_i requiere sólo que las ϵ_{ij} que tengan la misma distribución continua.

La prueba Kruskal-Wallis

Sea $N = \Sigma J_i$, el número total de observaciones del conjunto de datos y suponga que se ordenan todas las N observaciones de 1 (la X_{ij} más pequeña) a N (la X_{ij} más grande).

Cuando H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_I$ es verdadera, todas las N observaciones provienen de la misma distribución, en cuyo caso todas las posibles asignaciones de los rangos 1, 2,..., N a las I muestras son igualmente probables y se espera que los rangos se mezclen en estas muestras. Pero, si H_0 es falsa, entonces algunas muestras estarán formadas sobre todo por observaciones que tengan rangos pequeños en la muestra combinada, mientras que otras estarán formadas principalmente por observaciones que tengan rangos grandes. En forma más específica, si R_{ij} denota el rango de X_{ij} entre las N observaciones y $R_{i\cdot}$ y $\overline{R}_{i\cdot}$ denotan, respectivamente, el total y el promedio de los rangos de la i-ésima muestra, entonces cuando H_0 es verdadera

$$E(R_{ij}) = \frac{N+1}{2} \qquad E(\overline{R}_{i\cdot}) = \frac{1}{J_i}\sum_j E(R_{ij}) = \frac{N+1}{2}$$

El estadístico de prueba Kruskal-Wallis es una medida de la magnitud a la cual las $\overline{R}_{i\cdot}$ se desvían de su valor esperado común $(N + 1)/2$.

ESTADÍSTICO DE PRUEBA

$$K = \frac{12}{N(N+1)}\sum_{j=1}^{I} J_i\left(\overline{R}_{i\cdot} - \frac{N+1}{2}\right)^2 = \frac{12}{N(N+1)}\sum_{i=1}^{I}\frac{R_{i\cdot}^2}{J_i} - 3(N+1) \tag{15.11}$$

La segunda expresión para K es la fórmula para computadora; comprende los totales de rango ($R_{i\cdot}$) más que los promedios, y requiere sólo una resta.

Los valores de K al menos tan contradictorios a H_0 como la k calculada son aquellos que son iguales o exceden k. Esto es, una prueba de cola superior: valor $P = P_0(K \geq k)$. Bajo H_0, cada asignación posible de los rangos de las I muestras es igualmente probable, de modo que en teoría todas las asignaciones se pueden enumerar, se puede determinar el valor de K para cada una y obtener la distribución nula al contar el número de veces que se presente cada uno de los valores de K. Evidentemente este cálculo es tedioso, de manera que aun cuando hay tablas de la distribución nula exacta y valores críticos para valores pequeños de las J_i, se usará la siguiente aproximación de "muestra grande".

PROPOSICIÓN

Cuando H_0 es verdadera y

$$I = 3 \qquad J_i \leq 6 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

o

$$I > 3 \qquad J_i \geq 5 \qquad (i = 1,..., I)$$

entonces K tiene aproximadamente una distribución ji-cuadrada con grado de libertad $I - 1$. Esto implica que un valor P aproximadamente es igual al área bajo la curva χ^2_{I-1} a la derecha de k. La tabla A.11 del apéndice muestra una tabulación de las áreas bajo la cola superior de una curva ji-cuadrada.

EJEMPLO 15.9 Las observaciones siguientes (tabla 15.6) sobre el índice de rigidez axial resultaron de un estudio de armazones conectadas a placas metálicas en las que se usaron cinco diferentes longitudes de placa: 4, 6, 8, 10 y 12 pulgadas (**"Modeling Joints Made with Light- Gauge Metal Connector Plates", *Forest Products J.*, 1979: 39–44).**

Tabla 15.6 Datos y rangos para el ejemplo 15.9

	$i = 1$ (4″):	309.2	309.7	311.0	316.8	326.5	349.8	409.5	
	$i = 2$ (6″):	331.0	347.2	348.9	361.0	381.7	402.1	404.5	
	$i = 3$ (8″):	351.0	357.1	366.2	367.3	382.0	392.4	409.9	
	$i = 4$ (10″):	346.7	362.6	384.2	410.6	433.1	452.9	461.4	
	$i = 5$ (12″):	407.4	410.7	419.9	441.2	441.8	465.8	473.4	
							$r_{i\cdot}$	$\bar{r}_{i\cdot}$	
	$i = 1$:	1	2	3	4	5	10	24	49	7.00
	$i = 2$:	6	8	9	13	17	21	22	96	13.71
Rangos	$i = 3$:	11	12	15	16	18	20	25	117	16.71
	$i = 4$:	7	14	19	26	29	32	33	160	22.86
	$i = 5$:	23	27	28	30	31	34	35	208	29.71

El valor calculado de K es

$$k = \frac{12}{35(36)}\left[\frac{(49)^2}{7} + \frac{(96)^2}{7} + \frac{(117)^2}{7} + \frac{(160)^2}{7} + \frac{(208)^2}{7}\right] - 3(36)$$
$$= 20.21$$

La tabla A.11 del apéndice muestra que el área bajo la curva ji-cuadrada con cuatro grados de libertad a la derecha de 16.74 es .005 y el área bajo esta curva a la derecha de 20.51 es .001. Por tanto, el valor P para la prueba es ligeramente mayor a .001 pero mucho menor a .005, por lo cual es menor a .01. Por tanto, H_0 se rechaza a un nivel de significancia de .01 y se concluye que la rigidez axial esperada no depende de la longitud del plato. ■

Prueba de Friedman para un experimento de bloque aleatorizado

Suponga que $X_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \epsilon_{ij}$, donde α_i es el i-ésimo efecto de tratamiento, β_j es el j-ésimo efecto de bloque y las ϵ_{ij} se extraen de manera independiente de la misma distribución continua (pero no necesariamente normal). Por tanto, para probar H_0: $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 0$, la hipótesis nula de efectos sin tratamiento, primero se ordenan las observaciones en forma separada de 1 a I dentro de cada bloque, y luego se calcula el promedio de rango $\bar{r}_{i\cdot}$ para cada uno de los I tratamientos. Cuando H_0 es verdadera, las $\bar{r}_{i\cdot}$ deben ser cercanas entre sí, puesto que dentro de cada bloque todas las $I!$ asignaciones de rangos a tratamientos son igualmente probables. El estadístico de prueba de Friedman mide la discrepancia entre el valor esperado $(I + 1)/2$ de cada promedio de rango y las $\bar{r}_{i\cdot}$.

ESTADÍSTICO DE PRUEBA

$$F_r = \frac{12J}{I(I+1)}\sum_{i=1}^{I}\left(\bar{R}_{i\cdot} - \frac{I+1}{2}\right)^2 = \frac{12}{IJ(I+1)}\sum R_{i\cdot}^2 - 3J(I+1)$$

Nuevamente la prueba es de cola superior, debido a que cualquier valor que exceda la f_r calculada es aún más contradictorio a H_0 que la f_r por sí misma. Para los casos $I = 3$, $J = 2,\ldots, 15$ e $I = 4$, $J = 2,\ldots, 8$, el libro de Lehmann (véase la bibliografía del capítulo) da los valores críticos de cola superior para la prueba. De modo alternativo, para valores pares moderados de J, el estadístico de prueba F_r tiene aproximadamente una distribución

ji-cuadrada con grado de libertad $I - 1$ cuando H_0 es verdadera, Por lo que el valor P es aproximadamente el área bajo la curva χ^2_{I-1} a la derecha de f_r.

EJEMPLO 15.10 El artículo **"Physiological Effects During Hypnotically Requested Emotions" (*Psychosomatic Med.*, 1963: 334–343)** publica la siguiente información (tabla 15.7) sobre el potencial de la piel (mV) cuando se le solicitó a cada uno de ocho sujetos experimentar emociones de temor, alegría, depresión y calma.

Tabla 15.7 Datos y rangos para el ejemplo 15.10

	Bloques (sujetos)							
x_{ij}	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Miedo	23.1	57.6	10.5	23.6	11.9	54.6	21.0	20.3
Felicidad	22.7	53.2	9.7	19.6	13.8	47.1	13.6	23.6
Depresión	22.5	53.7	10.8	21.1	13.7	39.2	13.7	16.3
Calma	22.6	53.1	8.3	21.6	13.3	37.0	14.8	14.8

Rangos	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	$r_{i\cdot}$	$r_{i\cdot}^2$
Miedo	4	4	3	4	1	4	4	3	27	729
Felicidad	3	2	2	1	4	3	1	4	20	400
Depresión	1	3	4	2	3	2	2	2	19	361
Calma	2	1	1	3	2	1	3	1	14	196
										1686

Por tanto,

$$f_r = \frac{12}{4(8)(5)}(1686) - 3(8)(5) = 6.45$$

La columna $\nu = 3$ de la tabla A.11 del apéndice muestra que el valor $P \approx .09$. Dado que este excede .05, la H_0 no puede ser rechazada a este nivel de significancia. No hay evidencia de que el promedio de potencial en la piel dependa de qué emoción se solicite. ■

El libro de Myles Hollander y Douglas Wolfe (véase la bibliografía del capítulo) examina múltiples procedimientos de comparación asociados con las pruebas Kruskal-Wallis y Friedman, así como otros aspectos de ANOVA libres de distribución.

EJERCICIOS Sección 15.4 (23–27)

23. La información siguiente se refiere a la concentración del isótopo radiactivo estroncio-90, obtenida en muestras de leche de cinco lecherías seleccionadas al azar en cuatro regiones diferentes.

	1	6.4	5.8	6.5	7.7	6.1
Región	**2**	7.1	9.9	11.2	10.5	8.8
	3	5.7	5.9	8.2	6.6	5.1
	4	9.5	12.1	10.3	12.4	11.7

Pruebe al nivel .10 para ver si el promedio verdadero de la concentración de estroncio-90 difiere en al menos dos de las regiones.

24. El artículo **"Production of Gaseous Nitrogen in Human Steady–State Conditions" (*J. of Applied Physiology*, 1972: 155–159)** publica las siguientes observaciones sobre la cantidad de nitrógeno espirado (en litros) bajo cuatro regímenes de dieta: 1) ayuno, 2) 23% de proteínas, 3) 32% de proteínas y

4) 67% de proteínas. Utilice la prueba Kruskal-Wallis al nivel .05 para probar la igualdad de las μ_i correspondientes.

1.	4.079	4.859	3.540	5.047	3.298
2.	4.368	5.668	3.752	5.848	3.802
3.	4.169	5.709	4.416	5.666	4.123
4.	4.928	5.608	4.940	5.291	4.674
1.	4.679	2.870	4.648	3.847	
2.	4.844	3.578	5.393	4.374	
3.	5.059	4.403	4.496	4.688	
4.	5.038	4.905	5.208	4.806	

25. En el artículo **"Cortisol, Cortisone, and 11-Deoxycortisol Levels in Human Umbilical and Maternal Plasma in Relation to the Onset of Labor" (*J. of Obstetric Gynaecology of the British Commonwealth*, 1974: 737–745)** se publican los siguientes datos sobre el nivel de hidrocortisona. Los sujetos experimentales fueron mujeres cuyos bebés nacieron luego de un periodo de gestación de entre 38 y 42 semanas. Las mujeres del grupo 1 eligieron parir mediante cesárea antes de que comenzara el trabajo de parto, las del grupo 2 parieron por cesárea de emergencia durante un trabajo de parto inducido y las del grupo 3 experimentaron un trabajo de parto espontáneo. Utilice la prueba Kruskal-Wallis al nivel .05 para probar la igualdad de las tres medias poblacionales.

Grupo 1	262	307	211	323	454	339
	304	154	287	356		
Grupo 2	465	501	455	355	468	362
Grupo 3	343	772	207	1048	838	687

26. En una prueba para determinar si un suelo tratado previamente con pequeñas cantidades de Basic-H se vuelve más permeable al agua, se dividieron unas muestras de suelo en bloques y cada uno de estos bloques recibió los cuatro tratamientos en estudio. Los tratamientos fueron (*A*) agua con .001% de Basic-H hasta cubrirla con tierra de control, (*B*) agua sin Basic-H en tierra de control, (*C*) agua con Basic-H cubierta con tierra tratada previamente con Basic-H y (*D*) agua sin Basic-H sobre tierra tratada previamente con Basic-H. Pruebe a un nivel .01 para ver si hay algún efecto debido a los diversos tratamientos.

	Bloques				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
A	37.1	31.8	28.0	25.9	25.5
B	33.2	25.3	20.2	20.3	18.3
C	58.9	54.2	49.2	47.9	38.2
D	56.7	49.6	46.4	40.9	39.4
	6	**7**	**8**	**9**	**10**
A	25.3	23.7	24.4	21.7	26.2
B	19.3	17.3	17.0	16.7	18.3
C	48.8	47.8	40.2	44.0	46.4
D	37.1	37.5	39.6	35.1	36.5

27. En un experimento para estudiar la forma en la que diferentes anestésicos afectan la concentración de epinefrina en plasma, se seleccionaron 10 perros y se les midió la concentración cuando estaban bajo el influjo de isoflurano, halotano y ciclopropano anestésicos (**"Sympathoadrenal and Hemodynamic Effects of Isoflurane, Halothane, and Cyclopropane in Dogs", *Anesthesiology*, 1974: 465–470).** Pruebe al nivel .05 para ver si hay un efecto anestésico en la concentración.

	Perro				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
Isoflurano	.28	.51	1.00	.39	.29
Halotano	.30	.39	.63	.38	.21
Ciclopropano	1.07	1.35	.69	.28	1.24
	6	**7**	**8**	**9**	**10**
Isoflurano	.36	.32	.69	.17	.33
Halotano	.88	.39	.51	.32	.42
Ciclopropano	1.53	.49	.56	1.02	.30

EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS (28–36)

28. El artículo **"Effects of a Rice-Rich Versus Potato-Rich Diet on Glucose, Lipoprotein, and Cholesterol Metabolism in Noninsulin-Dependent Diabetics" (*Amer. J. of Clinical Nutr.*, 1984: 598–606)** proporciona la siguiente información sobre la cantidad de síntesis de colesterol para ocho sujetos diabéticos. A estos se les alimentó con una dieta estandarizada, con papas o arroz como fuente principal de carbohidratos. Los participantes recibieron ambas dietas durante periodos especificados, con la cantidad de síntesis de colesterol (mmol/día) medida al final de cada periodo de dieta. El análisis presentado en este artículo utilizó una prueba libre de distribución. Use esta prueba con nivel de significancia .05 para determinar si la media verdadera de la cantidad de síntesis de colesterol difiere de modo importante para las dos fuentes de carbohidratos.

Cantidad de síntesis de colesterol

Sujeto	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Papas	1.88	2.60	1.38	4.41	1.87	2.89	3.96	2.31
Arroz	1.70	3.84	1.13	4.97	.86	1.93	3.36	2.15

29. Las tácticas de venta de alta presión o los vendedores de puerta en puerta pueden ser muy agresivos. Numerosas personas sucumben a esas tácticas, firman acuerdos de compra y posteriormente se lamentan de sus acciones. A mediados de la década de 1970 la Federal Trade Commission implantó reglamentos que aclaran y amplían los derechos de los compradores para cancelar dichos acuerdos. La información siguiente es un subconjunto de la información dada en el artículo **"Evaluating the FTC Cooling-Off Rule" (*J. of Consumer Affairs*, 1977: 101–106)**. Las observaciones individuales son porcentajes de cancelación para cada uno de nueve vendedores durante cada uno de 4 años. Utilice una prueba apropiada al nivel .05 para ver si el promedio verdadero de la cantidad de cancelaciones depende del año.

	Vendedor								
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1973	2.8	5.9	3.3	4.4	1.7	3.8	6.6	3.1	0.0
1974	3.6	1.7	5.1	2.2	2.1	4.1	4.7	2.7	1.3
1975	1.4	.9	1.1	3.2	.8	1.5	2.8	1.4	.5
1976	2.0	2.2	.9	1.1	.5	1.2	1.4	3.5	1.2

30. La información dada sobre la concentración de fósforo en tierra superficial para cuatro tratamientos diferentes de suelos aparece en el artículo **"Fertilisers for Lotus and Clover Establishment on a Sequence of Acid Soils on the East Otago Uplands" (*N. Zeal. J. of Exptl. Ag.*, 1984: 119–129)**. Utilice un procedimiento libre de distribución para probar la hipótesis nula de no diferencia en la media verdadera de concentración de fósforo (mg/g) para los cuatro tratamientos de suelos.

Tratamiento	**I**	8.1	5.9	7.0	8.0	9.0
	II	11.5	10.9	12.1	10.3	11.9
	III	15.3	17.4	16.4	15.8	16.0
	IV	23.0	33.0	28.4	24.6	27.7

31. Consulte la información del ejercicio 30 y calcule un intervalo de confianza de 95% para la diferencia entre el promedio verdadero de concentraciones para los tratamientos II y III.

32. El estudio publicado en **"Gait Patterns During Free Choice Ladder Ascents" (*Human Movement Sci.*, 1983: 187–195)** fue motivado por la publicidad relativa al mayor porcentaje de accidentes para individuos que suben por escaleras. De acuerdo con instrucciones especificadas se utilizaron varias formas diferentes de pasos por personas que trepaban por una escalera recta portátil. Se dan tiempos de ascenso para siete sujetos que usaron un paso lateral y seis sujetos que usaron un paso diagonal de cuatro tiempos.

Lateral	.86	1.31	1.64	1.51	1.53	1.39	1.09
Diagonal	1.27	1.82	1.66	.85	1.45	1.24	

a. Realice una prueba usando $\alpha = .05$ para ver si la información sugiere cualquier diferencia en el promedio verdadero de tiempos de ascenso para los dos pasos.

b. Calcule un intervalo de confianza de 95% para la diferencia entre el promedio verdadero de tiempos de paso.

33. La **prueba de signo** es un procedimiento muy sencillo para probar hipótesis acerca de una mediana poblacional que sólo supone que la distribución fundamental es continua. Para ilustrar, considere la siguiente muestra de 20 observaciones sobre la vida útil de un componente (h):

1.7	3.3	5.1	6.9	12.6	14.4	16.4
24.6	26.0	26.5	32.1	37.4	40.1	40.5
41.5	72.4	80.1	86.4	87.5	100.2	

Se desea probar H_0: $\tilde{\mu} = 25.0$ contra H_0: $\tilde{\mu} > 25.0$. El estadístico de prueba es Y = el número de observaciones que exceden de 25.

a. Considere rechazar H_0 si $Y \geq 15$. ¿Cuál es el valor de α (la probabilidad de un error tipo I) para esta prueba? [*Sugerencia:* Considere un "éxito" como una vida útil que excede de 25. Entonces Y es el número de éxitos de la muestra.] ¿Qué clase de distribución tiene Y cuando $\tilde{\mu} = 25$?

b. Para los datos dados, ¿se debería rechazar H_0 a un nivel de significancia de .05?

[*Nota*: El estadístico de prueba es el número de diferencias $X_i - 25$ que tiene signos positivos, por ello el nombre de *prueba de signo*.]

34. Consulte el ejercicio 33 y considere un intervalo de confianza asociado con la prueba de signo: el **intervalo de signo**. Las hipótesis relevantes son ahora H_0: $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0$ contra H_a: $\tilde{\mu} \neq \tilde{\mu}_0$.

a. Suponga que se decide rechazar H_0 si $Y \geq 15$ o $Y \leq 5$. ¿Cuál es la α más pequeña para la cual es equivalente a rechazar H_0 si el valor $P \leq \alpha$?

b. El intervalo de confianza constará de todos los valores $\tilde{\mu}_0$ para los cuales H_0 no es rechazada. Determine el intervalo de confianza para la información dada y exprese el nivel de confianza.

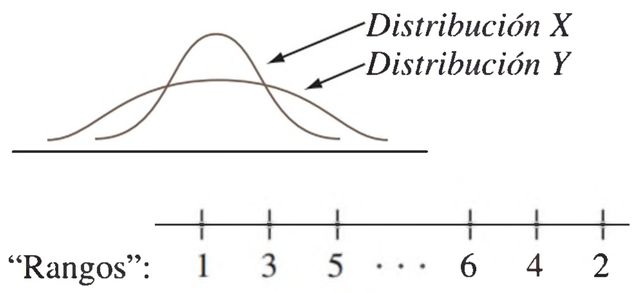
35. Suponga que desea probar

H_0: las distribuciones X y Y son idénticas

contra

H_a: la distribución X está menos dispersa que la distribución Y

La figura siguiente presenta distribuciones X y Y para las cuales H_a es verdadera. La prueba Wilcoxon de suma de rangos no es apropiada en esta situación porque cuando H_a es verdadera, como se ilustra, las Y tenderán a estar en los extremos máximos de la muestra combinada (lo que da por resultado rangos pequeños y grandes de Y), de modo que la suma de los rangos de X dará por resultado un valor W que no es ni grande ni pequeño.



Considere modificar el procedimiento para asignar rangos como sigue: después de ordenar la muestra combinada de $m + n$ observaciones la observación más pequeña recibe un rango 1, la observación más grande recibe un rango 2, la segunda más pequeña recibe rango 3, la segunda más grande recibe rango 4 y

así sucesivamente. Entonces, si H_a es verdadera, como se ilustra, los valores X tenderán a estar en la parte media de la muestra y en esa forma reciben rangos grandes. Denote con W' la suma de los rangos X y considere una prueba de cola superior basada en este estadístico de prueba. Cuando H_0 es verdadera, todo posible conjunto de rangos de X tiene la misma probabilidad, de modo que W' *tiene la misma distribución que* W *cuando* H_0 *es verdadera.* La información siguiente se refiere al grosor muscular intermedio para las arteriolas de los pulmones de niños que murieron por síndrome de muerte infantil repentina (x) (SIDS, por sus siglas en inglés) y un grupo de niños de control (y). Efectúe la prueba de H_0 contra H_a al nivel .05.

SIDS	4.0	4.4	4.8	4.9	
Control	3.7	4.1	4.3	5.1	5.6

Para más información de esta prueba llamada *prueba de Siegel-Tukey* consulte el libro de Lehmann (en la bibliografía).

36. El procedimiento para ordenar descrito en el ejercicio 35 en ocasiones es asimétrico debido a que la observación más pequeña recibe un rango 1, mientras que la más grande recibe rango 2 y así sucesivamente. Suponga que la más pequeña y la más grande reciben rango 1, la segunda más pequeña y la segunda más grande reciben rango 2 y así sucesivamente, y sea W'' la suma de los rangos X. La distribución nula de W'' no es idéntica a la distribución nula de W, de modo que se hacen necesarias tablas diferentes. Considere el caso $m = 3$, $n = 4$. Haga una lista de los 35 posibles ordenamientos de los tres valores X entre las siete observaciones (por ejemplo, 1, 3, 7 o 4, 5, 6), asigne rangos en la forma descrita, calcule el valor de W'' para cada posibilidad, y a continuación tabule la distribución nula de W''. ¿Cuál es el valor P si $w'' = 9$? Esta es la *prueba Ansari-Bradley*; para información adicional consulte el libro de Hollander y Wolfe en la bibliografía del capítulo.

BIBLIOGRAFÍA

Hollander, Myles y Douglas Wolfe, *Nonparametric Statistical Methods* (2a. ed.), Wiley, Nueva York, 1999. Una muy buena referencia sobre métodos libres de distribución con un excelente conjunto de tablas.

Lehmann, Erich, *Nonparametrics: Statistical Methods Based on Ranks*, Springer, Nueva York, 2006. Un excelente examen de los métodos libres de distribución más importantes, presentados con gran cantidad de ingeniosos comentarios.

16 Métodos de control de calidad

INTRODUCCIÓN

Las características de calidad de los productos manufacturados han recibido considerable atención por parte de los ingenieros de diseño y el personal de producción, así como de quienes se ocupan de la administración financiera. Por muchos años se pensó fue que los muy elevados niveles de calidad y bienestar económico eran metas incompatibles. Pero recientemente se ha hecho cada vez más evidente que elevar los niveles de calidad puede llevar a reducir costos y a un mayor grado de satisfacción del consumidor, con lo cual aumenta la rentabilidad. Esto ha dado por resultado un renovado énfasis en las técnicas estadísticas para el diseño de la calidad en los productos y para identificar problemas de calidad en diversas etapas de producción y distribución.

Las gráficas de control tienen ahora un amplio uso como técnicas de diagnóstico para el monitoreo de procesos de producción y de servicio, para identificar inestabilidad y circunstancias poco comunes. Después de una introducción a las ideas básicas en la sección 16.1, en las siguientes cuatro secciones se presentan diversas gráficas de control. La base para casi todas estas se encuentra en el trabajo previo, referente a las distribuciones de probabilidad de varios estadísticos como, por ejemplo, la media muestral $\overline{X}$ y la proporción muestral $\hat{p} = X/n$.

Otra situación que usualmente se presenta en la industria es una decisión que toma un cliente en cuanto a si un lote de piezas ofrecidas por un proveedor es de calidad aceptable. En la última sección del capítulo se examinan brevemente algunos métodos de muestreo de aceptación para decidir, con base en datos muestrales, sobre la disposición de un lote.

Además de gráficas de control y planes de muestreo de aceptación, que primero se desarrollaron en las décadas de 1920 y 1930, los expertos en estadística y los ingenieros han introducido recientemente numerosos métodos estadísticos para identificar tipos y niveles de entradas de producción que aseguran una producción de alta calidad. Investigadores japoneses y, en particular, el ingeniero y estadístico G.

Taguchi y sus discípulos han tenido gran influencia en este sentido; ahora hay una gran cantidad de información conocida como "métodos Taguchi". Las ideas de diseño experimental y, en particular, los experimentos de factores fraccionarios son ingredientes clave. Todavía hay mucha controversia en la comunidad estadística en cuanto a cuáles diseños y métodos de análisis son más apropiados para el trabajo a ejecutar. Una crítica reciente está contenida en el artículo de George Box y colaboradores citado en la bibliografía de este capítulo; el libro de Thomas Ryan citado aquí también es igualmente una buena fuente de información.

16.1 Comentarios generales sobre las gráficas de control

Un mensaje esencial en todo este libro ha sido la capacidad de penetración de la variación que ocurre de manera natural, asociada con cualquier característica o atributo de individuos u objetos diferentes. En un contexto de manufacturas no importa lo cuidadosamente que se calibren las máquinas, se controlen los factores ambientales, se supervisen los materiales y otros insumos o se capacite a los trabajadores, el diámetro variará de un tornillo a otro, algunas hojas de plástico serán más fuertes que otras, algunos fusibles serán defectuosos y otros no tendrán problemas, etcétera. Se podría considerar que estas variaciones aleatorias naturales son ruido de fondo incontrolable.

Son, no obstante, otras fuentes de variación las que pueden tener un impacto pernicioso en la calidad de las piezas producidas mediante algún proceso. Esta variación puede atribuirse a material contaminado, ajustes incorrectos de las máquinas, desgaste poco común en las herramientas y otros semejantes. Estas fuentes de variación se han denominado *causas asignables* en la literatura de control de calidad. Las **gráficas de control** son un mecanismo para reconocer situaciones donde las causas asignables pueden estar afectando de manera adversa la calidad de un producto. Una vez que la gráfica indique una situación fuera de control, puede iniciarse una investigación para identificar causas y tomar medidas correctivas.

Un elemento básico de las gráficas de control es que las muestras se hayan seleccionado del proceso de interés en una secuencia de tiempos. Dependiendo del aspecto del proceso que se está investigando se selecciona algún estadístico, por ejemplo la media muestral o la proporción muestral de los artículos defectuosos. El valor de este estadístico se calcula entonces para cada muestra en su turno. El resultado entonces es una gráfica de control tradicional al graficar estos valores calculados en el tiempo, como se ilustra en la figura 16.1.

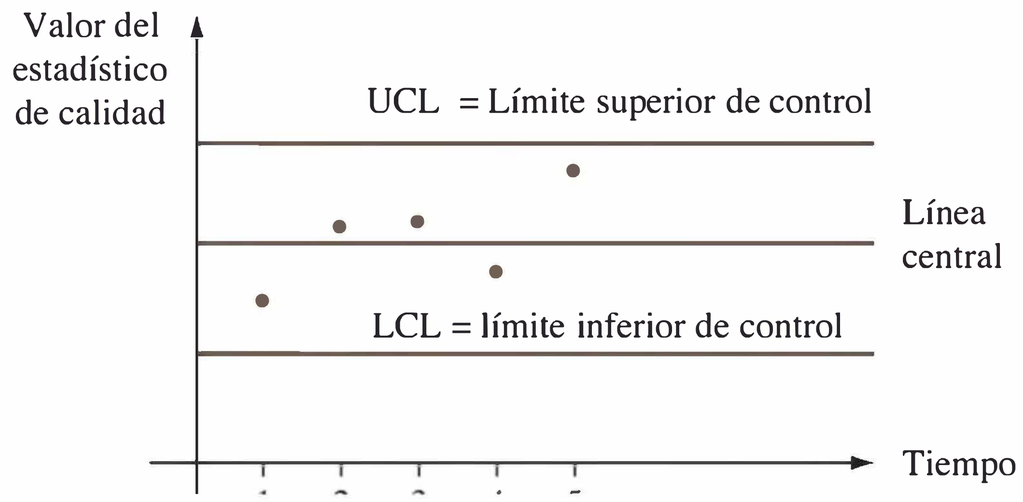


Figura 16.1 Prototipo de gráfica de control

Note que, además de los puntos localizados, la gráfica tiene una línea central y dos límites de control. La base para la selección de una línea central es a veces un valor objetivo o una especificación de diseño, por ejemplo, un valor deseado del diámetro de los cojinetes. En otros casos la altura de la línea central se estima a partir de la información. Si los puntos de la gráfica están todos entre los dos límites de control, se considera que el proceso está bajo control. Esto es, se piensa que el proceso está operando de un modo estable que refleja sólo una variación aleatoria natural. Una "señal" fuera de control se presenta siempre que los puntos graficados caigan fuera de los límites, lo cual se supone atribuible a alguna causa asignable, y se inicia una búsqueda de dicha causa. Los límites están diseñados de modo que un proceso bajo control genere muy pocas alarmas falsas, mientras que un proceso fuera de control rápidamente da lugar a un punto fuera de los límites.

Hay una fuerte analogía entre la lógica de una gráfica de control y el trabajo previo de pruebas de hipótesis. La hipótesis nula aquí es que el proceso está bajo control. Cuando un proceso bajo control da un punto *fuera* de los límites de control (una señal fuera de control), es que ha ocurrido un error tipo I. Por otra parte, un error tipo II ocurre cuando un proceso fuera de control produce un punto *dentro* de los límites de control. La apropiada selección del tamaño muestral y los límites de control (estos últimos correspondientes a especificar una región de rechazo en la prueba de hipótesis) hará que las probabilidades de error asociadas sean adecuadamente pequeñas.

Hay que destacar que "bajo control" no es sinónimo de "satisface especificaciones de diseño o tolerancia". La magnitud de una variación natural puede ser tal que el porcentaje de piezas que no se apeguen a las especificaciones será mucho mayor de lo que se pueda tolerar. En tales casos puede ser necesaria una reestructuración importante del proceso para mejorar su capacidad. Un proceso bajo control es simplemente aquel cuyo comportamiento respecto a la variación es estable en el tiempo, sin mostrar indicaciones de causas extrañas poco comunes.

Ahora el software para elaborar gráficas de control es ampliamente utilizado. La revista *Quality Progress* contiene numerosos anuncios de paquetes de cómputo para el control estadístico de calidad. Además, SAS y la versión más reciente de Minitab, entre otros paquetes de uso general, tienen atractivas capacidades de control de calidad.

EJERCICIOS Sección 16.1 (1–5)

1. Una gráfica de control para el grosor de láminas de acero laminado está basada en un límite superior de control de .0520 pulgadas y un límite inferior de .0475 pulgadas. Los primeros diez valores del estadístico de control de calidad (en este caso $\overline{X}$, el grueso medio muestral de $n = 5$ láminas de muestra) son .0506, .0493, .0502, .0501, .0512, .0498, .0485, .0500, .0505 y .0483. Construya la parte inicial de la gráfica de control de calidad y comente sobre su aspecto.

2. Consulte el ejercicio 1 y suponga que los diez valores más recientes de la estadística de control de calidad son .0493, .0485, .0490, .0503, .0492, .0486, .0495, .0494, .0493 y .0488. Construya la parte relevante de la correspondiente gráfica de control y comente sobre su aspecto.

3. Suponga que se construye una gráfica de control de modo que la probabilidad de un punto que cae fuera de los límites de control, cuando el proceso está realmente bajo control, es .002. ¿Cuál es la probabilidad de que diez puntos sucesivos (con base en muestras seleccionadas de manera independiente) estén dentro de los límites de control? ¿Cuál es la probabilidad de que los 25 puntos sucesivos caigan dentro de los límites de control? ¿Cuál es el número más pequeño de puntos sucesivos graficados, para el que la probabilidad de observar al menos uno fuera de los límites de control exceda .10?

4. Un corcho destinado a ser utilizado en una botella de vino se considera aceptable si su diámetro está entre 2.9 y 3.1 cm (*por tanto, el límite de especificación inferior* es LSL = 2.9 y *el límite de especificación superior* es USL = 3.1).

a. Si el diámetro del corcho es una variable de una distribución normal con media 3.04 cm y desviación estándar de .02, ¿cuál es la probabilidad de que un corcho seleccionado al azar cumpla con las especificaciones?

b. Si, en cambio, la media es de 3.00 y la desviación estándar es de .05, ¿la probabilidad de que se ajuste a las especificaciones es más pequeña o más grande de lo que era en el inciso a)?

5. Si una variable del proceso está distribuida normalmente a la larga casi todos los valores observados deben estar entre $\mu - 3\sigma$ y $\mu + 3\sigma$, dando una extensión del proceso de 6σ.

a. Con LSL y USL denotando los límites de especificación inferior y superior, generalmente se usa un *índice de capacidad de proceso* $C_p = (\text{USL} - \text{LSL})/6\sigma$. El valor $C_p = 1$

indica un proceso que sólo marginalmente es capaz de cumplir con las especificaciones. Idealmente C_p debe superar los 1.33 (un "muy buen" proceso). Calcule el valor de C_p para cada uno de los procesos de producción de corcho descritos en el ejercicio anterior y comente.

b. El índice C_p descrito en el inciso a) no tiene en cuenta la localización del proceso. Una medida de capacidad que recurre a la media del proceso es

$$C_{pk} = \text{mín}\{(\text{USL} - \mu)/3\sigma, (\mu - \text{LSL})/3\sigma\}$$

Calcule el valor de C_{pk} para cada uno de los procesos de producción de corcho descritos en el ejercicio anterior y coméntelo. [*Nota*: En la práctica μ y σ tienen que ser estimados a partir de los datos del proceso; en la sección 16.2 se muestra cómo hacer esto.]

c. ¿Cómo se comparan C_p y C_{pk} y cuándo son iguales?

16.2 Gráficas de control para la ubicación de proceso

Suponga que la característica de calidad de interés está asociada con una variable cuyos valores observados resultan de tomar mediciones. Por ejemplo, la característica podría ser la resistencia de un alambre eléctrico (ohms), el diámetro interno de las juntas de expansión de caucho moldeado (cm) o la dureza de cierta aleación (unidades Brinell). Un uso importante de gráficas de control es ver si alguna medida de ubicación de la distribución de la variable permanece estable en el tiempo. La gráfica más popular para este fin es la $\overline{X}$.

Gráfica $\overline{X}$ basada en valores conocidos de parámetros

Debido a que hay incertidumbre acerca del valor de la variable para cualquier pieza o espécimen particular, tal variable *aleatoria* (va) se denota con X. Suponga que para un proceso bajo control, X tiene una distribución normal con media μ y desviación estándar σ. Entonces, si $\overline{X}$ denota la media muestral para una muestra aleatoria de tamaño n, seleccionada en un punto de tiempo particular, se sabe que

1. $E(\overline{X}) = \mu$
2. $\sigma_{\overline{X}} = \sigma/\sqrt{n}$
3. $\overline{X}$ tiene una distribución normal.

Se deduce que

$$P(\mu - 3\sigma_{\overline{X}} \le \overline{X} \le \mu + 3\sigma_{\overline{X}}) = P(-3.00 \le Z \le 3.00) = .9974$$

donde Z es una variable aleatoria normal estándar.* Es entonces muy probable que para un proceso bajo control la media muestral se encuentre dentro de 3 desviaciones estándar ($3\sigma_{\overline{X}}$) de la media μ del proceso.

Considere primero el caso en el que se conocen los valores de μ y σ. Suponga que en cada uno de los puntos de tiempo 1, 2, 3,..., existe una muestra aleatoria de tamaño n. Sean $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \ldots$ los valores calculados de las medias muestrales correspondientes. Una gráfica $\overline{X}$ resulta de graficar estas $\overline{x}_i$ en el tiempo, es decir, graficando los puntos $(1, \overline{x}_1)$, $(2, \overline{x}_2)$, $(3, \overline{x}_3)$, y así sucesivamente, y luego de trazar rectas horizontales de un lado a otro de la gráfica en

$$\text{LCL} = \text{límite inferior de control} = \mu - 3 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\text{UCL} = \text{límite superior de control} = \mu + 3 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

* Es tradicional el uso de gráficas basadas en 3 límites de desviación estándar, pero la tradición ciertamente no es inviolable.

Este trazado usualmente se llama gráfica 3 sigma. Cualquier punto fuera de los límites de control sugiere que el proceso pudo estar fuera de control en ese tiempo, de modo que debe iniciarse una búsqueda de las causas asignables.

EJEMPLO 16.1 Una vez al día se seleccionan aleatoriamente tres especímenes de aceite de motor del proceso de producción, y cada uno se analiza para determinar su viscosidad. La información siguiente (tabla 16.1) es para un periodo de 25 días. Una amplia experiencia con este proceso sugiere que cuando el proceso está bajo control la viscosidad de un espécimen está normalmente distribuida con media 10.5 y desviación estándar .18. Por tanto, $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{n} = .18/\sqrt{3} = .104$, de modo que los límites de control de 3 desviaciones estándar son

$$\text{LCL} = \mu - 3 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 10.5 - 3(.104) = 10.188$$

$$\text{UCL} = \mu + 3 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 10.5 + 3(.104) = 10.812$$

Tabla 16.1 Información de viscosidad para el ejemplo 16.1

Día	Observaciones de viscosidad			$\bar{x}$	s	Rango
1	10.37	10.19	10.36	10.307	.101	.18
2	10.48	10.24	10.58	10.433	.175	.34
3	10.77	10.22	10.54	10.510	.276	.55
4	10.47	10.26	10.31	10.347	.110	.21
5	10.84	10.75	10.53	10.707	.159	.31
6	10.48	10.53	10.50	10.503	.025	.05
7	10.41	10.52	10.46	10.463	.055	.11
8	10.40	10.38	10.69	10.490	.173	.31
9	10.33	10.35	10.49	10.390	.087	.16
10	10.73	10.45	10.30	10.493	.218	.43
11	10.41	10.68	10.25	10.447	.217	.43
12	10.00	10.60	10.71	10.437	.382	.71
13	10.37	10.50	10.34	10.403	.085	.16
14	10.47	10.60	10.75	10.607	.140	.28
15	10.46	10.46	10.56	10.493	.058	.10
16	10.44	10.68	10.32	10.480	.183	.36
17	10.65	10.42	10.26	10.443	.196	.39
18	10.73	10.72	10.83	10.760	.061	.11
19	10.39	10.75	10.27	10.470	.250	.48
20	10.59	10.23	10.35	10.390	.183	.36
21	10.47	10.67	10.64	10.593	.108	.20
22	10.40	10.55	10.38	10.443	.093	.17
23	10.24	10.71	10.27	10.407	.263	.47
24	10.37	10.69	10.40	10.487	.177	.32
25	10.46	10.35	10.37	10.393	.059	.11

Todos los puntos de la gráfica de control mostrados en la figura 16.2 están entre los límites de control, lo cual indica un comportamiento estable de la media del proceso en el periodo (en la subsección siguiente se usarán la desviación estándar y el rango para cada muestra).

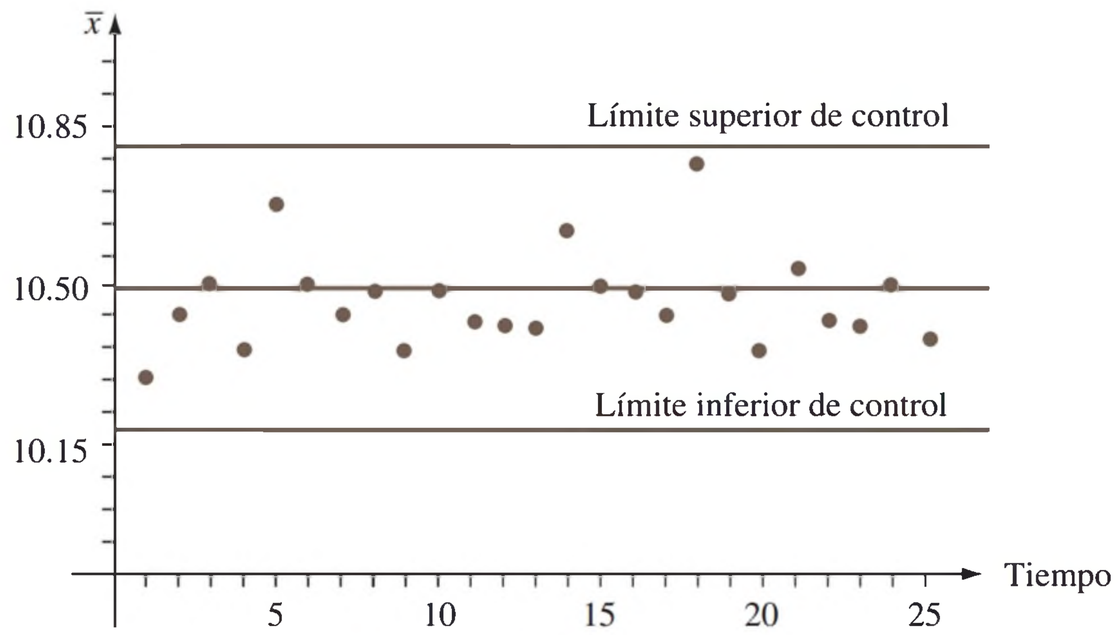


Figura 16.2 Gráfica $\bar{X}$ para la información de viscosidad del ejemplo 16.1 ■

Gráficas $\bar{X}$ basadas en parámetros estimados

En la práctica es común que se desconozcan los valores de μ y σ, de modo que deben estimarse a partir de datos muestrales antes de determinar los límites de control. Esto es así en especial cuando un proceso se somete primero a un análisis de control de calidad. Denote por n el número de observaciones de cada muestra y represente con k el número de muestras disponibles. Los valores típicos de n son 3, 4, 5 o 6, y se recomienda que k sea al menos 20. Se supone que las k muestras se reunieron durante un periodo en el que se pensaba que el proceso estaba bajo control. Más adelante se analizará esta suposición.

Con $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k$ denotando las k medias muestrales calculadas, la estimación común de μ es simplemente el promedio de estas medias:

$$\hat{\mu} = \bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i}{k}$$

Hay dos métodos diferentes que por lo común se usan para estimar σ, uno de ellos basado en las k desviaciones muestrales estándar y el otro en los k rangos muestrales (recuerde que el rango muestral es la diferencia entre las observaciones muestrales más grandes y las más pequeñas). Antes de la generalizada disponibilidad de buenas calculadoras y software de estadística, la facilidad de hacer cálculos manualmente era una consideración de extrema importancia, de modo que predominaba el método del rango. No obstante, en el caso de una distribución normal de población se sabe que el estimador insesgado de σ basado en S tiene una varianza más pequeña que el basado en el rango muestral. Los expertos en estadística dicen que el primer estimador es más *eficiente* que el último. La pérdida de eficiencia para el estimador es ligera cuando n es muy pequeña, pero se hace importante cuando $n > 4$.

Recuerde que la desviación estándar muestral no es un estimador insesgado para σ. Cuando $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de una distribución normal se puede demostrar (véase el ejercicio 6.37) que

$$E(S) = a_n \cdot \sigma$$

donde

$$a_n = \frac{\sqrt{2}\Gamma(n/2)}{\sqrt{n-1}\Gamma[(n-1)/2}$$

y $\Gamma(\cdot)$ denota la función gamma (véase la sección 4.4). A continuación se muestra una tabulación de a_n para la n seleccionada:

n	3	4	5	6	7	8
a_n	.886	.921	.940	.952	.959	.965

Sea

$$\bar{S} = \frac{\sum_{i=1}^{k} S_i}{k}$$

donde $S_1, S_2, \ldots, S_k$ son las desviaciones estándar muestrales para las k muestras. Entonces

$$E(\bar{S}) = \frac{1}{K} E\left(\sum_{i=1}^{k} S_i\right) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} E(S_i) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} a_n \cdot \sigma = a_n \cdot \sigma$$

De este modo

$$E\left(\frac{\bar{S}}{a_n}\right) = \frac{1}{a_n} E(\bar{S}) = \frac{1}{a_n} \cdot a_n \cdot \sigma = \sigma$$

de modo que $\hat{\sigma} = \bar{S}/a_n$ es un estimador insesgado de σ.

Límites de control basados en las desviaciones muestrales estándar

$$\text{LCL} = \bar{\bar{x}} = 3 \cdot \frac{\bar{s}}{a_n\sqrt{n}}$$

$$\text{UCL} = \bar{\bar{x}} + 3 \cdot \frac{\bar{s}}{a_n\sqrt{n}}$$

donde

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i}{k} \qquad \bar{s} = \frac{\sum_{i=1}^{k} s_i}{k}$$

EJEMPLO 16.2 Si se consulta la información de viscosidad del ejemplo 16.1, se tenía $n = 3$ y $k = 25$. Los valores de $\bar{x}_i$ y s_i $(i = 1, \ldots, 25)$ aparecen en la tabla 16.1, de donde se deduce que $\bar{\bar{x}} = 261.896/25 = 10.476$ y $\bar{s} = 3.834/25 = .153$. Con $a_3 = .886$, se tiene

$$\text{LCL} = 10.476 - 3 \cdot \frac{.153}{.886\sqrt{3}} = 10.476 - .299 = 10.177$$

$$\text{UCL} = 10.476 + 3 \cdot \frac{.153}{.886\sqrt{3}} = 10.476 + .299 = 10.775$$

Estos límites difieren un poco de los límites previos basados en $\mu = 10.5$ y $\sigma = .18$ porque ahora $\hat{\mu} = 10.476$ y $\hat{\sigma} = \bar{s}/a_3 = .173$. Una inspección de la tabla 16.1 muestra que toda $\bar{x}_i$ está entre estos nuevos límites, de manera que otra vez no es evidente una situación fuera de control. ■

Para obtener una estimación de σ basada en el rango muestral note que si $X_1, \ldots, X_n$ forman una muestra aleatoria de una distribución normal,

$$\begin{aligned} R &= \text{rango}(X_1,\ldots,X_n) = \max(X_1,\ldots,X_n) - \min(X_1,\ldots,X_n) \\ &= \max(X_1-\mu,\ldots,X_n-\mu) - \min(X_1-\mu,\ldots,X_n-\mu) \\ &= \sigma\left\{\max\left(\frac{X_1-\mu}{\sigma},\cdots,\frac{X_n-\mu}{\sigma}\right) - \min\left(\frac{X_1-\mu}{\sigma},\cdots,\frac{X_n-\mu}{\sigma}\right)\right\} \\ &= \sigma\cdot\{\max(Z_1,\ldots,Z_n) - \min(Z_1,\ldots,Z_n)\} \end{aligned}$$

donde $Z_1,\ldots, Z_n$ son variables aleatorias normales estándar independientes. Por tanto,

$$\begin{aligned} E(R) &= \sigma\cdot E(\text{rango de una muestra normal estándar}) \\ &= \sigma\cdot b_n \end{aligned}$$

de modo que R/b_n es un estimador insesgado de σ.

Ahora denote con $r_1, r_2,\ldots, r_k$ los rangos para las k muestras del conjunto de datos de control de calidad. El argumento que se acaba de dar implica que la estimación

$$\hat{\sigma} = \frac{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} r_i}{b_n} = \frac{\bar{r}}{b_n}$$

proviene de un estimador insesgado para σ. Los valores seleccionados de b_n se muestran en la siguiente tabla [su cálculo está basado en el uso de teoría estadística e integración numérica para determinar $E(\min(Z_1,\ldots, Z_n))$ y $E(\max(Z_1,\ldots, Z_n))$].

n	3	4	5	6	7	8
b_n	1.693	2.058	2.325	2.536	2.706	2.844

Límites de control basados en los rangos muestrales

$$\text{LCL} = \bar{\bar{x}} - 3\cdot\frac{\bar{r}}{b_n\sqrt{n}}$$

$$\text{UCL} = \bar{\bar{x}} + 3\cdot\frac{\bar{r}}{b_n\sqrt{n}}$$

donde $\bar{r} = \sum_{i=1}^{k} r_i/k$ y $r_1,\ldots, r_k$ son los k rangos muestrales individuales.

EJEMPLO 16.3 (Continuación del ejemplo 16.2)

La tabla 16.1 da como resultado $\bar{r} = .292$, de modo que $\hat{\sigma} = .292/b_3 = .292/1.693 = .172$ y

$$\text{LCL} = 10.476 - 3\cdot\frac{.292}{1.693\sqrt{3}} = 10.476 - .299 = 10.177$$

$$\text{UCL} = 10.476 + 3\cdot\frac{.292}{1.693\sqrt{3}} = 10.476 + .299 = 10.775$$

Estos límites son idénticos a los basados en $\bar{s}$, y nuevamente toda $\bar{x}_i$ se encuentra entre límites. ■

Recálculo de los límites de control

Se asume que la información muestral empleada para estimar μ y σ se obtuvo de un proceso bajo control, pero suponga que uno de los puntos de la gráfica de control resultante cae fuera de los límites de control. Entonces, si se puede hallar y verificar una causa asignable

para esta situación fuera de control se recomienda que los nuevos límites de control se calculen después de borrar la muestra correspondiente del conjunto de datos. Del mismo modo, si más de un punto cae fuera de los límites originales, deben determinarse nuevos límites después de eliminar cualquier punto para el que una causa asignable pueda identificarse y resolverse. Incluso puede ocurrir que uno o más puntos caigan fuera de los nuevos límites, en cuyo caso debe repetirse el proceso de borrar y recalcular.

Características de operación de gráficas de control

En términos generales, una gráfica de control será efectiva si da muy pocas señales fuera de control cuando el proceso está bajo control, pero muestra un punto fuera de los límites de control casi tan pronto como el proceso se sale de control. Una evaluación de la efectividad de una gráfica está basada en el concepto de "probabilidades de error". Suponga que la variable de interés está distribuida normalmente con σ conocida (el mismo valor para un proceso bajo control o fuera de control). Además, considere una gráfica 3-sigma basada en el valor objetivo μ_0, con $\mu = \mu_0$ cuando el proceso está bajo control. Una probabilidad de error es

$$\begin{aligned}\alpha &= P(\text{una sola muestra da un punto fuera de límites de control cuando } \mu = \mu_0)\\ &= P(\bar{X} > \mu_0 + 3\sigma/\sqrt{n} \text{ o } \bar{X} < \mu_0 - 3\sigma/\sqrt{n} \text{ cuando } \mu = \mu_0)\\ &= P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > 3 \text{ o } \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -3 \text{ cuando } \mu = \mu_0\right)\end{aligned}$$

La variable estandarizada $Z = (\bar{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n})$ tiene una distribución normal estándar cuando $\mu = \mu_0$, de modo que

$$\alpha = P(Z > 3 \text{ o } Z < -3) = \Phi(-3.00) + 1 - \Phi(3.00) = .0026$$

Si se ha usado 3.09 en lugar de 3 para determinar los límites de control (esto se acostumbra en la Gran Bretaña), entonces

$$\alpha = P(Z > 3.09 \text{ o } Z < -3.09) = .0020$$

El uso de límites 3-sigma hace muy poco probable que resulte una señal fuera de control de un proceso bajo control.

Ahora suponga que el proceso está fuera de control porque μ ha cambiado a $\mu + \Delta\sigma$ (Δ puede ser positiva o negativa); Δ es el número de desviaciones estándar en los que μ ha cambiado. Una segunda probabilidad de error es

$$\begin{aligned}\beta &= P\begin{pmatrix}\text{una sola muestra da un punto dentro de}\\ \text{los límites de control cuando } \mu = \mu_0 + \Delta\sigma\end{pmatrix}\\ &= P(\mu_0 - 3\sigma/\sqrt{n} < \bar{X} < \mu_0 + 3\sigma/\sqrt{n} \text{ cuando } \mu = \mu_0 + \Delta\sigma)\end{aligned}$$

Ahora se estandariza al restar primero $\mu_0 + \Delta\sigma$ de cada término que está dentro de los paréntesis y a continuación se divide entre $\sigma/\sqrt{n}$:

$$\begin{aligned}\beta &= P(-3 - \sqrt{n}\Delta < \text{variable aleatoria normal estándar} < 3 - \sqrt{n}\Delta)\\ &= \Phi(3 - \sqrt{n}\Delta) - \Phi(-3 - \sqrt{n}\Delta)\end{aligned}$$

Esta probabilidad de error depende de Δ, que determina el tamaño del cambio, y del tamaño muestral n. En particular, para Δ fija, β disminuirá cuando n aumente (cuanto más grande sea el tamaño muestral es más probable que resulte una señal fuera de control), y para n fija, β disminuye cuando $|\Delta|$ aumenta (cuanto mayor sea la magnitud del cambio, es más probable que resulte una señal fuera de control). La tabla siguiente da β para valores seleccionados de Δ cuando $n = 4$.

Δ	.25	.50	.75	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00
β ***cuando*** $n = 4$	.9936	.9772	.9332	.8413	.5000	.1587	.0668	.0013

Evidentemente es muy poco probable que un pequeño cambio pase sin ser detectado en una muestra individual.

Si 3 es sustituido por 3.09 en los límites de control, entonces α disminuye de .0026 a .002, pero para cualesquier n y σ fijas, β aumentará. Esto es sólo una manifestación de la relación inversa entre los dos tipos de probabilidades de error al probar hipótesis. Por ejemplo, cambiar 3 a 2.5 aumentará α y disminuirá β.

Las probabilidades de error examinadas hasta aquí se calculan bajo la suposición de que la variable de interés está distribuida de manera normal. Si la distribución es sólo ligeramente no normal, el efecto del teorema de límite central implica que $\overline{X}$ tendrá de un modo aproximado una distribución normal incluso cuando n sea pequeña, en cuyo caso las probabilidades de error indicadas serán casi correctas. Este, por supuesto, ya no es el caso cuando la distribución de la variable se desvía considerablemente de la normalidad.

Una segunda evaluación del uso comprende la dimensión esperada o el promedio del lote, necesarios para observar una señal fuera de control. Cuando el proceso está bajo control, se esperaría observar muchas muestras antes de ver una cuya $\bar{x}$ se encuentre fuera de los límites de control. Por otra parte, si un proceso se sale de control, el número esperado de muestras necesario para detectarlo debe ser pequeño.

Denote con p la probabilidad de que una sola muestra dé un valor fuera de los límites de control, es decir,

$$p = P(\overline{X} < \mu_0 - 3\sigma/\sqrt{n} \quad \text{o} \quad \overline{X} > \mu_0 + 3\sigma/\sqrt{n})$$

Considere primero un proceso bajo control, de modo que las $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$, $\overline{X}_3$,... estén normalmente distribuidas con media μ_0 y desviación estándar $\sigma/\sqrt{n}$. Defina una variable aleatoria Y mediante

$$Y = \text{la primera } i \text{ para la cual } \overline{X} \text{ se encuentra fuera de los límites de control}$$

Si se considera cada número muestral como un intento, y una muestra fuera de control como un éxito, entonces Y es el número de intentos (independientes) necesarios para observar un éxito. Esta Y tiene una distribución geométrica, y en el ejemplo 3.18 se demostró que $E(Y) = 1/p$. El acrónimo ARL (por *average run length* [magnitud promedio de lote]) se usa con frecuencia en lugar de $E(Y)$. Debido a que $p = \alpha$ para un proceso bajo control, tenemos

$$\text{ARL} = E(Y) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{.0026} = 384.62$$

Al sustituir 3 en los límites de control con 3.09, resulta ARL $= 1/.002 = 500$.

Ahora suponga que, en un punto particular de tiempo, la media del proceso cambia a $\mu = \mu_0 + \Delta\sigma$. Si se define Y como la primera i subsiguiente al cambio para el que una muestra genera una señal fuera de control, de nuevo es cierto que ARL $= E(Y) = 1/p$, pero ahora $p = 1 - \beta$. La tabla siguiente proporciona las ARL seleccionadas para una gráfica 3-sigma cuando $n = 4$. Estos resultados nuevamente demuestran la efectividad de la gráfica para detectar cambios grandes pero también su incapacidad de identificar con rapidez cambios pequeños. Cuando el muestreo se hace con poca frecuencia, es probable que muchas piezas se produzcan antes de que un pequeño cambio en μ sea detectado. Los procedimientos CUSUM examinados en la sección 16.5 se crearon para manejar esta deficiencia.

Δ	.25	.50	.75	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00
ARL cuando $n = 4$	156.25	43.86	14.97	6.30	2.00	1.19	1.07	1.0013

Reglas suplementarias para gráficas $\overline{X}$

La incapacidad de las gráficas $\overline{X}$ con límites 3-sigma, para detectar con rapidez cambios pequeños en la media de un proceso, ha impulsado a los investigadores a crear procesos que den un mejor comportamiento en este aspecto. Un método consiste en introducir condiciones adicionales que hagan que se genere una señal fuera de control. Las siguientes condiciones fueron recomendadas por la Western Electric (entonces subsidiaria de AT&T). Una intervención para tomar medidas correctivas es apropiada siempre que se satisfaga una de estas condiciones:

1. Dos de cada tres puntos sucesivos se encuentran fuera de los límites 2-sigmas en el mismo lado de la línea de centro.
2. Cuatro de cada cinco puntos sucesivos se encuentran fuera de los límites de 1-sigma en el mismo lado de la línea central.
3. Ocho puntos sucesivos caen del mismo lado de la línea central.

Se debe consultar un texto sobre control de calidad para estudiar estas y otras reglas suplementarias.

Gráficas de control robustas

La presencia de valores atípicos en la información de la muestra tiende a reducir la sensibilidad de los procedimientos de las gráficas de control cuando deben estimarse parámetros. Esto es porque los límites de control se mueven hacia fuera desde la línea central, lo cual hace más difícil la identificación de puntos poco comunes. *No* es deseable que el estadístico cuyos valores se grafiquen sea resistente a valores atípicos, ya que esto ocultaría cualquier señal fuera de control. Por ejemplo, graficar medianas muestrales sería menos eficaz que graficar $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots$ como se hace en una gráfica $\overline{X}$.

El artículo **"Robust Control Charts" de David M. Rocke (*Technometrics*, 1989: 173–184)** presenta un estudio de procedimientos para los cuales los límites de control están basados en estadísticos resistentes a los efectos de valores atípicos. Rocke recomienda límites de control calculados del *rango intercuartil* (IQR), que es muy semejante a la distancia entre cuartos introducida en el capítulo 1. En particular,

$$\text{IQR}\begin{cases}(\text{la } 2^{\text{a}}\ x_i \text{ más grande}) - (\text{la } 2^{\text{a}}\ x_i \text{ más pequeña}) & n = 4, 5, 6, 7\\ (\text{la } 3^{\text{a}}\ x_i \text{ más grande}) - (\text{la } 3^{\text{a}}\ x_i \text{ más pequeña}) & n = 8, 9, 10, 11\end{cases}$$

Para una muestra aleatoria de una distribución normal, $E(\text{IQR}) = k_n\sigma$; los valores de k_n se dan en la tabla siguiente:

n	4	5	6	7	8
k_n	.596	.990	1.282	1.512	.942

Los límites de control sugeridos son

$$\text{LCL} = \overline{\overline{x}} - 3 \cdot \frac{\text{IQR}}{k_n\sqrt{n}} \qquad \text{UCL} = \overline{\overline{x}} + 3 \cdot \frac{\text{IQR}}{k_n\sqrt{n}}$$

Los valores de $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \ldots$ son graficados. Las simulaciones publicadas en el artículo indican que el uso de la gráfica con estos límites es superior al de la gráfica $\overline{X}$ tradicional.

EJERCICIOS Sección 16.2 (6–15)

6. En el caso de μ y σ conocidas, ¿qué límites de control son necesarios para que sea .005 la probabilidad de que un solo punto esté fuera de los límites para un proceso bajo control?

7. Considere una gráfica de control 3-sigma con una línea central en μ_0 y basada en $n = 5$. Suponiendo normalidad, calcule la probabilidad de que un solo punto se encuentre fuera de los límites de control cuando la media real del proceso es

a. $\mu_0 + .5\sigma$

b. $\mu_0 - \sigma$

c. $\mu_0 + 2\sigma$

8. La tabla de abajo da información sobre el contenido de humedad para especímenes de cierto tipo de tela. Determine límites de control para una gráfica con línea central a una altura de 13.00 con base en $\sigma = .600$, construya la gráfica de control y comente sobre su aspecto.

9. Consulte la información dada en el ejercicio 8 y construya una gráfica de control con una línea central estimada y límites basados en el uso de desviaciones muestrales estándar para estimar σ. ¿Hay alguna evidencia de que el proceso está fuera de control?

10. Cuando se instala un grifo del baño, es importante sujetar bien el extremo roscado del vástago del grifo a la línea de suministro de agua. Las dimensiones del vástago roscado deben cumplir con las especificaciones del producto, pues de lo contrario pueden funcionar mal y tener fugas. Los autores de **"Improving the Process Capability of a Boring Operation by the Application of Statistical Techniques" (*Intl. J. Sci. Engr. Research*, vol. 3, número 5, mayo de 2012)** investigaron el proceso de producción de un grifo de baño en particular fabricado en la India. El artículo proporciona el diámetro del vástago roscado (valor objetivo 13 mm) de cada grifo en 25 muestras de tamaño 4 tal como se muestra a continuación:

Subgrupo	x_1	x_2	x_3	x_4
1	13.02	12.95	12.92	12.99
2	13.02	13.10	12.96	12.96
3	13.04	13.08	13.05	13.10
4	13.04	12.96	12.96	12.97
5	12.96	12.97	12.90	13.05
6	12.90	12.88	13.00	13.05
7	12.97	12.96	12.96	12.99
8	13.04	13.02	13.05	12.97
9	13.05	13.10	12.98	12.96
10	12.96	13.00	12.96	12.99
11	12.90	13.05	12.98	12.88
12	12.96	12.98	12.97	13.02

(*continúa*)

Datos para el ejercicio 8

Muestra núm.	Observaciones de contenido de humedad					$\bar{x}$	s	Rango
1	12.2	12.1	13.3	13.0	13.0	12.72	.536	1.2
2	12.4	13.3	12.8	12.6	12.9	12.80	.339	.9
3	12.9	12.7	14.2	12.5	12.9	13.04	.669	1.7
4	13.2	13.0	13.0	12.6	13.9	13.14	.477	1.3
5	12.8	12.3	12.2	13.3	12.0	12.52	.526	1.3
6	13.9	13.4	13.1	12.4	13.2	13.20	.543	1.5
7	12.2	14.4	12.4	12.4	12.5	12.78	.912	2.2
8	12.6	12.8	13.5	13.9	13.1	13.18	.526	1.3
9	14.6	13.4	12.2	13.7	12.5	13.28	.963	2.4
10	12.8	12.3	12.6	13.2	12.8	12.74	.329	.9
11	12.6	13.1	12.7	13.2	12.3	12.78	.370	.9
12	13.5	12.3	12.8	13.1	12.9	12.92	.438	1.2
13	13.4	13.3	12.0	12.9	13.1	12.94	.559	1.4
14	13.5	12.4	13.0	13.6	13.4	13.18	.492	1.2
15	12.3	12.8	13.0	12.8	13.5	12.88	.432	1.2
16	12.6	13.4	12.1	13.2	13.3	12.92	.554	1.3
17	12.1	12.7	13.4	13.0	13.9	13.02	.683	1.8
18	13.0	12.8	13.0	13.3	13.1	13.04	.182	.5
19	12.4	13.2	13.0	14.0	13.1	13.14	.573	1.6
20	12.7	12.4	12.4	13.9	12.8	12.84	.619	1.5
21	12.6	12.8	12.7	13.4	13.0	12.90	.316	.8
22	12.7	13.4	12.1	13.2	13.3	12.94	.541	1.3

Subgrupo	x_1	x_2	x_3	x_4
13	13.00	12.96	12.99	12.90
14	12.88	12.94	13.05	13.00
15	12.96	12.96	13.04	12.98
16	12.99	12.94	13.00	13.05
17	13.05	13.02	12.88	12.96
18	13.08	13.06	13.10	13.05
19	13.02	13.05	13.04	12.97
20	12.96	12.90	12.97	13.05
21	12.98	12.99	12.96	13.00
22	12.97	13.02	12.96	12.99
23	13.04	13.00	12.98	13.10
24	13.02	12.90	13.05	12.97
25	12.93	12.88	12.91	12.90

Calcule los límites de control basados en el uso de los rangos de la muestra para calcular σ. ¿Parecerá estar bajo control el proceso?

11. La tabla siguiente proporciona medias muestrales y desviaciones estándar, cada una basada en $n = 6$ observaciones del índice de refracción de cable de fibra óptica. Construya una gráfica de control y comente sobre su aspecto. [*Sugerencia:* $\Sigma\bar{x}_i = 2317.07$ y $\Sigma s_i = 30.34$.]

Día	$\bar{x}$	s	Día	$\bar{x}$	s
1	95.47	1.30	13	97.02	1.28
2	97.38	.88	14	95.55	1.14
3	96.85	1.43	15	96.29	1.37
4	96.64	1.59	16	96.80	1.40
5	96.87	1.52	17	96.01	1.58
6	96.52	1.27	18	95.39	.98
7	96.08	1.16	19	96.58	1.21
8	96.48	.79	20	96.43	.75
9	96.63	1.48	21	97.06	1.34
10	96.50	.80	22	98.34	1.60
11	97.22	1.42	23	96.42	1.22
12	96.55	1.65	24	95.99	1.18

12. Consulte el ejercicio 11. Se encontró una causa asignable para el inusualmente alto índice de refracción promedio muestral el día 22. Recalcule límites de control después de borrar la información de ese día. ¿Qué se concluye?

13. Considere la gráfica de control basada en límites de control $\mu_0 \pm 2.81\,\sigma/\sqrt{n}$.

a. ¿Cuál es la ARL cuando el proceso está bajo control?

b. ¿Cuál es la ARL cuando $n = 4$ y la media del proceso se ha cambiado a $\mu = \mu_0 + \sigma$?

c. ¿Cómo se comparan los valores de los incisos a) y b) en función de los valores correspondientes para una gráfica 3-sigma?

14. La impresión tridimensional (3D) es una tecnología de fabricación que permite la producción de objetos sólidos tridimensionales a través de un proceso de poner capas meticulosamente realizado por una impresora 3D. La impresión 3D se ha convertido rápidamente en un ahorro de tiempo y dinero para crear una amplia variedad de productos tales como implantes médicos, muebles, herramientas e incluso joyas. El artículo **"Process Capability Analysis of Cost Effective Rapid Casting Solution Based on Three Dimensional Printing"** (***MIT Intl. J. Mech. Engr.*, 2012: 31–38**) considera el proceso de producción de piezas de fundición de metales mediante el uso de una impresora 3D. Los datos se recolectaron en 16 lotes (cada uno con dos piezas de fundición), donde se registró el diámetro exterior de cada fundición (en mm). El diámetro objetivo de cada fundición fue de 60 mm. A continuación se presentan los datos resultantes:

Batch	x_1	x_2
1	59.664	59.675
2	59.661	59.648
3	59.679	59.652
4	59.665	59.654
5	59.667	59.678
6	59.673	59.657
7	59.676	59.661
8	59.648	59.651
9	59.681	59.675
10	59.655	59.672
11	59.691	59.676
12	59.682	59.651
13	59.651	59.682
14	59.668	59.685
15	59.691	59.682
16	59.661	59.673

Aplique a los datos las reglas complementarias que se sugieren en el libro. ¿Hay señales fuera de control?

15. Calcule los límites de control para la información del ejercicio 8, usando el procedimiento robusto que se presentó en esta sección.

16.3 Gráficas de control para variación de proceso

Las gráficas de control estudiadas en la sección previa se diseñaron para controlar la ubicación (o bien, lo que es lo mismo, la tendencia central) de un proceso, con particular atención en la media como medida de ubicación. Es igualmente importante asegurar que un proceso está bajo control respecto a variaciones. De hecho, casi todos los expertos recomiendan que se establezca un control sobre las variaciones *antes* de construir una gráfica $\bar{X}$, o cualquier otra gráfica para controlar la ubicación. En esta sección se consideran gráficas para variaciones con base en la desviación muestral estándar S y también gráficas basadas

en el rango muestral R. Generalmente se prefieren las primeras porque la desviación estándar da una evaluación más eficiente de variación que el rango, pero las gráficas R se usaron primero y prevalece la tradición.

La gráfica S

Nuevamente, se supone que se dispone de k muestras seleccionadas de manera independiente, cada una formada por n observaciones en una variable distribuida normalmente. Denote las desviaciones muestrales estándar por $s_1, s_2, \ldots, s_k$, con $\bar{s} = \Sigma s_i/k$. Los valores $s_1, s_2, s_3, \ldots$ se grafican en secuencia en una gráfica S. La línea central de la gráfica estará a una altura $\bar{s}$, y los límites 3-sigma necesitan determinar $3\sigma_S$ (al igual que los límites 3-sigma de una gráfica $\bar{X}$ requirieron $3\sigma_{\bar{X}} = 3\sigma/\sqrt{n}$, con σ entonces estimada a partir de la información).

Recuerde que para cualquier variable aleatoria Y, $V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$, y que una varianza muestral S^2 es un estimador insesgado de σ^2, es decir, $E(S^2) = \sigma^2$. Por tanto,

$$V(S) = E(S^2) - [E(S)]^2 = \sigma^2 - (a_n\sigma)^2 = \sigma^2(1 - a_n^2)$$

donde los valores de a_n para $n = 3, \ldots, 8$ se tabularon en la sección previa. La desviación estándar de S es entonces

$$\sigma_S = \sqrt{V(S)} = \sigma\sqrt{1 - a_n^2}$$

Es natural estimar σ usando $s_1, \ldots, s_k$, como se hizo en la sección previa, es decir, $\hat{\sigma} = \bar{s}/a_n$. Al sustituir $\hat{\sigma}$ por σ en la expresión para σ_S se obtiene la cantidad empleada para calcular límites 3-sigma.

> Los límites de control 3-sigma para una gráfica de control S son
>
> $$\text{LCL} = \bar{s} - 3\bar{s}\sqrt{1 - a_n^2}/a_n$$
>
> $$\text{UCL} = \bar{s} - 3\bar{s}\sqrt{1 - a_n^2}/a_n$$
>
> La expresión para LCL será negativa si $n = 5$, en cuyo caso se acostumbra usar LCL = 0.

EJEMPLO 16.4 La tabla 16.2 muestra observaciones sobre la resistencia al esfuerzo en láminas de plástico (la fuerza, en libras por pulgada cuadrada, necesaria para agrietar una lámina). Hay $k = 22$ muestras, obtenidas en puntos de tiempo igualmente espaciados y $n = 4$ observaciones en cada muestra. Con facilidad se verifica que $\Sigma s_i = 51.10$ y $\bar{s} = 2.32$, de modo que el centro de la gráfica S estará en 2.32 (aunque debido a que $n = 4$, el límite inferior de control (LCL) = 0 y la línea central no estará a la mitad entre los límites de control). De la sección previa, $a_4 = .921$, de donde el límite superior de control (UCL) es

$$\text{UCL} = 2.32 + 3(2.32)(\sqrt{1 - (.921)^2})/.921 = 5.26$$

Tabla 16.2 Datos sobre resistencia al esfuerzo para el ejemplo 16.4

Muestra núm.	Observaciones				Desviación estándar	Rango
1	29.7	29.0	28.8	30.2	.64	1.4
2	32.2	29.3	32.2	32.9	1.60	3.6
3	35.9	29.1	32.1	31.3	2.83	6.8
4	28.8	27.2	28.5	35.7	3.83	8.5
5	30.9	32.6	28.3	28.3	2.11	4.3

(*continúa*)

Tabla 16.2 Datos sobre resistencia al esfuerzo para el ejemplo 16.4 (continuación)

Muestra núm.	Observaciones				Desviación estándar	Rango
6	30.6	34.3	34.8	26.3	3.94	8.5
7	32.3	27.7	30.9	27.8	2.30	4.6
8	32.0	27.9	31.0	30.8	1.76	4.1
9	24.2	27.5	28.5	31.1	2.85	6.9
10	33.7	24.4	34.3	31.0	4.53	9.9
11	35.3	33.2	31.4	28.0	3.09	7.3
12	28.1	34.0	31.0	30.8	2.41	5.9
13	28.7	28.9	25.8	29.7	1.71	3.9
14	29.0	33.0	30.2	30.1	1.71	4.0
15	33.5	32.6	33.6	29.2	2.07	4.4
16	26.9	27.3	32.1	28.5	2.37	5.2
17	30.4	29.6	31.0	33.8	1.83	4.2
18	29.0	28.9	31.8	26.7	2.09	5.1
19	33.8	30.9	31.7	28.2	2.32	5.6
20	29.7	27.9	29.1	30.1	.96	2.2
21	27.9	27.7	30.2	32.9	2.43	5.2
22	30.0	31.4	27.7	28.1	1.72	3.7

La gráfica de control resultante se ilustra en la figura 16.3. Todos los puntos graficados están bien dentro de los límites de control, lo cual sugiere un comportamiento estable del proceso respecto a las variaciones.

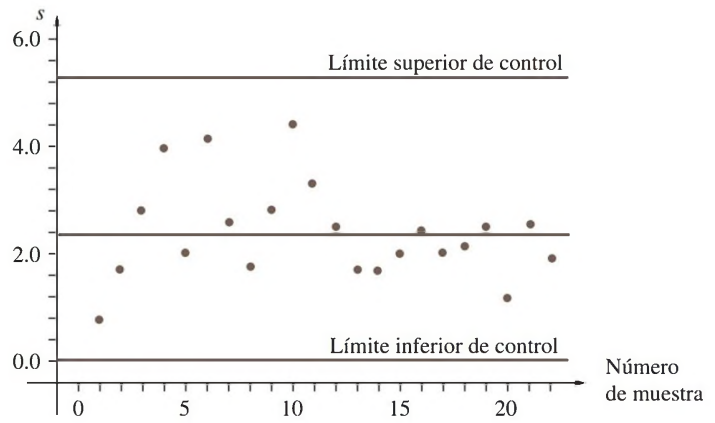


Figura 16.3 Gráfica *S* para datos de resistencia al esfuerzo del ejemplo 16.4 ■

La gráfica *R*

Denote con $r_1, r_2, \ldots, r_k$ los k rangos muestrales y $\bar{s} = \Sigma r_i/k$. La línea central de una gráfica R estará a una altura $\bar{s}$. La determinación de los límites de control r requiere σ_R, donde R denota el rango (antes de hacer observaciones, como una variable aleatoria) de una muestra aleatoria de tamaño n de una distribución normal, con media μ y desviación estándar σ. Puesto que

$$\begin{aligned} R &= \text{máx}(X_1, \ldots X_n) - \text{mín}(X_1, \ldots, X_n) \\ &= \sigma\{\text{máx}(Z_1, \ldots, Z_n) - \text{mín}(Z_1, \ldots, Z_n)\} \end{aligned}$$

donde $Z_i = (X_i - \mu)/\sigma$, y las Z_i son variables aleatorias normales estándar, se deduce que

$$\sigma_R = \sigma \cdot \begin{pmatrix}\text{desviación estándar del rango de una muestra aleatoria}\\ \text{de tamaño } n \text{ de una distribución normal estándar}\end{pmatrix}$$
$$= \sigma \cdot c_n$$

Los valores de c_n para $n = 3,\ldots, 8$ aparecen en la tabla siguiente.

n	3	4	5	6	7	8
c_n	.888	.880	.864	.848	.833	.820

Se acostumbra estimar σ mediante $\hat{\sigma} = \bar{r}/b_n$, tal como se vio en la sección previa. Esto da $\hat{\sigma}_R = c_n\bar{r}/b_n$ como la desviación estándar estimada de R.

Los límites 3-sigma para una gráfica R son

$$\text{LCL} = \bar{r} - 3c_n\bar{r}/b_n$$
$$\text{UCL} = \bar{r} + 3c_n\bar{r}/b_n$$

La expresión para LCL será negativa si $n \leq 6$, en cuyo caso deberá usarse LCL = 0.

EJEMPLO 16.5 En la ingeniería de tejidos se siembran celdas sobre un andamio que guía el crecimiento de nuevas celdas. El artículo **"On the Process Capability of the Solid Free-Form Fabrication: A Case Study of Scaffold Moulds for Tissue Engineering" (*J. of Engr. in Med.*, 2008: 377–392)** utiliza diversos métodos de control de calidad para estudiar un método de producir dichos andamios. Una característica inusual es que en lugar de los subgrupos observados con el paso del tiempo, cada subgrupo es el resultado de la dimensión (μm) de un diseño diferente. La tabla 16.3 contiene datos de la tabla 2 del artículo citado en la desviación del objetivo en la orientación perpendicular (estas desviaciones son de hecho positivas, los destellos impresos presentan dimensiones más grandes que las diseñadas).

Tabla 16.3 Datos de desviación del objetivo para el ejemplo 16.5

dim dis				media	rango	DE
200	12	17	6	11.7	11	5.51
250	6	9	17	10.7	11	5.69
300	5	9	15	9.7	10	5.03
350	19	6	11	12.0	13	6.56
400	9	14	9	10.7	5	2.89
450	9	15	8	10.7	7	3.79
500	8	11	12	10.3	4	2.08
550	4	14	11	9.7	10	5.13
600	11	14	7	10.7	7	3.51
650	13	9	9	10.3	4	2.31
700	10	14	8	10.7	6	3.06
750	8	9	4	7.0	5	2.65
800	14	7	9	10.0	7	3.61
850	7	9	12	9.3	5	2.52
900	14	5	8	9.0	9	4.58
950	10	12	10	10.7	2	1.15
1000	7	11	15	11.0	8	4.00

La tabla 16.3 da $\Sigma r_i = 124$ de donde $\bar{r} = 7.29$. Dado que $n = 3$, el límite inferior de control $= 0$. Con $b_3 = 1.693$ y $c_3 = .888$

$$\text{UCL} = 7.29 + 3 \cdot (.888)(7.29)/1.693 = 18.76$$

En la figura 16.4 se muestran la gráfica R y una gráfica de Minitab (el artículo citado también incluye estas gráficas). Todos los puntos están dentro de los límites de control apropiados, indicando un proceso controlado para las dos ubicaciones y variaciones.

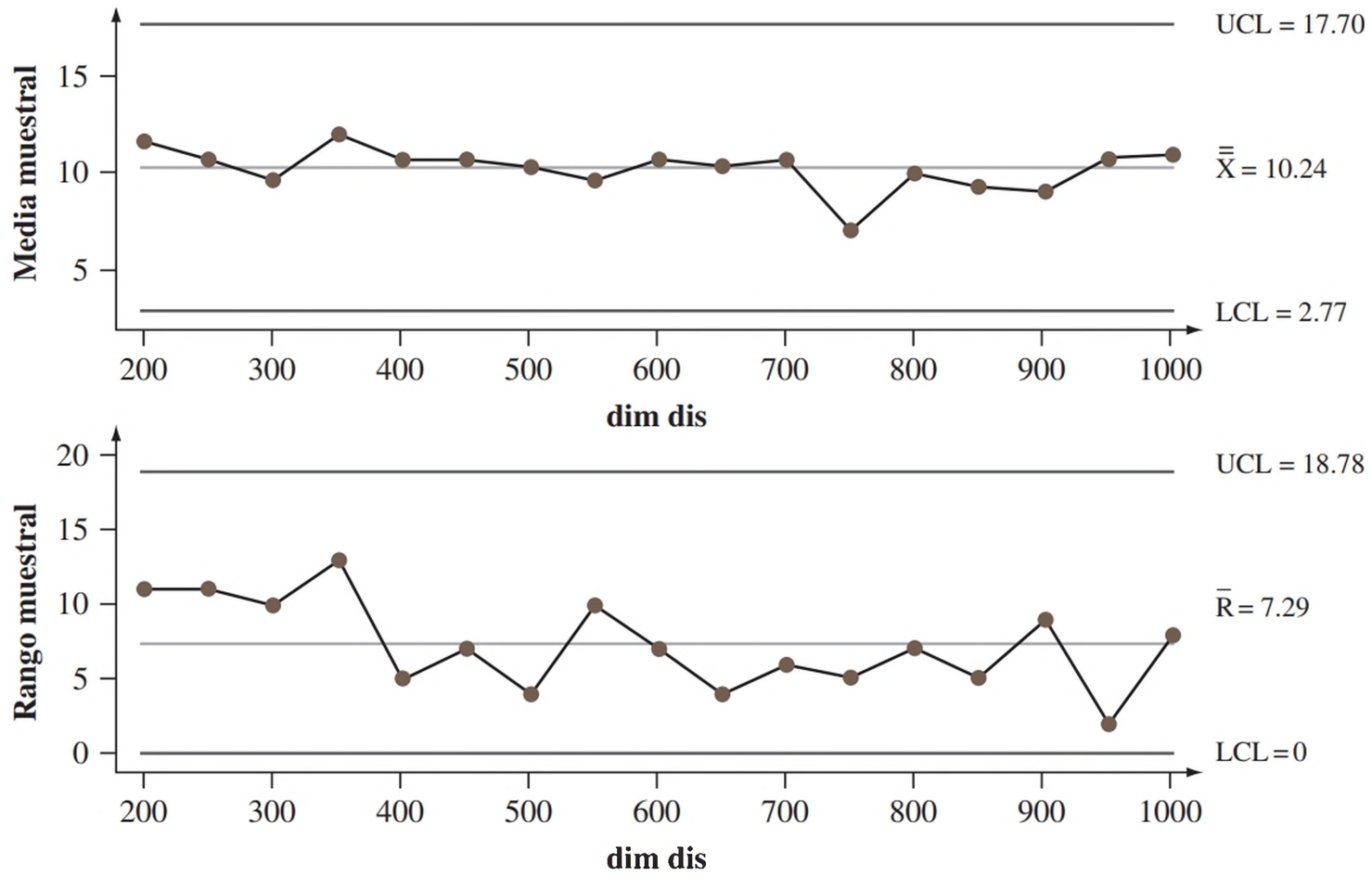


Figura 16.4 Gráficas de control para datos de desviación del objetivo para el ejemplo 16.5 ■

Gráficas basadas en los límites de probabilidad

Considere una gráfica $\bar{X}$ basada en el valor μ_0 e incógnita σ bajo control (objetivo). Cuando la variable de interés está normalmente distribuida y el proceso está bajo control,

$$P(\bar{X}_i > \mu_0 + 3\sigma/\sqrt{n}) = .0013 = P(\bar{X}_i < \mu_0 - 3\sigma/\sqrt{n})$$

Esto es, la probabilidad de que un punto en la gráfica caiga arriba del límite superior de control es .0013, tal como la probabilidad de que el punto caiga abajo del límite inferior de control (si se usa 3.09 en lugar de 3 resulta .001 para cada probabilidad). Cuando los límites de control se basan en las estimaciones de μ y σ, estas probabilidades serán aproximadamente correctas siempre que n no sea demasiado pequeña y k sea al menos 20.

En contraste, este *no* es el caso para una gráfica S 3-sigma que $P(S_i > \text{UCL}) = P(S_i < \text{LCL}) = .0013$, tampoco es verdadero para una gráfica R 3-sigma que $P(R_i > \text{UCL}) = P(R_i < \text{LCL}) = .0013$. Esto es porque ni la desviación estándar muestral S ni el rango muestral R tienen una distribución normal aun cuando la distribución poblacional es normal. En cambio, tanto S como R tienen distribuciones sesgadas. Lo mejor que se puede decir para las gráficas S y R 3-sigma es que es muy improbable que un proceso bajo control dé un punto, en cualquier tiempo particular, que esté fuera de los límites de control. Algunos autores han estado en favor del uso de los límites de control para los cuales la "probabilidad de rebase" para cada límite es aproximadamente .001. El libro *Statistical Methods for Quality Improvement* (véase la bibliografía del capítulo) contiene más información sobre este tema.

EJERCICIOS Sección 16.3 (16–20)

16. Un fabricante de tiza sin polvo instituyó un programa de control de calidad para vigilar su densidad. Las desviaciones muestrales estándar de densidades de 24 subgrupos diferentes, cada uno formado por $n = 8$ especímenes de tiza, fueron como sigue:

.204	.315	.096	.184	.230	.212	.322	.287
.145	.211	.053	.145	.272	.351	.159	.214
.388	.187	.150	.229	.276	.118	.091	.056

Calcule los límites para una gráfica S, construya la gráfica y verifique que no haya puntos fuera de control. Si hay un punto fuera de control, bórrelo y repita el proceso.

17. Una vez por hora, de una línea de ensamble, se seleccionan subgrupos de unidades de fuentes de alimentación para determinar la salida de alto voltaje de cada unidad.

a. Suponga que la suma de las variaciones muestrales resultantes para 30 subgrupos, cada uno formado por cuatro unidades, es 85.2. Calcule los límites de control para una gráfica R.

b. Repita el inciso a) si cada subgrupo está formado por ocho unidades y si la suma es 106.2.

18. Los siguientes datos sobre la desviación de la meta en la orientación paralela se obtuvo de la tabla 1 del artículo citado en el ejemplo 16.5. A veces una transformación de los datos es conveniente, ya sea por la no normalidad o porque la variación del subgrupo cambia sistemáticamente con la media del subgrupo. Los autores del artículo citado sugieren una transformación de raíz cuadrada de estos datos (*la familia de transformaciones de Box-Cox* es $y = x^{\lambda}$, por lo cual aquí $\lambda = 5$; Minitab identificará el mejor valor de λ). Transforme los datos como se sugiere, calcule los límites de control para $\overline{X}$, R y la gráfica S, y compruebe la presencia de cualquier señal fuera de control.

dim dis	observaciones		
200	14	31	12
250	22	13	9
300	12	22	16
350	11	28	1
400	15	12	36
450	6	31	14
500	13	24	9
550	21	18	16
600	6	16	20
650	8	17	23
700	3	26	17
750	17	12	22
800	41	17	3
850	18	11	21
900	9	15	22
950	25	4	17
1000	8	23	15

19. Calcule los límites de control para una gráfica S desde la información del índice de refracción del ejercicio 11. ¿Estará el proceso bajo control respecto a la variabilidad? ¿Por qué sí o por qué no?

20. Cuando S^2 es la varianza muestral de una muestra aleatoria normal, $(n-1)S^2/\sigma^2$ tiene una distribución ji-cuadrada con $n-1$ grados de libertad, de modo que

$$P\left(\chi^2_{.999,n-1} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{.001,n-1}\right) = .998$$

de la cual

$$P\left(\frac{\sigma^2\chi^2_{.999,n-1}}{n-1} < S^2 < \frac{\sigma^2\chi^2_{.001,n-1}}{n-1}\right) = .998$$

Esto sugiere que una gráfica alternativa para controlar la variación del proceso consiste en graficar las varianzas muestrales y usar los límites de control

$$\text{LCL} = \overline{s^2}\chi^2_{.999,n-1}/(n-1)$$
$$\text{UCL} = \overline{s^2}\chi^2_{.001,n-1}/(n-1)$$

Construya la gráfica correspondiente para los datos del ejercicio 11. [*Sugerencia:* Los valores críticos de ji-cuadrada de colas inferior y superior para 5 grados de libertad son .210 y 20.515, respectivamente.]

16.4 Gráficas de control para atributos

El término *datos de atributos* se usa en literatura de control de calidad para describir dos situaciones:

1. Cada pieza producida es defectuosa o no defectuosa (se apega a especificaciones o no se apega a estas).
2. Una sola pieza puede tener uno o más defectos y se determina el número de defectos.

En el primer caso, una gráfica de control se basa en la distribución binomial; en el último caso, la distribución Poisson es la base para una gráfica.

La gráfica *p* de fracción defectuosa

Suponga que cuando un proceso está bajo control la probabilidad de que cualquier pieza sea defectuosa es p (o bien, lo que es lo mismo, p es la proporción de piezas defectuosas a largo plazo para un proceso bajo control) y que diferentes piezas son independientes una de otra respecto a sus condiciones. Considere una muestra de n piezas obtenida en un tiempo particular, y sea X el número de las defectuosas y $\hat{p} = X/n$. Debido a que X tiene una distribución binomial, $E(X) = np$ y $V(X) = np(1 - p)$, por lo que

$$E(\hat{p}) = p \qquad V(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n}$$

También, si $np \geq 10$ y $n(1 - p) \geq 10$, $\hat{p}$ tiene aproximadamente una distribución normal.

En el caso de p conocida (o una gráfica basada en un valor objetivo), los límites de control son

$$\text{LCL} = p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \qquad \text{UCL} = p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Si cada muestra está formada por n piezas, el número de las defectuosas de la i-ésima muestra es x_i y $\hat{p}_i = x_i/n$, así $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3, \ldots$ se grafican en la gráfica de control.

Generalmente el valor de p debe estimarse a partir de los datos. Suponga que se dispone de k muestras de lo que se piensa que es un proceso bajo control, y que

$$\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \hat{p}_i}{k}$$

La estimación $\bar{p}$ se usa entonces en lugar de p en los límites de control ya mencionados.

La gráfica p para fracciones de piezas defectuosas tiene su línea central a una altura $\bar{p}$ y límites de control

$$\text{LCL} = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

$$\text{UCL} = \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

Si el límite inferior de control es negativo, se sustituye con 0.

EJEMPLO 16.6 Se seleccionó una muestra de 100 tazas de un diseño particular de vajilla en cada uno de 25 días sucesivos, y cada una se examinó en busca de defectos. Los números resultantes de tazas inaceptables y de proporciones muestrales correspondientes son como sigue:

Día (i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
x_i	7	4	3	6	4	9	6	7	5	3	7	8	4
$\hat{p}_i$	.07	.04	.03	.06	.04	.09	.06	.07	.05	.03	.07	.08	.04

Día (i)	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
x_i	6	2	9	7	6	7	11	6	7	4	8	6
$\hat{p}_i$	.06	.02	.09	.07	.06	.07	.11	.06	.07	.04	.08	.06

Suponiendo que el proceso estaba bajo control durante este periodo, establezca límites de control y construya una gráfica p. Dado que $\Sigma\hat{p}_i = 1.52$, $p = 1.52/25 = .0608$ y

$$\text{LCL} = .0608 - 3\sqrt{(.0608)(.9392)/100} = .0608 - .0717 = -.0109$$

$$\text{UCL} = .0608 + 3\sqrt{(.0608)(.9392)/100} = .0608 + .0717 = .1325$$

Por tanto, el límite inferior de control está en 0. La gráfica de control que se ilustra en la figura 16.5 muestra que todos los puntos están dentro de los límites de control. Esto es consistente con la suposición de un proceso bajo control.

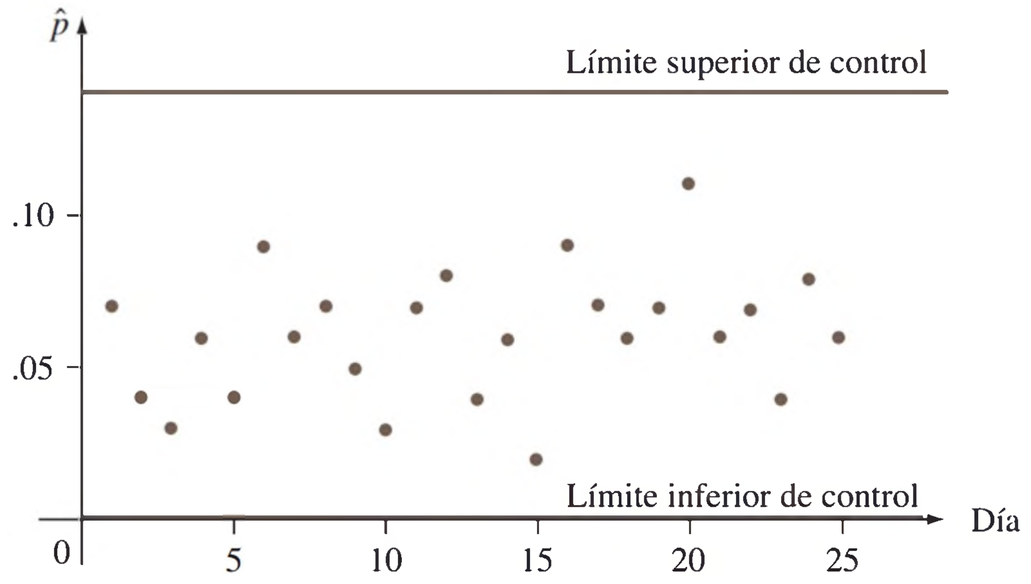


Figura 16.5 Gráfica de control para datos de fracción defectuosa del ejemplo 16.6 ■

Gráfica *c* para el número de defectos

A continuación se consideran situaciones en que la observación de cada punto en el tiempo es el número de defectos en una unidad de algún tipo. La unidad puede consistir en una sola pieza (por ejemplo, un automóvil) o un grupo de piezas (por ejemplo, defectos en un conjunto de cuatro llantas). En el segundo caso, se supone que el tamaño del grupo es igual en cada uno de los puntos de tiempo.

La gráfica de control para números de defectos está basada en la distribución de probabilidad de Poisson. Recuerde que si Y es una variable aleatoria Poisson con parámetro μ, entonces

$$E(Y) = \mu \qquad V(Y) = \mu \qquad \sigma_Y = \sqrt{\mu}$$

También, Y tiene aproximadamente una distribución normal cuando μ es grande ($\mu \geq 10$ será suficiente para la mayor parte de los casos). Además, si $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ son variables de Poisson independientes con parámetros $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, se puede demostrar que tiene una distribución de Poisson con parámetro $\mu_1 + \cdots + \mu_n$. En particular, si $\mu_1 = \cdots = \mu_n = \mu$ (la distribución del número de defectos por pieza es igual para cada una de estas), entonces el parámetro de Poisson es $n\mu$.

Denote con μ el parámetro de Poisson para el número de defectos en una unidad (es el número esperado de defectos por unidad). En el caso de μ conocida (o una gráfica basada en un valor objetivo),

$$\text{LCL} = \mu - 3\sqrt{\mu} \qquad \text{UCL} = \mu + 3\sqrt{\mu}$$

Con x_i denotando el número total de defectos en la i-ésima unidad ($i = 1, 2, 3, \ldots$), se determinan los puntos en las alturas $x_1, x_2, x_3, \ldots$ en la gráfica. Por lo general, el valor de μ debe estimarse a partir de los datos. Dado que $E(X_i) = \mu$, es natural usar la estimación $\mu = \bar{x}$ (basada en $x_1, x_2, \ldots, x_k$).

La gráfica c para el número de defectos en una unidad tiene la línea central en $\bar{x}$ y

$$\text{LCL} = \bar{x} - 3\sqrt{\bar{x}}$$

$$\text{UCL} = \bar{x} + 3\sqrt{\bar{x}}$$

Si el límite inferior de control (LCL) es negativo, se sustituye con 0.

EJEMPLO 16.7 Una compañía manufactura paneles metálicos que se hornean después de cubrirlos con una mezcla de cerámica en polvo. A veces aparecen fallas en el acabado de estos paneles y la compañía desea establecer una gráfica de control para determinar el número de fallas. Los números de fallas de cada uno de los 24 paneles muestreados en intervalos regulares son como sigue:

7	10	9	12	13	6	13	7	5	11	8	10
13	9	21	10	6	8	3	12	7	11	14	10

con $\Sigma x_i = 235$ y $\hat{\mu} = \bar{x} = 235/24 = 9.79$. Los límites de control son

$$\text{LCL} = 9.79 - 3\sqrt{9.79} = .40 \qquad \text{UCL} = 9.79 + 3\sqrt{9.79} = 19.18$$

La gráfica de control se muestra en la figura 16.6. El punto correspondiente del 15º panel está arriba del límite superior de control. Al hacer la investigación, se encontró que la mezcla empleada en ese panel tenía una viscosidad demasiado baja (una causa asignable). La eliminación de esa observación da $\bar{x} = 214/23 = 9.30$ y nuevos límites de control.

$$\text{LCL} = 9.30 - 3\sqrt{9.30} = .15 \qquad \text{UCL} = 9.30 + 3\sqrt{9.30} = 18.45$$

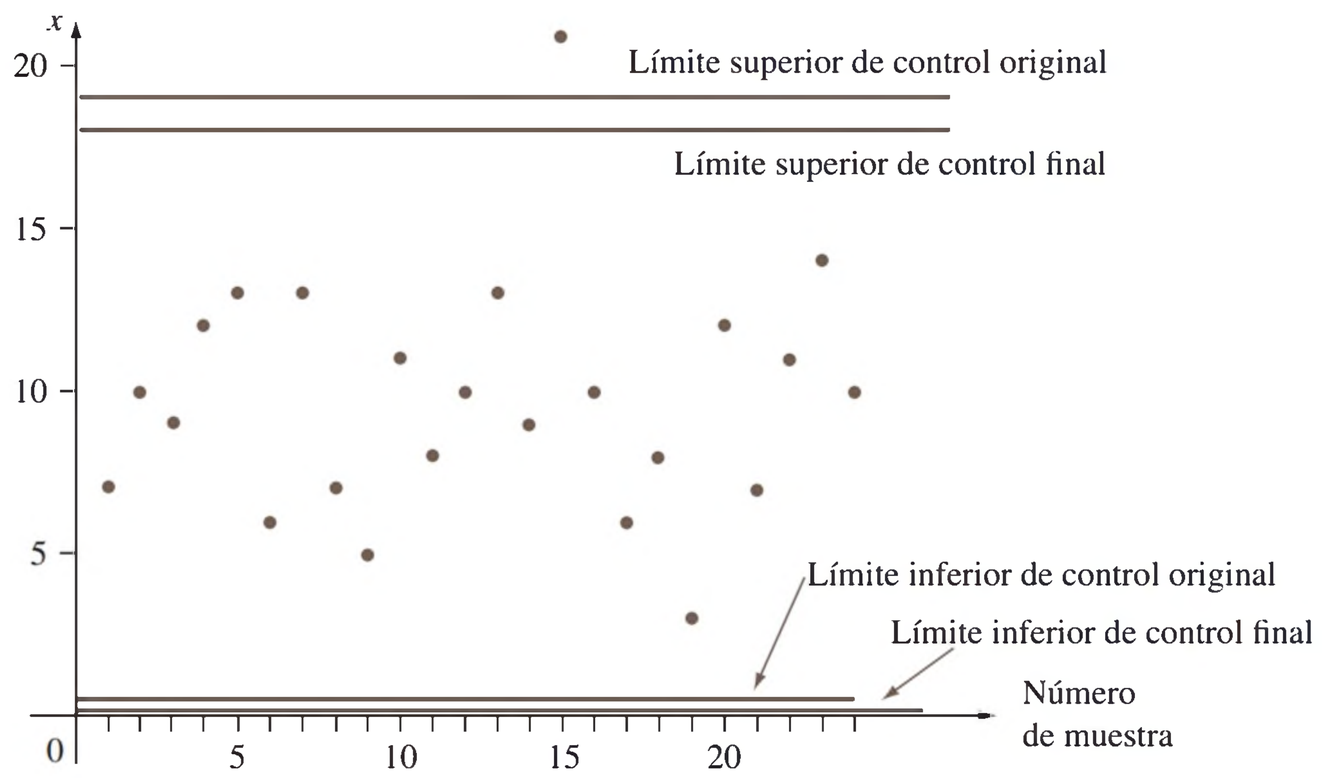


Figura 16.6 Gráfica de control para el número de datos de fallas del ejemplo 16.7

Las 23 observaciones restantes están entre estos límites, lo cual indica un proceso bajo control. ■

Gráficas de control basadas en datos transformados

Se presume que el uso de límites de control 3-sigma da por resultado P(estadística $<$ límite inferior de control) $\approx P$(estadística $>$ límite superior de control) $\approx .0013$ cuando el proceso está bajo control. No obstante, cuando p es pequeña la aproximación normal a la distribución de $\hat{p} = X/n$ con frecuencia no será muy precisa en las colas de los extremos. La tabla 16.3 da evidencia de este comportamiento para valores seleccionados de p y n

Tabla 16.3 Probabilidades bajo control para una gráfica *p*

p	*n*	$P(\hat{p} < \text{LCL})$	$P(\hat{p} > \text{UCL})$	P(punto fuera de control)
.10	100	.00003	.00198	.00201
.10	200	.00048	.00299	.00347
.10	400	.00044	.00171	.00215
.05	200	.00004	.00266	.00270
.05	400	.00020	.00207	.00227
.05	600	.00031	.00189	.00220
.02	600	.00007	.00275	.00282
.02	800	.00036	.00374	.00410
.02	1000	.00023	.00243	.00266

(el valor de p se usa para calcular los límites de control). En muchos casos, la probabilidad de que un solo punto caiga fuera de los límites de control es muy diferente de la probabilidad nominal de .0026.

Este problema se puede solucionar si se les aplica una transformación a los datos. Denote con $h(X)$ una función aplicada para transformar la variable binomial X. Luego $h(\cdot)$ debe seleccionarse de modo que $h(X)$ tenga aproximadamente una distribución normal *y que* esta aproximación sea precisa en las colas. Una transformación recomendada está basada en la función arcsen (es decir, sen^{-1}):

$$Y = h(X) = \text{sen}^{-1}(\sqrt{X/n})$$

Por tanto, Y es aproximadamente normal con valor medio $\text{sen}^{-1}(\sqrt{p})$ y varianza $1/(4n)$; note que la varianza es independiente de p. Sea $y_i = \text{sen}^{-1}(\sqrt{x_i/n})$. Los puntos en la gráfica de control están localizados a alturas $y_1, y_2, \ldots$. Para n conocida, los límites de control son

$$\text{LCL} = \text{sen}^{-1}(\sqrt{p}) - 3\sqrt{1/(4n)} \qquad \text{UCL} = \text{sen}^{-1}(\sqrt{p}) + 3\sqrt{1/(4n)}$$

Cuando p es desconocida se sustituye $\text{sen}^{-1}(\sqrt{p})$ con $\bar{y}$.

Comentarios semejantes aplican también a la distribución Poisson cuando μ es pequeña. La transformación sugerida es $Y = h(X) = 2\sqrt{X}$, que tiene valor medio $2\sqrt{\mu}$ y varianza 1. Los límites de control resultantes son $2\sqrt{\mu} \pm 3$ cuando μ se conoce y $\bar{y} \pm 3$ cuando no se conoce. El libro *Statistical Methods for Quality Improvement* de la bibliografía del capítulo examina con gran detalle estos problemas.

EJERCICIOS Sección 16.4 (21–28)

21. En cada uno de los 25 días previos se seleccionaron al azar 100 aparatos electrónicos de cierto tipo y se sometieron a una severa prueba de esfuerzo debido al calor. El número total de piezas que no pasaron la prueba fue de 578.

a. Determine los límites de control para una gráfica p 3-sigma.

b. El mayor número de piezas que no pasaron la prueba en un día determinado fue 39 y el número más bajo fue 13. ¿Corresponderá cualquiera de estos números a un punto fuera de control? Explique.

22. Se seleccionó en cada uno de 30 días consecutivos una muestra de 200 chips de ROM de computadora y los números de chips que no se apegaron a las especificaciones en cada día fueron como sigue: 10, 18, 24, 17, 37, 19, 7, 25, 11, 24, 29, 15, 16, 21, 18, 17, 15, 22, 12, 20, 17, 18, 12, 24, 30, 16, 11, 20, 14, 28. Construya una gráfica p y examínela en busca de cualquier punto fuera de control.

23. Cuando $n = 150$, ¿cuál es el valor más pequeño de $\bar{p}$ para el cual el límite inferior de control de una gráfica p es positivo?

24. Consulte la información del ejercicio 22 y construya una gráfica de control usando la transformación sen^{-1}, tal como se sugirió en el texto.

25. Las observaciones siguientes son números de defectos en 25 especímenes de 1 yarda cuadrada de tela tejida de cierto tipo:

3, 7, 5, 3, 4, 2, 8, 4, 3, 3, 6, 7, 2, 3, 2, 4, 7, 3, 2, 4, 4, 1, 5, 4, 6. Construya una gráfica c para hallar el número de defectos.

26. ¿Para cuáles valores $\bar{x}$ será negativo el límite inferior de control en una gráfica c?

27. En algunas situaciones varían los tamaños de especímenes muestreados, y se espera que los especímenes más grandes tengan mayor número de defectos que los más pequeños. Por ejemplo, los tamaños de muestras de telas inspeccionadas en busca de defectos pueden variar en el tiempo. Alternativamente, el número de piezas inspeccionadas podría cambiar con el tiempo. Sea

$$u_i = \frac{\text{el número de defectos observados en el tiempo } i}{\text{tamaño de entidad inspeccionada en el tiempo } i} = \frac{x_i}{g_i}$$

donde "tamaño" puede referirse a área, longitud, volumen o, simplemente, al número de piezas inspeccionadas. Así, una **gráfica u** para $u_1, u_2, \ldots$, tiene una línea central $\bar{u}$, y los límites de control para las i-ésimas observaciones son $\bar{u} \pm 3\sqrt{\bar{u}/g_i}$.

Se examinaron paneles pintados en secuencia de tiempo y para cada uno se determinó el número de defectos en una región de muestreo especificada. El área superficial (en pies cuadrados) de la región examinada varió de panel a panel. Los resultados se dan a continuación. Construya una gráfica u.

Panel	Área examinada	Núm. de defectos
1	.8	3
2	.6	2
3	.8	3
4	.8	2
5	1.0	5
6	1.0	5
7	.8	10
8	1.0	12
9	.6	4
10	.6	2
11	.6	1
12	.8	3
13	.8	5
14	1.0	4
15	1.0	6
16	1.0	12
17	.8	3
18	.6	3
19	.6	5
20	.6	1

28. Construya una gráfica de control para la información del ejercicio 25, mediante el uso de la transformación sugerida en el texto.

16.5 Procedimientos CUSUM

Un defecto de la gráfica $\bar{X}$ tradicional es su incapacidad para detectar un cambio relativamente pequeño en la media de un proceso. Esto es, en gran medida, consecuencia del hecho de que si un proceso se juzga como fuera de control en un tiempo particular depende sólo de la muestra en ese tiempo, y no de la historia pasada del proceso. Se han diseñado procedimientos y gráficas de control de **suma acumulada (CUSUM)** para solucionar este defecto.

Hay dos versiones equivalentes de un procedimiento CUSUM para la media de un proceso, una gráfica y otra computacional. Esta última se emplea casi exclusivamente en la práctica, pero la lógica que hay detrás del procedimiento se entiende con más facilidad si se considera primero la forma gráfica.

La mascarilla V

Denote con μ_0 un valor objetivo o meta para la media del proceso, y defina *sumas acumuladas* con

$$S_1 = \bar{x}_1 - \mu_0$$

$$S_2 = (\bar{x}_1 - \mu_0) + (\bar{x}_2 - \mu_0) = \sum_{i=1}^{2} (\bar{x}_i - \mu_0)$$

$$\vdots$$

$$S_l = (\bar{x}_1 - \mu_0) + \cdots + (\bar{x}_l - \mu_0) = \sum_{i=1}^{l} (\bar{x}_i - \mu_0)$$

(en ausencia de un valor objetivo, se usa $\bar{\bar{x}}$ en lugar de μ_0). Estas sumas acumuladas se grafican en el tiempo, es decir, en el tiempo l, se localiza un punto a una altura S_l. En el punto r del tiempo actual los puntos graficados son $(1, S_1)$, $(2, S_2)$, $(3, S_3)$,..., (r, S_r).

En seguida se superpone una "mascarilla" en forma de V sobre la gráfica, como se ve en la figura 16.7. El punto 0, que se encuentra a una distancia d atrás del punto en el que se cruzan los dos brazos de la mascarilla, está posicionado en el actual punto CUSUM (r, S_r). En el tiempo r el proceso se juzga fuera de control si cualquiera de los puntos graficados se encuentra fuera de la mascarilla V, ya sea arriba del brazo superior o abajo del brazo inferior. Cuando el proceso está bajo control, las $\bar{x}_i$ varían alrededor del valor objetivo μ_0, de modo que las S_i sucesivas deben variar alrededor del 0. Suponga, no obstante, que en cierto tiempo, la media del proceso cambia a un valor más grande que el objetivo. De ese punto en adelante, las diferencias $\bar{x}_i - \mu_0$ tenderán a ser positivas, de modo que las S_l sucesivas aumentarán y los puntos graficados se desplazarán hacia arriba. Si ha ocurrido un cambio antes del punto r actual de tiempo, hay una buena probabilidad de que (r, S_r) sea considerablemente más alto que algunos otros puntos de la gráfica, en cuyo caso estos otros puntos estarán debajo del brazo inferior de la mascarilla. Del mismo modo, un cambio a un valor menor que el objetivo dará por resultado subsecuentemente puntos arriba del brazo superior de la mascarilla.

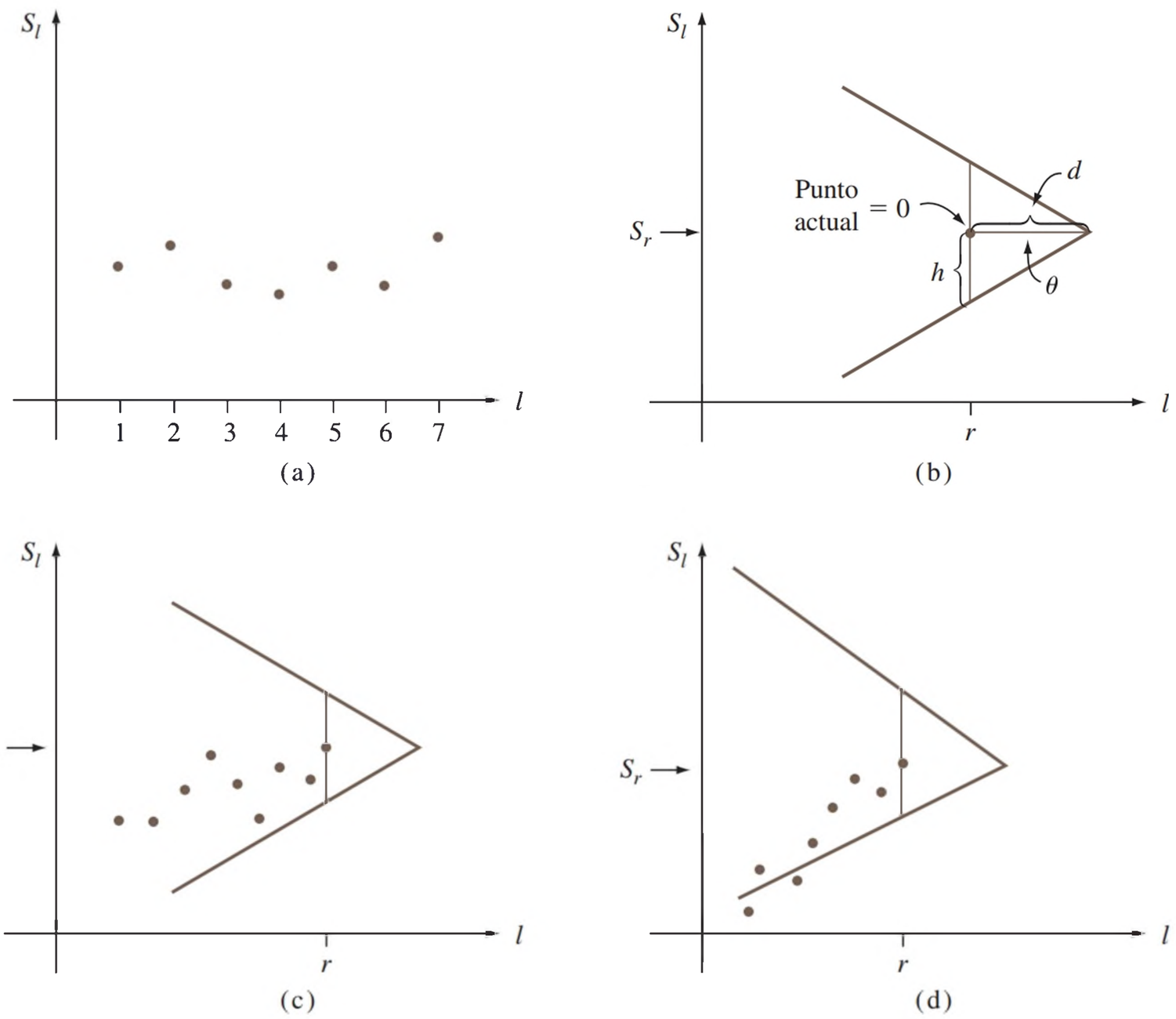


Figura 16.7 Gráficas CUSUM: (a) puntos sucesivos (l, S_l) en una gráfica CUSUM; (b) una mascarilla V con $0 = (r, S_r)$; (c) un proceso bajo control; (d) un proceso fuera de control

Cualquier mascarilla V particular se determina al especificar la "distancia de avance" d y el "semiángulo" θ; o bien, lo que es equivalente, al especificar d y la longitud h del segmento vertical de recta de 0 al brazo inferior (o superior) de la mascarilla. Un método para determinar cuál mascarilla usar consiste en especificar el tamaño de un cambio en la media de un proceso que sea de particular interés para un investigador. Así los parámetros de la mascarilla se seleccionan para dar valores deseados de α y β, la probabilidad de falsa alarma y la probabilidad de no detectar el cambio especificado, respectivamente. Un método alternativo

consiste en seleccionar la mascarilla que dé valores especificados de la magnitud promedio de lote (ARL) para un proceso bajo control y para un proceso en el cual la media ha cambiado en una cantidad designada. Después de desarrollar la forma computacional del procedimiento CUSUM, se ilustrará el segundo método de construcción.

EJEMPLO 16.8 Una compañía de productos de madera manufactura briquetas de carbón vegetal para barbacoas. Las empaca en bolsas de varios tamaños, la más grande de las cuales se supone que contiene 40 libras. La tabla 16.4 muestra los pesos de las bolsas de 16 muestras diferentes, cada una de tamaño $n = 4$. Las primeras 10 se extrajeron de una distribución normal con $\mu = \mu_0 = 40$ y $\sigma = .5$. Comenzando con la muestra 11, la media ha cambiado hacia arriba a $\mu = 40.3$.

Tabla 16.4 Observaciones $\bar{x}$ y sumas acumuladas para el ejemplo 16.8

Número de muestra	Observaciones				$\bar{x}$	$\Sigma(\bar{x}_i - 40)$
1	40.77	39.95	40.86	39.21	40.20	.20
2	38.94	39.70	40.37	39.88	39.72	−.08
3	40.43	40.27	40.91	40.05	40.42	.34
4	39.55	40.10	39.39	40.89	39.98	.32
5	41.01	39.07	39.85	40.32	40.06	.38
6	39.06	39.90	39.84	40.22	39.76	.14
7	39.63	39.42	40.04	39.50	39.65	−.21
8	41.05	40.74	40.43	39.40	40.41	.20
9	40.28	40.89	39.61	40.48	40.32	.52
10	39.28	40.49	38.88	40.72	39.84	.36
11	40.57	40.04	40.85	40.51	40.49	.85
12	39.90	40.67	40.51	40.53	40.40	1.25
13	40.70	40.54	40.73	40.45	40.61	1.86
14	39.58	40.90	39.62	39.83	39.98	1.84
15	40.16	40.69	40.37	39.69	40.23	2.07
16	40.46	40.21	40.09	40.58	40.34	2.41

La figura 16.8 muestra una gráfica $\overline{X}$ con límites de control

$$\mu \pm 3\sigma_{\bar{X}} = 40 \pm 3 \cdot (.5/\sqrt{4}) = 40 \pm .75$$

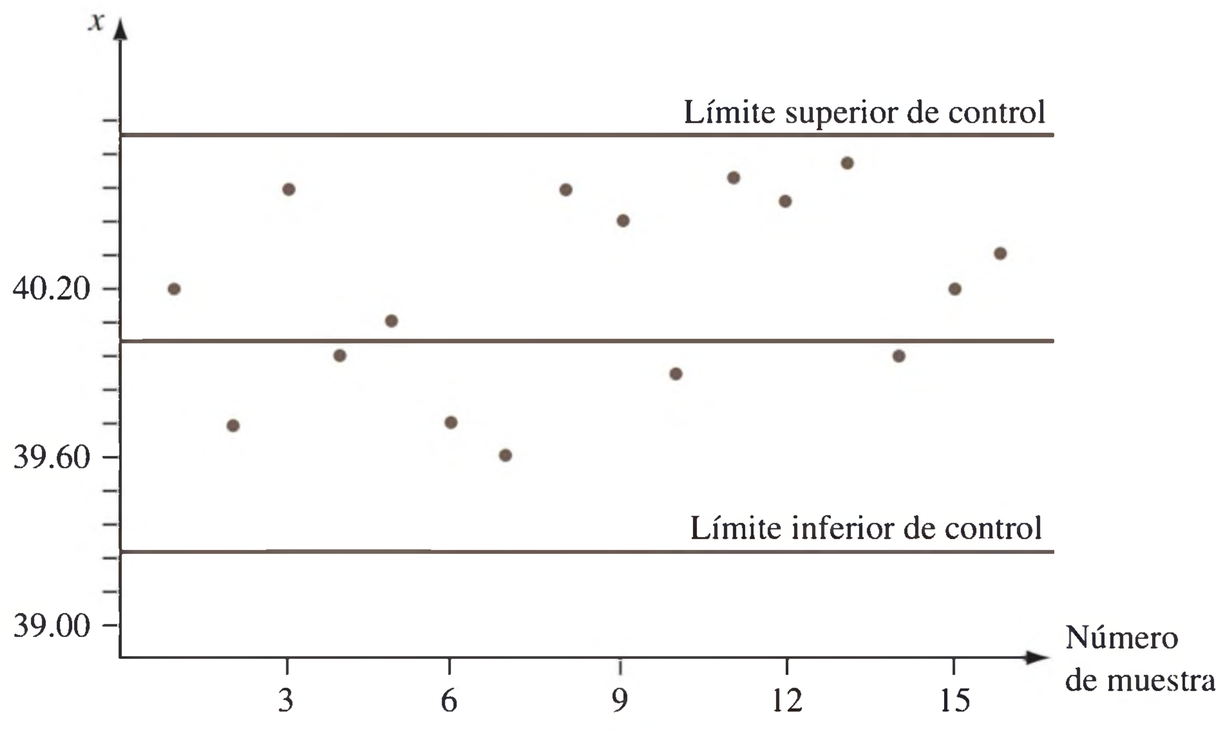


Figure 16.8 Gráfica de control $\overline{X}$ para los datos del ejemplo 16.8

Ningún punto de la gráfica se encuentra fuera de los límites de control. Esta gráfica sugiere un proceso estable para el cual la media ha permanecido en su objetivo.

La figura 16.9 muestra gráficas CUSUM con una mascarilla V particular superpuesta. La gráfica de la figura 16.9(a) es para el tiempo actual $r = 12$. Todos los puntos de esta gráfica están dentro de los brazos de la mascarilla. No obstante, la gráfica para $r = 13$ que se muestra en la figura 16.9(b) da una señal fuera de control. El punto que cae abajo del brazo inferior de la mascarilla sugiere un aumento en el valor de la media del proceso. La mascarilla en $r = 16$ es todavía más enfática en su mensaje de fuera de control. Este es un marcado contraste respecto a la gráfica $\overline{X}$.

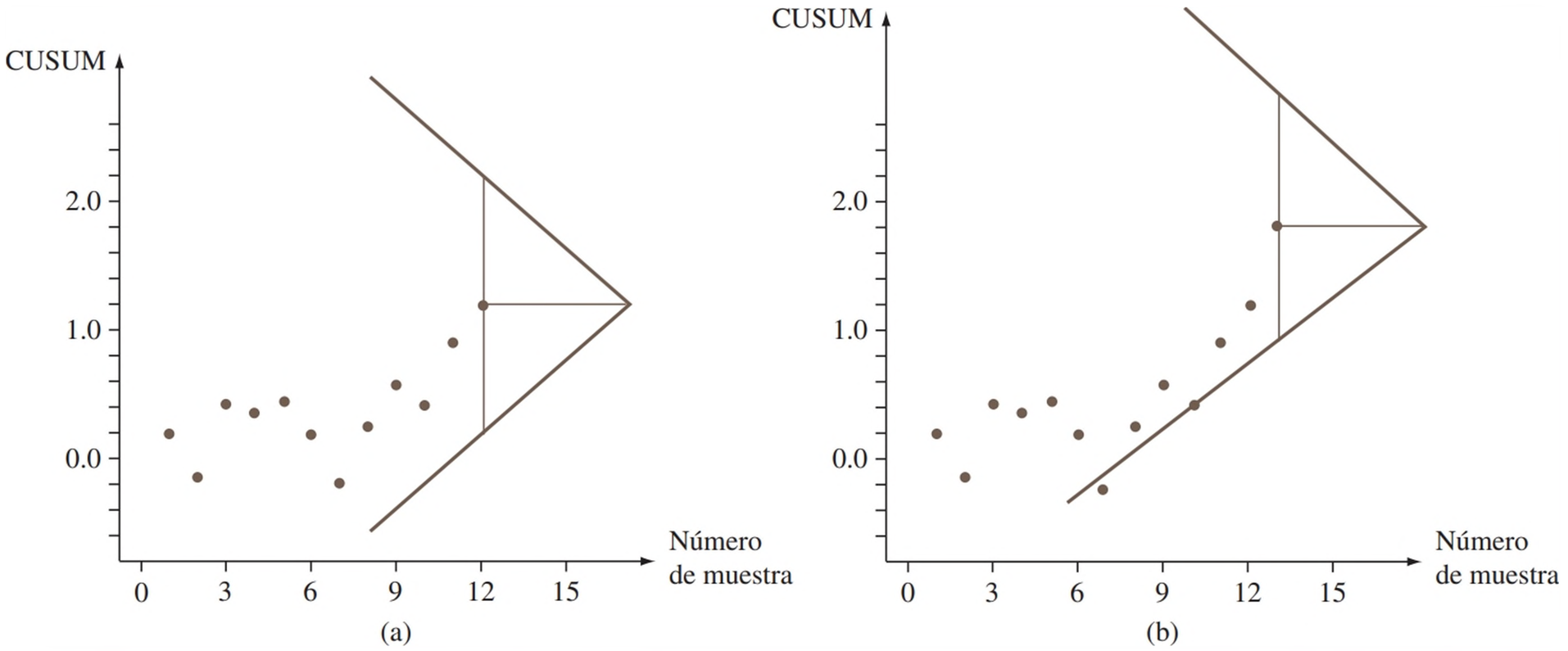


Figure 16.9 Gráficas CUSUM y mascarillas V para datos del ejemplo 16.8: (a) mascarilla V en el tiempo $r = 12$, proceso bajo control; (b) mascarilla V en el tiempo $r = 13$, señal fuera de control ■

Forma computacional

La siguiente versión computacional del procedimiento CUSUM es equivalente a la forma gráfica ya descrita.

Sea que $d_0 = e_0 = 0$, y que se calculen $d_1, d_2, d_3, \ldots$ y $e_1, e_2, e_3, \ldots$ en forma repetitiva usando las relaciones

$$d_l = \max[0, d_{l-1} + (\overline{x}_l - (\mu_0 + k))] \qquad (l = 1, 2, 3, \ldots)$$
$$e_l = \max[0, e_{l-1} - (\overline{x}_l - (\mu_0 - k))]$$

Aquí el símbolo k denota la pendiente del brazo inferior de la mascarilla V, y su valor se toma cotidianamente como $\Delta/2$ (donde Δ es el tamaño del cambio en μ en el cual se centra la atención).

Si en un tiempo actual r, $d_r > h$ o $e_r > h$, el proceso se juzga como fuera de control. La primera desigualdad sugiere que la media del proceso ha cambiado a un valor mayor que el objetivo, mientras que $e_r > h$ indica un cambio a un valor más pequeño.

EJEMPLO 16.9 Reconsidere la información de las briquetas de carbón vegetal que se muestra en la tabla 16.4 del ejemplo 16.8. El valor objetivo es $\mu_0 = 40$, y el tamaño de un cambio que será rápidamente detectado es $\Delta = .3$. De este modo,

$$k = \frac{\Delta}{2} = .15 \qquad \mu_0 + k = 40.15 \qquad \mu_0 - k = 39.85$$

por tanto,

$$d_l = \text{máx}[0, d_{l-1} + (\bar{x}_l - 40.15)]$$
$$e_l = \text{máx}[0, e_{l-1} - (\bar{x}_l - 39.85)]$$

El cálculo de las primeras d_l continúa como sigue:

$$\begin{aligned} d_0 &= 0 \\ d_1 &= \text{máx}[0, d_0 + (\bar{x}_1 - 40.15)] \\ &= \text{máx}[0, 0 + (40.20 - 40.15)] \\ &= .05 \\ d_2 &= \text{máx}[0, d_1 + (\bar{x}_2 - 40.15)] \\ &= \text{máx}[0, .05 + (39.72 - 40.15)] \\ &= 0 \\ d_3 &= \text{máx}[0, d_2 + (\bar{x}_3 - 40.15)] \\ &= \text{máx}[0, 0 + (40.42 - 40.15)] \\ &= .27 \end{aligned}$$

Los demás cálculos se resumen en la tabla 16.5.

Tabla 16.5 Cálculos de CUSUM para el ejemplo 16.9

Número de muestra	$\bar{x}_l$	$\bar{x}_l - 40.15$	d_l	$\bar{x}_l - 39.85$	e_l
1	40.20	.05	.05	.35	0
2	39.72	−.43	0	−.13	.13
3	40.42	.27	.27	.57	0
4	39.98	−.17	.10	.13	0
5	40.06	−.09	.01	.21	0
6	39.76	−.39	0	−.09	.09
7	39.65	−.50	0	−.20	.29
8	40.41	.26	.26	.56	0
9	40.32	.17	.43	.47	0
10	39.84	−.31	.12	−.01	.01
11	40.49	.34	.46	.64	0
12	40.40	.25	.71	.55	0
13	40.61	.46	1.17	.76	0
14	39.98	−.17	1.00	.13	0
15	40.23	.08	1.08	.38	0
16	40.34	.19	1.27	.49	0

El valor $h = .95$ da un procedimiento CUSUM con propiedades deseables, es decir, las alarmas falsas (señales fuera de control incorrectas) se presentan rara vez, pero un cambio de $\Delta = .3$ por lo general será detectado rápidamente. Con este valor de h, la primera señal fuera de control proviene después que se dispone de la 13ª muestra. Dado que $d_{13} = 1.17 > .95$, al parecer la media ha cambiado a un valor mayor que el objetivo. Este es el mismo mensaje que el proporcionado por la mascarilla V de la figura 16.9(b). ■

Para demostrar la equivalencia, nuevamente denote con r el punto actual de tiempo, de modo que $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_r$ estén disponibles. La figura 16.10 muestra una mascarilla V con el punto marcado como 0 en (r, Sr). La pendiente del brazo inferior, que se denota por k, es h/d. De este modo, los puntos sobre el brazo inferior arriba de r, $r - 1$, $r - 2$,... están a alturas $S_r - h$, $S_r - h - k$, $S_r - h - 2k$ y así sucesivamente.

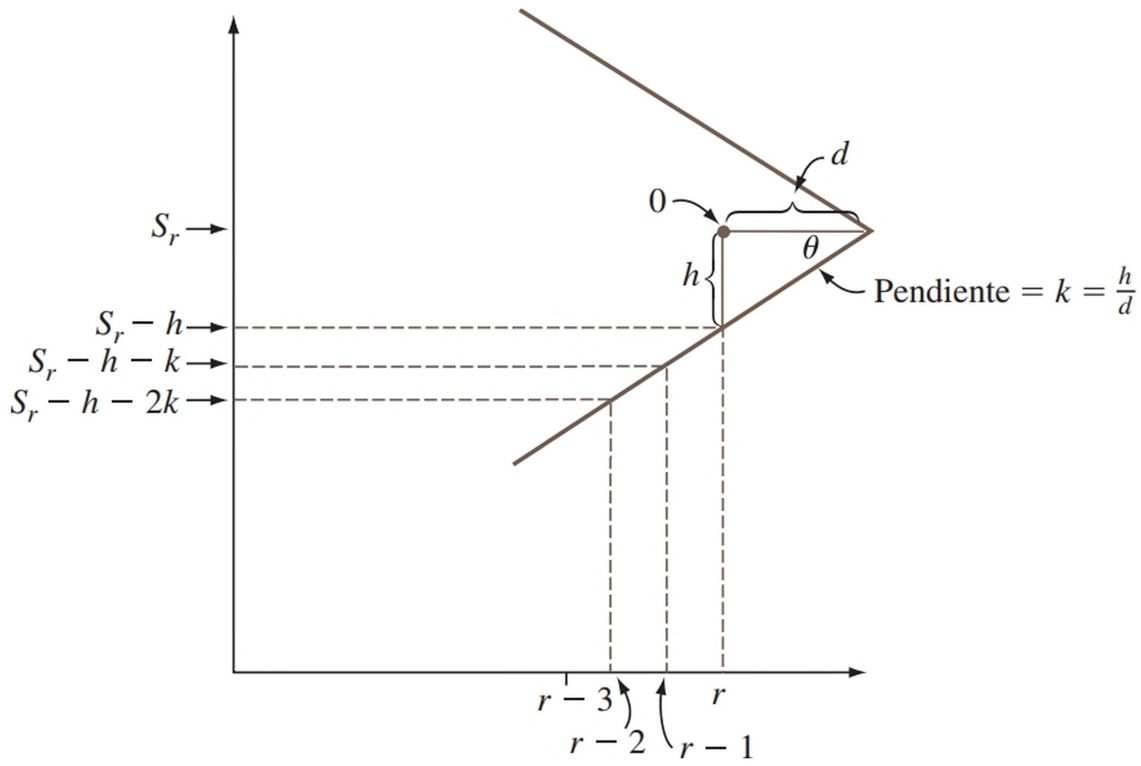


Figura 16.10 Mascarilla V con pendiente de brazo inferior = k

El proceso está bajo control si todos los puntos caen o están entre los brazos de la mascarilla. Para describir esta condición algebraicamente, sea

$$T_l = \sum_{i=1}^{l} [\bar{x}_i - (\mu_0 + k)] \qquad l = 1, 2, 3, \ldots, r$$

Las condiciones bajo las cuales todos los puntos están sobre o arriba del brazo inferior son

$$\begin{aligned}
S_r - h &\le S_r \qquad \text{(trivialmente satisfechas), es decir, } S_r \le S_r + h \\
S_r - h - k &\le S_{r-1} \qquad \text{es decir, } S_r \le S_{r-1} + h + k \\
S_r - h - 2k &\le S_{r-2} \qquad \text{es decir, } S_r \le S_{r-2} + h + 2k \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

Ahora se resta r_k de ambos lados de cada desigualdad para obtener

$$\begin{aligned}
S_r - rk &\le S_r - rk + h \qquad \text{es decir, } T_r \le T_r + h \\
S_r - rk &\le S_{r-1} - (r-1)k + h \qquad \text{es decir, } T_r \le T_{r-1} + h \\
S_r - rk &\le S_{r-2} - (r-2)k + h \qquad \text{es decir, } T_r \le T_{r-2} + h \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

Por tanto, todos los puntos graficados se encuentran sobre o arriba del brazo inferior, si y sólo si $T_r - T_r \le h$, $T_r - T_{r-1} \le h$, $T_r - T_{r-2} \le h$ y así sucesivamente. Esto es equivalente a

$$T_r - \text{ mín}(T_1, T_2, \ldots, T_r) \le h$$

De modo semejante, si hacemos que

$$V_r = \sum_{i=1}^{r} [\bar{x}_i - (\mu_0 - k)] = S_r + rk$$

se puede demostrar que todos los puntos se encuentran sobre o abajo del brazo superior si y sólo si

$$\text{máx}(V_1, \ldots, V_r) - V_r \leq h$$

Si ahora hacemos que

$$d_r = T_r - \text{mín}(T_1, \ldots, T_r)$$
$$e_r = \text{máx}(V_1, \ldots, V_r) - V_r$$

es fácil ver que d_1, d_2,... y e_1, e_2,... se pueden calcular de manera repetitiva, como ya se ilustró líneas arriba. Por ejemplo, la expresión para d_r de acuerdo con la consideración de dos casos:

1. $\text{mín}(T_1, \ldots, T_r) = T_r$, de donde $d_r = 0$
2. $\text{mín}(T_1, \ldots, T_r) = \text{mín}(T_1, \ldots, T_{r-1})$, de modo que

$$\begin{aligned} d_r &= T_r - \text{mín}(T_1, \ldots, T_{r-1}) \\ &= \bar{x}_r - (\mu_0 + k) + T_{r-1} - \text{mín}(T_1, \ldots, T_{r-1}) \\ &= \bar{x}_r - (\mu_0 + k) + d_{r-1} \end{aligned}$$

Dado que d_r no puede ser negativa, es la mayor de estas dos cantidades.

Diseño de un procedimiento CUSUM

Denote con Δ el tamaño de un cambio en μ que sea detectado rápidamente mediante un procedimiento CUSUM.* Es práctica común hacer que $k = \Delta/2$. Ahora suponga que un experto en control de calidad especifica valores deseados de dos grandes magnitudes promedio de lote:

1. ARL (magnitud promedio de lote) cuando el proceso está bajo control ($\mu = \mu_0$)
2. ARL (magnitud promedio de lote) cuando el proceso está fuera de control porque la media ha cambiado en Δ($\mu = \mu_0 + \Delta$ o bien $\mu = \mu_0 - \Delta$)

Una gráfica desarrollada por Kenneth Kemp (**"The Use of Cumulative Sums for Sampling Inspection Schemes"**, ***Applied Statistics*****, 1962: 23**), llamada *nomograma*, se puede usar entonces para determinar valores de h y n que alcancen las magnitudes promedio de lote especificadas.† Esta gráfica se muestra en la figura 16.11. El método para usar la gráfica se describe en el recuadro siguiente. El valor de σ debe ser conocido o en su lugar se usa una estimación.

Uso del nomograma de Kemp

1. Localice las ARL en las escalas bajo control y fuera de control. Una estos dos puntos con una recta.
2. Observe en dónde la recta cruza la escala k', y despeje n usando la ecuación

$$k' = \frac{\Delta/2}{\sigma/\sqrt{n}}$$

   A continuación redondee n hacia arriba al entero más próximo.
3. Conecte el punto en la escala k' con el punto de la escala ARL bajo control usando una segunda recta, y observe en dónde esta recta cruza la escala h'. Luego $h = (\sigma/\sqrt{n}) \cdot h'$.

* Esto contrasta con la anotación previa, donde Δ representaba el número de desviaciones estándar por las cuales cambiaba μ.

† La palabra *nomograma* no es específica para esta gráfica; los nomogramas se usan para muchos otros fines.

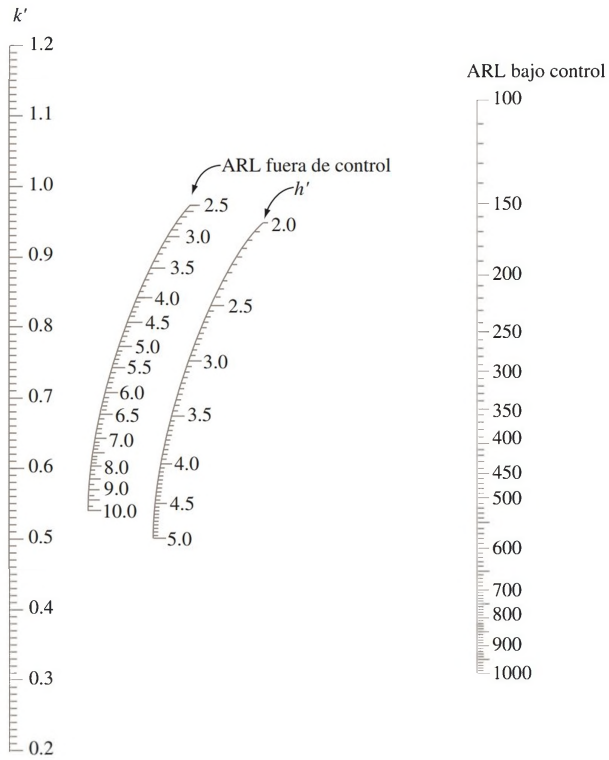


Figura 16.11 El nomograma Kemp*

El valor $h = .95$ se usó en el ejemplo 16.9. En esa situación se deduce que la ARL bajo control es 500 y la ARL fuera de control (para $\Delta = .3$) es 7.

EJEMPLO 16.10 El valor objetivo para el diámetro del núcleo interior de una bomba hidráulica es 2.250 pulgadas. Si la desviación estándar del diámetro del núcleo es $\sigma = .004$, ¿cuál procedimiento CUSUM dará una ARL bajo control de 500 y una ARL de 5 cuando el diámetro medio del núcleo cambie en una cantidad de .003 pulgadas?

Si se conecta el punto 500 de una escala ARL bajo control con el punto 5 de la escala ARL fuera de control, y se prolonga la recta a la escala k de la extrema izquierda de la figura 16.11, resulta $k' = .74$. Por tanto,

$$k' = .74 = \frac{\Delta/2}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{.0015}{.004/\sqrt{n}} = .375\sqrt{n}$$

de modo que

$$\sqrt{n} = \frac{.74}{.375} = 1.973 \qquad n = (1.973)^2 = 3.894$$

Por tanto, el procedimiento CUSUM debe estar basado en el tamaño muestral $n = 4$. Ahora, si se conecta .74 en la escala k con 500 en la escala ARL bajo control resulta $h' = 3.2$, de donde

$$h = (\sigma/\sqrt{n}) \cdot (3.2) = (.004/\sqrt{4})(3.2) = .0064$$

Tan pronto como $d_r = .0064$ o $e_r > .0064$ se obtiene una señal fuera de control. ■

* FUENTE: The Kemp nomogram—Kemp, Kenneth W., "The Use of Cumulative Sums for Sampling Inspection Schemes", *Applied Statistics*, vol. XI, 1962: 23.

Se han examinado procedimientos CUSUM para controlar la ubicación de un proceso. Existen también procedimientos CUSUM para controlar variaciones en procesos y para datos de atributos. Deben consultarse las referencias del capítulo para ver información sobre estos procedimientos.

EJERCICIOS Sección 16.5 (29–32)

29. Se supone que los recipientes de cierto tratamiento para las fosas sépticas contienen 16 onzas de líquido. Se selecciona una muestra de cinco recipientes de la línea de producción una vez por hora, y se determina el contenido promedio de la muestra. Considere los siguientes resultados: 15.992, 16.051, 16.066, 15.912, 16.030, 16.060, 15.982, 15.899, 16.038, 16.074, 16.029, 15.935, 16.032, 15.960, 16.055. Usando $\Delta = .10$ y $h = .20$, utilice la forma computacional del procedimiento CUSUM para investigar el comportamiento de este proceso.

30. El valor objetivo para el diámetro de cierto tipo de eje motor es de .75 pulgadas. El tamaño del cambio en el diámetro promedio considerado importante a detectar es .002 pulgadas. Haga una muestra de diámetros promedio para grupos sucesivos de $n = 4$ ejes como sigue: .7507, .7504, .7492, .7501, .7503, .7510, .7490, .7497, .7488, .7504, .7516, .7472, .7489, .7483, .7471, .7498, .7460, .7482, .7470, .7493, .7462, .7481. Utilice la forma computacional del procedimiento CUSUM con $h = .003$ para ver si la media del proceso permaneció en su objetivo durante todo el tiempo de observación.

31. La desviación estándar de cierta dimensión en una pieza de avión es de .005 cm. ¿Qué procedimiento CUSUM dará una ARL bajo control de 600 y una ARL fuera de control de 4 cuando el valor medio de la dimensión cambia en .004 cm?

32. Cuando la ARL fuera de control (magnitud promedio de lote) corresponde a un cambio de 1 desviación estándar en la media de un proceso, ¿cuáles son las características del procedimiento CUSUM que tiene unas ARL de 250 y 4.8 para las condiciones bajo control y fuera de control, respectivamente?

16.6 Muestreo de aceptación

Es frecuente que las piezas que provienen de un proceso de producción se envíen en grupos a otra compañía o establecimiento comercial. Un grupo podría estar formado por todas las unidades de un lote o turno de producción particular en un contenedor de embarque de algún tipo, enviado en respuesta a un pedido en particular, etcétera. El grupo de piezas suele recibir el nombre de *lote*, el remitente se conoce como *productor* y el destinatario del lote es el *consumidor.* Aquí el interés se centrará en situaciones en las que cada pieza es defectuosa o no defectuosa, con p denotando la proporción de unidades defectuosas del lote. Naturalmente que el consumidor desearía aceptar el lote sólo si el valor de p es adecuadamente pequeño. El muestreo de aceptación es la parte de la estadística aplicada que se refiere a métodos para determinar si el consumidor debería aceptar o rechazar un lote.

Hasta hace poco tiempo, los especialistas consideraban que los procedimientos de gráficas de control y técnicas de muestreo de aceptación eran partes igualmente importantes de la metodología de control de calidad. Este ya no es el caso. La razón es que el uso de gráficas de control y otras estrategias creadas en tiempos recientes ofrece la oportunidad de diseñar calidad en un producto, mientras que el muestreo de aceptación resuelve lo que ya se ha producido, y no establece ningún control directo sobre la calidad del proceso. Esto llevó al desaparecido experto en control de calidad, el estadounidense W. E. Deming y especialista importante, a persuadir a los japoneses de hacer el mayor uso posible de la metodología de control de calidad, a razonar firmemente contra el uso del muestreo de aceptación en muchas situaciones. En un estilo semejante, el reciente libro de Ryan (véase la bibliografía del capítulo) dedica varios capítulos a las gráficas de control y menciona el muestreo de aceptación sólo de paso. Como reflejo de esto aquí se presenta una breve introducción a los conceptos básicos.

Planes de un solo muestreo

El tipo más claro de plan de muestreo de aceptación consiste en seleccionar una sola muestra aleatoria de tamaño n y en seguida rechazar el lote si el número de defectos en la muestra excede un valor c crítico especificado. Denote con la variable aleatoria X el número de piezas defectuosas del lote, y con A el evento de que el lote sea aceptado. Entonces $P(A) = P(X \le c)$ es una función de p; cuanto mayor sea el valor de p, menor será la probabilidad de aceptar el lote.

Si el tamaño muestral n es grande en relación con N, $P(A)$ se calcula usando la distribución hipergeométrica (el número de piezas defectuosas en el lote es Np):

$$P(X \le c) = \sum_{x=0}^{c} h(x; n, Np, N) = \sum_{x=0}^{c} \frac{\binom{Np}{x} \cdot \binom{N(1-p)}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Cuando n es pequeña en relación con N (la regla empírica sugerida previamente fue $n \le .05\,N$, pero algunos autores emplean la menos conservadora $n \le .10N$), se puede usar la distribución binomial:

$$P(X \le c) = \sum_{x=0}^{c} b(x; n, p) = \sum_{x=0}^{c} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Por último, si $P(A)$ es grande sólo cuando p es pequeña (esto depende del valor de c) se justifica la aproximación de Poisson a la distribución binomial:

$$P(X \le c) \approx \sum_{x=0}^{c} p(x; np) = \sum_{x=0}^{c} \frac{e^{-np}(np)^x}{x!}$$

El comportamiento de un plan de muestreo se puede resumir muy bien si se grafica $P(A)$ como una función de p. Dicha gráfica se denomina **curva característica de operación (OC)** para el plan.

EJEMPLO 16.11 Considere el plan de muestreo con $c = 2$ y $n = 50$. Si el tamaño N del lote excede 1000, se puede usar la distribución binomial. Esto da

$$P(A) = P(X \le 2) = (1-p)^{50} + 50p(1-p)^{49} + 1255p^2(1-p)^{48}$$

La tabla siguiente muestra $P(A)$ para valores seleccionados de p, y la correspondiente curva característica de operación se muestra en la figura 16.12.

p	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	.10	.12	.15
$P(A)$	.986	.922	.811	.677	.541	.416	.311	.226	.161	.112	.051	.014

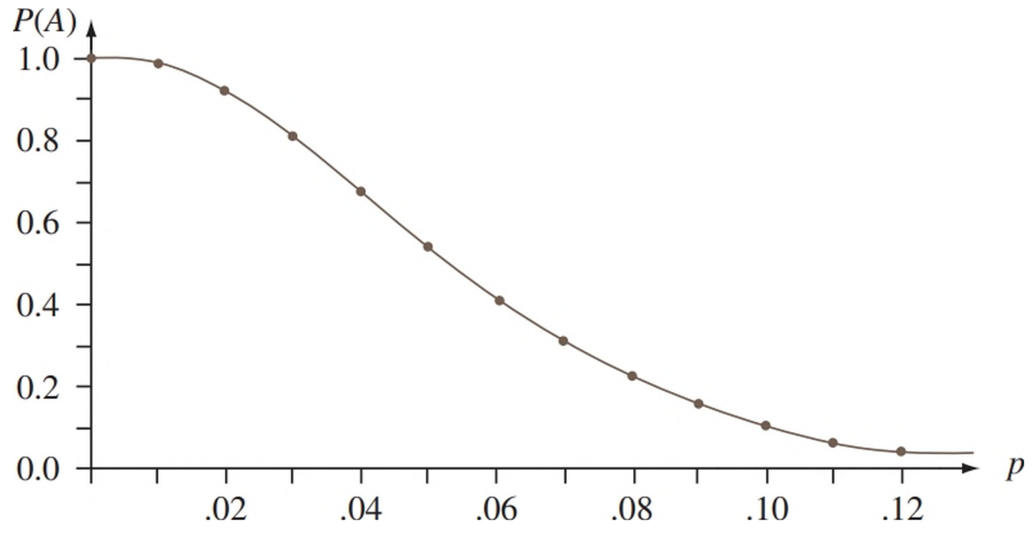


Figura 16.12 Curva característica de operación para el plan de muestreo con $c = 2$, $n = 50$ ■

La curva característica de operación para el plan del ejemplo 16.11 tiene $P(A)$ cerca de 1 para p muy cercana a 0. No obstante, en numerosas aplicaciones un porcentaje de piezas defectuosas de 8% [para el cual $P(A) = .226$] o incluso sólo 5% [$P(A) = .541$] sería considerado excesivo, en cuyo caso las probabilidades de aceptación son demasiado altas. Si se aumenta el valor crítico c y se mantiene n fija da por resultado un plan para el cual $P(A)$ aumenta en cada p (excepto 0 y 1), de modo que la nueva curva característica de operación se encuentra arriba de la anterior. Esto es deseable para p cercana a 0 pero no para valores más grandes de p. Al mantener c constante mientras se aumenta n se obtiene una curva característica de operación más baja, que está bien para p más grande pero no para p cercana a 0. Se desea una curva característica de operación que sea más alta para una p muy pequeña y más baja para una p más grande. Esto se logra al aumentar n y ajustar c.

Diseño de un plan de una muestra

Un plan de muestreo eficaz es aquel con las siguientes características:

1. Tiene una alta probabilidad especificada de aceptar lotes que el productor considera que son de buena calidad.
2. Tiene una baja probabilidad especificada de aceptar lotes que el consumidor considera que son de mala calidad.

Un plan de este tipo se puede llevar a cabo si se procede como sigue. Se designan dos valores diferentes de p, uno para el que $P(A)$ es un valor especificado cercano a 1 y el otro para el que $P(A)$ es un valor especificado cercano a 0. Estos dos valores de p, p_1 y p_2, por ejemplo, reciben el nombre de **nivel de calidad aceptable** (AQL) y el **porcentaje defectuoso de tolerancia del lote** (LTPD). Esto es, se necesita un plan para el que

1. $P(A) = 1 - \alpha$ cuando $p = p_1 =$ AQL (α pequeña)
2. $P(A) = \beta$ cuando $p = p_2 =$ LTPD (β pequeña)

Esto es igual a buscar un procedimiento de prueba de hipótesis con probabilidad α con error tipo I especificado, y probabilidad β de error tipo II especificado. Por ejemplo, se podría tener

$$\text{AQL} = .01 \quad \alpha = .05 \quad (P(A) = .95)$$
$$\text{LTPD} = .045 \quad \beta = .10 \quad (P(A) = .10)$$

Debido a que X es discreta, por lo general hay que contentarse con valores de n y c que aproximadamente satisfagan estas condiciones.

La tabla 16.6 proporciona información a partir de la cual n y c se pueden determinar en el caso $\alpha = .05$, $\beta = .10$.

Tabla 16.6 Factores para determinar n y c para un plan de una muestra con $\alpha = .05$, $\beta = .10$.

c	np_1	np_2	p_2/p_1	c	np_1	np_2	p_2/p_1
0	.051	2.30	45.10	8	4.695	12.99	2.77
1	.355	3.89	10.96	9	5.425	14.21	2.62
2	.818	5.32	6.50	10	6.169	15.41	2.50
3	1.366	6.68	4.89	11	6.924	16.60	2.40
4	1.970	7.99	4.06	12	7.690	17.78	2.31
5	2.613	9.28	3.55	13	8.464	18.86	2.24
6	3.285	10.53	3.21	14	9.246	20.13	2.18
7	3.981	11.77	2.96	15	10.040	21.29	2.12

EJEMPLO 16.12 Determine un plan para el cual AQL $= p_1 = .01$ y LTPD $= p_2 = .045$. El cociente entre p_2 y p_1 es

$$\frac{\text{LTPD}}{\text{AQL}} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{.045}{.01} = 4.50$$

Este valor se encuentra entre el cociente 4.89 dado en la tabla 16.6, para la cual $c = 3$, y 4.06 para la cual $c = 4$. Una vez que se selecciona uno de estos valores de c, se puede determinar n ya sea al dividir el valor np_1 de la tabla 16.6 entre p_1, o mediante np_2/p_2. De esta manera cuatro planes diferentes (dos valores de c, y uno por cada uno de los dos valores de n) dan aproximadamente el valor especificado de α y β. Considere, por ejemplo, usar $c = 3$ y

$$n = \frac{np_1}{p_1} = \frac{1.366}{.01} = 136.6 \approx 137$$

Así,

$$\alpha = 1 - P(X \leq 3 \text{ cuando } p = p_1) = .050$$

(la aproximación de Poisson con $\mu = 1.37$ también da .050) y

$$\beta = P(X \leq 3 \text{ cuando } p = p_2) = .131$$

El plan con $c = 4$ y n determinada a partir de $np_2 = 7.99$ tiene $n = 178$, $\alpha = .034$ y $\beta = .094$. El mayor tamaño muestral da por resultado un plan con α y β menores que los correspondientes valores especificados. ■

El libro de Douglas Montgomery citado en la bibliografía del capítulo contiene una gráfica de la cual c y n se pueden determinar para *cualesquiera* α y β especificadas.

Puede ocurrir que el número de piezas defectuosas de la muestra llegue a $c + 1$ antes de que se hayan examinado todas las piezas. Por ejemplo, en el caso $c = 3$ y $n = 137$, puede ser que la pieza número 125 examinada sea la cuarta pieza defectuosa, de modo que no hay necesidad de examinar las 12 piezas restantes. No obstante, por lo general se recomienda examinar todas las piezas, incluso cuando esto ocurra para obtener un historial de calidad lote por lote, así como estimaciones de p en el tiempo.

Planes de muestreo doble

En un plan de muestreo doble, se determina el número de piezas defectuosas x_1 de una muestra inicial de tamaño n_1. Hay entonces tres cursos de acción posibles: aceptar de inmediato el lote, rechazar de inmediato el lote, o tomar una segunda muestra de n_2 piezas y rechazar o aceptar el lote dependiendo del número total $x_1 + x_2$ de piezas defectuosas en las dos muestras. Además de los dos tamaños muestrales, un plan específico está caracterizado por otros tres números, c_1, r_1 y c_2, como sigue:

1. Rechazar el lote si $x_1 \geq r_1$.
2. Aceptar el lote si $x_1 \leq c_1$.
3. Si $c_1 < x_1 < r_1$, tomar una segunda muestra; entonces aceptar el lote si $x_1 + x_2 \leq c_2$ o rechazarlo de otro modo.

EJEMPLO 16.13 Considere el plan de muestreo doble con $n_1 = 80$, $n_2 = 80$, $c_1 = 2$, $r_1 = 5$ y $c_2 = 6$. De este modo, el lote será aceptado si 1) $x_1 = 0$, 1 o 2; 2) $x_1 = 3$ y $x_2 = 0$, 1, 2 o 3; o 3) $x_1 = 4$ y $x_2 = 0$, 1 o 2.

Suponiendo que el tamaño del lote es lo suficientemente grande para que aplique la aproximación binomial, la probabilidad $P(A)$ de aceptar el lote es

$$\begin{aligned} P(A) &= P(X_1 = 0, 1 \text{ o } 2) + P(X_1 = 3,\ X_2 = 0, 1, 2 \text{ o } 3) \\ &\quad + P(X_1 = 4, X_2 = 0, 1 \text{ o } 2) \\ &= \sum_{x_1=0}^{2} b(x_1; 80, p) + b(3; 80, p) \sum_{x_2=0}^{3} b(x_2; 80, p) \\ &\quad + b(4; 80, p) \sum_{x_2=0}^{2} b(x_2; 80, p) \end{aligned}$$

De nuevo la gráfica de $P(A)$ en función de p es la curva característica de operación del plan. La curva característica de operación para este plan aparece en la figura 16.13.

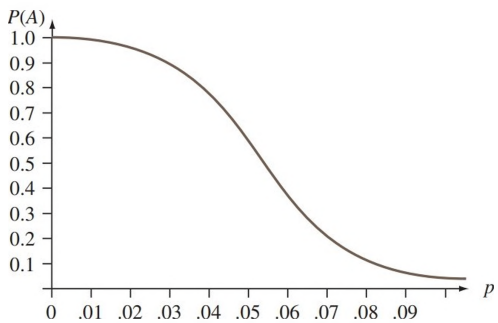


Figura 16.13 Curva característica de operación para el plan de muestreo doble del ejemplo 16.13

Un método común para diseñar un plan de muestreo doble consiste en proceder como se sugirió líneas arriba para los planes de una sola muestra. Especifique valores p_1 y p_2 junto con sus correspondientes probabilidades de aceptación $1 - \alpha$ y β. A continuación encuentre un plan que satisfaga estas condiciones. El libro de Montgomery contiene tablas semejantes a la tabla 16.6 para este propósito en los casos $n_2 = n_1$ y $n_2 = 2n_1$ con $1 - \alpha = .95$, $\beta = .10$. En otras fuentes se pueden hallar tabulaciones de planes mucho más extensas.

De modo similar a la práctica común con los planes de una sola muestra, se recomienda que todas las piezas de la primera muestra sean examinadas, incluso cuando la $(r_1 + 1)$-ésima pieza defectuosa se descubra antes de inspeccionar la n_1-ésima muestra. No obstante, se acostumbra terminar la inspección de la segunda muestra si el número de piezas defectuosas es suficiente para justificar el rechazo antes de que se hayan examinado todas las piezas. Esto se conoce como *acortamiento* en la segunda muestra. Con el acortamiento se puede demostrar que el número esperado de piezas inspeccionadas, en un plan de muestreo doble, es menor que el número de piezas examinadas en un plan de muestreo de una sola pieza, cuando las curvas características de operación de los dos planes están cerca de ser idénticas. Esta es la principal virtud de los planes de muestreo doble. Para saber más de estos temas, así como de un examen de planes de muestreo secuenciales y múltiples (que consisten en seleccionar artículos para inspección uno por uno en lugar de por grupos), debe consultarse un libro que hable sobre control de calidad.

Rectificación de inspección y otros criterios de diseño

En algunas situaciones se lleva a cabo una inspección de muestreo mediante *rectificación*. Para planes de una sola muestra esto significa que cada pieza defectuosa de la misma se sustituye con una satisfactoria, y si el número de piezas defectuosas de la muestra excede del corte c de aceptación, *todas* las piezas del lote son examinadas y se sustituye con piezas

buenas cualquiera de las defectuosas. Denote con N el tamaño del lote. Una característica importante de un plan de muestreo con rectificación de inspección es la **calidad de salida promedio**, denotada por AOQ. Esta es la proporción a largo plazo de piezas defectuosas entre las enviadas después de que se utiliza el plan de muestreo. Ahora las piezas defectuosas se presentarán sólo entre las $N - n$ piezas no inspeccionadas de un lote juzgado aceptable con base en una muestra. Suponga, por ejemplo, que $P(A) = P(X \le c) = .985$ cuando $p = .01$. Entonces, a largo plazo, 98.5% de las $N - n$ piezas que no estén en la muestra no se inspeccionarán, de las cuales se espera que 1% sean defectuosas. Esto implica que el número esperado de piezas defectuosas de un lote seleccionado al azar sea $(N - n) \cdot P(A) \cdot p = .00985(N - n)$. Si se divide esto entre el número de piezas de un lote obtenemos la calidad de salida promedio:

$$\begin{aligned} \text{AOQ} &= \frac{(N-n) \cdot P(A) \cdot p}{N} \\ &\approx P(A) \cdot p \qquad \text{si } N \gg n \end{aligned}$$

Debido a que AOQ $= 0$ cuando $p = 0$ o cuando $p = 1$ [$P(A) = 0$ en el último caso], se deduce que hay un valor de p entre 0 y 1 para el cual AOQ es el máximo. El valor máximo de AOQ se denomina **límite de calidad de salida promedio, AOQL**. Por ejemplo, para el plan con $n = 137$ y $c = 3$ examinado antes, AOQL $= .0142$, el valor de AOQ en $p \approx .02$.

Las selecciones apropiadas de n y c darán un plan de muestreo para el que AOQL es un número especificado pequeño. No obstante, este plan no es único y se pueden imponer otras condiciones. Es frecuente que esta segunda condición comprenda el **promedio** (es decir, el esperado) del **número total inspeccionado**, denotado por **ATI**. El número de piezas inspeccionadas de un lote seleccionado al azar es una variable aleatoria que toma el valor n con probabilidad $P(A)$ y N con probabilidad $1 - P(A)$. Por tanto, el número esperado de piezas inspeccionadas de un lote seleccionado al azar es

$$\text{ATI} = n \cdot P(A) + N \cdot (1 - P(A))$$

Es práctica común seleccionar un plan de muestreo que tenga un límite de calidad de salida promedio (AOQL) y, además, el mínimo del número total inspeccionado (ATI) a un nivel de calidad particular p.

Planes de muestro estándar

Puede parecer que la determinación de un plan de muestreo que simultáneamente satisface varios criterios es muy difícil. Por fortuna, ya otros investigadores han puesto las bases en forma de extensas tabulaciones de dichos planes. El MIL STD 105D, creado por las fuerzas militares después de la segunda Guerra Mundial, es el conjunto de planes de más amplio uso. Una versión civil, ANSI/ASQC Z1.4, es muy semejante a la versión militar. Un tercer conjunto de planes que goza de preferencia fue creado por los Laboratorios Bell, antes de la segunda Guerra Mundial, por dos expertos en estadística, Dodge y Romig. El libro de Montgomery (véase la bibliografía del capítulo) contiene una amena introducción al uso de estos planes.

EJERCICIOS Sección 16.6 (33–40)

33. Considere el plan de una sola muestra con $c = 2$ y $n = 50$, como se vio en el ejemplo 16.11, pero ahora suponga que el tamaño del lote es $N = 500$. Calcule $P(A)$, la probabilidad de aceptar el lote, para $p = .01, .02, \ldots, .10$ usando la distribución hipergeométrica. ¿En este caso la aproximación binomial da resultados satisfactorios?

34. Se debe seleccionar una muestra de 50 piezas de un lote formado por 5000. El lote será aceptado si la muestra contiene una pieza defectuosa, a lo sumo. Calcule la probabilidad de aceptación del lote para $p = .01, .02, \ldots, .10$, y trace la curva característica de operación.

35. Consulte el ejercicio 34 y considere el plan con $n = 100$ y $c = 2$. Calcule $P(A)$ para $p = .01, .02,..., .05$ y trace las dos curvas características de operación en el mismo conjunto de ejes. ¿Cuál de los dos planes es preferible (dejando de lado el costo del muestreo) y por qué?

36. Elabore un plan de una sola muestra para el cual el nivel de calidad aceptable = .02 y el porcentaje defectuoso de tolerancia del lote = .07 en el caso de que $\alpha = .05$, $\beta = .10$. Una vez que los valores de n y c se han determinado, calcule los valores alcanzados de α y β para el plan.

37. Considere el plan de muestreo doble para el cual ambos tamaños muestrales son de 50. El lote es aceptado después de la primera muestra si el número de piezas defectuosas es 1 a lo más, es rechazado si el número de piezas defectuosas es al menos 4 y es también rechazado después de la segunda muestra si el número total de piezas defectuosas es 6 o más. Calcule la probabilidad de aceptar el lote cuando $p = .01, .05$ y $.10$.

38. Algunas fuentes están en favor de un tipo un poco más restrictivo de plan de muestreo doble en el que $r_1 = c_2 + 1$; es decir, el lote es rechazado si en cualquiera de las etapas el número (total) de piezas defectuosas es al menos r_1 (véase el libro de Montgomery). Considere este tipo de plan de muestreo con $n_1 = 50$, $n_2 = 100$, $c_1 = 1$ y $r_1 = 4$. Calcule la probabilidad de aceptación del lote cuando $p = .02, .05$ y $.10$.

39. Consulte el ejemplo 16.11, en el que se utilizó un plan de una sola muestra con $n = 50$ y $c = 2$.

a. Calcule la calidad de salida promedio para $p = .01, .02,..., .10$. ¿Qué sugiere esto acerca del valor p para el que la calidad de salida promedio es máxima y del correspondiente límite de calidad de salida promedio?

b. Determine el valor de p para el cual la calidad de salida promedio sea máxima y el valor correspondiente de AOQL. [*Sugerencia*: Use cálculo.]

c. Para $N = 2000$ calcule el promedio del número total inspeccionado para los valores de p, dados en el inciso a).

40. Considere el plan de una sola muestra que utiliza $n = 50$ y $c = 1$ cuando $N = 2000$. Determine los valores de la calidad de salida promedio y el promedio del número total inspeccionado para valores seleccionados de p, y grafique cada uno de ellos contra p. También determine el valor del límite de calidad de salida promedio.

EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS (41–46)

41. Las observaciones realizadas en la resistencia al corte de 26 subgrupos de soldadura eléctrica por puntos de prueba, cada uno formado por seis soldaduras, producen $\Sigma\bar{x}_i = 10980$, $\Sigma s_i = 402$ y $\Sigma r_i = 1074$. Calcule límites de control para cualquier gráfica de control relevante.

42. Se determina el número de rasguños en la superficie de cada una de 24 placas metálicas rectangulares y da la siguiente información: 8, 1, 7, 5, 2, 0, 2, 3, 4, 3, 1, 2, 5, 7, 3, 4, 6, 5, 2, 4, 0, 10, 2, 6. Construya una gráfica de control apropiada y comente.

43. Los siguientes números son observaciones sobre resistencia a la tensión de especímenes de tela sintética seleccionados de un proceso de producción a intervalos igualmente espaciados. Construya gráficas de control apropiadas, y comente (suponga que una causa asignable es identificable para cualesquiera observaciones fuera de control).

1.	51.3	51.7	49.5	**12.**	49.6	48.4	50.0
2.	51.0	50.0	49.3	**13.**	49.8	51.2	49.7
3.	50.8	51.1	49.0	**14.**	50.4	49.9	50.7
4.	50.6	51.1	49.0	**15.**	49.4	49.5	49.0
5.	49.6	50.5	50.9	**16.**	50.7	49.0	50.0
6.	51.3	52.0	50.3	**17.**	50.8	49.5	50.9
7.	49.7	50.5	50.3	**18.**	48.5	50.3	49.3
8.	51.8	50.3	50.0	**19.**	49.6	50.6	49.4
9.	48.6	50.5	50.7	**20.**	50.9	49.4	49.7
10.	49.6	49.8	50.5	**21.**	54.1	49.8	48.5
11.	49.9	50.7	49.8	**22.**	50.2	49.6	51.5

44. Una alternativa de la gráfica p para la fracción defectuosa es la *gráfica np para el número de piezas defectuosas*. Esta gráfica tiene límite superior de control $= n\bar{p} + 3\sqrt{n\bar{p}(1 - \bar{p})}$, límite inferior de control $= n\bar{p} - 3\sqrt{n\bar{p}(1 - \bar{p})}$ y el *número* de piezas defectuosas de cada muestra se determina en la gráfica. Construya esa gráfica para los datos del ejemplo 16.6. ¿El uso de una gráfica *np* siempre da el mismo mensaje que el uso de una gráfica p (es decir, las dos gráficas son equivalentes)?

45. Las observaciones de resistencia (ohms) para subgrupos de cierto tipo de registro dieron en resumen las siguientes cantidades:

i	n_i	$\bar{x}_i$	s_i	i	n_i	$\bar{x}_i$	s_i
1	4	430.0	22.5	11	4	445.2	27.3
2	4	418.2	20.6	12	4	430.1	22.2
3	3	435.5	25.1	13	4	427.2	24.0
4	4	427.6	22.3	14	4	439.6	23.3
5	4	444.0	21.5	15	3	415.9	31.2
6	3	431.4	28.9	16	4	419.8	27.5
7	4	420.8	25.4	17	3	447.0	19.8
8	4	431.4	24.0	18	4	434.4	23.7
9	4	428.7	21.2	19	4	422.2	25.1
10	4	440.1	25.8	20	4	425.7	24.4

Construya límites de control apropiados. [*Sugerencia:* Use $\bar{\bar{x}} = \Sigma n_i\bar{x}_i / \Sigma n_i$ y $s^2 = \Sigma(n_i - 1)s^2_i / \Sigma(n_i - 1)$.]

46. Sea α el número entre 0 y 1 y defina una secuencia $W_1, W_2, W_3,...$ por $W_0 = \mu$ y $W_t = \alpha\bar{X}_t + (1 - \alpha)W_{t-1}$ para $t = 1, 2,....$ Al sustituir por W_{t-1} su representación en términos de $\bar{X}_{t-1}$ y W_{t-2}, y luego al sustituir por W_{t-2}, y así sucesivamente, da por resultado

$$W_t = \alpha\bar{X}_t + \alpha(1 - \alpha)\bar{X}_{t-1} + \ldots + \alpha(1 - \alpha)^{t-1}\bar{X}_1 + (1 - \alpha)^t\mu$$

El hecho de que W_t depende no sólo de $\overline{X}_t$ sino también de los promedios para puntos de tiempo pasado, aunque con pesos (exponencialmente) decrecientes, sugiere que los cambios en la media del proceso se reflejarán con más rapidez en las W_t que en las $\overline{X}$ individuales.

a. Demuestre que $E(W_t) = \mu$.

b. Sea $\sigma_t^2 = V(W_t)$, y demuestre que

$$\sigma_t^2 = \frac{\alpha[1 - (1 - \alpha)^{2t}]}{2 - \alpha} \cdot \frac{\sigma^2}{n}$$

c. Una *gráfica de control de promedio móvil ponderada exponencialmente* grafica las W_t y utiliza límites de control $\mu_0 \pm 3\sigma_t$ (o bien, $\overline{\overline{x}}$ en lugar de μ_0). Construya una gráfica de este tipo para la información del ejemplo 16.9, usando $\mu_0 = 40$.

BIBLIOGRAFÍA

Box, George, Soren Bisgaard y Conrad Fung, "An Explanation and Critique of Taguchi's Contributions to Quality Engineering", *Quality and Reliability Engineering International*, 1988: 123-131.

Montgomery, Douglas C., *Introduction to Statistical Quality Control* (6ª ed.), Wiley, Nueva York, 2008. Esta es una introducción exhaustiva a los numerosos aspectos del control de calidad aproximadamente del mismo nivel que este libro.

Ryan, Thomas P., *Statistical Methods for Quality Improvement*, 2a. ed., Wiley, Nueva York, 2000. Capta muy bien el sabor moderno del control de calidad con mínimas demandas sobre los conocimientos previos del lector.

Vardeman, Stephen B. y J. Marcus Jobe, *Statistical Quality Assurance Methods for Engineers*, Wiley, Nueva York, 1999. Incluye temas tradicionales de calidad y también material de diseño experimental importante para temas relativos a la calidad; es informal, pero una autoridad.

Apéndice de tablas

Tabla A.1 Distribución binomial acumulada

$$B(x; n, p) = \sum_{y=0}^{x} b(y; n, p)$$

a. $n = 5$

		p													
		0.01	**0.05**	**0.10**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.40**	**0.50**	**0.60**	**0.70**	**0.75**	**0.80**	**0.90**	**0.95**	**0.99**
	0	.951	.774	.590	.328	.237	.168	.078	.031	.010	.002	.001	.000	.000	.000	.000
	1	.999	.977	.919	.737	.633	.528	.337	.188	.087	.031	.016	.007	.000	.000	.000
x	**2**	1.000	.999	.991	.942	.896	.837	.683	.500	.317	.163	.104	.058	.009	.001	.000
	3	1.000	1.000	1.000	.993	.984	.969	.913	.812	.663	.472	.367	.263	.081	.023	.001
	4	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.998	.990	.969	.922	.832	.763	.672	.410	.226	.049

b. $n = 10$

		p													
		0.01	**0.05**	**0.10**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.40**	**0.50**	**0.60**	**0.70**	**0.75**	**0.80**	**0.90**	**0.95**	**0.99**
	0	.904	.599	.349	.107	.056	.028	.006	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	1	.996	.914	.736	.376	.244	.149	.046	.011	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	2	1.000	.988	.930	.678	.526	.383	.167	.055	.012	.002	.000	.000	.000	.000	.000
	3	1.000	.999	.987	.879	.776	.650	.382	.172	.055	.011	.004	.001	.000	.000	.000
	4	1.000	1.000	.998	.967	.922	.850	.633	.377	.166	.047	.020	.006	.000	.000	.000
x	**5**	1.000	1.000	1.000	.994	.980	.953	.834	.623	.367	.150	.078	.033	.002	.000	.000
	6	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.989	.945	.828	.618	.350	.224	.121	.013	.001	.000
	7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.988	.945	.833	.617	.474	.322	.070	.012	.000
	8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.989	.954	.851	.756	.624	.264	.086	.004
	9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.994	.972	.944	.893	.651	.401	.096

c. $n = 15$

		p													
		0.01	**0.05**	**0.10**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.40**	**0.50**	**0.60**	**0.70**	**0.75**	**0.80**	**0.90**	**0.95**	**0.99**
	0	.860	.463	.206	.035	.013	.005	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	1	.990	.829	.549	.167	.080	.035	.005	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	2	1.000	.964	.816	.398	.236	.127	.027	.004	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	3	1.000	.995	.944	.648	.461	.297	.091	.018	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	4	1.000	.999	.987	.836	.686	.515	.217	.059	.009	.001	.000	.000	.000	.000	.000
	5	1.000	1.000	.998	.939	.852	.722	.403	.151	.034	.004	.001	.000	.000	.000	.000
	6	1.000	1.000	1.000	.982	.943	.869	.610	.304	.095	.015	.004	.001	.000	.000	.000
x	**7**	1.000	1.000	1.000	.996	.983	.950	.787	.500	.213	.050	.017	.004	.000	.000	.000
	8	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.985	.905	.696	.390	.131	.057	.018	.000	.000	.000
	9	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.966	.849	.597	.278	.148	.061	.002	.000	.000
	10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.991	.941	.783	.485	.314	.164	.013	.001	.000
	11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.982	.909	.703	.539	.352	.056	.005	.000
	12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.973	.873	.764	.602	.184	.036	.000
	13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.995	.965	.920	.833	.451	.171	.010
	14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.995	.987	.965	.794	.537	.140

(*continúa*)

Tabla A.1 Distribución binomial acumulada (*continuación*)

$$B(x; n, p) = \sum_{y=0}^{x} b(y; n, p)$$

d. $n = 20$

							p								
	0.01	**0.05**	**0.10**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.40**	**0.50**	**0.60**	**0.70**	**0.75**	**0.80**	**0.90**	**0.95**	**0.99**
0	.818	.358	.122	.012	.003	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
1	.983	.736	.392	.069	.024	.008	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
2	.999	.925	.677	.206	.091	.035	.004	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
3	1.000	.984	.867	.411	.225	.107	.016	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
4	1.000	.997	.957	.630	.415	.238	.051	.006	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
5	1.000	1.000	.989	.804	.617	.416	.126	.021	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000
6	1.000	1.000	.998	.913	.786	.608	.250	.058	.006	.000	.000	.000	.000	.000	.000
7	1.000	1.000	1.000	.968	.898	.772	.416	.132	.021	.001	.000	.000	.000	.000	.000
8	1.000	1.000	1.000	.990	.959	.887	.596	.252	.057	.005	.001	.000	.000	.000	.000
9	1.000	1.000	1.000	.997	.986	.952	.755	.412	.128	.017	.004	.001	.000	.000	.000
x **10**	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.983	.872	.588	.245	.048	.014	.003	.000	.000	.000
11	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.995	.943	.748	.404	.113	.041	.010	.000	.000	.000
12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.979	.868	.584	.228	.102	.032	.000	.000	.000
13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.994	.942	.750	.392	.214	.087	.002	.000	.000
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.979	.874	.584	.383	.196	.011	.000	.000
15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.994	.949	.762	.585	.370	.043	.003	.000
16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.984	.893	.775	.589	.133	.016	.000
17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.965	.909	.794	.323	.075	.001
18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.992	.976	.931	.608	.264	.017
19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.997	.988	.878	.642	.182

(*continúa*)

Tabla A.1 Distribución binomial acumulada (*continuación*)

$$B(x; n, p) = \sum_{y=0}^{x} b(y; n, p)$$

e. $n = 25$

		p													
		0.01	**0.05**	**0.10**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.40**	**0.50**	**0.60**	**0.70**	**0.75**	**0.80**	**0.90**	**0.95**	**0.99**
	0	.778	.277	.072	.004	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	1	.974	.642	.271	.027	.007	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	2	.998	.873	.537	.098	.032	.009	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	3	1.000	.966	.764	.234	.096	.033	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	4	1.000	.993	.902	.421	.214	.090	.009	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	5	1.000	.999	.967	.617	.378	.193	.029	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	6	1.000	1.000	.991	.780	.561	.341	.074	.007	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	7	1.000	1.000	.998	.891	.727	.512	.154	.022	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	8	1.000	1.000	1.000	.953	.851	.677	.274	.054	.004	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	9	1.000	1.000	1.000	.983	.929	.811	.425	.115	.013	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	10	1.000	1.000	1.000	.994	.970	.902	.586	.212	.034	.002	.000	.000	.000	.000	.000
	11	1.000	1.000	1.000	.998	.980	.956	.732	.345	.078	.006	.001	.000	.000	.000	.000
x	**12**	1.000	1.000	1.000	1.000	.997	.983	.846	.500	.154	.017	.003	.000	.000	.000	.000
	13	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.994	.922	.655	.268	.044	.020	.002	.000	.000	.000
	14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.966	.788	.414	.098	.030	.006	.000	.000	.000
	15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.987	.885	.575	.189	.071	.017	.000	.000	.000
	16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.946	.726	.323	.149	.047	.000	.000	.000
	17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.978	.846	.488	.273	.109	.002	.000	.000
	18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.993	.926	.659	.439	.220	.009	.000	.000
	19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.971	.807	.622	.383	.033	.001	.000
	20	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.991	.910	.786	.579	.098	.007	.000
	21	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.967	.904	.766	.236	.034	.000
	22	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.991	.968	.902	.463	.127	.002
	23	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.993	.973	.729	.358	.026
	24	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.928	.723	.222

Tabla A.2 Distribución acumulada de Poisson

$$F(x; \mu) = \sum_{y=0}^{x} \frac{e^{-\mu} \mu^{y}}{y!}$$

		μ									
		.1	**.2**	**.3**	**.4**	**.5**	**.6**	**.7**	**.8**	**.9**	**1.0**
	0	.905	.819	.741	.670	.607	.549	.497	.449	.407	.368
	1	.995	.982	.963	.938	.910	.878	.844	.809	.772	.736
	2	1.000	.999	.996	.992	.986	.977	.966	.953	.937	.920
x	**3**		1.000	1.000	.999	.998	.997	.994	.991	.987	.981
	4				1.000	1.000	1.000	.999	.999	.998	.996
	5							1.000	1.000	1.000	.999
	6										1.000

(*continúa*)

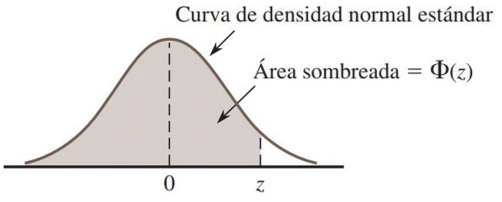
Tabla A.2 Distribución acumulada de Poisson (*continuación*)

$$F(x;\mu) = \sum_{y=0}^{x} \frac{e^{-\mu}\mu^{y}}{y!}$$

	μ										
x	**2.0**	**3.0**	**4.0**	**5.0**	**6.0**	**7.0**	**8.0**	**9.0**	**10.0**	**15.0**	**20.0**
0	.135	.050	.018	.007	.002	.001	.000	.000	.000	.000	.000
1	.406	.199	.092	.040	.017	.007	.003	.001	.000	.000	.000
2	.677	.423	.238	.125	.062	.030	.014	.006	.003	.000	.000
3	.857	.647	.433	.265	.151	.082	.042	.021	.010	.000	.000
4	.947	.815	.629	.440	.285	.173	.100	.055	.029	.001	.000
5	.983	.916	.785	.616	.446	.301	.191	.116	.067	.003	.000
6	.995	.966	.889	.762	.606	.450	.313	.207	.130	.008	.000
7	.999	.988	.949	.867	.744	.599	.453	.324	.220	.018	.001
8	1.000	.996	.979	.932	.847	.729	.593	.456	.333	.037	.002
9		.999	.992	.968	.916	.830	.717	.587	.458	.070	.005
10		1.000	.997	.986	.957	.901	.816	.706	.583	.118	.011
11			.999	.995	.980	.947	.888	.803	.697	.185	.021
12			1.000	.998	.991	.973	.936	.876	.792	.268	.039
13				.999	.996	.987	.966	.926	.864	.363	.066
14				1.000	.999	.994	.983	.959	.917	.466	.105
15					.999	.998	.992	.978	.951	.568	.157
16					1.000	.999	.996	.989	.973	.664	.221
17						1.000	.998	.995	.986	.749	.297
18							.999	.998	.993	.819	.381
19							1.000	.999	.997	.875	.470
20								1.000	.998	.917	.559
21									.999	.947	.644
22									1.000	.967	.721
23										.981	.787
24										.989	.843
25										.994	.888
26										.997	.922
27										.998	.948
28										.999	.966
29										1.000	.978
30											.987
31											.992
32											.995
33											.997
34											.999
35											.999
36											1.000

Tabla A.3 Áreas de la curva normal estándar

$\Phi(z) = P(Z \le z)$



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
−3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
−3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
−3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
−3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
−2.9	.0019	.0018	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
−2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
−2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
−2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
−2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0038
−2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
−2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
−2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
−2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
−2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
−1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
−1.8	.0359	.0352	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
−1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
−1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
−1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
−1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0722	.0708	.0694	.0681
−1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
−1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
−1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
−1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
−0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
−0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
−0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
−0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
−0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
−0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
−0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3482
−0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
−0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
−0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

(*continúa*)

Tabla A.3 Áreas de la curva normal estándar (*continuación*) $\Phi(z) = P(Z \leq z)$

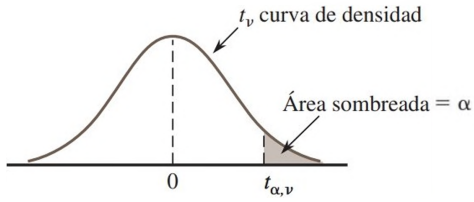
z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9278	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

Tabla A.4 La función gamma incompleta

$$F(x;\alpha) = \int_0^x \frac{1}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-y}\, dy$$

x \ α	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	.632	.264	.080	.019	.004	.001	.000	.000	.000	.000
2	.865	.594	.323	.143	.053	.017	.005	.001	.000	.000
3	.950	.801	.577	.353	.185	.084	.034	.012	.004	.001
4	.982	.908	.762	.567	.371	.215	.111	.051	.021	.008
5	.993	.960	.875	.735	.560	.384	.238	.133	.068	.032
6	.998	.983	.938	.849	.715	.554	.394	.256	.153	.084
7	.999	.993	.970	.918	.827	.699	.550	.401	.271	.170
8	1.000	.997	.986	.958	.900	.809	.687	.547	.407	.283
9		.999	.994	.979	.945	.884	.793	.676	.544	.413
10		1.000	.997	.990	.971	.933	.870	.780	.667	.542
11			.999	.995	.985	.962	.921	.857	.768	.659
12			1.000	.998	.992	.980	.954	.911	.845	.758
13				.999	.996	.989	.974	.946	.900	.834
14				1.000	.998	.994	.986	.968	.938	.891
15					.999	.997	.992	.982	.963	.930

Tabla A.5 Valores críticos para distribuciones *t*

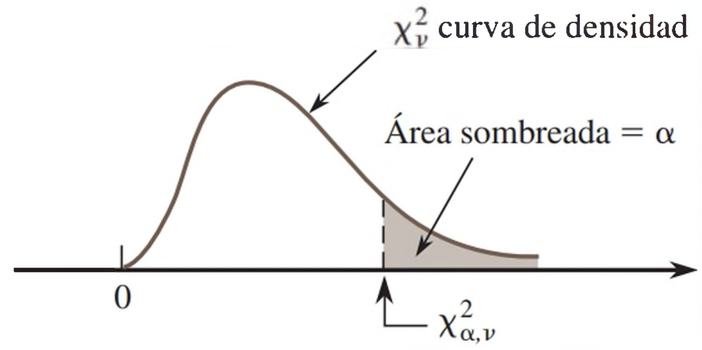


	α						
ν	.10	.05	.025	.01	.005	.001	.0005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31	636.62
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.326	31.598
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.213	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.767
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
32	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738	3.365	3.622
34	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728	3.348	3.601
36	1.306	1.688	2.028	2.434	2.719	3.333	3.582
38	1.304	1.686	2.024	2.429	2.712	3.319	3.566
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
50	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.262	3.496
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

Tabla A.6 Valores críticos de tolerancia para distribuciones normales de población

	Intervalos bilaterales						Intervalos unilaterales					
Nivel de confianza	**95%**			**99%**			**95%**			**99%**		
% de población capturada	**≥ 90%**	**≥ 95%**	**≥ 99%**	**≥ 90%**	**≥ 95%**	**≥ 99%**	**≥ 90%**	**≥ 95%**	**≥ 99%**	**≥ 90%**	**≥ 95%**	**≥ 99%**
2	32.019	37.674	48.430	160.193	188.491	242.300	20.581	26.260	37.094	103.029	131.426	185.617
3	8.380	9.916	12.861	18.930	22.401	29.055	6.156	7.656	10.553	13.995	17.370	23.896
4	5.369	6.370	8.299	9.398	11.150	14.527	4.162	5.144	7.042	7.380	9.083	12.387
5	4.275	5.079	6.634	6.612	7.855	10.260	3.407	4.203	5.741	5.362	6.578	8.939
6	3.712	4.414	5.775	5.337	6.345	8.301	3.006	3.708	5.062	4.411	5.406	7.335
7	3.369	4.007	5.248	4.613	5.488	7.187	2.756	3.400	4.642	3.859	4.728	6.412
8	3.136	3.732	4.891	4.147	4.936	6.468	2.582	3.187	4.354	3.497	4.285	5.812
9	2.967	3.532	4.631	3.822	4.550	5.966	2.454	3.031	4.143	3.241	3.972	5.389
10	2.839	3.379	4.433	3.582	4.265	5.594	2.355	2.911	3.981	3.048	3.738	5.074
11	2.737	3.259	4.277	3.397	4.045	5.308	2.275	2.815	3.852	2.898	3.556	4.829
12	2.655	3.162	4.150	3.250	3.870	5.079	2.210	2.736	3.747	2.777	3.410	4.633
13	2.587	3.081	4.044	3.130	3.727	4.893	2.155	2.671	3.659	2.677	3.290	4.472
14	2.529	3.012	3.955	3.029	3.608	4.737	2.109	2.615	3.585	2.593	3.189	4.337
15	2.480	2.954	3.878	2.945	3.507	4.605	2.068	2.566	3.520	2.522	3.102	4.222
16	2.437	2.903	3.812	2.872	3.421	4.492	2.033	2.524	3.464	2.460	3.028	4.123
Tamaño de la muestra *n* **17**	2.400	2.858	3.754	2.808	3.345	4.393	2.002	2.486	3.414	2.405	2.963	4.037
18	2.366	2.819	3.702	2.753	3.279	4.307	1.974	2.453	3.370	2.357	2.905	3.960
19	2.337	2.784	3.656	2.703	3.221	4.230	1.949	2.423	3.331	2.314	2.854	3.892
20	2.310	2.752	3.615	2.659	3.168	4.161	1.926	2.396	3.295	2.276	2.808	3.832
25	2.208	2.631	3.457	2.494	2.972	3.904	1.838	2.292	3.158	2.129	2.633	3.601
30	2.140	2.549	3.350	2.385	2.841	3.733	1.777	2.220	3.064	2.030	2.516	3.447
35	2.090	2.490	3.272	2.306	2.748	3.611	1.732	2.167	2.995	1.957	2.430	3.334
40	2.052	2.445	3.213	2.247	2.677	3.518	1.697	2.126	2.941	1.902	2.364	3.249
45	2.021	2.408	3.165	2.200	2.621	3.444	1.669	2.092	2.898	1.857	2.312	3.180
50	1.996	2.379	3.126	2.162	2.576	3.385	1.646	2.065	2.863	1.821	2.269	3.125
60	1.958	2.333	3.066	2.103	2.506	3.293	1.609	2.022	2.807	1.764	2.202	3.038
70	1.929	2.299	3.021	2.060	2.454	3.225	1.581	1.990	2.765	1.722	2.153	2.974
80	1.907	2.272	2.986	2.026	2.414	3.173	1.559	1.965	2.733	1.688	2.114	2.924
90	1.889	2.251	2.958	1.999	2.382	3.130	1.542	1.944	2.706	1.661	2.082	2.883
100	1.874	2.233	2.934	1.977	2.355	3.096	1.527	1.927	2.684	1.639	2.056	2.850
150	1.825	2.175	2.859	1.905	2.270	2.983	1.478	1.870	2.611	1.566	1.971	2.741
200	1.798	2.143	2.816	1.865	2.222	2.921	1.450	1.837	2.570	1.524	1.923	2.679
250	1.780	2.121	2.788	1.839	2.191	2.880	1.431	1.815	2.542	1.496	1.891	2.638
300	1.767	2.106	2.767	1.820	2.169	2.850	1.417	1.800	2.522	1.476	1.868	2.608
∞	1.645	1.960	2.576	1.645	1.960	2.576	1.282	1.645	2.326	1.282	1.645	2.326

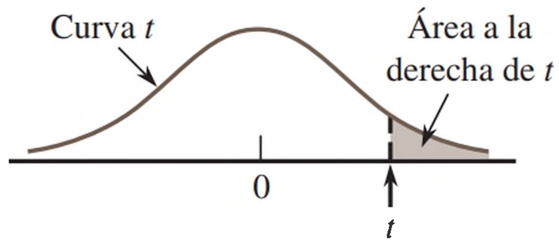
Tabla A.7 Valores críticos para distribuciones ji-cuadrada



	α									
ν	.995	.99	.975	.95	.90	.10	.05	.025	.01	.005
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.706	3.843	5.025	6.637	7.882
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.992	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.344	12.837
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.832	15.085	16.748
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.440	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.012	18.474	20.276
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.534	20.090	21.954
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.022	21.665	23.587
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.724	26.755
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.041	19.812	22.362	24.735	27.687	29.817
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.600	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.577	32.799
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.407	7.564	8.682	10.085	24.769	27.587	30.190	33.408	35.716
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.843	7.632	8.906	10.117	11.651	27.203	30.143	32.852	36.190	38.580
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.033	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.670	35.478	38.930	41.399
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.042	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.195	11.688	13.090	14.848	32.007	35.172	38.075	41.637	44.179
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.558
25	10.519	11.523	13.120	14.611	16.473	34.381	37.652	40.646	44.313	46.925
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.807	12.878	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.194	46.962	49.642
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.120	14.256	16.147	17.708	19.768	39.087	42.557	45.772	49.586	52.333
30	13.787	14.954	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
31	14.457	15.655	17.538	19.280	21.433	41.422	44.985	48.231	52.190	55.000
32	15.134	16.362	18.291	20.072	22.271	42.585	46.194	49.480	53.486	56.328
33	15.814	17.073	19.046	20.866	23.110	43.745	47.400	50.724	54.774	57.646
34	16.501	17.789	19.806	21.664	23.952	44.903	48.602	51.966	56.061	58.964
35	17.191	18.508	20.569	22.465	24.796	46.059	49.802	53.203	57.340	60.272
36	17.887	19.233	21.336	23.269	25.643	47.212	50.998	54.437	58.619	61.581
37	18.584	19.960	22.105	24.075	26.492	48.363	52.192	55.667	59.891	62.880
38	19.289	20.691	22.878	24.884	27.343	49.513	53.384	56.896	61.162	64.181
39	19.994	21.425	23.654	25.695	28.196	50.660	54.572	58.119	62.426	65.473
40	20.706	22.164	24.433	26.509	29.050	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766

Para $\nu > 40$, $\chi^2_{a,\nu} \approx \nu\left(1 - \frac{2}{9\nu} + z_a\sqrt{\frac{2}{9\nu}}\right)^3$

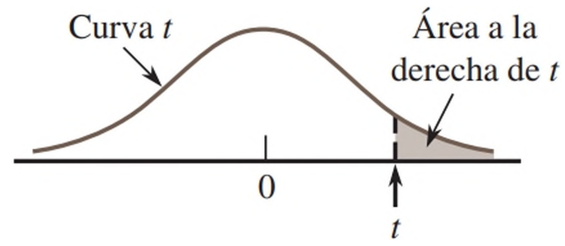
Tabla A.8 Áreas de cola de la curva *t*



t \ ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0.0	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500
0.1	.468	.465	.463	.463	.462.	.462	.462	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461
0.2	.437	.430	.427	.426	.425	.424	.424	.423	.423	.423	.423	.422	.422	.422	.422	.422	.422	.422
0.3	.407	.396	.392	.390	.388	.387	.386	.386	.386	.385	.385	.385	.384	.384	.384	.384	.384	.384
0.4	.379	.364	.358	.355	.353	.352	.351	.350	.349	.349	.348	.348	.348	.347	.347	.347	.347	.347
0.5	.352	.333	.326	.322	.319	.317	.316	.315	.315	.314	.313	.313	.313	.312	.312	.312	.312	.312
0.6	.328	.305	.295	.290	.287	.285	.284	.283	.282	.281	.280	.280	.279	.279	.279	.278	.278	.278
0.7	.306	.278	.267	.261	.258	.255	.253	.252	.251	.250	.249	.249	.248	.247	.247	.247	.247	.246
0.8	.285	.254	.241	.234	.230	.227	.225	.223	.222	.221	.220	.220	.219	.218	.218	.218	.217	.217
0.9	.267	.232	.217	.210	.205	.201	.199	.197	.196	.195	.194	.193	.192	.191	.191	.191	.190	.190
1.0	.250	.211	.196	.187	.182	.178	.175	.173	.172	.170	.169	.169	.168	.167	.167	.166	.166	.165
1.1	.235	.193	.176	.167	.162	.157	.154	.152	.150	.149	.147	.146	.146	.144	.144	.144	.143	.143
1.2	.221	.177	.158	.148	.142	.138	.135	.132	.130	.129	.128	.127	.126	.124	.124	.124	.123	.123
1.3	.209	.162	.142	.132	.125	.121	.117	.115	.113	.111	.110	.109	.108	.107	.107	.106	.105	.105
1.4	.197	.148	.128	.117	.110	.106	.102	.100	.098	.096	.095	.093	.092	.091	.091	.090	.090	.089
1.5	.187	.136	.115	.104	.097	.092	.089	.086	.084	.082	.081	.080	.079	.077	.077	.077	.076	.075
1.6	.178	.125	.104	.092	.085	.080	.077	.074	.072	.070	.069	.068	.067	.065	.065	.065	.064	.064
1.7	.169	.116	.094	.082	.075	.070	.065	.064	.062	.060	.059	.057	.056	.055	.055	.054	.054	.053
1.8	.161	.107	.085	.073	.066	.061	.057	.055	.053	.051	.050	.049	.048	.046	.046	.045	.045	.044
1.9	.154	.099	.077	.065	.058	.053	.050	.047	.045	.043	.042	.041	.040	.038	.038	.038	.037	.037
2.0	.148	.092	.070	.058	.051	.046	.043	.040	.038	.037	.035	.034	.033	.032	.032	.031	.031	.030
2.1	.141	.085	.063	.052	.045	.040	.037	.034	.033	.031	.030	.029	.028	.027	.027	.026	.025	.025
2.2	.136	.079	.058	.046	.040	.035	.032	.029	.028	.026	.025	.024	.023	.022	.022	.021	.021	.021
2.3	.131	.074	.052	.041	.035	.031	.027	.025	.023	.022	.021	.020	.019	.018	.018	.018	.017	.017
2.4	.126	.069	.048	.037	.031	.027	.024	.022	.020	.019	.018	.017	.016	.015	.015	.014	.014	.014
2.5	.121	.065	.044	.033	.027	.023	.020	.018	.017	.016	.015	.014	.013	.012	.012	.012	.011	.011
2.6	.117	.061	.040	.030	.024	.020	.018	.016	.014	.013	.012	.012	.011	.010	.010	.010	.009	.009
2.7	.113	.057	.037	.027	.021	.018	.015	.014	.012	.011	.010	.010	.009	.008	.008	.008	.008	.007
2.8	.109	.054	.034	.024	.019	.016	.013	.012	.010	.009	.009	.008	.008	.007	.007	.006	.006	.006
2.9	.106	.051	.031	.022	.017	.014	.011	.010	.009	.008	.007	.007	.006	.005	.005	.005	.005	.005
3.0	.102	.048	.029	.020	.015	.012	.010	.009	.007	.007	.006	.006	.005	.004	.004	.004	.004	.004
3.1	.099	.045	.027	.018	.013	.011	.009	.007	.006	.006	.005	.005	.004	.004	.004	.003	.003	.003
3.2	.096	.043	.025	.016	.012	.009	.008	.006	.005	.005	.004	.004	.003	.003	.003	.003	.003	.002
3.3	.094	.040	.023	.015	.011	.008	.007	.005	.005	.004	.004	.003	.003	.002	.002	.002	.002	.002
3.4	.091	.038	.021	.014	.010	.007	.006	.005	.004	.003	.003	.003	.002	.002	.002	.002	.002	.002
3.5	.089	.036	.020	.012	.009	.006	.005	.004	.003	.003	.002	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001
3.6	.086	.035	.018	.011	.008	.006	.004	.004	.003	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001
3.7	.084	.033	.017	.010	.007	.005	.004	.003	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001
3.8	.082	.031	.016	.010	.006	.004	.003	.003	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001
3.9	.080	.030	.015	.009	.006	.004	.003	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001
4.0	.078	.029	.014	.008	.005	.004	.003	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000	.000

(*continúa*)

Tabla A.8 Áreas de cola de la curva t (*continuación*)



t \ ν	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	35	40	60	120	∞ ($= z$)
0.0	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500
0.1	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.460	.460	.460	.460	.460
0.2	.422	.422	.422	.422	.422	.422	.422	.422	.421	.421	.421	.421	.421	.421	.421	.421	.421
0.3	.384	.384	.384	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.382	.382
0.4	.347	.347	.347	.347	.346	.346	.346	.346	.346	.346	.346	.346	.346	.346	.345	.345	.345
0.5	.311	.311	.311	.311	.311	.311	.311	.311	.311	.310	.310	.310	.310	.310	.309	.309	.309
0.6	.278	.278	.278	.277	.277	.277	.277	.277	.277	.277	.277	.277	.276	.276	.275	.275	.274
0.7	.246	.246	.246	.246	.245	.245	.245	.245	.245	.245	.245	.245	.244	.244	.243	.243	.242
0.8	.217	.217	.216	.216	.216	.216	.216	.215	.215	.215	.215	.215	.215	.214	.213	.213	.212
0.9	.190	.189	.189	.189	.189	.189	.188	.188	.188	.188	.188	.188	.187	.187	.186	.185	.184
1.0	.165	.165	.164	.164	.164	.164	.163	.163	.163	.163	.163	.163	.162	.162	.161	.160	.159
1.1	.143	.142	.142	.142	.141	.141	.141	.141	.141	.140	.140	.140	.139	.139	.138	.137	.136
1.2	.122	.122	.122	.121	.121	.121	.121	.120	.120	.120	.120	.120	.119	.119	.117	.116	.115
1.3	.105	.104	.104	.104	.103	.103	.103	.103	.102	.102	.102	.102	.101	.101	.099	.098	.097
1.4	.089	.089	.088	.088	.087	.087	.087	.087	.086	.086	.086	.086	.085	.085	.083	.082	.081
1.5	.075	.075	.074	.074	.074	.073	.073	.073	.073	.072	.072	.072	.071	.071	.069	.068	.067
1.6	.063	.063	.062	.062	.062	.061	.061	.061	.061	.060	.060	.060	.059	.059	.057	.056	.055
1.7	.053	.052	.052	.052	.051	.051	.051	.051	.050	.050	.050	.050	.049	.048	.047	.046	.045
1.8	.044	.043	.043	.043	.042	.042	.042	.042	.042	.041	.041	.041	.040	.040	.038	.037	.036
1.9	.036	.036	.036	.035	.035	.035	.035	.034	.034	.034	.034	.034	.033	.032	.031	.030	.029
2.0	.030	.030	.029	.029	.029	.028	.028	.028	.028	.028	.027	.027	.027	.026	.025	.024	.023
2.1	.025	.024	.024	.024	.023	.023	.023	.023	.023	.022	.022	.022	.022	.021	.020	.019	.018
2.2	.020	.020	.020	.019	.019	.019	.019	.018	.018	.018	.018	.018	.017	.017	.016	.015	.014
2.3	.016	.016	.016	.016	.015	.015	.015	.015	.015	.015	.014	.014	.014	.013	.012	.012	.011
2.4	.013	.013	.013	.013	.012	.012	.012	.012	.012	.012	.012	.011	.011	.011	.010	.009	.008
2.5	.011	.011	.010	.010	.010	.010	.010	.010	.009	.009	.009	.009	.009	.008	.008	.007	.006
2.6	.009	.009	.008	.008	.008	.008	.008	.008	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.006	.005	.005
2.7	.007	.007	.007	.007	.006	.006	.006	.006	.006	.006	.006	.006	.005	.005	.004	.004	.003
2.8	.006	.006	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.004	.004	.004	.003	.003	.003
2.9	.005	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.003	.003	.003	.003	.002	.002
3.0	.004	.004	.003	.003	.003	.003	.003	.003	.003	.003	.003	.003	.002	.002	.002	.002	.001
3.1	.003	.003	.003	.003	.003	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001
3.2	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001
3.3	.002	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000
3.4	.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000	.000
3.5	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000	.000	.000
3.6	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000	.000	.000	.000	.000
3.7	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
3.8	.001	.001	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
3.9	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
4.0	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000

Tabla A.9 Valores críticos de la distribución *F*

ν_2 = denominador gl	α	ν_1 = numerador gl 1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	.100	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86
	.050	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54
	.010	4052.20	4999.50	5403.40	5624.60	5763.60	5859.00	5928.40	5981.10	6022.50
	.001	405,284	500,000	540,379	562,500	576,405	585,937	592,873	598,144	602,284
2	.100	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38
	.050	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38
	.010	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39
	.001	998.50	999.00	999.17	999.25	999.30	999.33	999.36	999.37	999.39
3	.100	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24
	.050	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
	.010	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35
	.001	167.03	148.50	141.11	137.10	134.58	132.85	131.58	130.62	129.86
4	.100	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94
	.050	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
	.010	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66
	.001	74.14	61.25	56.18	53.44	51.71	50.53	49.66	49.00	48.47
5	.100	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32
	.050	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
	.010	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16
	.001	47.18	37.12	33.20	31.09	29.75	28.83	28.16	27.65	27.24
6	.100	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96
	.050	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
	.010	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98
	.001	35.51	27.00	23.70	21.92	20.80	20.03	19.46	19.03	18.69
7	.100	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72
	.050	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
	.010	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72
	.001	29.25	21.69	18.77	17.20	16.21	15.52	15.02	14.63	14.33
8	.100	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56
	.050	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39
	.010	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91
	.001	25.41	18.49	15.83	14.39	13.48	12.86	12.40	12.05	11.77
9	.100	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44
	.050	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
	.010	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35
	.001	22.86	16.39	13.90	12.56	11.71	11.13	10.70	10.37	10.11
10	.100	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35
	.050	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02
	.010	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94
	.001	21.04	14.91	12.55	11.28	10.48	9.93	9.52	9.20	8.96
11	.100	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27
	.050	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90
	.010	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63
	.001	19.69	13.81	11.56	10.35	9.58	9.05	8.66	8.35	8.12
12	.100	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21
	.050	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80
	.010	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39
	.001	18.64	12.97	10.80	9.63	8.89	8.38	8.00	7.71	7.48

(*continúa*)

Tabla A.9 Valores críticos de la distribución *F* (*continuación*)

ν_1 = numerador gl										
10	**12**	**15**	**20**	**25**	**30**	**40**	**50**	**60**	**120**	**1000**
60.19	60.71	61.22	61.74	62.05	62.26	62.53	62.69	62.79	63.06	63.30
241.88	243.91	245.95	248.01	249.26	250.10	251.14	251.77	252.20	253.25	254.19
6055.80	6106.30	6157.30	6208.70	6239.80	6260.60	6286.80	6302.50	6313.00	6339.40	6362.70
605,621	610,668	615,764	620,908	624,017	626,099	628,712	630,285	631,337	633,972	636,301
9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.47	9.48	9.49
19.40	19.41	19.43	19.45	19.46	19.46	19.47	19.48	19.48	19.49	19.49
99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.48	99.49	99.50
999.40	999.42	999.43	999.45	999.46	999.47	999.47	999.48	999.48	999.49	999.50
5.23	5.22	5.20	5.18	5.17	5.17	5.16	5.15	5.15	5.14	5.13
8.79	8.74	8.70	8.66	8.63	8.62	8.59	8.58	8.57	8.55	8.53
27.23	27.05	26.87	26.69	26.58	26.50	26.41	26.35	26.32	26.22	26.14
129.25	128.32	127.37	126.42	125.84	125.45	124.96	124.66	124.47	123.97	123.53
3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.80	3.79	3.78	3.76
5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.70	5.69	5.66	5.63
14.55	14.37	14.20	14.02	13.91	13.84	13.75	13.69	13.65	13.56	13.47
48.05	47.41	46.76	46.10	45.70	45.43	45.09	44.88	44.75	44.40	44.09
3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.15	3.14	3.12	3.11
4.74	4.68	4.62	4.56	4.52	4.50	4.46	4.44	4.43	4.40	4.37
10.05	9.89	9.72	9.55	9.45	9.38	9.29	9.24	9.20	9.11	9.03
26.92	26.42	25.91	25.39	25.08	24.87	24.60	24.44	24.33	24.06	23.82
2.94	2.90	2.87	2.84	2.81	2.80	2.78	2.77	2.76	2.74	2.72
4.06	4.00	3.94	3.87	3.83	3.81	3.77	3.75	3.74	3.70	3.67
7.87	7.72	7.56	7.40	7.30	7.23	7.14	7.09	7.06	6.97	6.89
18.41	17.99	17.56	17.12	16.85	16.67	16.44	16.31	16.21	15.98	15.77
2.70	2.67	2.63	2.59	2.57	2.56	2.54	2.52	2.51	2.49	2.47
3.64	3.57	3.51	3.44	3.40	3.38	3.34	3.32	3.30	3.27	3.23
6.62	6.47	6.31	6.16	6.06	5.99	5.91	5.86	5.82	5.74	5.66
14.08	13.71	13.32	12.93	12.69	12.53	12.33	12.20	12.12	11.91	11.72
2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.35	2.34	2.32	2.30
3.35	3.28	3.22	3.15	3.11	3.08	3.04	3.02	3.01	2.97	2.93
5.81	5.67	5.52	5.36	5.26	5.20	5.12	5.07	5.03	4.95	4.87
11.54	11.19	10.84	10.48	10.26	10.11	9.92	9.80	9.73	9.53	9.36
2.42	2.38	2.34	2.30	2.27	2.25	2.23	2.22	2.21	2.18	2.16
3.14	3.07	3.01	2.94	2.89	2.86	2.83	2.80	2.79	2.75	2.71
5.26	5.11	4.96	4.81	4.71	4.65	4.57	4.52	4.48	4.40	4.32
9.89	9.57	9.24	8.90	8.69	8.55	8.37	8.26	8.19	8.00	7.84
2.32	2.28	2.24	2.20	2.17	2.16	2.13	2.12	2.11	2.08	2.06
2.98	2.91	2.85	2.77	2.73	2.70	2.66	2.64	2.62	2.58	2.54
4.85	4.71	4.56	4.41	4.31	4.25	4.17	4.12	4.08	4.00	3.92
8.75	8.45	8.13	7.80	7.60	7.47	7.30	7.19	7.12	6.94	6.78
2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.04	2.03	2.00	1.98
2.85	2.79	2.72	2.65	2.60	2.57	2.53	2.51	2.49	2.45	2.41
4.54	4.40	4.25	4.10	4.01	3.94	3.86	3.81	3.78	3.69	3.61
7.92	7.63	7.32	7.01	6.81	6.68	6.52	6.42	6.35	6.18	6.02
2.19	2.15	2.10	2.06	2.03	2.01	1.99	1.97	1.96	1.93	1.91
2.75	2.69	2.62	2.54	2.50	2.47	2.43	2.40	2.38	2.34	2.30
4.30	4.16	4.01	3.86	3.76	3.70	3.62	3.57	3.54	3.45	3.37
7.29	7.00	6.71	6.40	6.22	6.09	5.93	5.83	5.76	5.59	5.44

(*continúa*)

Tabla A.9 Valores críticos de la distribución *F* (*continuación*)

		ν_1 = numerador gl								
ν_2 = denominador gl	α	1	2	3	4	5	6	7	8	9
13	.100	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16
	.050	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71
	.010	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19
	.001	17.82	12.31	10.21	9.07	8.35	7.86	7.49	7.21	6.98
14	.100	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12
	.050	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65
	.010	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03
	.001	17.14	11.78	9.73	8.62	7.92	7.44	7.08	6.80	6.58
15	.100	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09
	.050	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59
	.010	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89
	.001	16.59	11.34	9.34	8.25	7.57	7.09	6.74	6.47	6.26
16	.100	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06
	.050	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54
	.010	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78
	.001	16.12	10.97	9.01	7.94	7.27	6.80	6.46	6.19	5.98
17	.100	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03
	.050	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49
	.010	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68
	.001	15.72	10.66	8.73	7.68	7.02	6.56	6.22	5.96	5.75
18	.100	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00
	.050	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46
	.010	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60
	.001	15.38	10.39	8.49	7.46	6.81	6.35	6.02	5.76	5.56
19	.100	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98
	.050	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42
	.010	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52
	.001	15.08	10.16	8.28	7.27	6.62	6.18	5.85	5.59	5.39
20	.100	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96
	.050	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39
	.010	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46
	.001	14.82	9.95	8.10	7.10	6.46	6.02	5.69	5.44	5.24
21	.100	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95
	.050	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37
	.010	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40
	.001	14.59	9.77	7.94	6.95	6.32	5.88	5.56	5.31	5.11
22	.100	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93
	.050	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34
	.010	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35
	.001	14.38	9.61	7.80	6.81	6.19	5.76	5.44	5.19	4.99
23	.100	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92
	.050	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32
	.010	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30
	.001	14.20	9.47	7.67	6.70	6.08	5.65	5.33	5.09	4.89
24	.100	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91
	.050	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30
	.010	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26
	.001	14.03	9.34	7.55	6.59	5.98	5.55	5.23	4.99	4.80

(*continúa*)

Tabla A.9 Valores críticos de la distribución *F* (*continuación*)

ν_1 = numerador gl										
10	**12**	**15**	**20**	**25**	**30**	**40**	**50**	**60**	**120**	**1000**
2.14	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.92	1.90	1.88	1.85
2.67	2.60	2.53	2.46	2.41	2.38	2.34	2.31	2.30	2.25	2.21
4.10	3.96	3.82	3.66	3.57	3.51	3.43	3.38	3.34	3.25	3.18
6.80	6.52	6.23	5.93	5.75	5.63	5.47	5.37	5.30	5.14	4.99
2.10	2.05	2.01	1.96	1.93	1.91	1.89	1.87	1.86	1.83	1.80
2.60	2.53	2.46	2.39	2.34	2.31	2.27	2.24	2.22	2.18	2.14
3.94	3.80	3.66	3.51	3.41	3.35	3.27	3.22	3.18	3.09	3.02
6.40	6.13	5.85	5.56	5.38	5.25	5.10	5.00	4.94	4.77	4.62
2.06	2.02	1.97	1.92	1.89	1.87	1.85	1.83	1.82	1.79	1.76
2.54	2.48	2.40	2.33	2.28	2.25	2.20	2.18	2.16	2.11	2.07
3.80	3.67	3.52	3.37	3.28	3.21	3.13	3.08	3.05	2.96	2.88
6.08	5.81	5.54	5.25	5.07	4.95	4.80	4.70	4.64	4.47	4.33
2.03	1.99	1.94	1.89	1.86	1.84	1.81	1.79	1.78	1.75	1.72
2.49	2.42	2.35	2.28	2.23	2.19	2.15	2.12	2.11	2.06	2.02
3.69	3.55	3.41	3.26	3.16	3.10	3.02	2.97	2.93	2.84	2.76
5.81	5.55	5.27	4.99	4.82	4.70	4.54	4.45	4.39	4.23	4.08
2.00	1.96	1.91	1.86	1.83	1.81	1.78	1.76	1.75	1.72	1.69
2.45	2.38	2.31	2.23	2.18	2.15	2.10	2.08	2.06	2.01	1.97
3.59	3.46	3.31	3.16	3.07	3.00	2.92	2.87	2.83	2.75	2.66
5.58	5.32	5.05	4.78	4.60	4.48	4.33	4.24	4.18	4.02	3.87
1.98	1.93	1.89	1.84	1.80	1.78	1.75	1.74	1.72	1.69	1.66
2.41	2.34	2.27	2.19	2.14	2.11	2.06	2.04	2.02	1.97	1.92
3.51	3.37	3.23	3.08	2.98	2.92	2.84	2.78	2.75	2.66	2.58
5.39	5.13	4.87	4.59	4.42	4.30	4.15	4.06	4.00	3.84	3.69
1.96	1.91	1.86	1.81	1.78	1.76	1.73	1.71	1.70	1.67	1.64
2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	2.00	1.98	1.93	1.88
3.43	3.30	3.15	3.00	2.91	2.84	2.76	2.71	2.67	2.58	2.50
5.22	4.97	4.70	4.43	4.26	4.14	3.99	3.90	3.84	3.68	3.53
1.94	1.89	1.84	1.79	1.76	1.74	1.71	1.69	1.68	1.64	1.61
2.35	2.28	2.20	2.12	2.07	2.04	1.99	1.97	1.95	1.90	1.85
3.37	3.23	3.09	2.94	2.84	2.78	2.69	2.64	2.61	2.52	2.43
5.08	4.82	4.56	4.29	4.12	4.00	3.86	3.77	3.70	3.54	3.40
1.92	1.87	1.83	1.78	1.74	1.72	1.69	1.67	1.66	1.62	1.59
2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.92	1.87	1.82
3.31	3.17	3.03	2.88	2.79	2.72	2.64	2.58	2.55	2.46	2.37
4.95	4.70	4.44	4.17	4.00	3.88	3.74	3.64	3.58	3.42	3.28
1.90	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.65	1.64	1.60	1.57
2.30	2.23	2.15	2.07	2.02	1.98	1.94	1.91	1.89	1.84	1.79
3.26	3.12	2.98	2.83	2.73	2.67	2.58	2.53	2.50	2.40	2.32
4.83	4.58	4.33	4.06	3.89	3.78	3.63	3.54	3.48	3.32	3.17
1.89	1.84	1.80	1.74	1.71	1.69	1.66	1.64	1.62	1.59	1.55
2.27	2.20	2.13	2.05	2.00	1.96	1.91	1.88	1.86	1.81	1.76
3.21	3.07	2.93	2.78	2.69	2.62	2.54	2.48	2.45	2.35	2.27
4.73	4.48	4.23	3.96	3.79	3.68	3.53	3.44	3.38	3.22	3.08
1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.62	1.61	1.57	1.54
2.25	2.18	2.11	2.03	1.97	1.94	1.89	1.86	1.84	1.79	1.74
3.17	3.03	2.89	2.74	2.64	2.58	2.49	2.44	2.40	2.31	2.22
4.64	4.39	4.14	3.87	3.71	3.59	3.45	3.36	3.29	3.14	2.99

(*continúa*)

Tabla A.9 Valores críticos de la distribución *F* (*continuación*)

		ν_1 = numerador gl								
	α	1	2	3	4	5	6	7	8	9
25	.100	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89
	.050	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28
	.010	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22
	.001	13.88	9.22	7.45	6.49	5.89	5.46	5.15	4.91	4.71
26	.100	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88
	.050	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27
	.010	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18
	.001	13.74	9.12	7.36	6.41	5.80	5.38	5.07	4.83	4.64
27	.100	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87
	.050	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25
	.010	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15
	.001	13.61	9.02	7.27	6.33	5.73	5.31	5.00	4.76	4.57
28	.100	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87
	.050	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24
	.010	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12
	.001	13.50	8.93	7.19	6.25	5.66	5.24	4.93	4.69	4.50
29	.100	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86
	.050	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22
	.010	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09
	.001	13.39	8.85	7.12	6.19	5.59	5.18	4.87	4.64	4.45
30	.100	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85
	.050	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21
	.010	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07
	.001	13.29	8.77	7.05	6.12	5.53	5.12	4.82	4.58	4.39
40	.100	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79
	.050	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12
	.010	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89
	.001	12.61	8.25	6.59	5.70	5.13	4.73	4.44	4.21	4.02
50	.100	2.81	2.41	2.20	2.06	1.97	1.90	1.84	1.80	1.76
	.050	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07
	.010	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.78
	.001	12.22	7.96	6.34	5.46	4.90	4.51	4.22	4.00	3.82
60	.100	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74
	.050	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04
	.010	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72
	.001	11.97	7.77	6.17	5.31	4.76	4.37	4.09	3.86	3.69
100	.100	2.76	2.36	2.14	2.00	1.91	1.83	1.78	1.73	1.69
	.050	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97
	.010	6.90	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.59
	.001	11.50	7.41	5.86	5.02	4.48	4.11	3.83	3.61	3.44
200	.100	2.73	2.33	2.11	1.97	1.88	1.80	1.75	1.70	1.66
	.050	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93
	.010	6.76	4.71	3.88	3.41	3.11	2.89	2.73	2.60	2.50
	.001	11.15	7.15	5.63	4.81	4.29	3.92	3.65	3.43	3.26
1000	.100	2.71	2.31	2.09	1.95	1.85	1.78	1.72	1.68	1.64
	.050	3.85	3.00	2.61	2.38	2.22	2.11	2.02	1.95	1.89
	.010	6.66	4.63	3.80	3.34	3.04	2.82	2.66	2.53	2.43
	.001	10.89	6.96	5.46	4.65	4.14	3.78	3.51	3.30	3.13

ν_2 = denominador gl

(*continúa*)

Tabla A.9 Valores críticos de la distribución *F* (*continuación*)

ν_1 = numerador gl										
10	**12**	**15**	**20**	**25**	**30**	**40**	**50**	**60**	**120**	**1000**
1.87	1.82	1.77	1.72	1.68	1.66	1.63	1.61	1.59	1.56	1.52
2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.84	1.82	1.77	1.72
3.13	2.99	2.85	2.70	2.60	2.54	2.45	2.40	2.36	2.27	2.18
4.56	4.31	4.06	3.79	3.63	3.52	3.37	3.28	3.22	3.06	2.91
1.86	1.81	1.76	1.71	1.67	1.65	1.61	1.59	1.58	1.54	1.51
2.22	2.15	2.07	1.99	1.94	1.90	1.85	1.82	1.80	1.75	1.70
3.09	2.96	2.81	2.66	2.57	2.50	2.42	2.36	2.33	2.23	2.14
4.48	4.24	3.99	3.72	3.56	3.44	3.30	3.21	3.15	2.99	2.84
1.85	1.80	1.75	1.70	1.66	1.64	1.60	1.58	1.57	1.53	1.50
2.20	2.13	2.06	1.97	1.92	1.88	1.84	1.81	1.79	1.73	1.68
3.06	2.93	2.78	2.63	2.54	2.47	2.38	2.33	2.29	2.20	2.11
4.41	4.17	3.92	3.66	3.49	3.38	3.23	3.14	3.08	2.92	2.78
1.84	1.79	1.74	1.69	1.65	1.63	1.59	1.57	1.56	1.52	1.48
2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.79	1.77	1.71	1.66
3.03	2.90	2.75	2.60	2.51	2.44	2.35	2.30	2.26	2.17	2.08
4.35	4.11	3.86	3.60	3.43	3.32	3.18	3.09	3.02	2.86	2.72
1.83	1.78	1.73	1.68	1.64	1.62	1.58	1.56	1.55	1.51	1.47
2.18	2.10	2.03	1.94	1.89	1.85	1.81	1.77	1.75	1.70	1.65
3.00	2.87	2.73	2.57	2.48	2.41	2.33	2.27	2.23	2.14	2.05
4.29	4.05	3.80	3.54	3.38	3.27	3.12	3.03	2.97	2.81	2.66
1.82	1.77	1.72	1.67	1.63	1.61	1.57	1.55	1.54	1.50	1.46
2.16	2.09	2.01	1.93	1.88	1.84	1.79	1.76	1.74	1.68	1.63
2.98	2.84	2.70	2.55	2.45	2.39	2.30	2.25	2.21	2.11	2.02
4.24	4.00	3.75	3.49	3.33	3.22	3.07	2.98	2.92	2.76	2.61
1.76	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.48	1.47	1.42	1.38
2.08	2.00	1.92	1.84	1.78	1.74	1.69	1.66	1.64	1.58	1.52
2.80	2.66	2.52	2.37	2.27	2.20	2.11	2.06	2.02	1.92	1.82
3.87	3.64	3.40	3.14	2.98	2.87	2.73	2.64	2.57	2.41	2.25
1.73	1.68	1.63	1.57	1.53	1.50	1.46	1.44	1.42	1.38	1.33
2.03	1.95	1.87	1.78	1.73	1.69	1.63	1.60	1.58	1.51	1.45
2.70	2.56	2.42	2.27	2.17	2.10	2.01	1.95	1.91	1.80	1.70
3.67	3.44	3.20	2.95	2.79	2.68	2.53	2.44	2.38	2.21	2.05
1.71	1.66	1.60	1.54	1.50	1.48	1.44	1.41	1.40	1.35	1.30
1.99	1.92	1.84	1.75	1.69	1.65	1.59	1.56	1.53	1.47	1.40
2.63	2.50	2.35	2.20	2.10	2.03	1.94	1.88	1.84	1.73	1.62
3.54	3.32	3.08	2.83	2.67	2.55	2.41	2.32	2.25	2.08	1.92
1.66	1.61	1.56	1.49	1.45	1.42	1.38	1.35	1.34	1.28	1.22
1.93	1.85	1.77	1.68	1.62	1.57	1.52	1.48	1.45	1.38	1.30
2.50	2.37	2.22	2.07	1.97	1.89	1.80	1.74	1.69	1.57	1.45
3.30	3.07	2.84	2.59	2.43	2.32	2.17	2.08	2.01	1.83	1.64
1.63	1.58	1.52	1.46	1.41	1.38	1.34	1.31	1.29	1.23	1.16
1.88	1.80	1.72	1.62	1.56	1.52	1.46	1.41	1.39	1.30	1.21
2.41	2.27	2.13	1.97	1.87	1.79	1.69	1.63	1.58	1.45	1.30
3.12	2.90	2.67	2.42	2.26	2.15	2.00	1.90	1.83	1.64	1.43
1.61	1.55	1.49	1.43	1.38	1.35	1.30	1.27	1.25	1.18	1.08
1.84	1.76	1.68	1.58	1.52	1.47	1.41	1.36	1.33	1.24	1.11
2.34	2.20	2.06	1.90	1.79	1.72	1.61	1.54	1.50	1.35	1.16
2.99	2.77	2.54	2.30	2.14	2.02	1.87	1.77	1.69	1.49	1.22

Tabla A.10 Valores críticos para la distribución de rango estudentizado

		m										
ν	α	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
5	.05	3.64	4.60	5.22	5.67	6.03	6.33	6.58	6.80	6.99	7.17	7.32
	.01	5.70	6.98	7.80	8.42	8.91	9.32	9.67	9.97	10.24	10.48	10.70
6	.05	3.46	4.34	4.90	5.30	5.63	5.90	6.12	6.32	6.49	6.65	6.79
	.01	5.24	6.33	7.03	7.56	7.97	8.32	8.61	8.87	9.10	9.30	9.48
7	.05	3.34	4.16	4.68	5.06	5.36	5.61	5.82	6.00	6.16	6.30	6.43
	.01	4.95	5.92	6.54	7.01	7.37	7.68	7.94	8.17	8.37	8.55	8.71
8	.05	3.26	4.04	4.53	4.89	5.17	5.40	5.60	5.77	5.92	6.05	6.18
	.01	4.75	5.64	6.20	6.62	6.96	7.24	7.47	7.68	7.86	8.03	8.18
9	.05	3.20	3.95	4.41	4.76	5.02	5.24	5.43	5.59	5.74	5.87	5.98
	.01	4.60	5.43	5.96	6.35	6.66	6.91	7.13	7.33	7.49	7.65	7.78
10	.05	3.15	3.88	4.33	4.65	4.91	5.12	5.30	5.46	5.60	5.72	5.83
	.01	4.48	5.27	5.77	6.14	6.43	6.67	6.87	7.05	7.21	7.36	7.49
11	.05	3.11	3.82	4.26	4.57	4.82	5.03	5.20	5.35	5.49	5.61	5.71
	.01	4.39	5.15	5.62	5.97	6.25	6.48	6.67	6.84	6.99	7.13	7.25
12	.05	3.08	3.77	4.20	4.51	4.75	4.95	5.12	5.27	5.39	5.51	5.61
	.01	4.32	5.05	5.50	5.84	6.10	6.32	6.51	6.67	6.81	6.94	7.06
13	.05	3.06	3.73	4.15	4.45	4.69	4.88	5.05	5.19	5.32	5.43	5.53
	.01	4.26	4.96	5.40	5.73	5.98	6.19	6.37	6.53	6.67	6.79	6.90
14	.05	3.03	3.70	4.11	4.41	4.64	4.83	4.99	5.13	5.25	5.36	5.46
	.01	4.21	4.89	5.32	5.63	5.88	6.08	6.26	6.41	6.54	6.66	6.77
15	.05	3.01	3.67	4.08	4.37	4.59	4.78	4.94	5.08	5.20	5.31	5.40
	.01	4.17	4.84	5.25	5.56	5.80	5.99	6.16	6.31	6.44	6.55	6.66
16	.05	3.00	3.65	4.05	4.33	4.56	4.74	4.90	5.03	5.15	5.26	5.35
	.01	4.13	4.79	5.19	5.49	5.72	5.92	6.08	6.22	6.35	6.46	6.56
17	.05	2.98	3.63	4.02	4.30	4.52	4.70	4.86	4.99	5.11	5.21	5.31
	.01	4.10	4.74	5.14	5.43	5.66	5.85	6.01	6.15	6.27	6.38	6.48
18	.05	2.97	3.61	4.00	4.28	4.49	4.67	4.82	4.96	5.07	5.17	5.27
	.01	4.07	4.70	5.09	5.38	5.60	5.79	5.94	6.08	6.20	6.31	6.41
19	.05	2.96	3.59	3.98	4.25	4.47	4.65	4.79	4.92	5.04	5.14	5.23
	.01	4.05	4.67	5.05	5.33	5.55	5.73	5.89	6.02	6.14	6.25	6.34
20	.05	2.95	3.58	3.96	4.23	4.45	4.62	4.77	4.90	5.01	5.11	5.20
	.01	4.02	4.64	5.02	5.29	5.51	5.69	5.84	5.97	6.09	6.19	6.28
24	.05	2.92	3.53	3.90	4.17	4.37	4.54	4.68	4.81	4.92	5.01	5.10
	.01	3.96	4.55	4.91	5.17	5.37	5.54	5.69	5.81	5.92	6.02	6.11
30	.05	2.89	3.49	3.85	4.10	4.30	4.46	4.60	4.72	4.82	4.92	5.00
	.01	3.89	4.45	4.80	5.05	5.24	5.40	5.54	5.65	5.76	5.85	5.93
40	.05	2.86	3.44	3.79	4.04	4.23	4.39	4.52	4.63	4.73	4.82	4.90
	.01	3.82	4.37	4.70	4.93	5.11	5.26	5.39	5.50	5.60	5.69	5.76
60	.05	2.83	3.40	3.74	3.98	4.16	4.31	4.44	4.55	4.65	4.73	4.81
	.01	3.76	4.28	4.59	4.82	4.99	5.13	5.25	5.36	5.45	5.53	5.60
120	.05	2.80	3.36	3.68	3.92	4.10	4.24	4.36	4.47	4.56	4.64	4.71
	.01	3.70	4.20	4.50	4.71	4.87	5.01	5.12	5.21	5.30	5.37	5.44
∞	.05	2.77	3.31	3.63	3.86	4.03	4.17	4.29	4.39	4.47	4.55	4.62
	.01	3.64	4.12	4.40	4.60	4.76	4.88	4.99	5.08	5.16	5.23	5.29

Tabla A.11 Áreas de cola de la curva ji-cuadrada

Área de cola superior	$\nu = 1$	$\nu = 2$	$\nu = 3$	$\nu = 4$	$\nu = 5$
> .100	< 2.70	< 4.60	< 6.25	< 7.77	< 9.23
.100	2.70	4.60	6.25	7.77	9.23
.095	2.78	4.70	6.36	7.90	9.37
.090	2.87	4.81	6.49	8.04	9.52
.085	2.96	4.93	6.62	8.18	9.67
.080	3.06	5.05	6.75	8.33	9.83
.075	3.17	5.18	6.90	8.49	10.00
.070	3.28	5.31	7.06	8.66	10.19
.065	3.40	5.46	7.22	8.84	10.38
.060	3.53	5.62	7.40	9.04	10.59
.055	3.68	5.80	7.60	9.25	10.82
.050	3.84	5.99	7.81	9.48	11.07
.045	4.01	6.20	8.04	9.74	11.34
.040	4.21	6.43	8.31	10.02	11.64
.035	4.44	6.70	8.60	10.34	11.98
.030	4.70	7.01	8.94	10.71	12.37
.025	5.02	7.37	9.34	11.14	12.83
.020	5.41	7.82	9.83	11.66	13.38
.015	5.91	8.39	10.46	12.33	14.09
.010	6.63	9.21	11.34	13.27	15.08
.005	7.87	10.59	12.83	14.86	16.74
.001	10.82	13.81	16.26	18.46	20.51
< .001	> 10.82	> 13.81	> 16.26	> 18.46	> 20.51

Área de cola superior	$\nu = 6$	$\nu = 7$	$\nu = 8$	$\nu = 9$	$\nu = 10$
> .100	< 10.64	< 12.01	< 13.36	< 14.68	< 15.98
.100	10.64	12.01	13.36	14.68	15.98
.095	10.79	12.17	13.52	14.85	16.16
.090	10.94	12.33	13.69	15.03	16.35
.085	11.11	12.50	13.87	15.22	16.54
.080	11.28	12.69	14.06	15.42	16.75
.075	11.46	12.88	14.26	15.63	16.97
.070	11.65	13.08	14.48	15.85	17.20
.065	11.86	13.30	14.71	16.09	17.44
.060	12.08	13.53	14.95	16.34	17.71
.055	12.33	13.79	15.22	16.62	17.99
.050	12.59	14.06	15.50	16.91	18.30
.045	12.87	14.36	15.82	17.24	18.64
.040	13.19	14.70	16.17	17.60	19.02
.035	13.55	15.07	16.56	18.01	19.44
.030	13.96	15.50	17.01	18.47	19.92
.025	14.44	16.01	17.53	19.02	20.48
.020	15.03	16.62	18.16	19.67	21.16
.015	15.77	17.39	18.97	20.51	22.02
.010	16.81	18.47	20.09	21.66	23.20
.005	18.54	20.27	21.95	23.58	25.18
.001	22.45	24.32	26.12	27.87	29.58
< .001	> 22.45	> 24.32	> 26.12	> 27.87	> 29.58

(*continúa*)

Tabla A.11 Áreas de cola de la curva ji-cuadrada (*continuación*)

Área de cola superior	$\nu = 11$	$\nu = 12$	$\nu = 13$	$\nu = 14$	$\nu = 15$
> .100	< 17.27	< 18.54	< 19.81	< 21.06	< 22.30
.100	17.27	18.54	19.81	21.06	22.30
.095	17.45	18.74	20.00	21.26	22.51
.090	17.65	18.93	20.21	21.47	22.73
.085	17.85	19.14	20.42	21.69	22.95
.080	18.06	19.36	20.65	21.93	23.19
.075	18.29	19.60	20.89	22.17	23.45
.070	18.53	19.84	21.15	22.44	23.72
.065	18.78	20.11	21.42	22.71	24.00
.060	19.06	20.39	21.71	23.01	24.31
.055	19.35	20.69	22.02	23.33	24.63
.050	19.67	21.02	22.36	23.68	24.99
.045	20.02	21.38	22.73	24.06	25.38
.040	20.41	21.78	23.14	24.48	25.81
.035	20.84	22.23	23.60	24.95	26.29
.030	21.34	22.74	24.12	25.49	26.84
.025	21.92	23.33	24.73	26.11	27.48
.020	22.61	24.05	25.47	26.87	28.25
.015	23.50	24.96	26.40	27.82	29.23
.010	24.72	26.21	27.68	29.14	30.57
.005	26.75	28.29	29.81	31.31	32.80
.001	31.26	32.90	34.52	36.12	37.69
< .001	> 31.26	> 32.90	> 34.52	> 36.12	> 37.69

Área de cola superior	$\nu = 16$	$\nu = 17$	$\nu = 18$	$\nu = 19$	$\nu = 20$
> .100	< 23.54	< 24.77	< 25.98	< 27.20	< 28.41
.100	23.54	24.76	25.98	27.20	28.41
.095	23.75	24.98	26.21	27.43	28.64
.090	23.97	25.21	26.44	27.66	28.88
.085	24.21	25.45	26.68	27.91	29.14
.080	24.45	25.70	26.94	28.18	29.40
.075	24.71	25.97	27.21	28.45	29.69
.070	24.99	26.25	27.50	28.75	29.99
.065	25.28	26.55	27.81	29.06	30.30
.060	25.59	26.87	28.13	29.39	30.64
.055	25.93	27.21	28.48	29.75	31.01
.050	26.29	27.58	28.86	30.14	31.41
.045	26.69	27.99	29.28	30.56	31.84
.040	27.13	28.44	29.74	31.03	32.32
.035	27.62	28.94	30.25	31.56	32.85
.030	28.19	29.52	30.84	32.15	33.46
.025	28.84	30.19	31.52	32.85	34.16
.020	29.63	30.99	32.34	33.68	35.01
.015	30.62	32.01	33.38	34.74	36.09
.010	32.00	33.40	34.80	36.19	37.56
.005	34.26	35.71	37.15	38.58	39.99
.001	39.25	40.78	42.31	43.81	45.31
< .001	> 39.25	> 40.78	> 42.31	> 43.81	> 45.31

Tabla A.12 Valores críticos para la prueba de normalidad Ryan-Joiner

		α		
		.10	**.05**	**.01**
	4	.8951	.8734	.8318
	5	.9033	.8804	.8319
	6	.9114	.8893	.8409
	7	.9186	.8978	.8517
	8	.9248	.9054	.8622
	9	.9301	.9121	.8718
	10	.9347	.9179	.8804
	11	.9387	.9230	.8880
	12	.9422	.9275	.8947
	13	.9454	.9315	.9008
	14	.9481	.9351	.9061
n	**15**	.9506	.9383	.9109
	16	.9529	.9411	.9153
	17	.9549	.9437	.9192
	18	.9567	.9461	.9228
	19	.9584	.9483	.9260
	20	.9600	.9503	.9290
	25	.9662	.9582	.9407
	30	.9707	.9639	.9490
	40	.9767	.9715	.9597
	50	.9807	.9764	.9664
	60	.9835	.9799	.9709
	75	.9865	.9835	.9756

Fuente: Minitab Reference Manual.

Tabla A.13 Valores críticos para la prueba Wilcoxon de rangos con signo

$P_0(S_+ \geq c_1) = P(S_+ \geq c_1$ cuando H_0 es verdadera)

n	c_1	$P_0(S_+ \geq c_1)$	n	c_1	$P_0(S_+ \geq c_1)$
3	6	.125		78	.011
4	9	.125		79	.009
	10	.062		81	.005
5	13	.094	**14**	73	.108
	14	.062		74	.097
	15	.031		79	.052
6	17	.109		84	.025
	19	.047		89	.010
	20	.031		92	.005
	21	.016	**15**	83	.104
7	22	.109		84	.094
	24	.055		89	.053
	26	.023		90	.047
	28	.008		95	.024
8	28	.098		100	.011
	30	.055		101	.009
	32	.027		104	.005
	34	.012	**16**	93	.106
	35	.008		94	.096
	36	.004		100	.052
9	34	.102		106	.025
	37	.049		112	.011
	39	.027		113	.009
	42	.010		116	.005
	44	.004	**17**	104	.103
10	41	.097		105	.095
	44	.053		112	.049
	47	.024		118	.025
	50	.010		125	.010
	52	.005		129	.005
11	48	.103	**18**	116	.098
	52	.051		124	.049
	55	.027		131	.024
	59	.009		138	.010
	61	.005		143	.005
12	56	.102	**19**	128	.098
	60	.055		136	.052
	61	.046		137	.048
	64	.026		144	.025
	68	.010		152	.010
	71	.005		157	.005
13	64	.108	**20**	140	.101
	65	.095		150	.049
	69	.055		158	.024
	70	.047		167	.010
	74	.024		172	.005

Tabla A.14 Valores críticos para la prueba Wilcoxon de suma de rangos

$P_0(W \geq c) = P(W \geq c$ cuando H_0 es verdadera)

m	n	c	$P_0(W \geq c)$	m	n	c	$P_0(W \geq c)$
3	**3**	15	.05			40	.004
	4	17	.057		**6**	40	.041
		18	.029			41	.026
	5	20	.036			43	.009
		21	.018			44	.004
	6	22	.048		**7**	43	.053
		23	.024			45	.024
		24	.012			47	.009
	7	24	.058			48	.005
		26	.017		**8**	47	.047
		27	.008			49	.023
	8	27	.042			51	.009
		28	.024			52	.005
		29	.012	**6**	**6**	50	.047
		30	.006			52	.021
4	**4**	24	.057			54	.008
		25	.029			55	.004
		26	.014		**7**	54	.051
	5	27	.056			56	.026
		28	.032			58	.011
		29	.016			60	.004
		30	.008		**8**	58	.054
	6	30	.057			61	.021
		32	.019			63	.01
		33	.010			65	.004
		34	.005	**7**	**7**	66	.049
	7	33	.055			68	.027
		35	.021			71	.009
		36	.012			72	.006
		37	.006		**8**	71	.047
	8	36	.055			73	.027
		38	.024			76	.01
		40	.008			78	.005
		41	.004	**8**	**8**	84	.052
5	**5**	36	.048			87	.025
		37	.028			90	.01
		39	.008			92	.005
		39	.008			92	.005

Tabla A.15 Valores críticos para el intervalo Wilcoxon de rangos con signo $(\bar{x}_{(n(n+1)/2-c+1)}, \bar{x}_{(c)})$

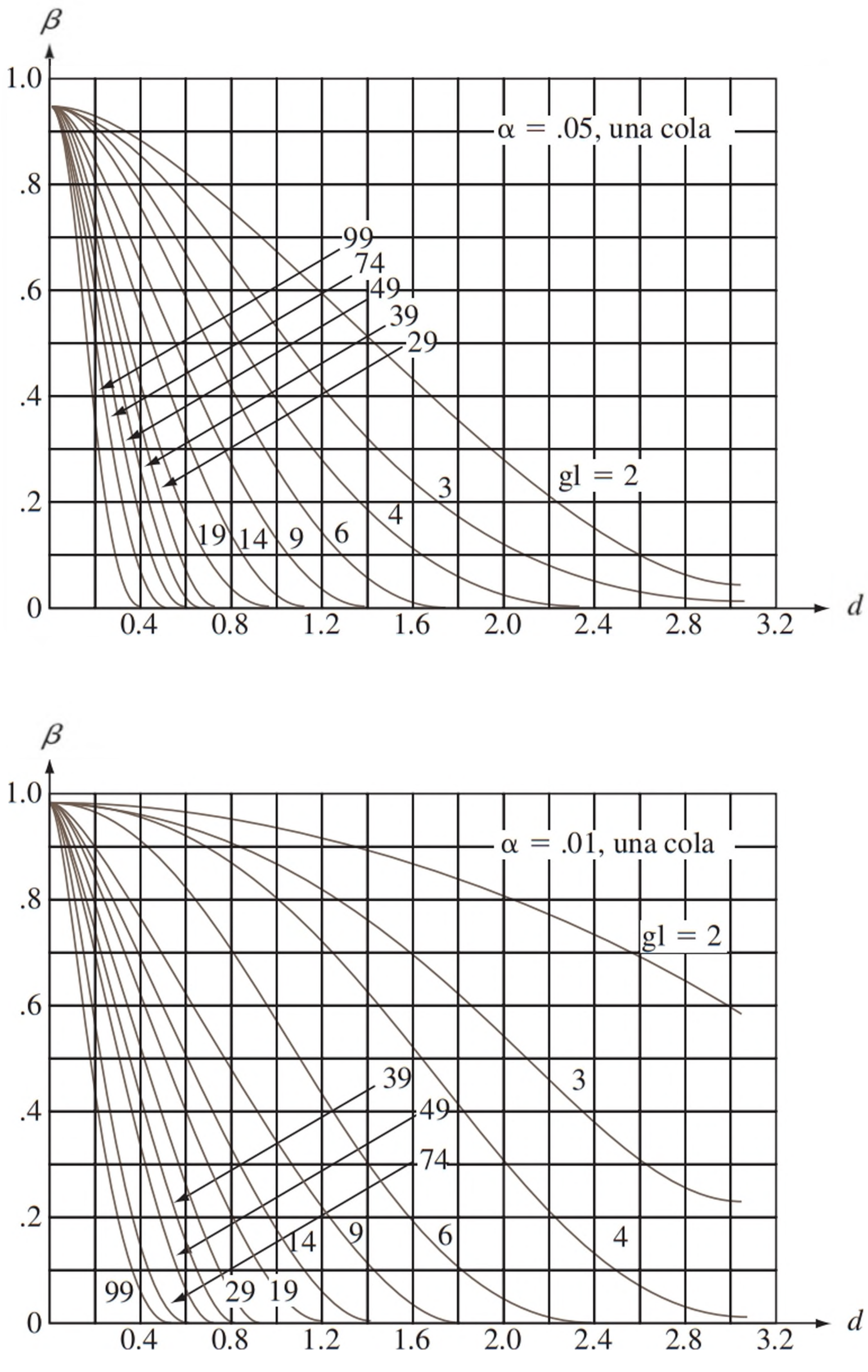
n	Nivel de confianza (%)	c	n	Nivel de confianza (%)	c	n	Nivel de confianza (%)	c
5	93.8	15	**13**	99.0	81	**20**	99.1	173
	87.5	14		95.2	74		95.2	158
6	96.9	21		90.6	70		90.3	150
	93.7	20	**14**	99.1	93	**21**	99.0	188
	90.6	19		95.1	84		95.0	172
7	98.4	28		89.6	79		89.7	163
	95.3	26	**15**	99.0	104	**22**	99.0	204
	89.1	24		95.2	95		95.0	187
8	99.2	36		90.5	90		90.2	178
	94.5	32	**16**	99.1	117	**23**	99.0	221
	89.1	30		94.9	106		95.2	203
9	99.2	44		89.5	100		90.2	193
	94.5	39	**17**	99.1	130	**24**	99.0	239
	90.2	37		94.9	118		95.1	219
10	99.0	52		90.2	112		89.9	208
	95.1	47	**18**	99.0	143	**25**	99.0	257
	89.5	44		95.2	131		95.2	236
11	99.0	61		90.1	124		89.9	224
	94.6	55	**19**	99.1	158			
	89.8	52		95.1	144			
12	99.1	71		90.4	137			
	94.8	64						
	90.8	61						

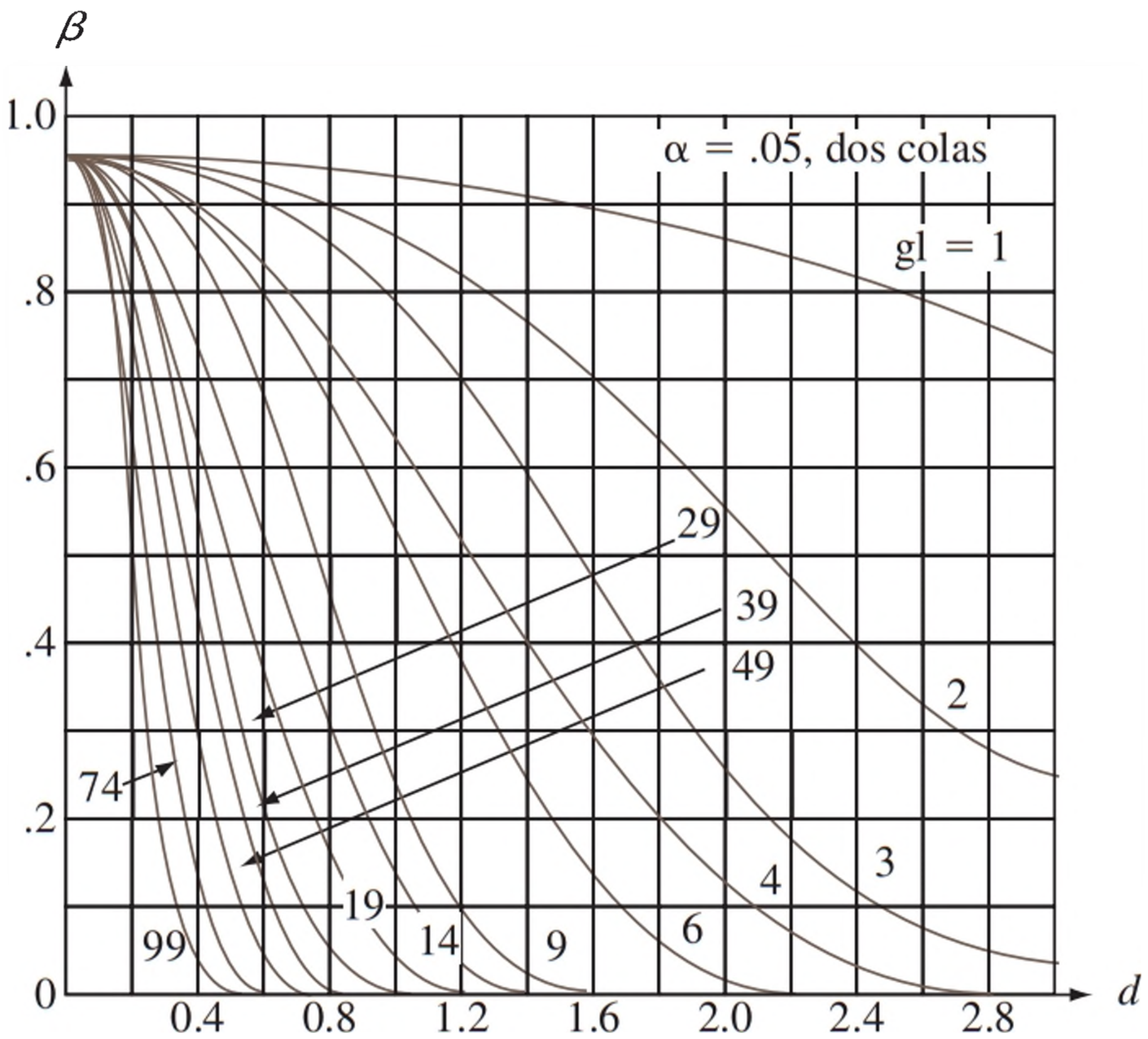
Tabla A.16 Valores críticos para el intervalo Wilcoxon de suma de rangos $(d_{ij(mn-c+1)}, d_{ij(c)})$

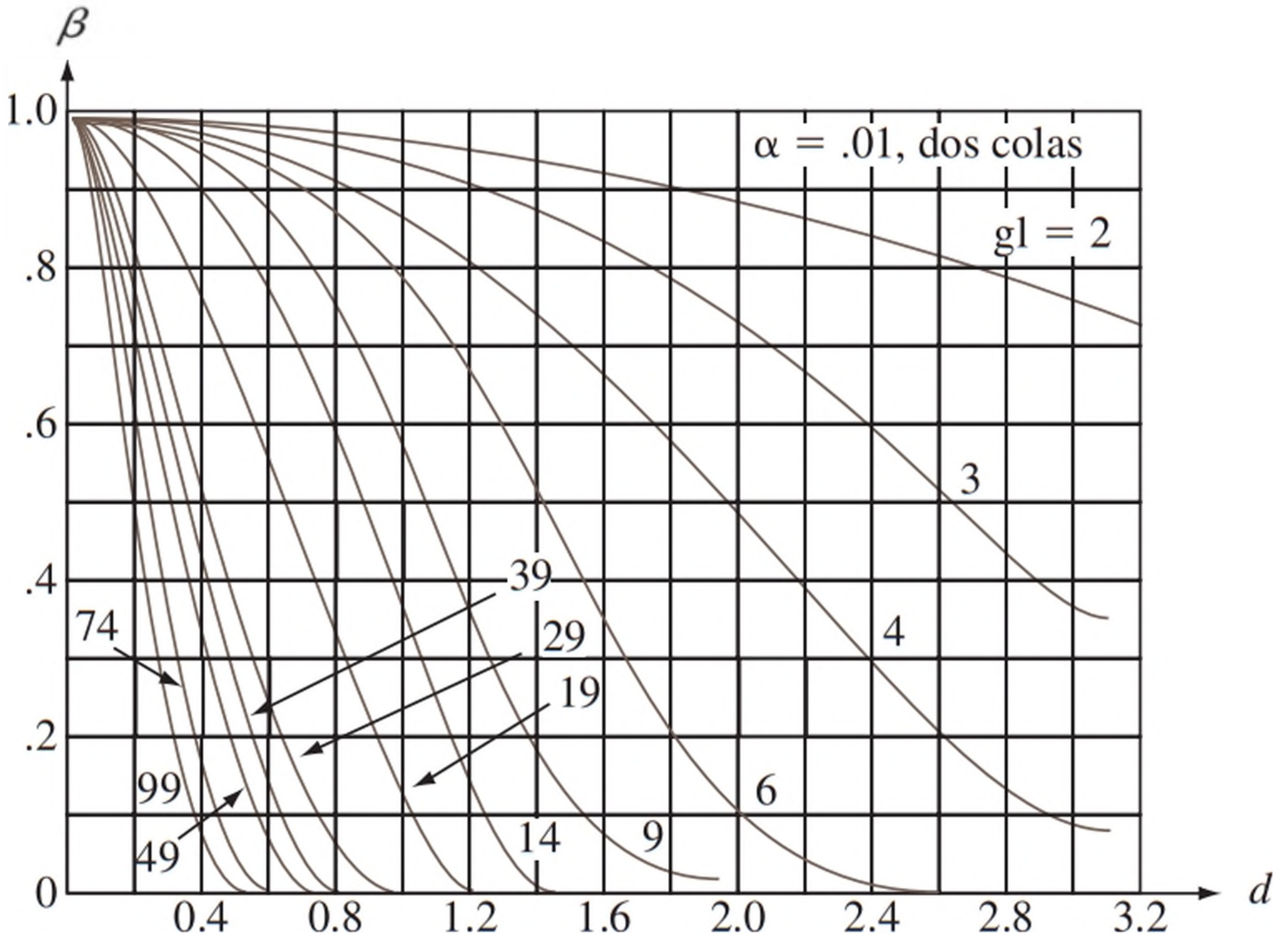
	Tamaño de muestra pequeña							
	5		**6**		**7**		**8**	
Tamaño de muestra grande	**Nivel de confianza (%)**	***c***	**Nivel de confianza (%)**	***c***	**Nivel de confianza (%)**	***c***	**Nivel de confianza (%)**	***c***
5	99.2	25						
	94.4	22						
	90.5	21						
6	99.1	29	99.1	34				
	94.8	26	95.9	31				
	91.8	25	90.7	29				
7	99.0	33	99.2	39	98.9	44		
	95.2	30	94.9	35	94.7	40		
	89.4	28	89.9	33	90.3	38		
8	98.9	37	99.2	44	99.1	50	99.0	56
	95.5	34	95.7	40	94.6	45	95.0	51
	90.7	32	89.2	37	90.6	43	89.5	48
9	98.8	41	99.2	49	99.2	56	98.9	62
	95.8	38	95.0	44	94.5	50	95.4	57
	88.8	35	91.2	42	90.9	48	90.7	54
10	99.2	46	98.9	53	99.0	61	99.1	69
	94.5	41	94.4	48	94.5	55	94.5	62
	90.1	39	90.7	46	89.1	52	89.9	59
11	99.1	50	99.0	58	98.9	66	99.1	75
	94.8	45	95.2	53	95.6	61	94.9	68
	91.0	43	90.2	50	89.6	57	90.9	65
12	99.1	54	99.0	63	99.0	72	99.0	81
	95.2	49	94.7	57	95.5	66	95.3	74
	89.6	46	89.8	54	90.0	62	90.2	70

	Tamaño de muestra pequeña							
	9		**10**		**11**		**12**	
Tamaño de muestra grande	**Nivel de confianza (%)**	***c***	**Nivel de confianza (%)**	***c***	**Nivel de confianza (%)**	***c***	**Nivel de confianza (%)**	***c***
9	98.9	69						
	95.0	63						
	90.6	60						
10	99.0	76	99.1	84				
	94.7	69	94.8	76				
	90.5	66	89.5	72				
11	99.0	83	99.0	91	98.9	99		
	95.4	76	94.9	83	95.3	91		
	90.5	72	90.1	79	89.9	86		
12	99.1	90	99.1	99	99.1	108	99.0	116
	95.1	82	95.0	90	94.9	98	94.8	106
	90.5	78	90.7	86	89.6	93	89.9	101

Tabla A.17 Curvas β para pruebas t




β
1.0
.8
.6
.4
.2
0
α = .05, dos colas
gl = 1
29
39
49
74
2
3
4
6
9
14
19
99
0.4
0.8
1.2
1.6
2.0
2.4
2.8
d


β
1.0
.8
.6
.4
.2
0
α = .01, dos colas
gl = 2
3
4
6
9
14
19
29
39
49
74
99
0.4
0.8
1.2
1.6
2.0
2.4
2.8
3.2
d

Respuestas a ejercicios seleccionados de número impar

Capítulo 1

1. a. *Los Angeles Times, Oberlin Tribune, Gainesville Sun, Washington Post*

b. Duke Energy, Clorox, Seagate, Neiman Marcus

c. Vince Correa, Catherine Miller, Michael Cutler, Ken Lee

d. 2.97, 3.56, 2.20, 2.97

3. a. ¿Qué tan probable es que más de la mitad de las computadoras muestreadas necesiten o hayan necesitado servicio de garantía? ¿Cuál es el número esperado entre las 100 que necesitan servicio de garantía? ¿Qué tan probable es que el número que necesita servicio de garantía sea mayor que el número esperado en más de 10?

b. Suponga que 15 de las 100 muestreadas necesitaron servicio de garantía. ¿Qué confianza podemos tener de que la proporción de *todas* las computadoras que necesitan servicio de garantía sea entre .08 y .22? ¿La muestra proporciona evidencia obligatoria para concluir que más de 10% de esas computadoras necesita servicio de garantía?

5. a. No son. La población pertinente son todos los estudiantes que toman un curso extenso de estadística que participan en un programa de IS (instrucción suplementaria) de esta clase.

b. La aleatoriedad protege contra sesgos diversos y ayuda a asegurar que los del grupo IS son tan semejantes como sea posible a los estudiantes del grupo de control.

c. No habría base firme para evaluar la efectividad de la IS (nada con lo cual pudieran compararse razonablemente las calificaciones de la IS).

7. Se podría generar una muestra aleatoria sencilla de todas las casas unifamiliares de la ciudad, o una muestra aleatoria estratificada al tomar una muestra aleatoria sencilla de cada uno de los 10 vecindarios del distrito. De cada una de las casas seleccionadas, se determinarían valores de todas las variables deseadas. Éste sería un estudio enumerativo porque existe una población de objetos finita e identificable de la cual tomar muestras.

9. a. Posiblemente por error de medición, error de registro, diferencias en condiciones ambientales en el momento de la medición, etcétera.

b. No. Porque no hay marco de muestreo.

11.

3L	1
3H	56678
4L	000112222234
4H	5667888
5L	144
5H	58
6L	2
6H	6678
7L	
7H	5

tallo: décimas de dígitos

La gráfica de tallo y hoja muestra que .45 es un buen valor representativo para los datos. Además, la gráfica no es simétrica y parece estar sesgada positivamente. El rango de los datos es de .75 − .31 = .44, que es comparable con el valor típico de .45. Esto constituye una cantidad razonablemente grande de variación en los datos. El valor de datos .75 es un atípico posible.

13. a.

12 2 hoja: dígito de unidades
12 445
12 6667777
12 889999
13 00011111111
13 22222222233333333333333
13 444444444444444445555555555555555555
13 6666666666667777777777
13 888888888888999999
14 0000001111
14 2333333
14 444
14 77

simetría

b. Cerca de la forma de campana, centro ≈ 135, no hay dispersión insignificante, no hay brechas ni valores atípicos.

15.

Am		Fr
	8	1
157020153504	9	00645632
9324	10	2563
6306	11	6913
Tallo: Centenas y decenas 058	12	325528
Hoja: Unidades 8	13	7
	14	
	15	8
2	16	

Valores representativos: debajo de 100 para Am y debajo de 110 para Fr. Algo más de variabilidad en los tiempos de Fr que en los tiempos de Am. Sesgo positivo más extremo de Am que para Fr. 162 es un valor Am atípico y 158 es quizás un valor para Fr atípico.

17. **a.** .639, .510 **b.** .491, .315

c. Las frecuencias relativas son. 065, .185, .241, .148, .102, .083, .056, .074, .028 y 019. El histograma está cerca de ser unimodal (el pico a 9 probablemente desaparecería con un mayor tamaño de la muestra) y positivamente sesgado. Un valor típico de x aquí es 5, pero hay considerable variabilidad sobre el valor típico. El conjunto de datos no contiene valores atípicos.

19. **a.** .99 (99%), .71 (71%) **b.** .64 (64%), .44 (44%)

c. Estrictamente hablando, el histograma no es unimodal, pero está cerca de serlo con un sesgo positivo moderado. Es probable que un tamaño muestral mucho más grande dé una imagen más uniforme.

21. **a.**

y	Frec.	Frec. rel.
0	17	.362
1	22	.468
2	6	.128
3	1	.021
4	0	.000
5	1	.021
	47	1.000

.362, .638

b.

z	Frec.	Frec. rel.
0	13	.277
1	11	.234
2	3	.064
3	7	.149
4	5	.106
5	3	.064
6	3	.064
7	0	.000
8	2	.043
	47	1.001

.894, .830

23. Los anchos de clases no son iguales, por lo que se debe utilizar la escala de densidad. Las densidades de las seis clases son .2030, .1373, .0303, .0086, .0021 y .0009, respectivamente. El histograma resultante es unimodal con un sesgo positivo muy sustancial.

25.

Clase	Frec.	Clase	Frec.
10−<20	8	1.1−<1.2	2
20−<30	14	1.2−<1.3	6
30−<40	8	1.3−<1.4	7
40−<50	4	1.4−<1.5	9
50−<60	3	1.5−<1.6	6
60−<70	2	1.6−<1.7	4
70−<80	1	1.7−<1.8	5
	40	1.8−<1.9	1
			40

Original: sesgado positivamente;
Transformado mucho más simétrico, no lejos de la forma de campana.

27. **a.** La observación 50 está en un límite de clase.

b.

Clase	Frec.	Frec. rel.
0−<50	9	.18
50−<100	19	.38
100−<150	11	.22
150−<200	4	.08
200−<300	4	.08
300−<400	2	.04
400−<500	0	.00
500−<600	1	.02
	50	1.00

Un valor representativo (central) está un poco abajo o un poco arriba de 100, dependiendo de cómo se mida el centro. Hay gran variabilidad en los tiempos de vida, en especial en valores del extremo superior de los datos. Hay varios candidatos para valores atípicos.

c.

Clase	Frec.	Frec. rel.
2.25−<2.75	2	.04
2.75−<3.25	2	.04
3.25−<3.75	3	.06
3.75−<4.25	8	.16
4.25−<4.75	18	.36
4.75−<5.25	10	.20
5.25−<5.75	4	.08
5.75−<6.25	3	.06
	50	1.00

Hay mucha más simetría en la distribución de los valores $\ln(x)$ que en los valores x en sí, y menos variabilidad. Ya no hay brechas ni valores atípicos obvios.

d. .38, .14

29. A: .28 B: .19 C: .18
D: .17 E: .09 F: .09

31.

Clase	Frec.	Frec. acum.	Frec. acumul. rel.
0−<4	2	2	.050
4−<8	14	16	.400
8−<12	11	27	.675
12−<16	8	35	.875
16−<20	4	39	.975
20−<24	0	39	.975
24−<28	1	40	1.000

33. **a.** 640.5, 582.5

b. 610.5, 582.5

c. 591.2

d. 593.71

35. **a.** 1.237, .56; sesgo positivo

b. 1.118; entre las dos

c. .36

37. $\bar{x}_{tr(10)} = 11.46$

39. **a.** $\bar{x} = 1.0297, \tilde{x} = 1.009$ **b.** .383

41. **a.** .7 **b.** También .7 **c.** 13

43. $\tilde{x}$, = 68.0, $\bar{x}_{rec(20)} = 66.2$, $\bar{x}_{rec(30)} = 67.5$

45. **a.** $\bar{x} = 115.58$; las desviaciones son .82, .32, −.98, −.38, .22
b. .482, .694 **c.** .482 **d.** .482

47. **a.** $\bar{x} = 14.88, \tilde{x}, = 14.70$ **b.** .837 **c.** .837

49. **a.** 56.80, 197.8040 **b.** .5016, .708

51. **a.** 1264.766, 35.564 **b.** .351, .593

53. **a.** Bal: 1.121, 1.050, .536
Gr: 1.244, 1.100, .448
b. Las proporciones típicas son muy similares para los dos tipos. Hay una variabilidad algo más en la muestra Bal, debido principalmente a los dos valores extremos (uno leve, uno extremo). Para Bal hay simetría sustancial en el centro 50%, pero asimetría positiva en general. Para Gr hay sesgo positivo sustancial en el centro 50% y un leve sesgo positivo en general.

55. **a.** 33 **b.** No
c. Un ligero sesgo positivo en la mitad central, pero más bien simétrico en su conjunto. La magnitud de variabilidad parece importante.
d. A lo sumo 32.

57. **a.** Sí. 125.8 es un valor atípico extremo y 250.2 es un valor atípico moderado.
b. Además de la presencia de valores atípicos, hay sesgo positivo en el 50% central de los datos y en general con excepción de los valores atípicos. Excepto para los dos valores atípicos, parece haber una cantidad relativamente pequeña de variabilidad en los datos.

59. **a.** DE (delirio excitado): .4, .10, 2.75, 2.65;
No-DE: 1.60, .30, 7.90, 7.60
b. DE: 8.9 y 9.2 son valores atípicos moderados, y 11.7 y 21.0 son valores atípicos extremos.
No hay valores atípicos en la muestra sin delirio excitado.
c. Cuatro valores atípicos para DE, ninguno para no-DE. Sesgo positivo importante en ambas muestras; menos variabilidad en DE (para f_s menor), y las observaciones para no-DE tienden a ser un poco mayores que las observaciones con DE.

61. Valores atípicos, moderados y extremos, sólo a las 6 a.m. Las distribuciones a otras horas son bastante simétricas. La variabilidad aumenta un poco hasta las 2 p.m. y luego disminuye ligeramente, y lo mismo es cierto de valores "típicos" de coeficiente de vapor de gasolina.

63. $\bar{x} = 64.89, \tilde{x} = 64.70, s = 7.803$, 4° inferior = 57.8, 4° superior = 70.4, $f_s = 12.6$. Un histograma que consta de 8 clases a partir, de las 52, cada una de ancho 4, es bimodal, pero cerca de unimodal con un sesgo positivo. Un diagrama de caja no muestra los valores extremos, hay un sesgo negativo muy leve en el centro 50% y el bigote superior es mucho más largo que el bigote más bajo.

65. **a.** Un valor representativo de estos datos sería de alrededor de 90 MPa. El histograma es razonablemente simétrico, unimodal, y un poco con forma de campana con una buena cantidad de variabilidad ($s \approx 3$ o 4 MPa).
b. .9231, .9053
c. .48

67. **a.** M: $\bar{x} = 3.64, \tilde{x} = 3.70, s = .269, f_s = .40$
F: $\bar{x} = 3.28, \tilde{x} = 3.15, s = .478, f_s = .50$
Los valores femeninos son por lo general un poco menores que los masculinos, y muestran un poco de más variabilidad. Una gráfica de caja M muestra sesgo negativo, mientras que una gráfica de caja F muestra sesgo positivo.
b. F: $\bar{x}_{rec(10)} = 3.24$ M:$\bar{x}_{rec(10)} = 3.652 \approx 3.65$

69. **a.** $\bar{y} = a\bar{x} + b, s_y^2 = a^2 s_x^2$ **b.** 189.14, 1.87

71. **a.** La media, mediana y media recortada son prácticamente idénticas, lo que sugiere una cantidad importante de simetría en la información; el hecho de que los cuartiles estén a casi la misma distancia desde la mediana, y que las observaciones máximas sean casi equidistantes del centro, proporciona más apoyo para simetría. La desviación estándar es bastante pequeña respecto a la media y la mediana.
b. Vea los comentarios de a). Además, usando 1.5(Q3 − Q1) como medida, las dos observaciones más grandes y las tres más pequeñas son valores atípicos moderados.

73. $\bar{x} = .9255, s = .0809, \tilde{x} = .93$, pequeña cantidad de variabilidad, un poco de sesgo.

75. **a.** "Resúmenes de cinco números" ($\tilde{x}$, los dos cuartos y las observaciones más pequeña y más grande) son idénticas y no hay valores atípicos, de modo que las tres gráficas de caja individuales son idénticas.
b. Diferencias en variabilidad, naturaleza de brechas y existencia de grupos para tres muestras.
c. No. Se pierde el detalle.

77. **c.** Las profundidades representativas son muy similares para los cuatro tipos de suelo, entre 1.5 y 2. Los datos de la arcilla y de los suelos arcilla limo muestran mucho más variabilidad que los otros dos tipos. Los diagramas de caja para los tres primeros tipos muestran un importante sesgo positivo tanto en el centro 50% y en general. El diagrama de caja para el suelo SYCL muestra asimetría negativa en el centro 50% y un leve sesgo positivo en general. Por último, hay múltiples valores atípicos para los tres primeros tipos de suelos, incluyendo los valores atípicos extremos.

79. **a.** $\bar{x}_{n+1} = (n\bar{x}_n + x_{n+1})/(n + 1)$
c. 12.53, .532

81. Una asimetría positiva importante (suponiendo unimodalidad).

83. **a.** Todos los puntos se encuentran sobre una recta de 45°. Los puntos se encuentran debajo de la recta de 45°.
b. Los puntos que se encuentran debajo de la recta de 45° indican una asimetría positiva importante.

Capítulo 2

1. **a.** $\mathcal{S}$ = {1324, 3124, 1342, 3142, 1423, 1432, 4123, 4132, 2314, 2341, 3214, 3241, 2413, 2431, 4213, 4231}
b. A = {1324, 1342, 1423, 1432}
c. B = {2314, 2341, 3214, 3241, 2413, 2431, 4213, 4231}
d. $A \cup B$ = {1324, 1342, 1423, 1432, 2314, 2341, 3214, 3241, 2413, 2431, 4213, 4231},
$A \cap B$ no contiene resultados (A y B son disjuntos)
A' = {3124, 3142, 4123, 4132, 2314, 2341, 3214, 3241, 2413, 2431, 4213, 4231}

3. **a.** A = {SSF, SFS, FSS}
b. B = {SSF, SFS, FSS, SSS}
c. C = {SFS, SSF, SSS}
d. C' = {FFF, FSF, FFS, FSS, SFF},
$A \cup C$ = {SSF, SFS, FSS, SSS},
$A \cap C$ = {SSF, SFS},
$B \cup C$ = {SSF, SFS, FSS, SSS} = B,
$B \cap C$ = {SSF, SFS, SSS} = C

5. **a.** $\mathcal{S}$ = {(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 2, 1), (1, 2, 2), (1, 2, 3), (1, 3, 1), (1, 3, 2), (1, 3, 3), (2, 1, 1), (2, 1, 2), (2, 1, 3), (2, 2, 1), (2, 2, 2), (2, 2, 3), (2, 3, 1), (2, 3, 2), (2, 3, 3), (3, 1, 1), (3, 1, 2), (3, 1, 3), (3, 2, 1), (3, 2, 2), (3, 2, 3), (3, 3, 1), (3, 3, 2), (3, 3, 3)}
b. {(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3)} **c.** {(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)} **d.** {(1, 1, 1), (1, 1, 3), (1, 3, 1), (1, 3, 3), (3, 1, 1), (3, 1, 3), (3, 3, 1), (3, 3, 3)}

7. **a.** Hay 35 resultados en $\mathcal{S}$ **b.** {*AABABAB, AABAABB, AAABBAB, AAABABB, AAAABBB*}

11. **a.** .07 **b.** .30 **c.** .57

13. **a.** .36 **b.** .64 **c.** .53 **d.** .47 **e.** .17 **f.** .75

15. **a.** .572 **b.** .879

17. Porque hay paquetes computarizados de estadística que no son SPSS ni SAS
b. .70 **c.** .80 **d.** .20

19. **a.** .8841 **b.** .0435

21. **a.** .10 **b.** .18, .19 **c.** .41 **d.** .59 **e.** .31 **f.** .69

23. **a.** .067 **b.** .400 **c.** .933 **d.** .533

25. **a.** .85 **b.** .15 **c.** .22 **d.** .35

27. **a.** .1 **b.** .7= **c.** .6

29. **a.** 676; 1296 **b.** 17 576; 46656 **c.** 456 976; 1 679 616 **d.** .942

31. **a.** 45 **b.** 1440 días (casi 4 años)

33. **a.** 1 816 214 440 **b.** 659 067 881 572 000 **c.** 9072000

35. **a.** 38 760, .0048 **b.** .0054 **c.** .9946 **d.** .2885

37. **a.** 60 **b.** 10 **c.** .0456

39. **a.** .145 **b.** .075 **c.** .264 **d.** .154

41. **a.** 10 000 **b.** .9876 **c.** .03 **d.** .0337

43. .000394, .00394, .00001539

45. **a.** .447, .500, .200 **b.** .400, .447 **c.** .211

47. **a.** .73 **b.** .22 **c.** .50; entre todos los que tienen una tarjeta Visa, 50% tienen MasterCard; .75 **d.** .40 **e.** .85

49. **a.** .34, .40 **b.** .588 **c.** .50

51. **a.** .0312 **b.** .024

53. .083

55. .236

59. **a.** .21 **b.** .455 **c.** .264, .462, .274

61. **a.** .578, .278, .144 **b.** 0, .457, .543

63. **b.** .54 **c.** .68 **d.** .74 **e.** .7941

65. .087, .652, .261

67. .000329; muy inquietante.

69. **a.** .126 **b.** .05 **c.** .1125 **d.** .2725 **e.** .5325 **f.** .2113

71. **a.** 300 **b.** .820 **c.** .146

75. .401, .722

77. **a.** .00648 **b.** .00421

79. .0059

81. **a.** .95

83. **a.** .10, .20 **b.** 0

85. **a.** $p(2 - p)$ **b.** $1 - (1 - p)^n$ **c.** $(1 - p)^3$
d. $.9 + (1 - p)^3(.1)$
e. $.1(1 - p)^3/[.9 + .1(1 - p)^3] = .0137$ para $p = .5$

87. **a.** .40 **b.** .571
c. No: .571 ≠ .65, y también .40 ≠ (.65)(.7) **d.** .733

89. $[2\pi(1 - \pi)]/(1 - \pi^2)$

91. **a.** .333, .444 **b.** .150 **c.** .291

93. .45, .32

95. **a.** .0083 **b.** .2 **c.** .2 **d.** .1074

97. .905

99. **a.** .974 **b.** .9754

101. .926

103. **a.** .008 **b.** .018 **c.** .601

105. **a.** .883, .117 **b.** 23 **c.** .156

107. $1 - (1 - p_1)(1 - p_2) \cdots (1 - p_n)$

109. **a.** .0417 **b.** .375

111. P(contratar #1) = 6/24 para $s = 0$, = 11/24 para $s = 1$, = 10/24 para $s = 2$, y = 6/24 para $s = 3$, de modo que $s = 1$ es mejor.

113. $1/4 = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$
$\neq P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 1/8$

Capítulo 3

1. $x = 0$ para *FFF*; $x = 1$ para *SFF*, *FSF* y *FFS*; $x = 2$ para *SSF*, *SFS* y *FSS*; y $x = 3$ para *SSS*

3. Z = promedio de los dos números, con posibles valores 2/2, 3/2,..., 12/2; W = valor absoluto de la diferencia, con valores posibles 0, 1, 2, 3, 4, 5

5. No. En el ejemplo 3.4, sea $Y = 1$ si a lo sumo se examinan 3 baterías y sea $Y = 0$, de otro modo. Entonces Y tiene sólo dos valores.

7. **a.** {0, 1,..., 12} ; discreta **c.** {1, 2, 3,...}; discreta **e.** $\{z_1, z_2, \ldots, z_N\}$, discreta porque hay sólo un número finito N de porcentajes de impuestos diferentes a través de todo el país **g.** $\{x: m \le x \le M\}$ donde m (M) es la mínima (máxima) tensión posible; continua

9. **a.** {2, 4, 6, 8,...}, es decir, {2(1), 2(2), 2(3), 2(4),...}, una sucesión infinita; discreta

b. {2, 3, 4, 5, 6,...}, es decir, {1 + 1, 1 + 2, 1 + 3, 1 + 4,...}, una sucesión infinita, discreta

11. **b.** .55, .25 **c.** .70

13. **a.** .70 **b.** .45 **c.** .55
d. .71 **e.** .65 **f.** .45

15. **a.** (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5) **b.** $p(0) = .3, p(1) = .6, p(2) = .1$

c. $F(x) = 0$ para $x < 0$, $= .3$ para $0 \le x < 1$, $= .9$ para $1 \le x < 2$, y $= 1$ para $2 \le x$

17. **a.** .81 **b.** .162 **c.** Este es *A*; *AUUUA, UAUUA, UUAUA, UUUAA;* .00324

19. $p(0) = .09, p(1) = .40, p(2) = .32, p(3) = .19$

21. **b.** $p(x) = .301, .176, .125, .097, .079, .067, .058, .051, .046$ para $x = 1, 2, \ldots, 9$

c. $F(x) = 0$ para $x < 1$, $= .301$ para $1 \le x < 2$, $= .477$ para $2 \le x < 3, \ldots, = .954$ para $8 \le x < 9$, $= 1$ para $x \ge 9$

d. .602, .301

23. **a.** .20 **b.** .33 **c.** .78 **d.** .53

25. **a.** $p(y) = (1 - p)^y \cdot p$ para $y = 0, 1, 2, 3, \ldots$

27. **a.** 1234, 1243, 1324,..., 4321

b. $p(0) = 9/24, p(1) = 8/24, p(2) = 6/24, p(3) = 0, p(4) = 1/24$

29. **a.** 6.45 **b.** 15.6475 **c.** 3.96 **d.** 15.6475

31. 4.49, 2.12, .68

33. **a.** p **b.** $p(1 - p)$ **c.** p

35. $E[h_3(X)] = \$4.93$, $E[h_4(X)] = \$5.33$, por tanto, es mejor 4 ejemplares.

37. $E(X) = (n + 1)/2, E(X^2) = (n + 1)(2n + 1)/6, V(X) = (n^2 - 1)/12$

39. 2.3, .81, 88.5, 20.25

43. $E(X - c) = E(X) - c, E(X - \pi) = 0$

47. **a.** .001 **b.** .001 **c.** .147
d. .001 **e.** 1.000 **f.** .001

49. **a.** .354 **b.** .115 **c.** .918

51. **a.** 6.25 **b.** 2.17 **c.** .030

53. **a.** .403 **b.** .787 **c.** .774

55. .1478

57. .407, independencia

59. **a.** .017 **b.** .811, .425 **c.** .006, .902, .586

61. Cuando $p = .9$, la probabilidad es .99 para A y .9963 para B. Si $p = .5$, estas probabilidades son .75 y .6875, respectivamente.

63. La tabulación para $p > .5$ es innecesaria.

65. **a.** 20, 16 **b.** 70, 21

67. $P(|X - \mu| \ge 2\sigma) = .042$ cuando $p = .5$ e $= .065$ cuando $p = .75$, en comparación con el límite superior de .25. Usando $k = 3$ en lugar de $k = 2$, estas probabilidades son .002 y .004, respectivamente, mientras que el límite superior es .11.

69. **a.** .379, .879 **b.** .121 **c.** Use la distribución binomial con $n = 15, p = .10$.

71. **a.** $h(x; 15, 10, 20)$ para $x = 5, \ldots, 10$
b. .0325 **c.** .697

73. **a.** $h(x; 10, 10, 20)$ **b.** .033 **c.** $h(x; n, n, 2n)$

75. **a.** $nb(x; 2, .2)$ **b.** .0768 **c.** .1808
d. 8, 10

77. $nb(x; 6, .5), 6$

79. **a.** .999 **b.** .184 **c.** .260 **d.** .080

81. **a.** .011 **b.** .441 **c.** .554, .459 **d.** .945

83. Poisson(5) **a.** .492 **b.** .133

85. **a.** .122, .809, .283 **b.** 12, 3.464

c. .530, .011

87. **a.** .099 **b.** .135 **c.** 2

89. **a.** 4 **b.** .215 **c.** Al menos $-\ln(.1)/2 \approx 1.1513$ años

91. **a.** .221 **b.** 6 800 000 **c.** $p(x; 20.106)$

95. **b.** 3.114, .405, .636

97. **a.** $b(x; 15, .75)$ **b.** .686
c. .313 **d.** 11.25, 2.81 **e.** .310

99. .991

101. **a.** $p(x; 2.5)$ **b.** .067 **c.** .109

103. 1.813, 3.05

105. $p(2) = p^2, p(3) = (1-p)p^2, p(4) = (1-p)p^2, p(x) = [1-p(2)-\cdots-p(x-3)](1-p)p^2$ para $x = 5, 6, 7,\ldots$; .99950841

107. **a.** .0029 **b.** .0767, .9702

109. **a.** .135 **b.** .00144 **c.** $\sum_{x=0}^{\infty}[p(x;2)]^5$

111. 3.590

113. **a.** No **b.** .0273

115. **b.** $.5\mu_1 + .5\mu_2$ **c.** $.25(\mu_1-\mu_2)^2 + .5(\mu_1+\mu_2)$ **d.** .6 y .4 sustituye .5 y .5, respectivamente.

117. $\sum_{i=1}^{10}(p_{i+j+1} + p_{i-j-1})p_i$ donde, $p_k = 0$ si $k < 0$ o $k > 10$.

121. **a.** 2.50 **b.** 3.1

Capítulo 4

1. **b.** .4625, es igual **c.** .5, .278125

3. **b.** .5 **c.** .6875 **d.** .6328

5. **a.** .375 **b.** .125 **c.** .297 **d.** .578

7. **b.** .309 **c.** .494 ($\mu = 2.225$ por simetría de la curva de densidad) **d.** .247

9. **a.** .451, .549 **b.** .312

11. **a.** .25 **b.** .1875 **c.** .4375 **d.** 1.4142 **e.** $f(x) = x/2$ para $0 < x < 2$ **f.** 1.33 **g.** .222, .471 **h.** 2

13. **a.** 3 **b.** 0 para $x \le 1$, $1 - x^{-3}$ para $x > 1$ **c.** .125, .088 **d.** 1.5, .866 **e.** .924

15. **a.** $F(x) = 0$ para $x \le 0$, $= 90\left[\frac{x^9}{9} - \frac{x^{10}}{10}\right]$ para $0 < x < 1$, $= 1$ para $x \ge 1$ **b.** .0107 **c.** .0107, .0107 **d.** .9036 **e.** .818, .111 **f.** .3137

17. **a.** $A + (B-A)p$ **b.** $E(X) = (A+B)/2$, $\sigma_X = (B-A)/\sqrt{12}$ **c.** $[B^{n+1} - A^{n+1}]/[(n+1)(B-A)]$

19. **a.** .597 **b.** .369 **c.** $f(x) = .3466 - .25\ln(x)$ para $0 < x < 4$

21. 314.79

23. 248, 3.60

25. **b.** 1.8(90º percentil para X) + 32 **c.** a(X percentil) + b

27. 0, 1.814

29. **a.** 2.14 **b.** .81 **c.** 1.17 **d.** .97 **e.** 2.41

31. **a.** 2.54 **b.** 1.34 **c.** −.42

33. **a.** .9664 **b.** .2451 **c.** .8664

35. **a.** .0455, .0455 **b.** Aproximadamente 0 **c.** .6460 **d.** 2.13 **e.** .1700

37. **a.** 0, .5793, .5793 **b.** .3174, no **c.** < 87.6 o > 12.04

39. **a.** .1003, .1003 **b.** 35.226 **c.** 21.888 **d.** 20.016, 39.984

41. .002

43. **a.** 58.31, 11.665 **b.** .4768 **c.** .1587

45. 7.3%

47 21.155

49. **a.** .1190, .6969 **b.** .0021 **c.** .7019 **d.** > 5020 o < 1844 (usando $z_{.0005} = 3.295$) **e.** Normal, $\mu = 7.559$, $\sigma = 1.061$, .7019

51. .3174 para $k = 1$, .0456 para $k = 2$, .0026 para $k = 3$, en comparación con los límites de 1, .25 y .111, respectivamente.

53. **a.** Exacta: .212, .577, .573; Aproximada: .211, .567, .596 **b.** Exacta: .885, .575, .017; Aproximada: .885, .579, .012 **c.** Exacta: .002, .029, .617; Aproximada: .003, .033, .599

55. **a.** .9409 **b.** .9943

57. **b.** Normal, $\mu = 239$, $\sigma^2 = 12.96$

59. **a.** 1 **b.** 1 **c.** .982 **d.** .129

61. **a.** .480, .667, .187 **b.** .050, 0

63. **a.** corto ⇒ plan #1 mejor, mientras que largo ⇒ plan #2 mejor

b. $1/\lambda = 10 \Rightarrow E[h_1(X)] = 100$, $E[h_2(X)] = 112.53$
$1/\lambda = 15 \Rightarrow E[h_1(X)] = 150$, $E[h_2(X)] = 138.51$

65. **a.** 3.01, 12.44 **b.** .238 (.237 usando software) **c.** .176

67. **a.** .424 **b.** .567, $\tilde{\mu} < 24$ **c.** 60 **d.** 66

69. **a.** $\cap A_i$ **b.** Exponencial con $\lambda = .05$ **c.** Exponencial con parámetro $n\lambda$

73. **a.** .826, .826, .0636 **b.** .664 **c.** 172.727

77. **a.** 123.97, 117.373 **b.** .5517 **c.** .1587

79. **a.** 9.164, .385 **b.** .8790 **c.** .4247, asimetría **d.** No, puesto que $P(X < 17000) = .9332$

81. **a.** 3.962, 1.921 **b.** .0375 **c.** .2795 **d.** 7.77 **e.** 13.74 **f.** 4.52

83. $\alpha = \beta$

85. **b.** $[\Gamma(\alpha+\beta)\cdot\Gamma(m+\beta)]/[\Gamma(\alpha+\beta+m)\cdot\Gamma(\beta)]$, $\beta/(\alpha+\beta)$

87. Sí, porque el patrón en la gráfica es bastante lineal.

89. Sí, porque un diagrama de probabilidad normal muestra un patrón lineal considerable.

91. Sí

93. Graficar $\ln(x)$ contra percentil z. El patrón es recto, de modo que es posible una distribución poblacional lognormal.

95. El patrón en la gráfica es bastante lineal; es muy posible que la resistencia esté distribuida normalmente.

97. Hay una curvatura importante en la gráfica. λ es un parámetro de escala (como lo es σ para la familia normal).

99. **a.** $F(y) = \frac{1}{48}(y^2 - y^3/18)$ para $0 \le y \le 12$ **b.** .259, .5, .241
c. 6, 43.2, 7.2 **d.** .518 **e.** 3.75

101. **a.** $f(x) = x^2$ para $0 \le x < 1$ y $= \frac{7}{4} - \frac{3}{4}x$ para $1 \le x \le \frac{7}{3}$
b. .917 c. 1.213

103. **a.** .9162 **b.** .9549 **c.** 1.337

105. .506

107. **b.** $F(x) = 0$ para $x < -1$, $= (4x - x^3/3)/9 + \frac{11}{27}$ para $-1 \le x \le 2$, y $= 1$ para $x > 2$ **c.** No. $F(0) < .5 \Rightarrow \tilde{\mu} > 0$
d. $Y \sim \text{Bin}\left(10, \frac{5}{27}\right)$

109. **a.** .368, .828, .460 **b.** 352.53
c. $1/\beta \cdot \exp[-\exp(-(x - \alpha)/\beta)] \cdot \exp(-(x - \alpha)/\beta)$
d. α **e.** $\mu = 201.95$, modo $= 150$, $\tilde{\mu}, = 182.99$

111. **a.** μ **b.** No **c.** 0 **d.** $(\alpha - 1)\beta$
e. $\nu - 2$

113. **a.** $\mu = p/\lambda_1 + (1 - p)/\lambda_2$
$V(X) = 2p/\lambda_1^2 + 2(1 - p)/\lambda_2^2 - \mu 2$
b. $p(1 - \exp(-\lambda_1 x)) + (1 - p)(1 - \exp(-\lambda_2 x))$ para $x \ge 0$
c. .403 **d.** .879
e. 1, $CV > 1$ **f.** $CV < 1$

115. **a.** Lognormal **b.** 1 **c.** 2.72, .0185

119. **a.** Exponencial con $\lambda = 1$
c. Gamma con parámetros α y $c\beta$

121. **a.** $(1/365)^3$ **b.** $(1/365)^2$ **c.** .000002145

123. **b.** Sean $u_1, u_2, u_3, \ldots$ una sucesión de observaciones de una distribución Unif[0, 1] (una sucesión de números aleatorios). Entonces con las $x_i = (-.1)\ln(1 - u_i)$ son observaciones de una distribución exponencial con $\lambda = 10$.

125. $g(E(X)) \le E(g(X))$

127. **a.** 710, 84.423, .684 **b.** .376

Capítulo 5

1. **a.** .20 **b.** .42 **c.** Al menos una manguera está en uso en cada bomba; .70. **d.** $p_X(x) = .16, .34, .50$ para $x = 0, 1, 2$, respectivamente; $p_Y(y) = .24, .38, .38$ para $y = 0, 1, 2$, respectivamente; .50 **e.** No; $p(0, 0) \ne p_X(0) \cdot p_Y(0)$

3. **a.** .15 **b.** .40 **c.** .22 **d.** .17, .46

5. **a.** .054 **b.** .00018

7. **a.** .030 **b.** .120 **c.** .300 **d.** .380 **e.** Sí

9. **a.** 3/380 000 **b.** .3024 **c.** .3593
d. $10Kx^2 + .05$ para $20 \le x \le 30$ **e.** No

11. **a.** $e^{-\mu_1 - \mu_2} \cdot \mu_1^x \cdot \mu_2^y/x!y!$ **b.** $e^{-\mu_1 - \mu_2} \cdot [1 + \mu_1 + \mu_2]$
c. $e^{-(\mu_1 + \mu_2)} \cdot (\mu_1 + \mu_2)^m/m!$; Poisson $(\mu_1 + \mu_2)$

13. **a.** e^{-x-y} para $x \ge 0, y \ge 0$ **b.** .400 **c.** .594
d. .330

15. **a.** $F(y) = 1 - e^{-\lambda y} + (1 - e^{-\lambda y})^2 - (1 - e^{-\lambda y})^3$ para $y \ge 0$
b. $2/3\lambda$

17. **a.** .25 **b.** .318 **c.** .637
d. $f_X(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2}/\pi R^2$ para $-R \le x \le R$; no

19. **a.** $K(x^2 + y^2)/(10Kx^2 + .05)$; $K(x^2 + y^2)/(10Ky^2 + .05)$
b. .556, .549 **c.** 25.37, 2.87

21. **a.** $f(x_1, x_2, x_3)/f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ **b.** $f(x_1, x_2, x_3)/f_{X_1}(x_1)$

23. .15

25. L^2

27. .25 h

29. $-\frac{2}{3}$

31. **a.** $-.1082$ **b.** $-.0131$

37. **a.**

$\bar{x}$	25	32.5	40	45	52.5	65
$p(\bar{x})$	.04	.20	.25	.12	.30	.09

$E(\bar{X}) = \mu = 44.5$

b.

s^2	0	112.5	312.5	800
$p(s^2)$	.38	.20	.30	.12

$E(S^2) = 212.25 = \sigma^2$

39. Esto proviene directamente de la distribución Bin(15, .8) y de la tabla A.1 del apéndice:

$x/15$	0	…	.333	.400	.467	…	.867	.933	1
$p(x/15)$	.000	…	.000	.001	.003	…	.231	.132	.035

41. **a.**

$\bar{x}$	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$p(\bar{x})$	.16	.24	.25	.20	.10	.04	.01

b. .85 **c.**

r	0	1	2	3
$p(r)$	.30	.40	.22	.08

47. **a.** .9876 **b.** .0009

49. **a.** .6026 **b.** .2981

51. .7720

53. **a.** .0062 **b.** 0

55. **a.** .9838 **b.** .8926

57. .9616

59. **a.** .9986, .9986 **b.** .9015, .3970
c. .8357 **d.** .9525, .0003

61. **a.** 3.5, 2.27, 1.51 **b.** 15.4, 75.94, 8.71

63. **a.** .695 **b.** 4.0675 > 2.6775

65. **a.** .9232 **b.** .9660

67. .1588

69. **a.** 2400 **b.** 1205; independencia **c.** 2400, 41.77

71. **a.** 158, 430.25 **b.** .9788

73. **a.** Aproximadamente normal con media = 105, DE = 1.2649; Aproximadamente normal con media = 100, DE = 1.0142
b aproximadamente normal con media = 5, DE = 1.6213
c. .0068 d. .0010, sí

75. **a.** .2, .5, .3 para $x = 12, 15, 20$; .10, .35, .55 para $y = 12, 15, 20$
b. .25 **c.** No **d.** 33.35 **e.** 3.85

77. **a.** 3/81 250 **b.** $f_X(x) = k(250x - 10x^2)$ para $0 \le x \le 20$ e $= k(450x - 30x^2 + \frac{1}{2}x^3)$ para $20 < x \le 30$; $f_Y(y)$ resulta de sustituir y por x en $f_X(x)$. No son independientes.
c. .355 **d.** 25.969 **e.** 204.6154, −.894
f. 7.66

79. ≈ 1

81. **a.** 400 min **b.** 70

83. 97

85. .9973

87. **a.** .2902 **b.** .8185
c. La distribución de $\overline{X}$ es mucho más concentrada cerca de 13 que la distribución de la población **d.** 0

91. **b., c.** Ji-cuadrada con $\nu = n$.

93. **a.** $\sigma_W^2/(\sigma_W^2 + \sigma_E^2)$ **b.** .9999

95. 26, 1.64

97. **a.** .6 **b.** $U = \rho X + \sqrt{1 - \rho^2}\, Y$

Capítulo 6

1. **a.** 8.14, $\overline{X}$ **b.** .77, $\widetilde{X}$, **c.** 1.66, S
d. .148 **e.** .204, $S/\overline{X}$

3. **a.** 1.348, $\overline{X}$ **b.** 1.348, $\overline{X}$ **c.** 1.781, $\overline{X} + 1.28S$
d. .6736 **e.** .0846

5. $N\overline{x} = 1\ 703\ 000$; $T - N\overline{d} = 1\ 591\ 300$; $T \cdot (\overline{x}/\overline{y}) = 1\ 601\ 438.281$

7. **a.** 120.6 **b.** 1 206 000 **c.** .80 **d.** 120.0

9. **a.** 2.11 **b.** .119

11. $\left[\dfrac{p_1q_1}{n_1} + \dfrac{p_2q_2}{n_2}\right]^{1/2}$ **c.** Utilice $\hat{p}_i = x_i/n_i$ y $\hat{q}_i = 1 - \hat{p}_i$ en lugar de p_i y q_i en el inciso b) para $i = 1, 2$.
d. −.245 **e.** .041

15. **a.** $\hat{\theta} = \Sigma X_1^2/2n$ **b.** 74.505

17. **b.** .444

19. **a.** $\hat{p} = 2\hat{\lambda} - .30 = .20$ **b.** $\hat{p} = (100\hat{\lambda} - 9)/70$

21. **b.** $\hat{\alpha} = 5$, $\hat{\beta} = 28.0/\Gamma(1.2)$

23. $\hat{\theta} = \Sigma X_1^2/n$

25. **a.** 384.4, 18.86 **b.** 415.42 **c.** .7967

29. **a.** $\hat{\theta} = \text{mín}\,(X_i)$, $\hat{\lambda} = n/\Sigma[X_i - \text{mín}\,(X_i)]$ **b.** .64, .202

33. Con x_i = tiempo entre nacimiento $i - 1$ y nacimiento i, $\hat{\lambda} = 6/\sum_{i=1}^{6} ix_i = .0436$.

35. 29.5

37. 1.0132

Capítulo 7

1. **a.** 99.5% **b.** 85% **c.** 2.96 **d.** 1.15

3. **a.** Más angosto **b.** No **c.** No **d.** No

5. **a.** (4.52, 5.18) **b.** (4.12, 5.00) **c.** .55 **d.** 94

7. Por un factor de 4; el ancho se reduce en un factor de 5.

9. **a.** $(\overline{x} - 1.645\sigma/\sqrt{n}, \infty)$; (4.57, ∞)
b. $(\overline{x} - z_\alpha \cdot \sigma/\sqrt{n}, \infty)$ **c.** $(-\infty, \overline{x} + z_\alpha \cdot \sigma/\sqrt{n})$; (−∞, 59.7)

11. 950, .8714

13. **a.** (608.58, 699.74) **b.** 189

15. **a.** 80% **b.** 98% **c.** 75%

17. 134.53

19. (.513, .615)

21. $p < .273$ con 95% de confianza; sí

23. **a.** (.225, .275) **b.** 2655

25. **a.** 381 **b.** 339

29. **a.** 2.228 **b.** 2.086 **c.** 2.845 **d.** 2.680
e. 2.485 **f.** 2.571

31. **a.** 1.812 **b.** 1.753 **c.** 2.602 **d.** 3.747
e. 2.1716 (de Minitab) **f.** Alrededor de 2.43

33. **a.** Cantidad razonable de simetría, sin valores atípicos
b. Sí (con base en una gráfica normal de probabilidad)
c. (430.5, 446.1), sí, no

35. **a.** 95% de intervalo de confianza: (23.1, 26.9)
b. 95% IP: (17.2, 32.8), casi 4 veces el ancho

37. **a.** (.888, .964) **b.** (.752, 1.100) **c.** (.634, 1.218)

39. **a.** Sí **b.** (6.45, 98.01) **c.** (18.63, 85.83)

41. Todos 70%; c), porque es más corto

43. **a.** 18.307 **b.** 3.940 **c.** .95 **d.** .10

45. (4.82, 21.85); no

47. **a.** intervalo de confianza al 95% de: (6.702, 9.456)
b. (.166, .410)

49. (47.4, 83.4)

51. **a.** (.260, .457) **b.** 2398 **c.** No, 97.5%

53. (−.84, −.16)

55. 246

57. $(2t_r/\chi^2_{1-\alpha/2,\,2r},\ 2t_r/\chi^2_{\alpha/2,\,2r}) = (65.3, 232.5)$

59. **a.** (máx $(x_i)/(1-\alpha/2)^{1/n}$, máx $(x_i)/(\alpha/2)^{1/n}$)
b. (máx (x_i), máx $(x_i)/\alpha^{1/n}$) **c.** (b); (4.2, 7.65)

61. (73.6, 78.8) contra (75.1, 79.6)

Capítulo 8

1. **a.** Sí **b.** No; $\bar{x}$ es la mediana de la *muestra*, no un parámetro
c. No; s es la desviación estándar de *muestra*, no un parámetro
d. Sí
e. No; $\overline{X}$ y $\overline{Y}$ son estadísticos, no parámetros
f. Sí

3. **a.** Rechazar H_0 ya que $.001 \le .05 = \alpha$
b. Rechazar H_0 **c.** No rechazar H_0 porque .078 >.05
d. Rechazar H_0 (casi)
e. No rechazar H_0

5. Porque esta configuración pone la carga de la prueba en las soldaduras para demostrar que cumplen con las especificaciones; sólo si hay pruebas contundentes de esto se concluirá que las soldaduras son satisfactorias.

7. H_0: $\sigma = .05$ contra H_a: $\sigma < .05$.
I: concluye que la variabilidad en el grosor es satisfactoria cuando no lo es.
II: concluye que la variabilidad en el grosor no es satisfactoria, cuando en realidad lo es.

9. I: concluye que la planta no está cumpliendo cuando sí lo hace.
II: concluye que la planta está cumpliendo cuando no lo hace.

11. **a.** I: concluye que una mayoría está a favor de una de las dos empresas cuando no es el caso.
II: concluye que los suscriptores potenciales se dividen uniformemente entre las dos empresas cuando no es así.
b. $x \le 6$ o $x \ge 19$
c. $X \sim \text{Bin}(25, .5)$, por lo que valor $P = B(6{:}25,.5) + [1 - B(18;25, .5)] = .014$
d. Rechazar H_0 cuando el valor $P \le .044$ es equivalente a rechazar cuando $x \le 7$ o $x \ge 18$. Entonces $\beta(.3) = P(8 \le X \le 17$ cuando $p = .3) = B(17;25, .3) - B(7;25, .3) = .488$, $\beta(.6) = .845$, $\beta(.7) = .488$

13. **a** H_0: $\mu = 10$ contra H_a: $\mu \ne 10$
b. valor $P = P(\overline{X} \le 9.85$ o ≥ 10.15 cuando H_0 es verdadera) $= \Phi(-3.75) + [1 - \Phi(3.75)] \approx 0$ (el software da .00018). Puesto que $0 \le .01$, H_0 debe ser rechazada. La escala no parece estar correctamente calibrada.
c. .5319, .0078

15. **a.** .0778 **b.** .1841 **c.** .0250 **d.** .0066 **e.** .5438

17. **a.** Valor $P = P(\overline{X} \ge 30\ 960$ cuando H_0 es verdadera) $= 1 - \Phi(2.56) = .0052 \le .01$, por tanto, H_0 se rechaza
b. .8413 **c.** .143 **d.** .0052

19. **a.** $z = -2.27$, valor $P = .0232 > .01$, por tanto, H_0 no se rechaza
b. .2266 **c.** 22

21. **a.** $z = -3.33$, valor $P = .0008 \le .01$, por tanto H_0 no se rechaza
b. .1056 **c.** 217

23. **a.** $\bar{x} = .750, \tilde{x} = .640, s = .3025, f_s = .480$. Una gráfica de caja muestra un sesgo positivo considerable; no hay atípicos.
b. No. Una gráfica de probabilidad normal muestra una curvatura importante. No, ya que n es grande.

c. $z = -5.79$, valor $P \approx 0$, rechazar H_0 en cualquier nivel de significancia razonable; sí.
d. .821

25. No. H_0: $\mu = 2$ contra H_a: $\mu < 2$, $z = -1.80$, valor $P = .0359 > .01$, por lo que H_0 no se rechaza

29. **a.** Valor $P = .136 > .05$, por tanto, H_0 no se rechaza
b. $.136 > .05$, por tanto, H_0 no se rechaza
c. Valor $P = .016 > .01$, por tanto, H_0 no se rechaza
d. Valor $P \approx 0 \leq .05$, por tanto, H_0 se rechaza en favor de H_a: $\mu \neq 5$

31. **a.** Valor $P = .003 \leq .05$, por tanto, H_0 se rechaza
b. Valor $P = .057 > .01$, por tanto, H_0 no se rechaza
c. Valor $P > .5 > \alpha$ para cualquier α razonable, por tanto, H_0 no se rechaza

33. **a.** Parece que la especificación ha sido violada; gran parte de la gráfica de caja se encuentra a la derecha de 200.
b. $t = 5.8$, valor $P \approx 0$, por tanto, se concluye que $\mu \neq 200$

35. **a.** $t \approx 1.2$, valor $P \approx .128 > .05$, por tanto, H_0: $\mu = 200$ no se puede rechazar
b. .30 (del software)

37. **a.** Sí, porque el patrón en una gráfica de probabilidad normal es razonablemente lineal.
b. Valor $P > .10$ (apenas), así que H_0: $\mu = 100$ no debe ser rechazada en cualquier α razonable, y se debe utilizar el concreto.

39. **a.** $t = 2.43$, valor $P \approx .013 > .01 = \alpha$, por lo que no hay evidencia convincente.
b. Si, tipo II **c.** .66 (del software)

41. $t \approx 1.9$, por tanto, el valor $P < .116$. H_0 no debe ser rechazada.

43. **a.** H_0: $p = .2$ contra H_a: $p > .2$, $z = 1.27$, valor $P = .10 > .05$, por lo que no hay evidencia convincente para rechazar H_0.
b. I: decir que más de 20% es obeso cuando este no es el caso; II: concluir que 20% es obeso cuando el porcentaje real supera 20%.
c. .121

45. $z = 3.67$, valor $P \approx 0$, por lo que H_0: $p = .40$ se rechaza. No

47. **a.** $z = -1.0$, así que no hay suficiente evidencia para concluir que $p < .25$; y así, usar tapas de rosca.
b. I: No utilizar tapas de rosca cuando su uso está justificado; II: Utilizar tapas de rosca cuando su uso no está justificado.

49. **a.** $z = 3.07$, valor $P = .0022 \leq .01$, por tanto, rechazar H_0 y la premisa de la empresa.
b. .0332

51. No, no, sí. $\alpha = .098$, $\beta = .090$

53. **a.** .8888, .1587, .0006 **b.** valor $P \approx 0$. Sí **c.** No

55. **a.** .049, .096 **b.** 69

57. $z = -3.12$, valor $P = .0018 \leq .05$, por tanto, se concluye que $\mu \neq 3.20$

59. **a.** H_0: $\mu = .85$ contra H_a: $\mu \neq .85$
b. H_0 no se puede rechazar cualquier α

61. **a.** No, porque el valor $P = .02. > 01$; sí, porque 45.31 es mayor que 20, pero n es muy pequeño
b. $\beta = .57$ (software)

63. **a.** No, no
b. No, ya que $z = .44$ y el valor $P = .33 > .10$.

65. **a.** Aproximadamente .6; aproximadamente .2 (de la tabla A.17 del apéndice) **b.** $n = 28$

67. **a.** $z = 1.64$, valor $P \approx .1 > .05$, por tanto, no se puede rechazar H_0. Tipo II **b.** Sí.

69. Sí, $z = -3.32$, valor $P = .0005 \leq .001$, por tanto, se debe rechazar H_0.

71. No, ya que $z = 1.33$ y el valor $P = .0918$

73. No, ya que el valor $P = .2296$

75. $z = .92$, el valor $P = .1788$, por tanto, no se puede concluir que $\mu > 20$.

77. $.01 <$ valor $P < .025$, por tanto, H_0 no se rechaza; no hay contradicción

79. **a.** El estadístico de prueba es $\chi^2 = 2\Sigma X_i/\mu_0$, el valor P = área bajo la curva χ^2_{2n} a la izquierda de la χ^2 calculada.
b. $\chi^2 = 19.65$, valor $P > .10$, por tanto, no se puede rechazar H_0: $\mu = 75$.

Capítulo 9

1. **a.** −.4 h; no depende **b.** .0724, .2691 **c.** No

3. **a.** Sí; valor $P \approx 0 \leq .01$, por tanto, H_0 se rechaza.
b. Valor $P = .0132$, sí en el nivel de significancia .05, pero no al nivel .01.

5. **a.** $z = -2.90$, valor $P = .0019$, por tanto, H_0 se rechaza.
b. .8212 **d.** 66

7. No, ya que el valor de P para la prueba de 2 colas es de .0602.

9. **a.** 6.2; sí **b.** $z = 1.14$, valor $P \approx .25$, no
c. No **d.** Un intervalo de confianza al 95% es (10.0, 21.8).

11. Un intervalo de confianza al 95% es (.99, 2.41).

13. 50

15. **b.** Aumenta.

17. **a.** 17 **b.** 21 **c.** 18 **d.** 26

19. $t = -1.20$, valor $P = .196$, por tanto, H_0 no se rechaza.

21. No; $t = -2.46$, gl = 15, valor $P \approx .013$, por tanto, H_0 no se rechaza (casi).

23. **b.** No **c.** $t = -.38$, valor $P \approx .7$, H_0 no se rechaza.

25. a. Ambos diagramas de probabilidad normal exhiben patrones lineales importantes.
b. El precio promedio de los vinos ≥ 93 parece exceder significativamente el de los vinos ≤ 89.
c. (16.1, 82.0); no, ya que este IC no incluye al 0.

27. a. Intervalo de confianza al 99%: (.33, .71) **b.** Intervalo de confianza al 99%: (−.07, .41), así que 0 es un posible valor de la diferencia.

29. $t = -2.10$, gl = 25, valor $P = .023$ d. Al nivel de significancia .05, concluiríamos que la cola resulta en un promedio de resistencia más alto, pero no al nivel de significancia de .01.

31. a. Centros prácticamente idénticos, sustancialmente más variabilidad en observaciones de rango medio que en observaciones de rango más alto
b. (−7.9, 9.6), con base en 23 grados de libertad; no

33. No, $t = 1.33$, valor $P = .094$, no rechazar H_0

35. $t = -2.2$, gl = 16, valor $P = .021 > .01 = \alpha$, por tanto, H_0 no se rechaza.

37. a. (−.561, −.287) **b.** Entre −1.224 y .376

39. a. Sí.
b. $t = 2.7$, valor $P = .018 < .05 = \alpha$, de modo que se debe rechazar H_0.

41. a. (−3.85, 11.35) **b.** Sí, porque el valor $P = .02$, al nivel de .05 puede parecer que se incrementa, pero no al nivel de .01. **c.** (7.02, 10.06)

43. a. No **b.** −49.01 **c.** 49.1

45. a. Sí, debido al patrón lineal en una gráfica de probabilidad normal. **b.** No, los datos están apareados, no son muestras independientes. **c.** $t = 3.66$, valor $P = .001$ (no .003), misma conclusión.

47. a. Un intervalo de confianza al 95%: (−2.52, 1.05); es posible que sean idénticos
b. El patrón lineal en prueba no pasada implica que la distribución de diferencia en normalidad es posible.

49. $z = 2.84$, valor $P = .0023 \leq .05$, por lo que H_0 puede ser rechazada; la introducción del contexto parece reducir la tasa de respuesta correcta.

51. $z = 3.20$, valor $P = .0007$, por tanto, se puede rechazar H_0 a un nivel de significancia .05, nivel .01, o a incluso nivel .001. Parece que hay un efecto nocebo.

53. a. $z = .80$, valor $P > .05$ entonces no rechazar H_0. **b.** $n = 1211$

55. a. El intervalo de confianza para $\ln(\theta)$ es $\ln(\hat{\theta}) \pm Z_{\alpha/2}[(m - x)/mx) + (n - y)/(ny)]^{1/2}$. Al tomar los antilogaritmos de los límites inferior y superior da un intervalo de confianza para θ misma.
b. (1.43, 2.31); al parecer la aspirina es benéfica.

57. (−.35, .07)

59. a. 3.69 **b.** 4.82 **c.** .207 **d.** .271
e. 4.30 **f.** .212 **g.** .95 **h.** .94

61. $f = .384$, valor $P > .10$; entonces, no rechazar H_0.

63. $f = 2.85 \geq F_{.05,19,22} \approx 2.08$. Puesto que valor $P < .05$, se rechaza H_0; parece que hay más variabilidad en el aumento de peso con la dosis baja.

65. $s_2^2 F_{1-\alpha/2}/s_1^2$, $s_2^2 F_{\alpha/2}/s_1^2$; (.023, 1.99)

67. No. $t = 3.2$, gl = 15, valor $P > .006$ y rechazar H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ usando ya sea $\alpha = .05$ o .01.

69. $z > 0 \Rightarrow$ valor $P > .5$, por tanto, H_0: $p_1 - p_2 = 0$ no puede ser rechazada.

71. (−299.3, 1517.9)

73. Parecen diferir, ya que gl = 14, $t = -5.19$, valor $P = 0$.

75. Sí, $t = 2.25$, gl = 57, valor $P \approx .028$.

77. a. No. $t = -2.84$, gl = 18, valor $P \approx .012$
b. No. $t = -.56$, valor $P \approx .29$

79. $t = 3.9$, valor $P = .004$, por tanto, H_0 es rechazada al nivel .05 o .01.

81. No, ni debe usarse la prueba t de dos muestras, porque una gráfica de probabilidad normal sugiere que la distribución de buena visibilidad no es normal.

83. No agrupado: gl = 15, $t = -1.8$, valor $P \approx .092$
Agrupado: gl = 24, $t = -1.9$, valor $P \approx .070$

85. a. $m = 141$, $n = 47$ **b.** $m = 240$, $n = 160$

87. No, $z = .83$, valor $P \approx .20$

89. .9015, .8264, .0294, .0000; promedios verdaderos de los cuartiles; no

91. Sí; $z = 4.2$, valor $P \approx 0$

93. a. Sí. $t = -6.4$, gl = 57, y valor $P \approx 0$
b. $t = 1.1$, valor $P = .14$ y no rechazar H_0.

95. (−1.29, −.59)

Capítulo 10

1. $f = 2.44$, $F_{.05,4,15} = 3.06$, $F_{.10,4,15} = 2.36$. Así .05 < valor P < .10, de modo que no se rechace H_0.

3. $f = 1.30 < 2.57 = F_{.10,2,21}$ por lo que valor $P > .10$, H_0 no puede ser rechazada a ningún nivel razonable de significancia.

5. $f = 1.73 < 2.51 = F_{.10,2,27}$ por lo que valor $P > .10$, y no parecen diferir los tres grados.

7. $f = 51.3$, valor $P = 0$, así H_0 no puede ser rechazada a ningún nivel razonable de significancia.

9. $f = 3.96$, y $F_{.05,3,20} = 3.10 < 3.96 < 4.94 = F_{.01,3,20}$, así .01 < valor P < .05. Entonces H_0 puede ser rechazada al nivel de significancia .05; parece haber diferencias entre los granos.

11. $w = 36.09$

3	1	4	2	5
437.5	462.0	469.3	512.8	532.1

Las marcas 2 y 5 parecen no diferir, ni parece haber diferencia entre las marcas 1, 3 y 4 pero cada marca del primer grupo parece diferir de manera importante respecto a todas las marcas del segundo grupo.

13.

3	1	4	2	5
427.5	462.0	469.3	502.8	532.1

15.

14.18	17.94	18.00	18.00	25.74	27.67

17. (−.029, .379)

19. Funcionará cualquier valor de la suma de los cuadrados del error (SSE) entre 422.16 y 431.88.

21. **a.** $f = 22.6$, $F_{.001,\,5,\,78} \approx 4.6$, valor $P < .001$, de modo que rechace H_0. **b.** (−99.16, −35.64), (29.34, 94.16)

23.

	1	2	3	4
1	–	2.88 ± 5.81	7.43 ± 5.81	12.78 ± 5.48
2	–	–	4.55 ± 6.13	9.90 ± 5.81
3	–	–	–	5.35 ± 5.81
4	–	–	–	–

4	3	2	1

25. **a.** Normal, varianzas iguales **b.** SSTr = 8.33, SSE = 77.79, $f = 1.7$, H_0 no debe ser rechazada (valor $P > .10$)

27. **a.** $f = 3.75$, $.01 <$ valor $P < .05$, así que las marcas parecen diferir.
b. La normalidad es bastante posible (una gráfica de probabilidad normal de los residuos $x_{ij} - \bar{x}_i$ muestra un patrón lineal).
c. 4 3 2 1 Sólo las marcas 1 y 4 parecen diferir de manera importante.

31. Aproximadamente .62

33. $(\sqrt{x/n})$ arcsen

35. **a.** $.01 <$ valor $P < .05$, así que H_0 no es rechazada.
b. $.029 > .01$ y otra vez H_0 no es rechazada.

37. $f = 8.44 > 6.49 = F_{.001}$, así el valor $P < .001$ y H_0 debe ser rechazada.

5 3 1 4 2

39. El intervalo de confianza es (−.144, .474), que no incluye 0.

41. $2.92 < f = 3.96 < 4.07$, por tanto, $.05 <$ valor $P < .10$ y H_0: $\sigma_A^2 = 0$ no puede ser rechazada.

43. (−3.70, 1.04), (−4.83, −.33), (−3.77, 1.27), (−3.99, .15). Sólo $\mu_1 - \mu_3$ entre estos cuatro contrastes parece diferir de modo importante de cero.

45. Son idénticos.

Capítulo 11

1. **a.** $f_A = 7.16$, $.01 <$ valor $P < .05$, así H_{0A} se rechaza.
b. $f_B = 10.42$, $.01 <$ valor $P < .05$, así H_{0B} se rechaza.

3. **a.** $f_A = 18.77$, valor $P = .023$, $f_B = 21.10$, valor $P = .016$ (del software), así se rechazan tanto H_{0A} como H_{0B} a un nivel de significancia de .05.
b. $Q_{.05,4,3} = 6.825$, $w = .257$; .201 .324 .462 .602

5. $f_A = 2.56$, $F_{.01,3,12} = 5.95$, y parece no haber efecto, debido al ángulo de tirón.

7. **a.** SSA = 22.889, SSB = 27.556, SSE = 5.111, $f_A = 8.96$, $.01 <$ valor $P < .05$ (el software da .033), por tanto, al nivel .05 parece que hay un efecto de marca.
b. $f_B = 10.78$, valor $P = .024$, el bloqueo parece haber sido eficaz.

9.

Causa	gl	SS	MS	f	$F_{.05}$
Tratamientos	3	81.19	27.06	22.4	3.01
Bloques	8	66.50	8.31		
Error	24	29.06	1.21		
Total	35	176.75			

1	4	3	2
8.56	9.22	10.78	12.44

11. El patrón de la gráfica de probabilidad normal es bastante lineal. No hay un patrón discernible en una gráfica de residuos contra valores ajustados.

13. **b.** Cada SS (suma de cuadrados) se multiplica por c^2, pero f_A y f_B no cambian.

15. **a.** Aproximadamente .20, .43 **b.** Aproximadamente .30

17. **a.** $f_A = 3.76$, $f_B = 6.82$, $f_{AB} = .74$ y $F_{.05,2,9} = 4.26$, así que la cantidad de adición de fibra de carbono parece importante.
b. $f_A = 6.54$, $f_B = 5.33$, $f_{AB} = .27$

19. $f_{AB} = 3.18$. Puesto que $F_{.01,10,18} = 3.51$, el valor $P > .01$ para probar H_{0AB}; por tanto, el efecto de la interacción no es importante. $f_A = .94$, valor $P > .10$; $f_B = 9.17$, valor $P < .001$. Así el tipo de granja no parece importante, sino el método de mantenimiento.

21. a, b.

Causa	gl	SS	MS	f
A	2	22 941.80	11 470.90	22.98
B	4	22 765.53	5691.38	5.60
AB	8	3993.87	499.23	.49
Error	15	15 253.50	1016.90	
Total	29	64 954.70		

H_{0A} y H_{0B} son rechazadas.

23.

Causa	gl	SS	MS	f
A	2	11 573.38	5786.69	$\frac{\text{MSA}}{\text{MSAB}} = 26.70$
B	4	17 930.09	4482.52	$\frac{\text{MSB}}{\text{MSE}} = 28.51$
AB	8	1734.17	216.77	$\frac{\text{MSAB}}{\text{MSE}} = 1.38$
Error	30	4716.67	157.22	
Total	44	35 954.31		

Puesto que $F_{.01,8,30} = 3.17$, $F_{.01,2,8} = 8.65$ y $F_{.01,4,30} = 4.02$, y H_{0G} no es rechazada pero H_{0A} y H_{0B} sí son rechazadas.

25. $(-.373, -.033)$

27. a.

Causa	gl	SS	MS	f	$F_{.05}$
A	2	14 144.44	7072.22	61.06	3.35
B	2	5511.27	2755.64	23.79	3.35
C	2	244 696.39	122 348.20	1056.27	3.35
AB	4	1069.62	267.41	2.31	2.73
AC	4	62.67	15.67	.14	2.73
BC	4	331.67	82.92	.72	2.73
ABC	8	1080.77	135.10	1.17	2.31
Error	27	3127.50	115.83		
Total	53	270 024.33			

d. $Q_{.05,3,27} = 3.51$, $w = 8.90$, y los tres niveles difieren entre sí de manera importante.

29. a. $f_{ABC} = 2.87$, valor $P = .029$ para probar H_{0ABC}. Sin embargo, todos los coeficientes de interacción de dos factores F son muy importantes.

31.

Causa	gl	SS	MS	F	P
A	2	124.60	62.30	4.85	0.042
B	2	20.61	10.30	0.80	0.481
C	2	356.95	178.47	13.89	0.002
$A*B$	4	57.49	14.37	1.12	0.412
$A*C$	4	61.39	15.35	1.19	0.383
$B*C$	4	11.06	2.76	0.22	0.923
Error	8	102.78	12.85		
Total	26	734.87			

a. Todos los valores P en la anterior tabla ANOVA para los efectos AB, AC y BC superan considerablemente .1, lo que indica que en cualquier nivel de significancia razonable no se puede rechazar las hipótesis de no interacción de dos factores.

b. A nivel de significancia .05, el efecto principal de *Potencia* es importante (algo más que apenas) y el efecto principal del *espesor de la pasta* es muy importante.

c. $w = 4.83$. Las medias de la muestra para los tres niveles de espesor de pasta son 29.562 (para .4), 35.183 (para .3) y 38.356 (para .2). El nivel 4 se puede juzgar significativamente diferente de los otros dos niveles.

33.

Causa	gl	SS	MS	f
A	6	67.32	11.02	
B	6	51.06	8.51	
C	6	5.43	.91	.61
Error	30	44.26	1.48	
Total	48	168.07		

$F_{.05,6,30} = 2.42$, $f_C = .61$, por tanto, H_{0C} no se rechaza

35.

Causa	gl	SS	MS	f
A	4	28.88	7.22	10.7
B	4	23.70	5.93	8.79
C	4	.62	.155	<1
Error	12	8.10	.675	
Total	24	61.30		

Puesto que $F_{.05,4,12} = 3.26$, A y B son importantes.

37.

Causa	gl	MS	f
A	2	2207.329	2259*
B	1	47.255	48.4*
C	2	491.783	503*
D	1	.044	<1
AB	2	15.303	15.7*
AC	4	275.446	282*
AD	2	.470	<1
BC	2	2.141	2.19
BD	1	.273	<1
CD	2	.247	<1
ABC	4	3.714	3.80
ABD	2	4.072	4.17*
ACD	4	.767	<1
BCD	2	.280	<1
$ABCD$	4	.347	<1
Error	36	.977	
Total	71	93.621	

*Denota un cociente F importante

39. a. $\hat{\beta}_1 = 54.38$, $\hat{\gamma}_{11}^{AC} = -2.21$, $\hat{\gamma}_{21}^{AC} = 2.21$.

b.

Causa	Efecto de contraste	MS	f
A	1307	71 177.04	436.7
B	1305	70 959.34	435.4
C	529	11 660.04	71.54
AB	199	1650.04	10.12
AC	−53	117.04	<1
BC	57	135.38	<1
ABC	27	30.38	<1
Error		162.98	

41.

Causa	gl	SS	MS	F	P
A	1	0.003906	0.003906	25.00	0.001
B	1	0.242556	0.242556	1552.36	0.000
C	1	0.178506	0.178506	1142.44	0.000
$A*B$	1	0.003906	0.003906	25.00	0.001
$A*C$	1	0.002256	0.002256	14.44	0.005
$B*C$	1	0.178506	0.178506	1142.44	0.000
$A*B*C$	1	0.002256	0.002256	14.44	0.005
Error	8	0.001250	0.000156		
Total	15	0.613144			

Todos los efectos son importantes, y en particular el efecto de la interacción de tres factores es importante.

43.

Causa	gl	SS	*f*
A	1	.436	<1
B	1	.099	<1
C	1	.109	<1
D	1	414.12	851
AB	1	.003	<1
AC	1	.078	<1
AD	1	.017	<1
BC	1	1.404	3.62
BD	1	.456	<1
CD	1	2.190	4.50
Error	5	2.434	

$F_{.05,1,5} = 6.61$, de modo que sólo el efecto principal del factor *D* se considera importante.

45. a. 1: (1), *ab, cd, abcd;* 2: *a, b, acd, bcd;* 3: *c, d, abc, abd;* 4: *ac, bc, ad, bd.*

b.

Causa	gl	SS	*f*
A	1	12 403.125	27.18
B	1	92 235.125	202.13
C	1	3.125	0.01
D	1	60.500	0.13
AC	1	10.125	0.02
AD	1	91.125	0.20
BC	1	50.000	0.11
BD	1	420.500	0.92
ABC	1	3.125	0.01
ABD	1	0.500	0.00
ACD	1	200.000	0.44
BCD	1	2.000	0.00
Bloques	7	898.875	0.28
Error	12	5475.750	
Total	31	111 853.875	

$F_{.01,1,12} = 9.33$, así que sólo los principales efectos de *A* y *B* son importantes.

47. a. *ABFG;* (1), *ab, cd, ce, de, fg, acf, adf, adg, aef, acg, aeg, bcg, bcf, bdf, bdg, bef, beg, abcd, abce, abde, abfg, cdfg, cefg, defg, acdef, acdeg, bcdef, bcdeg, abcdfg, abcefg, abdefg.* {*A, BCDE, ACDEFG, BFG*}, {*B, ACDE, BCDEFG, AFG*}, {*C, ABDE, DEFG, ABCFG*}, {*D, ABCE, CEFG, ABDFG*}, {*E, ABCD, CDFG, ABEFG*}, {*F, ABCDEF, CDEG, ABG*}, {*G, ABCDEG, CDEF, ABF*}. **b.** 1: (1), *aef, beg, abcd, abfg, cdfg, acdeg, bcdef;* 2: *ab, cd, fg, aeg, bef, acdef, bcdeg, abcdfg;* 3: *de, acg, adf, bcf, bdg, abce, cefg, abdefg;* 4: *ce, acf, adg, bcg, bdf, abde, defg, abcefg.*

49. SSA = 2.250, SSB = 7.840, SSC = .360, SSD = 52.563, SSE = 10.240, SSAB = 1.563, SSAC = 7.563, SSAD = .090, SSAE = 4.203, SSBC = 2.103, SSBD = .010, SSBE = .123, SSCD = .010, SSCE = .063, SSDE = 4.840. Error SS = suma de las SS de dos factores = 20.568, Error MS = 2.057, $F_{.01,1,10} = 10.04$, así que sólo el efecto principal de *D* es importante.

51.

Causa	gl	SS	MS	*f*
Efectos principales de *A*	1	322.667	322.667	980.38
Efectos principales de *B*	3	35.623	11.874	36.08
Interacción	3	8.557	2.852	8.67
Error	16	5.266	0.329	
Total	23	372.113		

$F_{.05,3,16} = 3.24$, por lo que parecen estar presentes las interacciones.

53.

Causa	gl	SS	MS	*f*
A	1	30.25	30.25	6.72
B	1	144.00	144.00	32.00
C	1	12.25	12.25	2.72
AB	1	1122.25	1122.25	249.39
AC	1	1.00	1.00	.22
BC	1	12.25	12.25	2.72
ABC	1	16.00	16.00	3.56
Error	4	36.00	4.50	
Total	7			

Sólo el efecto principal para *B* y el efecto de interacción *AB* son importantes en $\alpha = .01$.

55. a. $\hat{\alpha}_1 = 9.00$, $\hat{\beta}_1 = 2.25$, $\hat{\delta}_1 = 17.00$, $\hat{\gamma}_1 = 21.00$,
$(\hat{\alpha\beta})_{11} = 0$, $(\hat{\alpha\delta})_{11} = 2.00$, $(\hat{\alpha\gamma})_{11} = 2.75$,
$(\hat{\beta\delta})_{11} = .75$, $(\hat{\beta\gamma})_{11} = .50$, $(\hat{\delta\gamma})_{11} = 4.50$

b. Una gráfica de probabilidad normal sugiere que los efectos principales *A, C* y *D* son bastante importantes, y quizá la interacción *CD*. De hecho, agrupar las 4 interacciones SS de tres factores y la interacción SS de cuatro factores, para obtener una SSE basada en 5 grados de libertad, y luego construir una tabla ANOVA sugiere que estos son los efectos más importantes.

57.

Causa	DF	SS	MS	*F*	*P*
A	2	34436	17218	436.92	0.000
B	2	105793	52897	1342.30	0.000
C	2	516398	258199	6552.04	0.000
*A*B*	4	6868	1717	43.57	0.000
*A*C*	4	10922	2731	69.29	0.000
*B*C*	4	10178	2545	64.57	0.000
*A*B*C*	8	6713	839	21.30	0.000
Error	27	1064	39		

Obviamente todos los efectos son muy importantes

59. Con base en los valores *P* de la tabla ANOVA, los factores estadísticamente significativos al nivel $\alpha = .01$ son tipo adhesivo y tiempo de cura. El material del conductor no tiene un efecto estadísticamente significativo en la resistencia a la adherencia. No hay más interacciones significativas.

61.

Causa	gl	SS	MS	*f*
A	4	285.76	71.44	.594
B	4	227.76	56.94	.473
C	4	2867.76	716.94	5.958
D	4	5536.56	1384.14	11.502
Error	8	962.72	120.34	$F_{.05,4,8} = 3.84$
Total	24			

H_{0A} y H_{0B} no pueden ser rechazadas, mientras que H_{0C} y H_{0D} son rechazadas.

Capítulo 12

1. a. Las tablas siguientes están basadas en la repetición, cinco veces, de cada uno de los valores de tallo (una vez para las hojas 0 y 1, una segunda vez para las hojas 2 y 3, etc.).

17	0
17	2 3
17	4 4 5
17	6 7
17	
18	0 0 0 0 0 1 1
18	2 2 2 2
18	4 4 5
18	6
18	8

tallo: centenas y decenas
hoja: unidades

No hay valores atípicos, ni brechas significativas y la distribución casi tiene forma de campana con un grado razonablemente alto de concentración alrededor de su centro, en aproximadamente 180.

0	8 8 9
1	0 0 0 0
1	3
1	4 4 4 4
1	6 6
1	8 8 8 9
2	1 1
2	
2	5
2	6
2	
3	0 0

tallo: unidades
hoja: decenas

Un valor típico es alrededor de 1.6 y hay una cantidad razonable de dispersión alrededor de este valor. La distribución es un tanto asimétrica hacia valores grandes, los dos más grandes de los cuales pueden ser candidatos para ser valores atípicos.

b. No, porque las observaciones con valores x idénticos tienen valores y diferentes.

c. No, porque los puntos no parecen caer en absoluto cerca de una recta o curva simple.

3. Sí. Sí.

5. b. Sí.

c. Parece haber una relación cuadrática aproximada (los puntos se encuentran cerca de una parábola).

7. a. 5050 **b.** 1.3 **c.** 130 **d.** −130

9. a. .095 **b.** −.475 **c.** .830, 1.305
d. .4207, .3446 **e.** .0036

11. a. −.01, −.10 **b.** 3.00, 2.50

13. Sí, porque $r^2 = .972$.

15. a.

2	9
3	3 3 5 5 6 6 6 7 7 8 8 9
4	1 2 2 3 5 6 6 8 9
5	1
6	2 9
7	9
8	0

Valor típico en los 40 bajos, cantidad razonable de variabilidad, asimetría positiva, dos valores apartados potenciales.

b. No

c. $y = 3.2925 + .10748x = 7.59$. No; riesgo de extrapolación

d. 18.736, 71.605, .738, sí

17. a. $118.91 - .905x$; sí. **b.** Estimamos que la disminución esperada en la porosidad, asociada con un incremento de 1-pcf por unidad de peso es .905%. **c.** Predicción negativa, ya que y no puede ser negativa. **d.** −.52, .49 **e.** .938, aproximadamente el tamaño de una desviación típica de una recta de regresión. **f.** .974

19. a. $y = -45.5519 + 1.7114x$ **b.** 339.51
c. −85.57 **d.** Las $\hat{y}_i$ son 125.6, 168.4, 168.4, 211.1, 211.1, 296.7, 296.7, 382.3, 382.3, 467.9, 467.9, 553.4, 639.0, 639.0; una recta de 45° que pasa por (0, 0).

21. a. Sí; $r^2 = .985$ **b.** 368.89 **c.** 368.89

23. a. 16 213.64; 16 205.45 **b.** 414 235.71; sí, porque $r^2 = .961$.

27. $\hat{\beta}_1 = \Sigma x_i Y_i / \Sigma x_i^2$

29.

Conjunto de datos	r^2	s
1	.43	4.03
2	.99	4.03
3	.99	1.90

Más eficaz: conjunto 3

Menos eficaz: conjunto 1

31. a. .893 **b.** .01837 **c.** (−.216, −.136)

33. a. (.081, .133) **b.** H_a: $\beta_1 > .1$, valor $P = .277$, no

35. a. (.63, 2.44) es un intervalo de confianza al 95%.

b. Sí. $t \approx 3.6$, valor $P \approx .004$

c. No; extrapolación

d. (.54, 2.82), no

37. a. Sí. $t = 7.99$, valor $P \approx 0$. [*Nota:* Hay un valor atípico moderado, de modo que la gráfica de probabilidad normal resultante no es del todo satisfactoria.]

b. Sí. $t = -5.8$, valor $P \approx 0$, así se rechaza H_0: $\beta_1 = 1$ en favor de H_a: $\beta_1 < 1$

39. $f = 71.97$, $s_{\hat{\beta}_1} = .004837$, $t = 8.48$, valor $P = .000$

43. $d = 1.20$, gl = 13 y $\beta \approx .1$.

45. a. (77.80, 78.38)

b. (76.90, 79.28), mismo centro pero más ancho

c. más ancho, porque 115 está más lejos que $\bar{x}$

d. $t = -11$, valor $P = 0$

47. **a.** IP de 95% es (20.21, 43.69), no
b. (28.53, 51.92), al menos 90%

49. (431.3, 628.5)

51. **a.** 45 es más cercano a $\bar{x} = 45.18$ **b.** (46.28, 46.78)
c. (47.56, 49.84)

53. a) más angosto que b), c) más angosto que d), a) más angosto que c), b) más angosto que d)

57. Si, por ejemplo, 18 es la edad mínima de elegibilidad, entonces para casi todos $y \approx x - 18$.

59. **a.** .966
b. El porcentaje en peso de fibra seca para el primer espécimen tiende a ser más grande que para el segundo.
c. Sin cambio **d.** 93.3%
e. $t = 14.9$, valor $P \approx 0$, de modo que parece haber esa relación.

61. **a.** $r = .748$, $t = 3.9$, valor $P = .001$. Usando, ya sea $\alpha = .05$ o .01, sí.
b. .560 (56%), igual

63. $r = .773$, pero $t = 2.44$, valor $P \approx .07$; así que H_0: $\rho = 0$ no puede ser rechazada.

65. **a.** .481
b. $t = 1.98$, valor $P = .07$, por lo que a nivel de .01, no hay asociación lineal. **c.** En el nivel de .01, no hay asociación lineal positiva, pero a nivel de .05, la asociación lineal parece ser positiva.

67. **a.** Rechazar H_0
b. No. Valor $P = .00032 \Rightarrow z \approx 3.6 \Rightarrow r \approx .16$, que indica sólo una relación débil.
c. Sí, pero muy grande $n \Rightarrow p \approx .022$, y no hay significado práctico.

69. **a.** Un intervalo de confianza al 95%: (.888, 1.086)
b. Un intervalo de confianza al 95%: (47.730, 49.172)
c. IP al 95%: (45.378, 51.524)
d. Más angosto para $x = 25$, por tanto, 25 es más cercano a $\bar{x}$
e. .981

71. **a.** 16.0593, .1925 **b.** $t = 54.15$, valor $P = 0$
c. $\bar{x} = .408$ y .2 está más lejos de esto que lo que está .4.
d. (6.41, 6.82) **e.** (5.96, 7.27)

73. **a.** .507 **b.** .712 **c.** Valor $P = .0013 < .01 = \alpha$, así H_0:$\beta_1 = 0$ se rechaza y se concluye que hay una relación lineal útil.
d. Un intervalo de confianza al 95% es (1.056, 1.275).
e. 1.0143, .2143

75. **a.** $y = 1.69 + .0805x$ **b.** $y = -20.40 + 12.2254x$
c. .984 para ambas regresiones.

77. **a.** Sí, los puntos se encuentran muy cerca de una línea recta
b. .996 **c.** Sí, $t = 54.6$, valor $P = 0$.
d. IP 95%: (3.17, 4.57)
e. $t = 54.6$, valor $P = 0$

81. **b.** .573

87. $t = -1.14$, y es posible que $\beta_1 = \gamma_1$.

Capítulo 13

1. **a.** 6.32, 8.37, 8.94, 8.37 y 6.32 **b.** 7.87, 8.49, 8.83, 8.94, y 2.83 **c.** Es probable que la desviación sea mucho menor para los valores x del inciso b).

3. **a.** Sí. **b.** −.31, −.31, .48, 1.23, −1.15, .35, −.10, −1.39, .82, −.16, .62, .09, 1.17, −1.50, .96, .02, .65, −2.16, −.79, 1.74. Aquí e/e^* varía entre .57 y .65, así que e^* es cercano a e/s.
c. No.

5. **a.** Alrededor de 98% de variación observada en grosor está explicada por la relación.
b. Una relación no lineal.

7. **a.** .776 **b.** quizá no, debido a la curvatura.
c. Curvatura sustancial en lugar de un patrón lineal implica que el modelo lineal es inadecuado. Una parábola (regresión cuadrática) proporciona un significativo mejor ajuste.

9. Para el conjunto 1, la regresión lineal simple es apropiada. Una regresión cuadrática es razonable para el conjunto 2. En el conjunto 3, (13, 12.74) parece muy inconsistente con la información restante. La pendiente estimada para el conjunto 4 depende principalmente de la observación simple (19, 12.5), y la evidencia para una relación lineal no es obligatoria.

11. **c.** $V(\hat{Y}_i)$ aumenta, y $V(Y_i - \hat{Y}_i)$ disminuye.

13. t con $n - 2$ grados de libertad; .02

15. **a.** Un patrón curvo **b.** Un patrón lineal
c. $Y = \alpha x^{\beta} \cdot \epsilon$ **d.** Un IP al 95% es (3.06, 6.50).
e. Un residuo estandarizado, correspondiente a la tercera observación, es un poco grande. Sólo hay dos residuos estandarizados positivos, pero otros dos son 0 en esencia. Los patrones de una gráfica de residuo estandarizado y una gráfica de probabilidad normal son marginalmente aceptables.

17. **a.** $\Sigma x_i' = 15.501$, $\Sigma y_i' = 13.352$, $\Sigma (x_i')^2 = 20.228$, $\Sigma x_i' y_i' = 18.109$, $\Sigma (y_i')^2 = 16.572$, $\hat{\beta}_1 = 1.254$, $\hat{\beta}_0 = -.468$, $\hat{\alpha} = .626$, $\hat{\beta} = 1.254$ **c.** $t = -1.02$, por lo que H_0 no se rechaza. **d.** H_0: $\beta = 1$, $t = 3.28$, por lo que H_0 se rechaza.

19. **a.** No **b.** $Y' = \beta_0 + \beta_1 \cdot (1/t) + \epsilon'$, donde $Y' = \ln(Y)$, así $Y = \alpha e^{\beta/t} \cdot \epsilon$. **c.** $\hat{\beta} = \hat{\beta}_1 = 3735.45$, $\hat{\beta}_0 = -10.2045$ $\hat{\alpha} = (3.70034) \cdot (10^{-5})$, $\hat{y}' = 6.7748$, $\hat{y} = 875.5$.
d. SSE = 1.39587, SSPE = 1.36594 (usando valores transformados), $f = .33$, valor $P > .1$, por lo que no se rechaza H_0.

21. **a.** Apertura parabólica descendente
b. Muy cerca de 1
c. (83.89, 87.33)

23. Para un modelo exponencial, $V(Y|x) = \alpha^2 e^{2\beta x}\sigma^2$, que depende de x. Un resultado similar se cumple para el modelo de potencia.

25. La razón z para β_1 es muy importante, indica que la probabilidad de que un nivel sea aceptable disminuye conforme el nivel aumenta. Estimamos que para cada incremento de 1 dBA en el nivel de ruido, la probabilidad de aceptación disminuye por un factor de .70.

27. **b.** 52.88, .12 **c.** .895 **d.** No
e. (48.54, 57.22) **f.** (42.85, 62.91)

29. **a.** SSE = 16.8, $s = 2.048$ **b.** $R^2 = .995$ **c.** Sí $t = -6.55$, valor $P = .003$ (de Minitab) **d.** 98% de niveles de confianza individuales $\Rightarrow$ nivel de confianza conjunta $\geq$ 96%: (.671, 3.706), (−.00498, −.00135)
e. (69.531, 76.186), (66.271, 79.446), usando software

31. **a.** .980
b. .747, mucho menor que .977 para el modelo cúbico.
c. Sí, puesto que valor $P = 0$.
d. (6.31, 6.57), (6.06, 6.81)
e. $t = -5.6$, valor $P = 0$

33. **a.** .9671, .9407
b. $.0000492x^3 - .000446058x^2 + .007290688x + .96034944$
c. $t = 2 < 3.182 = t_{.025,\,3}$, de modo que el término cúbico debe eliminarse. **d.** Idénticos
e. .987, .994, sí

35. $\hat{y} = 7.6883e^{.1799x - .0022x^2}$

37. **a.** 4.9 **b.** Cuando el número de entregas se mantiene fijo, el promedio de cambio en tiempo de viaje asociado con un aumento de 1 milla en distancia recorrida es de .060 horas. Cuando la distancia recorrida se mantiene fija, el promedio de cambio en tiempo de viaje asociado con una entrega extra es de .900 horas. **c.** .9861

39. **a.** 77.3 **b.** 40.4

41. **a.** $f = 475$, y el valor $P = 0$. **b.** 20 826.14
d. (−6694.020, −5895.438) **e.** $t = 2.59$, valor $P = .01$, conserva x_2 en el modelo.

43. **a.** 48.31, 3.69 **b.** No. Si x_1 aumenta, deben cambiar x_3 o x_2.
c. Sí, porque $f = 18.924$, valor $P = .001$. **d.** Sí, usando $\alpha = .01$, porque $t = 3.496$ y valor $P = .003$.

45. **a.** $f = 87.6$, valor $P = 0$, parece ser una relación lineal útil entre y y al menos uno de los predictores. **b.** .935 **c.** (9.095, 11.087)

47. **b.** Valor $P = .000$, así que concluya que el modelo es útil.
c. Valor $P = .034 \leq .05 = \alpha$, y rechace H_0: $\beta_3 = 0$; el % de basura parece dar información adicional útil.
d. (1479.8, 1531.1), precisión razonable
e. Un IP al 95% es (1435.7, 1575.2).

49. **a.** $f = 17.31$, valor $P = .000$, se confirma la utilidad del modelo.
b. $t = 3.96$, valor $P = .002$, retiene el predictor de interacción.
c. (5.73, 8.17) **d.** (2.97, 10.93).

51. **a.** $t = .30$, valor $P = .777$, así x_3 se elimina.
b. $f = 15.29$, $.001 <$ valor $P < .01$, así se confirma la utilidad del modelo a un nivel de significancia de .05.
c. (−.01180, −.00174) **d.** (2.93, 3.81) **e.** Una gráfica de probabilidad normal de e^* es bastante recta, y las gráficas de e^* contra x_1 y e^* contra x_2 no muestran ningún patrón discernible.

55. **a.** $f = 6.40$, $.01 <$ valor $P < .05$, por tanto, a un nivel de significancia de .05 se confirma la utilidad del modelo. **b.** No. Puesto que valor $P = .510$, H_0: $\beta_3 = 0$ no puede rechazarse.
c. $t = 4.69$, valor $P = .001$, así se confirma la utilidad del modelo. **d.** Se debe ajustar a un modelo no lineal. **e.** $f = 20.36$, valor $P < .001$, se confirma la utilidad del modelo; (30.81, 36.97).

57.

k	R^2	R^2 ajustado	C_k
1	.676	.647	138.2
2	.979	.975	2.7
3	.9819	.976	3.2
4	.9824		4

a. El modelo con $k = 2$ **b.** No

59. **a.** El modelo con predictores x_1, x_3 y x_5.

61. No. Todos los valores de R^2 son mucho menores que .9.

63. El impacto de estas dos observaciones debe investigarse más a fondo. No va. La eliminación de la observación #6 seguida de regresión también debe considerarse.

65. **a.** Las dos distribuciones tienen cantidades similares de variabilidad, son razonablemente simétricas y no contienen valores atípicos. La diferencia principal es que la mediana de los valores de primer orden es de unos 840, en tanto que es de alrededor de 480 para valores no de primer orden. Un intervalo de confianza de 95% t para la diferencia entre medias es (132, 557).
b. $r^2 = .577$ para el modelo de regresión lineal simple, valor P para utilidad de modelo = 0, ¡pero un residuo estandarizado es −4.11! Incluir un indicador para grieta y no grieta no mejora el ajuste, como tampoco incluir un indicador y un pronosticador de interacción.

67. **a.** Cuando el género, peso y ritmo cardiaco se mantienen fijos, estimamos que el cambio promedio en VO_2máx asociado con un aumento de 1 minuto en tiempo de caminata es de −.0996.
b. Cuando el peso, tiempo de caminata y ritmo cardiaco se mantienen fijos, la estimación del promedio de diferencia entre VO_2máx para hombres y mujeres es de .6566. **c.** 3.669, −.519
d. .706 **e.** $f = 9.0$, valor $P < .001$, de manera que parece ser una relación útil.

69. **a.** No. Hay curvatura suficiente en la gráfica de dispersión.
b. La regresión cúbica da $R^2 = .998$ y un intervalo de predicción de 95% de (261.98, 295.62), y el pronosticador cúbico parecen ser importantes (valor $P = .001$). Una regresión de y contra $\ln(x)$ tiene $r^2 = .991$, pero hay un residuo estandarizado muy grande y el diagrama residual estandarizado no es satisfactorio.

71. **a.** $R^2 = .802$, $f = 21.03$, valor $P = .000$. El pH es un candidato para eliminación. Nótese que hay un residuo estandarizado extremadamente grande.
b. $R^2 = .920$, R^2 ajustado = .774, $f = 6.29$, valor $P = .002$
c. $f = 1.08$, valor $P > .10$, no rechazar $H_0 = \beta_6 = \cdots = \beta_{20} = 0$. El grupo de predictores de segundo orden no parece ser útil.

d. $R^2 = .871$, $f = 28.50$, valor $P = .000$ y ahora los seis predictores son considerados importantes (el máximo valor P para cualquier cociente t es .016); la importancia de pH^2 estaba enmascarada en la prueba de c). Nótese que hay dos residuos estandarizados más bien grandes.

73. **a.** $f = 1783$, de modo que el modelo parece ser útil.
b. $t = -48.1$, por lo que incluso al nivel .001 el pronosticador cuadrático debe retenerse.
c. No **d.** (21.07, 21.65) **e.** (20.67, 22.05)

75. **a.** $f = 30.8$, y el modelo parece ser útil.
b. $t = -7.69$ y valor $P < .001$, y retenga el pronosticador cuadrático. **c.** (44.01, 47.91)

77. **a.** Al nivel de significancia .05, sí, ya que $f = 4.06$ y valor $P = .029$. **b.** Sí, porque $f = 20.1$ y $F_{.05,3,12} = 3.49$. La prueba F reducida completa de F no puede ser utilizada, ya que los predictores en este modelo no son un subconjunto de los del inciso a).

79. Hay varias opciones razonables en cada caso.

81. **a.** $f = 106$, valor $P \approx 0$ **b.** (.014, .068) **c.** $t = 5.9$, rechazar H_0: $\beta_4 = 0$, el porcentaje de no blancos parece ser importante.
d. 99.514, $y - \hat{y} = 3.486$

83. **a.** Estimaciones de α, β_1 y β_2 son 52 912.77, −1.2060 y −1.3988, respectivamente. **b.** $R^2 = .782$, $f = 42.95$, valor $P = 0$
c. valores P para probar H_0: $\beta_1 = 0$ y H_0: $\beta_2 = 0$ son ambos 0
d. Un IP 95% es (14.18, 174.51)

Capítulo 14

1. **a.** Rechazar H_0. **b.** No rechazar H_0.
c. No rechazar H_0. **d.** No rechazar H_0.

3. $\chi^2 = 4.80$, valor $P > .10$ por tanto, H_0 no se rechaza.

5. $\chi^2 = 6.61$, valor $P > .10$ por tanto, H_0 no se rechaza.

7. $\chi^2 = 4.03$, valor $P >$, .10 por tanto, H_0 no se rechaza.

9. **a.** [0, .2231), [.2231, .5108), [.5108, .9163), [.9163, 1.6094) y [1.6094, ∞) **b.** $\chi^2 = 1.25$, valor $P > .10$ de modo que la distribución exponencial especificada es bastante posible.

11. **a.** (−∞, −.97), [−.97, −.43), [−.43, 0), 0, .43), [.43, .97), y [.97, ∞] **b.** (−∞, .49806), [.49806, .49914), [.49914, .5), [.5, .50086), [.50086, .50194) y [.50194, ∞) **c.** $\chi^2 = 5.53$, $\chi^2_{10,5} = 9.236$, por lo que valor $P > .10$, y la distribución normal especificada es factible.

13. $\hat{p} = .0843$, $\chi^2 = 280.3$, valor $P < .001$, por tanto, el modelo da un mal ajuste.

15. La probabilidad es proporcional a $\theta^{233}(1 - \theta)^{367}$, de donde $\hat{\theta} = .3883$. Las cantidades esperadas estimadas son 21.00, 53.33, 50.78, 21.50 y 3.41. Combinando las celdas 4 y 5, $\chi^2 = 1.62$, por lo que no se rechaza H_0.

17. $\hat{\mu} = 3.88$, las cantidades esperadas estimadas son 6.2, 24.0, 46.6, 60.3, 58.5 45.4, 29.4, 16.3 y 13.3 de las cuales $\chi^2 = 7.8$, valor $P > .10$, por tanto, la distribución de Poisson da un buen ajuste.

19. $\hat{\theta}_1 = (2n_1 + n_3 + n_5)/2n = .4275$, $\hat{\theta}_2 = .2750$, $\chi^2 = 29.1$, valor $P < .001$, por tanto, H_0 se rechaza.

21. Sí. La hipótesis nula de una distribución poblacional normal no se puede rechazar.

23. Minitab da $r = .967$, y puesto que $c_{.10} = .9707$ y $c_{.05} = .9639$, .05 < valor $P < .10$. Usando $\alpha = .05$, la normalidad se considera posible.

25. $\chi^2 = 212.9$, gl = 6, valor $P = 0$, parece que hay una asociación debido a que las personas más jóvenes tienden a beber más.

27. Sí. $\chi^2 = 44.98$ y valor $P < .001$.

29. **a.** Sí, puesto que $\chi^2 = 213.2$, valor $P = 0$. **b.** No a cualquier nivel de significancia, ya que $\chi^2 = 3.1$, valor $P > .10$.

31. **a.** Sí. M: .26, .25, .29, .20: F: .11, .18, .34, .37
b. Rechace H_0 al nivel de significancia .05 o .01, ya que $\chi^2 = 14.46$, por tanto, .001 < valor $P < .005$.

35. $N_{ij.}/n$, $n_k N_{ij.}/n$, 24

37. $\chi^2 = 3.65$, valor $P > .10$, por tanto, H_0 no se puede rechazar.

39. **b.** No. Ya que valor $P = .023$, la hipótesis nula de no asociación no se puede rechazar a un nivel de significancia de 01 (pero se rechazaría a un nivel de .05).

41. $\chi^2 = 22.4$ y el valor $P < .001$, por tanto, se rechaza la hipótesis nula de independencia.

43. Valor $P = 0$, y se rechaza la hipótesis nula de homogeneidad.

47. **a.** Valor del estadístico de prueba = 19.2, valor $P = 0$
b. Evidencia de una relación débil en el mejor de los casos; valor estadístico de prueba = −2.13
c. Valor estadístico de prueba = −.98, valor $P > .10$
d. Valor estadístico de prueba = 3.3, .01 < valor $P < .05$

49. ¡La combinación de 6 y 7 en una sola categoría, y 8 y 9 en otra da una prueba basada en 6 gl para la cual $\chi^2 = .92$ y el valor $P = .9$!

Capítulo 15

1. **a.** valor $P = .102$ **b.** $.026 <$ valor $P < .046$ **c.** $.055 <$ valor $P < .102$ **d.** valor $P = .05$ **e.** $z = 3.7$, valor $P \approx 0$.

3. $s_+ = 18$, $.02 <$ valor $P < .05$, por tanto, H_0 se rechaza.

5. $s_+ = 72$, valor $P < .01$, por tanto, H_0 se rechaza.

7. $s_+ = 424$, $z = 2.56$, valor $P \approx .0052$, por tanto, H_0 se rechaza.

9.

d	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$p(d)$	$\frac{1}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{1}{24}$

Valor $P = .167$

11. $w = 38$, $.008 <$ valor $P < .028$, por lo que H_0 se rechaza.

13. $w = 25$, valor $P > .053$, por tanto, H_0 no se rechaza.

15. $w = 39$ valor $P = .027$, por tanto, H_0 se rechaza a un nivel de significancia de .05.

17. $(\bar{x}_{(5)}, \bar{x}_{(32)}) = (11.15, 23.80)$

19. $(-.585, .025)$

21. $(d_{ij(5)}, d_{ij(21)}) = (16, 87)$

23. $k = 14.06$, $.001 <$ valor $P < .005$, por tanto, H_0 se rechaza.

25. $k = 9.23$, valor $P \approx .01$, por tanto, H_0 se rechaza.

27. $f_r = 2.60$, valor $P > .01$, por tanto, H_0 no se rechaza.

29. $f_r = 9.62$, $.02 <$ valor $P < .025$, por tanto, H_0 se rechaza a un nivel de significancia de .05.

31. $(-5.9, -3.8)$

33. **a.** .021 **b.** $y = 12$, valor $P = .252$, por tanto, H_0 no se puede rechazar.

35. $w' = 26$, valor $P > .056$, por tanto, H_0 no se puede rechazar.

Capítulo 16

1. Todos los puntos de la gráfica se encuentran entre los límites de control.

3. .9802, .9512, 53

5. **a.** 1.67, .67 **b.** 1, .67 **c.** $C_{pk} \leq C_p$, = cuando $\mu = (\text{USL} + \text{LSL})/2$

7. **a.** .0301 **b.** .2236 **c.** .6808

9. LCL = 12.20, UCL = 13.70. No.

11. LCL = 94.91, UCL = 98.17. Parece haber un problema el día 22.

13. **a.** 200 **b.** 4.78 **c.** 384.62 (mayor), 6.30 (menor)

15. LCL = 12.37, UCL = 13.53

17. **a.** LCL = 0, UCL = 6.48 **b.** LCL = .48, UCL = 6.60

19. LCL = .045, UCL = 2.484. Sí, porque todos los puntos están dentro de los límites de control.

21. **a.** LCL = .105, UCL = .357 **b.** Sí, porque .39 > UCL.

23. $\bar{p} > 3/53$

25. LCL = 0, UCL = 10.1

27. Cuando el área = 6, LCL = 0 y UCL = 14.6; cuando el área = .8, LCL = 0 y UCL = 13.4; cuando el área = 1.0, LCL = 0 y UCL = 12.6

29.

l:	1	2	3	4	5	6	7	8
d_l:	0	.001	.017	0	0	.010	0	0
e_l:	0	0	0	.038	0	0	0	.054
l:	9	10	11	12	13	14	15	
d_l:	0	.024	.003	0	0	0	.005	
e_l:	0	0	0	.015	0	0	0	

No hay señales fuera de control.

31. $n = 5$, $h = .00626$

33. Las probabilidades hipergeométricas (calculadas en una calculadora HP21S) son .9919, .9317, .8182, .6775, .5343, .4047, .2964, .2110, .1464 y .0994, mientras que las correspondientes probabilidades binomiales son .9862, .9216, .8108, .6767, .5405, .4162, .3108, .2260, .1605 y .1117. La aproximación es satisfactoria.

35. .9206, .6767, .4198, .2321, .1183; el plan con $n = 100$, $c = 2$ es preferible.

37. .9981, .5968 y .0688

39. **a.** .010, .018, .024, .027, .027, .025, .022, .018, .014, .011 **b.** .0477, .0274 **c.** 77.3, 202.1, 418.6, 679.9, 945.1, 1188.8, 1393.6, 1559.3, 1686.1, 1781.6

41. La gráfica $\bar{X}$ basada en las desviaciones estándar muestrales: LCL = 402.42, UCL = 442.20. La gráfica $\bar{X}$ basada en los rangos muestrales: LCL = 402.36, UCL = 442.26. Gráfica S: LCL = .55, UCL = 30.37. La gráfica R: LCL = 0, UCL = 82.75.

43. Gráfica S: LCL = 0, UCL = 2.3020; puesto que $s_{21} = 2.931 >$ UCL, el proceso parece estar fuera de control en este momento. Debido a que está identificada una causa asignable, se recalculan los límites después de la eliminación: para una gráfica S, LCL = 0 y UCL = 2.0529; para la gráfica $\bar{X}$, LCL = 48.583 y UCL = 51.707. Todos los puntos en ambas gráficas están entre los límites de control.

45. $\bar{\bar{x}} = 430.65$, $s = 24.2905$; para una gráfica S, UCL = 62.43 cuando $n = 3$ y UCL = 55.11 cuando $n = 4$; para una gráfica $\bar{X}$, LCL = 383.16 y UCL = 478.14 cuando $n = 3$ y LCL = 391.09 y UCL = 470.21 cuando $n = 4$.

Glosario de símbolos y abreviaturas

Símbolo/ abreviatura	Página	Descripción
n	13	tamaño de muestra
x	13	variable en la que se hacen las observaciones
$x_1, x_2, \ldots, x_n$	13	observaciones muestrales en x
$\sum_{i=1}^{n} x_i$	30	suma de $x_1, x_2, \ldots, x_n$
$\bar{x}$	29	media muestral
μ	30	media poblacional
N	29	tamaño de la población cuando la población es finita
$\tilde{x}$	31	mediana muestral
$\tilde{\mu}$	32	mediana poblacional
$\bar{x}_{tr}$	33	media recortada
x/n	34	proporción de la muestra
s^2	37	varianza de la muestra
s	37	desviación estándar de la muestra
σ^2, σ	38	varianza poblacional y desviación estándar
$n - 1$	39	grados de libertad para una sola muestra
S_{xx}	39	suma del cuadrado de las desviaciones de la media muestral
f_s	40	dispersión de los cuartos muestrales
$\mathcal{S}$	53	espacio muestral de un experimento
$A, B, C_1, C_2, \ldots$	54	varios eventos
A'	55	complemento del evento A
$A \cup B$	55	unión de los eventos A y B
$A \cap B$	55	intersección de los eventos A y B
$\varnothing$	56	evento nulo (evento que no contiene resultados)
$P(A)$	58	probabilidad del evento A
N	63	número de resultados igualmente probables
$N(A)$	64	número de resultados en el evento A
n_1, n_2	69	número de maneras de seleccionar el 1er. (2o.) elemento de un par ordenado
$P_{k,n}$	70	número de permutaciones de tamaño k a partir de n entidades distintas
$\binom{n}{k}$	71	número de combinaciones de tamaño k a partir de n entidades distintas
$P(A\|B)$	75	probabilidad condicional de A dado que ocurre B
va	96	variable aleatoria
X	96	una variable aleatoria
$X(s)$	96	valor de la va X asociada con el resultado s
x	96	valor particular de va x
$p(x)$	99	distribución de probabilidad (función masa) de una va X discreta
fmp	100	función de masa de probabilidad
$p(x; \alpha)$	103	$F(x)$ fmp con parámetro α
$F(x)$	104	función de distribución acumulada de una va
fda	104	función de distribución acumulada
$a-$	106	posible valor X más grande menor que a
$E(X), \mu_X, \mu$	110	media o valor esperado de la va X
$E[h(X)]$	112	valor esperado de la función $h(X)$
$V(X), \sigma_X^2, \sigma^2$	114	varianza de la va X
σ_X, σ	114	desviación estándar de la va X
S, F	118	éxito/fracaso en un ensayo simple de un experimento binomial
n	118	número de intentos en un experimento binomial
p	118	probabilidad de éxito en un intento sencillo de un experimento
$X \sim \text{Bin}(n, p)$	120	la va X tiene una distribución binomial con parámetros n y p

Símbolo/ abreviatura	Página	Descripción
$b(x; n, p)$	120	fmp binomial con parámetros n y p
$B(x; n, p)$	121	función de distribución acumulada de una va binomial
M	126	número de éxitos en una población dicotómica de tamaño N
$h(x; n, M, N)$	126	fmp hipergeométrica con parámetros n, M y N
r	129	número de éxitos deseados en un experimento binomial negativo
$nb(x; r, p)$	129	fmp binomial negativa con parámetros r and p
μ	131	parámetro de una distribución de Poisson
$p(x; \mu)$	131	fmp de Poisson
$F(x; \mu)$	132	fda de Poisson
Δt	134	longitud de un intervalo corto de tiempo
$o(\Delta t)$	134	cantidad que se aproxima a 0 más rápido que Δt
α	134	parámetro de proporción de un proceso de Poisson
$\alpha(t)$	134	función de proporción de una tasa variable de un proceso de Poisson
fdp	143	función de densidad de probabilidad
$f(x)$	143	función de densidad de probabilidad de una va X continua
$f(x; A, B)$	144	fdp uniforme en el intervalo $[A, B]$
$F(x)$	148	función de distribución acumulada
$\eta(p)$	151	$100p$-ésimo percentil de una distribución continua
$\tilde{\mu}$	152	mediana de una distribución continua
$f(x; \mu, \sigma)$	157	fdp de una va normalmente distribuida
$N(\mu, \sigma^2)$	158	distribución normal con parámetros μ y σ^2
Z	158	una va normal estándar
curva z	158	curva normal estándar
$\Phi(z)$	158	fda de una va normal estándar
z_α	160	valor que captura un área de cola superior α bajo la curva z
λ	170	parámetro para una distribución exponencial
$f(x; \lambda)$	170	fdp exponencial
$\Gamma(\alpha)$	172	la función gamma
$f(x; \alpha, \beta)$	173	fdp gamma con parámetros α y β
gl	175	grados de libertad
ν	175	número de gl para una distribución ji-cuadrada
$f(x; \alpha, \beta)$	177	fdp de Weibull con parámetros α y β
$f(x; \mu, \sigma)$	179	fdp lognormal con parámetros μ y σ
$f(x; \alpha, \beta, A, B)$	181	fdp beta con parámetros α, β, A, B

Símbolo/ abreviatura	Página	Descripción
θ_1, θ_2	190	parámetros de ubicación y escala
$p(x, y)$	199	fmp conjunta de dos va discretas X y Y
$p_X(x), p_Y(y)$	200	fmp marginales de X y Y, respectivamente,
$f_X(x), f_Y(y)$	202	fdp marginales de X y Y, respectivamente
$p(x_1, \ldots, x_n)$	206	fmp conjunta de las n va $X_1, \ldots, X_n$
$f(x_1, \ldots, x_n)$	206	fdp conjunta de las n va $X_1, \ldots, X_n$
$f_{Y\|X}(y\|x)$	209	fdp condicional de Y, dado que $X = x$
$p_{Y\|X}(y\|x)$	209	fmp condicional de Y, dado que $X = x$
$E(Y\|X = x)$	209	valor esperado de Y, dado que $X = x$
$E[h(X, Y)]$	213	valor esperado de la función $h(X, Y)$
$\text{Cov}(X, Y)$	214	covarianza entre X y Y
$\text{Cov}(X, Y)$ $\rho_{X,Y}$, ρ	216	coeficiente de correlación para X y Y
$\overline{X}$	221	media muestral vista como una va
S^2	222	varianza muestral vista como una va
TLC	232	teorema del límite central
θ	248	símbolo genérico para un parámetro
$\hat{\theta}$	248	estimado puntual o estimador de θ
MVUE	256	estimador insesgado de mínima varianza (o estimado)
$\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}, s_{\hat{\theta}}$	259	desviación estándar estimada de $\hat{\theta}$
$x_1^*, \ldots, x_n^*$	259	muestra *bootstrap*
$\hat{\theta}^*$	259	estimación de θ a partir de una muestra *bootstrap*
mle	270	estimación de máxima probabilidad (o estimador)
IC	277	intervalo de confianza
$100(1 - \alpha)\%$	281	intervalo de confianza para un IC
T	295	variable que tiene una distribución t
ν	296	parámetro de grados de libertad (gl) para una distribución t
t_ν	296	distribución t con ν gl
$t_{\alpha,\nu}$	296	valor que captura un área de cola superior α bajo la curva de densidad t_ν
IP	300	intervalo de predicción
$\chi^2_{\alpha,\nu}$	304	valor que captura un área de cola α superior bajo la curva de densidad ji-cuadrada con ν gl
H_0	311	hipótesis nula
H_a	311	hipótesis alternativa
α	319	probabilidad de un error tipo I
β	319	probabilidad de un error tipo II
μ_0	327	valor nulo en una prueba respecto a μ
Z	327	estadístico de prueba basado en una distribución normal estándar
μ'	330	valor alternativo de μ en el cálculo de β

Símbolo/ abreviatura	Página	Descripción
$\beta(\mu')$	330	probabilidad de error tipo II cuando $\mu = \mu'$
T	335	estadístico de prueba basado en una distribución t
θ_0	346	valor nulo en una prueba respecto a θ
p_0	347	valor nulo en una prueba respecto a p
p'	347	valor alternativo de p en el cálculo de β
$\beta(p')$	348	probabilidad de error tipo II cuando $p = p'$
Ω_0, Ω_a	355	conjuntos disjuntos de valores de parámetros en una prueba del cociente de verosimilitud
m, n	362	tamaños de muestra en problemas de dos muestras
Δ_0	363	valor nulo en una prueba respecto a $\mu_1 - \mu_2$
Δ'	366	valor alternativo de $\mu_1 - \mu_2$ en el cálculo de β
S_p^2	378	estimador agrupado de σ^2
D_i	383	diferencia $X_i - Y_i$ para el par (X_i, Y_i)
$\overline{d}$, s_D	385	diferencia de la media muestral, desviación estándar muestral de las diferencias para parejas de datos
p	392	valor común de p_1 y p_2 cuando $p_1 = p_2$
F	399	va que tiene una distribución F
ν_1, ν_2	399	grado de libertad para el numerador y el denominador de una distribución F
F_{α,ν_1,ν_2}	399	valor que captura un área de cola superior α bajo una curva F con ν_1, ν_2 gl
ANOVA	409	análisis de varianza
I	410	número de poblaciones en un factor unitario ANOVA
J	412	tamaño común de la muestra cuando los tamaños de la muestra son iguales
X_{ij}, x_{ij}	412	j-ésima observación en una muestra a partir de la i-ésima población
$\overline{X}_{i\cdot}$	412	media de las observaciones en una muestra a partir de la i-ésima población
$\overline{X}_{\cdot\cdot}$	412	media de todas las observaciones de un conjunto de datos
MSTr	413	media cuadrática de los tratamientos
MSE	413	media cuadrática del error
F	415	estadístico de prueba basado en una distribución F
$x_{i\cdot}$	415	total de observaciones en la i-ésima muestra
$x_{\cdot\cdot}$	415	gran total de todas las observaciones
SST	416	suma total de cuadrados
SSTr	416	suma del cuadrado del tratamiento
SSE	416	suma del cuadrado de los errores

Símbolo/ abreviatura	Página	Descripción
m, ν	420	parámetros para una distribución de rango estudentizado
$Q_{\alpha,m,\nu}$	420	valor que captura un área de cola superior α bajo una curva de densidad asociada al rango estudentizado
μ	426	promedio de la población representada en un factor único ANOVA
$\alpha_1, \ldots, \alpha_I$	426	efectos de tratamiento en un factor único ANOVA
ϵ_{ij}	426	desviación de X_{ij} del valor de su media
$J_1, \ldots, J_I$	430	tamaño de muestra individual en un factor único ANOVA
n	430	número total de observaciones de el factor único ANOVA para un conjunto de datos
$A_1, \ldots, A_I$	432	efectos aleatorios en un factor único ANOVA
A, B	437	factores en un factor doble ANOVA
K_{ij}	437	número de observaciones cuando un factor A está en el nivel i y el factor B está en el nivel j
I, J	437	número de niveles de factores A y B, respectivamente
$\overline{X}_{i\cdot}$, $\overline{X}_{\cdot j}$	439	promedio de observaciones cuando A (B) está en el nivel i (j)
μ_{ij}	439	respuesta esperada cuando A está en el nivel i y B está en el nivel j
α_i, β_j	441	efecto de $A(B)$ en el nivel $i(j)$
f_A, f_B	442	proporciones F para prueba de hipótesis sobre efectos de los factores
A_i, B_j	448	efecto de los factores en un modelo de efectos aleatorios
σ_A^2, σ_B^2	448	varianzas del efecto de los factores
K	451	tamaño de la muestra para cada par de niveles (i, j)
γ_{ij}	451	interacción entre A y B en los niveles i y j
A_i, B_j, G_{ij}	456	efectos en una combinación o en modelos de efectos aleatorios
α_i, β_j, δ_k	456	efectos principales en un ANOVA trifactorial
γ_{ij}^{AB}, γ_{ij}^{AC}, γ_{jk}^{BC}	460	interacciones de dos factores en un ANOVA trifactorial
γ_{ijk}	460	interacción de tres factores en un ANOVA trifactorial
I, J, K	460–461	número de niveles de A, B, C en un ANOVA trifactorial
β_1, β_0	491	pendiente e intercepción de una recta de regresión de una población
ϵ	491	desviación de Y a partir de su valor medio en una regresión lineal simple
σ^2	491	varianza de la desviación aleatoria ϵ
$\mu_{Y\cdot x^*}$	492	valor medio de Y cuando $x = x^*$
$\sigma^2_{Y\cdot x^*}$	492	varianza de Y cuando $x = x^*$

Símbolo/ abreviatura	Página	Descripción
$\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0$	496	estimación de mínimos cuadrados de β_1 y β_0
S_{xy}	498	$\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
$\hat{y}_i$	500	valor pronosticado de y cuando $x = x_i$
SSE	502	suma de cuadrados del error (residual)
SST	504	suma total de cuadrados S_{yy}
r^2	504	coeficiente de determinación
$S_{\hat{\beta}_1}$	512	desviación estándar estimada de $\hat{\beta}_1$
r, R	528	coeficiente de correlación muestral
e_i^*	543	residual estandarizada
$\beta_i (i = 1, \ldots, k)$	562	coeficiente de x^i en una regresión polinomial
$\hat{\beta}_i$	563	estimación por mínimos cuadrados de β_i
R^2	565	coeficiente de determinación múltiple
β_i^*	567	coeficiente en una regresión polinomial centrada
β_i	572	coeficiente de un predictor x_i de una regresión poblacional
$\hat{\beta}_i$	576	estimación por mínimos cuadrados de β_i
SSE_k, SSE_l	585	SSE para modelos completos y simplificados, respectivamente
Γ_k	600	estimación normalizada total esperada del error
C_k	600	estimación de Γ_k
h_{ii}	604	coeficiente de y_i en $\hat{y}_i$
$\chi^2_{\alpha,\nu}$	621	valor que captura un área de cola superior α bajo la curva χ^2 con ν gl
χ^2	622	estadístico de prueba basado en una distribución ji-cuadrada
$P_{10}, \ldots, P_{k0}$	622	valores nulos de una prueba ji-cuadrada de una H_0 sencilla
$\pi_i(\theta)$	628	categoría de probabilidad como una función de los parámetros $\theta_1, \ldots, \theta_m$
I, J	639	número de poblaciones y categorías en cada población cuando se prueba la homogeneidad

Símbolo/ abreviatura	Página	Descripción
I, J	639	número de categorías en cada uno de dos factores cuando se prueba la independencia
n_{ij}	640	número de individuos de una muestra de una población i que se encuentran en la categoría j
$n_{\cdot j}$	640	número total de individuos muestreados en la categoría j
p_{ij}	640	proporción de la población i en la categoría j
$\hat{e}_{ij}$	641	cantidad esperada estimada en la celda i, j
n_{ij}	643	número de muestras que se encuentran en la categoría i del 1er factor y la categoría j del 2º factor
p_{ij}	643	proporción de población en la categoría i del 1er factor y la categoría j del 2º factor
S_+	654	estadístico de rango con signo
W	662	estadístico de rango con suma
K	672	estadístico de prueba Kruskal-Wallis
R_{ij}	672	rango de X_{ij} entre todas las N observaciones en el conjunto de datos
$\bar{R}_{i\cdot}$	672	promedio de rangos para las observaciones en la muestra a partir de la población o tratamiento i
F_r	674	estadístico de prueba de Friedman
UCL	679	límite superior de control
LCL	679	límite inferior de control
C_p, C_{pk}	680–681	índices de capacidad del proceso
R	685	rango de la muestra
ARL	687	magnitud promedio de lote
IQR	688	rango intercuartil
CUSUM	700	suma acumulada
OC	709	curva característica de operación
AQL	710	nivel de calidad aceptable
LTPD	710	porcentaje defectuoso de tolerancia del lote
AOQ	713	calidad de salida promedio
AOQL	713	límite de calidad de salida promedio
ATI	713	promedio del número total inspeccionado

Índice analítico

Nota: Los números de página precedidos por la letra "A" indican números de página de tabla del apéndice y los números de página seguidos por una "f" indican figuras.

A

Aceptación, muestreo de, 708-713
  diseño de un plan de una muestra, 710-711
  planes de muestreo doble, 711-712
  planes de muestreo estándar, 713
  planes de un sólo muestreo, 709-710
  rectificación de inspección y otros criterios de diseño, 712-713
Acortamiento, 712
Agrupados *t,* procedimientos, 377-378
Aleatoria, muestra, 222
Aleatorio, intervalo, 278
Aleatorizada, técnica de respuesta, 264
Aleatorizado, experimento controlado, 366
Análisis de varianza. *Véase* ANOVA
ANOVA (análisis de la varianza, por la expresión en inglés **An**alysis **O**f **Va**riance), 409-436, 437-486
  bifactorial, 438-459
  de factor único, 409, 410-420, 426-435
  definición, 409
  diseños de cuadrados latinos, 464-465
  ecuación modelo, 426-429
  estadístico de prueba, 413-414
  experimentos de bloque aleatizado, 444-447
  introducción, 409-410
  libres de distribución, 674-675
  media esperada de los cuadrados, 443-444
  modelo de efectos aleatorios, 432-433
  modelo de efectos fijos, 432, 439-443, 460-464, 451-452
  multifactorial, 437-486
  notación y suposiciones, 412-413
  parámetro de no centralidad, 427-428
  procedimiento de comparaciones múltiples, 420-426, 444, 455
  procedimientos de prueba, 363-365, 411, 413, 452-455, 460-464
  prueba de Friedman, 673-674
  prueba de Kruskal-Wallis, 671-673
  prueba *F*, 399-402, 414-416, 429
  regresión y, 516
  sumas de cuadrados, 416-419
  tabla, 417-418, 419, 422-423
  tamaños de muestra, 430-431
  trifactorial, 460-469
  Vea también ANOVA unifactorial; ANOVA trifactorial; ANOVA bifactorial
ANOVA bifactorial, 438-459
  experimentos de bloque aleatorizado, 444-447
  media esperada de los cuadrados, 443-444
  modelo de efectos aleatorios, 432-433, 448, 456-457
  modelo de efectos fijos, 432, 439-441, 451-452
  modelo de efectos combinados y, 448, 456-457
  procedimiento de comparaciones múltiples, 420-426, 444, 455
  procedimientos de prueba, 441-443, 452-455
  Véase también ANOVA multifactorial
ANOVA multifactorial, 437-486
  análisis de experimentos, 469-483
  ANOVA bifactorial, 438-459
  ANOVA trifactorial, 460-469
  diseños de cuadrados latinos, 464-466
  efectos combinados y aleatorios, 448, 456-457
  experimentos de bloque aleatorizado, 444-447
  introducción, 437
  media esperada de los cuadrados, 443-444
  modelo de efectos aleatorios, 432-433, 456-457
  modelo de efectos fijos, 432, 439-443, 451-452, 456-457, 460-464
  procedimiento de comparaciones múltiples, 420-426, 444, 455
  procedimientos de prueba, 452-455, 460-464
ANOVA trifactorial, 460-469
  análisis del experimento, 469-474
  Diseños de cuadrados latinos, 464-466
  modelo de efectos fijos, 432, 439-441
ANOVA unidireccional, 427-428
ANOVA unifactorial, 409, 410-420, 426-435
  distribuciones *F* y, 414-416
  ecuación modelo, 426-429
  estadístico de prueba, 413-414
  explicación de, 410-411
  modelo de efectos aleatorios, 432-433
  modelo de efectos fijos, 432, 439-441
  notación y suposiciones, 412-413
  prueba *F*, 414-416, 429
  sumas de cuadrados, 416-419
  tamaños de muestra, 430-431
  transformación de datos y, 431-432
Apareado, dato, 382-391
Apareados *t*, procedimientos
  intervalo de confianza, 385-386
  prueba de hipótesis, 383-385
Árbol, diagrama de, 67-68
Áreas de cola de la curva *t*, A-12-A-13
Asimetría, 40-42, 229, 235-236, 380
Asintótica, eficiencia relativa (ARE por sus siglas en inglés), 660
Atípico
  extremo, 14, 16, 41, 42-43
  gráficas de caja, 40-41
  leve, 16
Atributos, datos de,
  explicación de, 695
  gráficas de control de, 695-700
Axiomas, de probabilidad, 58-59

B

Bayes, teorema de, 80-82
Bernoulli, distribución de, 122, 236
Bernoulli, variable aleatoria de, 97
Beta, distribución, 181-182
Binomial, experimento, 118
Binomial, variable aleatoria, 119
Bivariante, 218-219
  datos, 24
  distribución normal, 218-219
Bloqueo
  confusión y, 474-477
  experimentos de bloque aleatorizado y, 444-447
Bootstrap, método de, 260-261
  estimación de error estándar y, 259-261
  intervalos de confianza y, 284
Box, George, 679

C

c, gráfica de control, 697-698
Calculada, recta de regresión, 496-506
Calculado, error estándar, 259-261
Calibración, 326, 346, 656
Calidad de salida promedio, 713
Calidad, métodos de control de, 678-715
  CUSUM, procedimientos, 700-708
  gráficas de control, 679-700
  muestreo de aceptación, 708-714
Cantidades de celda observadas, 621-622
Cantidades de celdas
  esperadas, 621, 623-626
  esperadas estimadas, 629-633, 635-636, 644
  observadas, 621-622
Cantidades de celdas esperadas estimadas, 629-630, 631-633, 635
Cantidades esperadas de celdas, 629-630, 631-633, 635
Cauchy, distribución de, 257-258
Causalidad, comparación e identificación, 365-366
Causas asignables, 679, 682
Censo, 3
Censura, 258-259
Centrado de valores *x* en una regresión, 567-568
Clases, 18
Clases con ancho desigual, 20
Coeficiente de determinación múltiple, 565
Coeficiente de correlación, 216-217
  distribución normal bivariante, 218-219;
  estimación puntual, 530-532
  intervalo de confianza, 512-514
  muestral, 527-530
  múltiple, 579
  población, 530-533
  propiedades de r, 529-530
  prueba de hipótesis, 514-516
  variables aleatorias, 216
Coeficiente de correlación múltiple, 579
Coeficiente de determinación, 503-505
Coeficiente de determinación múltiple, 565, 578
Coeficiente de variación, 48, 195, 332
Coeficientes de regresión verdaderos, 572
Cola superior, prueba de, 336
Colas livianas, 189
Colas, gruesas, pesadas, 111, 116, 189, 258, 547, 659, 665
Combinación lineal, 238-243
  distribución de, 238-243
Combinaciones, 69-73

Comparaciones múltiples, 420-426, 444, 455
ANOVA multifactorial, 437-486
ANOVA unifactorial, 409, 410-420, 426-435
Comparativa, gráfica de caja, 43-44, 46, 47
Comparativa, gráfica de tallos y hojas, 25-26
Complemento de un evento, 55
Compuesto, evento, 54
Confianza, límites de, 291-292
Confusión, 474-477
Conjunto, nivel de confianza, 424, 522
Conteo, técnicas de, 66-75
Contrastes, 470
Control, límites de, 684-686
rango muestral, 685
recálculo de, 685-686
Conveniencia, muestra de, 10
Convexa, función, 197
Corrección de continuidad, 165
Correlación, 216-218, 527-537
distribuciones de probabilidad conjunta y, 216-218
prueba de ausencia de, 531-532
relación lineal y, 217-218
Correlación contra, 216-218
Covarianza, 214-216
distribuciones de probabilidad conjunta 215-217
Cuartiles, 32-33
Cuarto inferior, 40-41
Cuarto medio, 49
Cuarto superior, 40-41
Cuartos, distancia entre, 40-41, 45, 221
Curva característica de operación (OC, por sus siglas en inglés), 709-710
Curva de densidad, 143-145, 227
Curva normal estándar, A-6-A-7
CUSUM (suma acumulada), procedimientos, 700-708
computacional, 703-706
diseño, 706-708
mascarilla V, 700-703

D

Datos, 3, 9-12
apareados, 382-391
atributos de, 695-700
bivariantes, 4
categóricos, 34, 619-627
continuos, 19-20
cualitativos, 23-24
discretos, 17
multivariantes, 4, 24
recopilación de, 10-12
transformación de, 431-432, 698-699
univariantes, 3
variabilidad, de datos muestrales, 36-38
Datos categóricos, 3-4, 23 34,
análisis de, 619-627
proporciones muestrales y, 34
Datos cualitativos, 23-24
Datos de fracción defectuosa, 696-697
Datos univariantes, 3
Deducciones a partir de la media, 669
Deming, W. E., 9, 708
Densidad estimada, 22
Densidad, escala de, 20-22
Dependiente, variable, 488
Dependientes, eventos, 85
Dependientes, variables aleatorias, 204
Desigualdad de Bonferroni, 523
Desigualdad de Chebyshev, 117
Desviación aleatoria, 491
Desviación estándar, 114, 304-306
intervalo de confianza, 304-306
muestral, 37, 221, 248
poblacional, 38-39
variable aleatoria continua, 154
Desviación estándar muestral, 684-685
Desviaciones de la media, 36-38
Determinística, relación, 487-488, 529
Diagrama
de árbol, 67-68
de Pareto, 29, 147
de Venn, 56
Diagrama de Pareto, 29
Diseño completo, 464
Diseño incompleto, 464
Diseños de cuadrados latinos, 464-466
Diseños de medidas repetidas, 446
Distribución asimétrica, 170, 189
Distribución beta estándar, 181
Distribución binomial, 117-125
aproximación, 117, 119, 165-166
aproximación normal para, 117
distribución de Poisson y, 131-136
negativa, 128-130
probabilidad y, 117-125, 165
tabla, A.1
teorema, 120
y distribución hipergeométrica, 126-128
Distribución binomial acumulada, A-2-A-4
Distribución binomial negativa generalizada, 130
Distribución continua, 142-146, 177-183, 625-626
bondad de ajuste para, 633-636
media de, 657
mediana de, 152
percentiles de, 150-152
varianza de, 181
Distribución de frecuencia, 17, 24
Distribución de población no normal, 301-302
Distribución del valor extremo, 190-191, 195
Distribución discreta, 631-633
Distribución estándar, 190
Distribución exponencial, 170-172
definición, 170
intervalo de confianza, 277, 282-284
proceso de Poisson y, 171-172
propiedad de no memoria de, 172
prueba de hipótesis, 170-172
Distribución *F*, 414-416
ANOVA unifactorial y, 409, 410-420, 426-435
grados de libertad, 399-400
no centralizada, 427-428
prueba F, 399-402, 414-416, 429
valores críticos, 414-415, A.14-A.19
Distribución gamma estándar, 173
Distribución geométrica, 129-130
Distribución hiperexponencial, 195
Distribución hipergeométrica, 126-128
Distribución ji-cuadrada, 174-175, 621-623
áreas de cola de la curva, 622, A-21-A-22
pruebas de bondad de ajuste y, 641-646
grados de libertad para, 399, 621, 629, 631, 641, 644, 645
valores críticos para, 304, 622, 636, A-11
Distribución lognormal, 179-181
Distribución normal, 156-170
bivariantes, 218-219
de una combinación lineal, 240-241
distribuciones binomiales y, 165-166
estándar, 158-159
estimación puntual y, 249-250, 254, 257-258, 259
gráficas de probabilidad y, 184-193
intervalos de confianza y, 286, 295-304
media muestral y, 231-232
no estándar, 161-163
notación de valores críticos (z_α) 160-161
percentiles de, 163-164
población, 231, 327-331
poblaciones discretas y, 164-165
prueba ji-cuadrada, 174-175
pruebas de hipótesis y, 311-360
teorema del límite central y, 232-235
valores críticos de tolerancia para, A.10
Distribución normal estándar, 158-161
áreas bajo la curva, 159
definición, 158
notación z_α y, 160-161
percentiles de, 159-160
Distribución simétrica, 152, 657
Distribución *t*, 295-297
áreas de cola de la curva, A.12-A.13
valores críticos, A.9
Distribución uniforme, 144-145, 148f, 149f
Distribución, función de. *Véase* Función de distribución acumulada
Distribución, libre de, ANOVA de, 671-675
prueba de Friedman, 673-674
prueba de Kruskal-Wallis, 671-673
Distribución, libre de, intervalos de confianza de, 667-671
prueba Wilcoxon de rango con signo, 653-661
prueba Wilcoxon de suma de rangos, 661-666
Distribuciones condicionales, 209
Distribuciones de muestreo, 222-225
aleatoria, 222
aproximada, 226
deducción de, 222-225
experimentos de simulación y, 225-229
media muestral y, 230-238
Distribuciones de probabilidad conjunta, 198-199, 211
Distribuciones normales no estándar, 161-163
Doble ciego, experimento, 395
Dos colas, prueba de, 328, 364
Dunnett, método de, 574 425

E

Ecuación del modelo, 426-429
ANOVA unifactorial, 409, 410-420, 426-435
regresión lineal simple, 491-492
Ecuación general del modelo de regresión múltiple aditivo, 555-557, 572
Ecuaciones normales, 497
Efectos
aleatorios, 432-433, 448, 456-457
combinados, 448, 456-457
fijos, 439-441, 451-452, 460-464
principales, 461-462, 464
Efectos principales, 451-452
Eficiencia, relación de, 494
Efron, Bradley, 284
Empírica, regla, 163
Ensayos, 99, 117-119, 235-236
Error, 251
análisis de varianza, 514
de estimación, en el límite de, 259, 282
error aleatorio en regresión, 491
estándar, 41, 259-261, 514
estimador insesgado de error, 251
horizontal y vertical, 196
media de los cuadrados, 413
medición, 154, 156-157, 185-186, 234, 251, 273
positivo, 195
predicción, 299-300
probabilidades de, 122, 319
procedimientos de prueba libre de error, 318
prueba de hipótesis, 317-323
sistemático, 251
tasa de error experimental, 355, 424
tipo I, 317-324, 349, 354-355, 356, 367, 387, 680, 710

tipo II, 317-318, 320-323, 330-331, 333, 340, 348, 350, 366, 367, 378-379, 387, 394-395, 427, 680, 710
varianza del error aleatorio, 451, 492, 595
Error aleatorio, término de, 491
Error estándar, 259-261
Error cuadrático medio (MSE), 274
Error tipo I, 317-323
probabilidad de, 319
Véase también Nivel de significancia
Error tipo II, 317-323, 331, 350-351
gráfica de control, 700
prueba *t* de dos muestras y, 378-379
tamaño de la muestra y, 317-323, 350-351, 366-367, 394-395
Error total de estimación esperado normalizado, 600
Error, probabilidades de, 122, 319
Error, suma de cuadrados de, 416-417, 502
Escala, parámetro de, 157, 177, 190-191
Espacio muestral, 53-54
Esperadas, medias de los cuadrados, 443-444
Estadística, 1, 3, 9, 10
ámbito de la, 7-9
descriptiva, 4-5
enumerativa frente a analítica, 9-10
inferencial, 5-6
programas computacionales, 15, 121
prueba, 311-326
ramas de la, 4-7
Estadística descriptiva, 4-51
generalidades, 1-3
medidas de ubicación, 29-36
medidas de variabilidad, 36-51
métodos pictóricos y tabulares, 13-29
poblaciones, muestras y procesos, 3-12
Estadística inferencial, 5-6
Estadístico de prueba, 313-317
Estadísticos, 220-230
distribuciones y, 220-230
Estandarización, 161-163, 165
en regresión, 543-544
Estimación
bootstrap, 260-261
de intervalo, 5, 276, 281-282, 361, 396, 523
mínimos cuadrados, 496-503
puntual, 247-275
Estimación de máxima verosimilitud (probabilidad), 266-270, 355-356
complicaciones, 271-272
comportamiento de muestra grande, 271
principio del cociente de verosimilitud (probabilidad), 355-356
Estimación insesgada, principio de, 253-255
Estimación puntual, 31, 221, 247-275
coeficiente de correlación, 530-532
conceptos generales, 248-264
distribución de Cauchy, 257-258
distribución exponencial, 258-260, 265
distribución gamma, 265
distribución normal, 249-250, 254, 257-258, 259
funciones de parámetros, 270-271
insesgada, varianza mínima, 255-257
introducción a, 247
máxima verosimilitud (probabilidad), 250, 266-270, 355-356
método bootstrap, 260-261
método de mínimos cuadrados, 496-506
método de momentos, 264-266
métodos de, 264-274
principio de invarianza, 270
Estimación. *Véase* Estimación puntual
Estimador consistente, 274
Estimador de máxima verosimilitud (probabilidad), 267-270, 355-356
Estimador insesgado, 251-255
varianza mínima, 255-257
Estimador insesgado con varianza mínima, 256-257
Estimador puntual, 248-249, 251, 259-260
bootstrap, 260-261
complicaciones, 257-259, 271-272
comportamiento, del estimador de máxima probabilidad con muestra grande (MLE por sus siglas en inglés), 271
con varianza mínima, 255-257
consistente, 274
definición, 248
error estándar de, 259-261
error cuadrático medio, 274
Estimador M, 272
Hodges-Lehmann, 274
insesgado, 251-255, 257
máxima verosimilitud (probabilidad), 266-270
momento de, 264-265
reporte de, 259-261
robusto, 258, 272
Estimador robusto, 258, 272
Estimador sesgado, 252, 257
Estimador. *Véase* Estimador puntual
Estimadores completos, 632
Estudio observacional retrospectivo, 366
Estudios analíticos, 9-10
Estudios enumerativos, analíticos contra, 9-10
Estudios observacionales, 365
Evento nulo, 56
Evento simple, 54
Evento(s), 54-57
complemento de, 55
compuesto, 54
definición, 54
dependientes, 85
disjuntos, 56, 58-59, 62
exhaustivos, 80-81
independientes, 85-91
intersección de, 55
mutuamente excluyentes, 56
mutuamente independientes, 87-89
nulo, 56, 58
probabilidad y, 54-55
simple, 54
teoría de conjuntos, relación de la, 55-56
unión de, 55-63
Eventos disjuntos, 56, 58-59
Eventos independientes, 85-86
Eventos mutuamente excluyentes, 56
Eventos mutuamente independientes, 87-89
Experimento, 53
apareados contra no apareados, 387-388
binomial, 118-119, 120, 620
bloques aleatorizados, 444-447
censura/sin censura, 259
controlados aleatorizados, 366
de filtración, 469
definición, 53
doble ciego, 395
espacio muestral de, 53-55
factorial, 469-474
multinomial, 207, 620
representación pictórica, 68
simulación, 222, 225-229
trinomial, 206
Experimentos apareados contra no apareados, 387-388
Experimento sin reemplazo, 119
Experimentos de bloque aleatorizado, 444-447
Exponencial, modelo de regresión, 555, 597
Exponencial, suavizamiento, 50-51
Extrapolación, peligro de, 499
Extremo, atípico, 14, 16, 41, 42-43

F

F, prueba, 414-416
ANOVA unifactorial, 409, 410-420, 426-435
distribuciones y, 414-416
grupo de predictores, 584-585
igualdad de varianzas, 399-402
pruebas t y, 429
regresión lineal simple, 487, 516
regresión múltiple, 566, 584-587, 595
tratamientos o poblaciones, 410, 413
valor *P* para, 402
β para, 427-429
F(x), para calcular probabilidades, 149-150
obtención de $f(x)$ a partir de, 150
Factor de corrección de población finita, 128
Factor de corrección para la media, 417
Factores, 409
Factorial, notación, 70, 471
Factoriales, experimentos, 469-483
2^3, experimentos, 469-474
2^p, experimentos, 473-474
Falta de ajuste, pruebas, 559
Familia de distribuciones de probabilidad, 103
Familia, proporción de error, 424
Fisher-Irwin, prueba de, 397
Fisher, R. A., 66, 266, 532-533
Fisher, transformación de, 534
Forma, parámetro de, 173, 177, 191
Frecuencia, 16
acumulada, 29
relativa, 16-18, 60
Frecuencia relativa, 16-18, 60
Frecuencia relativa, límite de, 60
Frecuencias acumuladas, 29
Friedman, prueba de, 673-674
Función de densidad conjunta, 201
Función de densidad de probabilidad condicional, 209
Función de densidad de probabilidad conjunta, 201
Función de densidad de probabilidad marginal, 202-203
Función de densidad marginal conjunta, 212
Función de distribución acumulada, 104-107, 147-156
Función de masa de probabilidad marginal, 200-201
Función de densidad de probabilidad condicional, 209
Función de masa de probabilidad conjunta, 199
Función de regresión verdadera, 550, 562
Función gamma incompleta, 173-174, A-8
Función logit, 557-558

G

Galton, Francis, 505-506
Gamma, distribución, 172-173
distribución estándar, 173
estimación puntual, 264
Gamma, función, 173-174
incompleta, 173-174, A-8
Gauss, Carl Friedrich, 496
Gaussiana, distribución, 323
Grados de libertad, 304
agrupados *t*, 377-378
ANOVA unifactorial, 409, 410-420, 426-435
comparaciones múltiples, 455
distribución *F*, 399, 414-416, 430
distribución ji-cuadrada, 175, 304, 399-400, 621, 629, 631, 641, 644, 645
distribución t, 295-297, 298, 335
dos muestras *t*, 383
experimento apareado contro no apareado, 387-388
prueba de homogeneidad, 640-643

prueba de independencia, 643-646
pruebas de bondad de ajuste, 620-631
regresión, 584
valores *P*, 342
varianza muestral, 38-39, 304, 400-402
Gráfica ajustada de residuos, 580, 587
Gráfica de control de promedio móvil ponderada exponencialmente, 715
límites 3-sigma, 691
Gráfica de probabilidad normal, 187-189, 235
Gráfica de puntos, 15-16, 32, 488
Gráfica *P* de fracciones defectuosas, 696-697
Gráfica parcial de residuos, 580
Gráfica *R*, 692-694
3-sigma, límites de control, 693
Gráfica *S*, 691-692
límites 3-sigma, 691
Gráfica de probabilidad normal, 187-189
Gráfica de puntos, 15-16, 32, 489
Gráfica seminormal, 193
Gráficas de control, 679-700
atributos, datos de, 695-700
basadas en parámetros conocidos, 681-683
datos transformados, 698-699
explicación general, 679-681
gráfica *c*, 697-698
gráfica *p*, 696-697
gráfica *R*, 692-694
gráfica *S*, 691-692
límites de probabilidad, 694
parámetros estimados, 683-685
procedimientos CUSUM (de suma acumulada), 700-708
recálculo de los límites de control, 685-686
reglas suplementarias para, 688
ubicación, 681, 690-691
ubicación de proceso, 681-690
variación, 690-695
variación de proceso, 690-695
Gráficas de control robustas, 688
Gráficas de diagnóstico para ver lo adecuado del modelo, 544-545
dificultades y soluciones, 546-547
Gráficas de caja, 40-41
comparativas, 43-44
definición, 40
valores atípicos mostrados en, 42
Gráficas de residuos, 544-545
Gran total, 416

H

Hipótesis, 310
alternativa, 311-312
compuesta, 627-639
definición de, 311
del investigador, 312
estadística, 311
nula, 311, 462, 641
simple, 627-628
Hipótesis alternativa, 311-312
Hipótesis compuestas, 627-639
Hipótesis del investigador, 312
Hipótesis estadística, 311
Hipótesis nula, 311-312, 619-620, 640, 641, 643-644
Hipótesis simple, 627-628
Hipótesis, prueba de, 310-360
apareados, *t* con datos, 383-387
aspectos de, 352-360
bondad del ajuste, 627-639
coeficiente de correlación, 527-532
cola inferior, 328, 364
cola superior, 336, 364
con dos muestras, *t*, 374-379
de dos colas, 328, 364
determinación del tamaño de la muestra, 338-341
diferencia de medias, 362-373, 378
diferencia entre medias, 362-373, 378
diferencia entre proporciones, 391-398
distribución de Poisson, 131-136
distribución exponencial, 170-172
distribución, libre de, 356, 652-677
distribución normal, 311, 312-317
probabilidad error de tipo II, 317-323, 331, 350-351, 378-379, 394-395
errores en, 317-323
explicación de, 643
homogeneidad de poblaciones, 640-643
independencia de factores, 643-646
intervalos de confianza y, 353-354
introducción, 310
Kruskal-Wallis, prueba, 671-673
McNemar, prueba de, 398, 408
media de población, 326-334, 362-373
muestra grande, 331-333, 346-349, 367-369, 392-394, 396-397, 658
muestra pequeña, 349-350, 397
nivel de significancia, 316-317, 319
pasos en, 329
potencia en, 340-341
principio del cociente de verosimilitud (probabilidad), 355-356
problemas relacionados con, 352, 595-610
procedimientos para, 311-326
proporción de población, 346-352
prueba de Ansari-Bradley, 677
prueba de Fisher-Irwin, 397, 532-534
prueba de Friedman, 673-674
prueba *t* con una muestra, 335-346
prueba Wilcoxon de rango con signo, 653-661, A-24
prueba Wilcoxon de suma de rangos, 661-666, A-25
rango con signo, 653-654
regresión lineal simple, 513-516
regresión múltiple, 566-567, 580-582
regresión polinomial, 542-571
Ryan-Joiner, A-23
Siegel-Tukey, prueba de, 677
t agrupada, 377-378
valores *P* y, 312-317, 341-344, 364
varianza, 363-365
Histograma, 5f, 16-23, 24f
bimodal, 22
datos continuos, 19-22
datos discretos, 17
densidad, 20-22
formas de, 22-23
multimodal, 22
negativamente asimétrico, 23
positivamente asimétrico, 23
probabilidad binomial, 165
probabilidad, 102
simétricos, 23
suavizados, 22
unimodal, 22
Histograma bimodal, 22
Histograma multimodal, 22
Histograma negativamente asimétrico, 23
Histograma positivamente asimétrico, 23
Histograma simétrico, 23
Histograma unimodal, 22
Hodges-Lehmann, estimador de, 274
Homogeneidad, 640-643
hipótesis nula de, 641

I

Identidad fundamental, 417
Independencia, 85-91
de eventos, 85-91
mutua, 87-89
probabilidad e, 85-91
prueba de, 643-646
regla de multiplicación y, 86-87
Índice de capacidad de proceso, 680
Insesgadez, 251-255
Insesgado, estimador, 263, 377-378
Inspección total promedio (ATI por sus siglas en inglés), 713
Interacción, 451
bifactorial, 460-463
generalizada, 476
predictor cuadrático, 572-574
trifactorial, 460-461
Interacción de suma de cuadrados, 452
Interacción generalizada, 476
Interacción, parámetros de, 451-452
Interpretación objetiva de probabilidad, 60-61
Interpretación subjetiva de probabilidad, 61, 65
Intersección de eventos, 55
Intervalo
aleatorio, 278
clases, 18-20
de confianza, 281-282
predicción, 299-300, 523-524
Intervalo de confianza clásico, 280
Intervalo, estimación de. *Véase* Intervalo de confianza clásico
Intervalos de Bonferroni, 523
Intervalos de confianza, 277-309
Bonferroni, 523
bootstrap, 284
clásico, 280
coeficiente de correlación, 527-537
datos apareados y, 385-386
de distribución libre, 667-671
deducción de, 282-284
desviación estándar de, 304-306
diferencia entre medias poblacionales, 362-373, 378
diferencia entre proporciones, 391-398
distribución de Poisson, 131-136
distribución exponencial, 170-172
distribución normal, 286
distribución no normal, 301-302
distribución *t*, 295-297
distribuciones de población no normales, 295-304
distribución uniforme, 144-145, 148f, 149f
dos muestras, 374-379, 386-387
funciones paramétricas, 424-425
general, 288
interpretación de, 279-280
intervalo aleatorio, 278
intervalos de predicción, 300
introducción, 276
límites, 291-292
media poblacional, 110, 277, 285-294
muestra grande, 285-294, 396-397
para una muestra, 297-299
niveles de confianza para, 281-282
niveles de confianza y, 280-281
pendiente, 488, 510-512
pendiente de la recta de regresión, 510-519
precisión de, 281-282
propiedades, 277-285
propiedades básicas de, 277-285
proporción de población, 391-398
prueba de hipótesis y, 354
razón de varianzas, 400-402
regresión lineal simple, 487-496
regresión múltiple, 504-505
regresión polinomial, 562-571
signo, 653-654
tamaño de la muestra y, 281-282
tolerancia, 300-301

unilateral, 292
valor futuro, predicción del, 299-300, 519-527
varianza, 304-306
Wilcoxon de rangos con signo, 667-669, A-24
Wilcoxon de suma de rangos, 669-671, A-25
Intervalos de confianza unilaterales, 291-292
Intervalos estadísticos, 276-309, 566-567
introducción, 276
Intervalos de clase, 18, 21-22
Intrínsecamente lineal, función, 550-551
Intrínsecamente lineal, modelo, 551-552
Invariancia, principio de, 270

J

Jensen, desigualdad de, 197

K

k-tuplas, 68-69
Kemp, nomograma de, 706
k de *n*, sistema, 137
modelo *k*-predictor, 600, 602
Kruskal-Wallis, prueba de, 671-673

L

Ley de probabilidad total, 80-82
Límite de calidad de salida promedio (AOQL por sus siglas en inglés), 713
Límite en el error de estimación, 282
LOWESS, método, 556

M

M, estimador, 272
Mann-Whitney, prueba de, 661
McNemar, prueba de, 398, 408
Media, 29-31, 109-114, 153, 255
como medida de la ubicación, 29-31
de una variable aleatoria, 122-123
desviaciones de, 36-38
error estándar de la, 230-231
factor de corrección para la, 417
grande, 412, 441
influida por los valores atípicos, 32
intervalo de confianza, 362-373, 378
muestra, 29-31
población, 30-31, 362-373
recortada, 32-33, 258
valores, 492
Media de los cuadrados del tratamiento (MSTr), 413-414
Media grande, 412, 441
Media muestral, 230-238
Media recortada, 33, 258
Media réplica, 477
Mediana, 31-32, 152
Mediana muestral, 31-32
Media esperada de los cuadrados, 443-444, 461
Medición, error de, 185-186, 234, 251, 491
Medidas
de ubicación, 29-36
de variabilidad, 36-38
Método de eliminación inversa, 602
Método de momentos, 264-266
Método de selección directa, 602
Método *T*, 420-423
Métodos tabulares, 13-29
Minimizar desviaciones absolutas (por sus siglas en inglés MAD), regresión, 547
Mínimos cuadrados, estimaciones de, 496-503
ponderados, 547
Mínimos cuadrados, principio de, 496-497
Mínimos cuadrados, recta de, 497
Mixta, distribución exponencial, 195
Modelo aditivo, 439-441
Modelo de efectos aleatorios, 432-433, 456-457
ANOVA multifactorial, 437-486
ANOVA unifactorial, 409-420, 426-435
Modelo de efectos fijos, 432, 439-443, 460-464, 451-452
ANOVA bifactorial, 438-459
ANOVA trifactorial, 460-464
ANOVA unifactorial, 409-420, 426-435
Modelo de efectos combinados, 448, 456-457
Modelo del "palo roto", 153
Modelo multiplicativo de potencia, 551, 552, 595
Modelo multiplicativo exponencial, 551
Modelo probabilístico lineal, 491-496
Modelo restringido, 456, 468
Modelo, prueba de utilidad de, 580-582
regresión lineal simple, 515-516
regresión múltiple, 504-505
Modelos de regresión múltiple de primer orden, 572-573, 586-587
momento de la distribución *k*-ésimo, 264
momento de la población *k*-ésimo, 264-265
momento muestral *k*-ésimo, 264
Momento, estimadores de, 264-265
Momentos, método de, 264-266
Muestra, 3, 6
aleatoria simple, 10, 222
conveniencia, 10, 406
definición, 3
variabilidad, 36-38
Muestra aleatoria simple, 10, 222
Muestra grande, intervalos de confianza de, 285-294
Muestra grande, límite de confianza, 291-292
Muestra, coeficiente de correlación de la, 527-530
Muestra, coeficiente de variación de la, 48, 332
Muestra, momento de la, 264-265
Muestra, percentil de la, 184-185
Muestra, proporción de la, 34
Muestra, tamaño de la, 13
ANOVA unifactorial y, 430-432
errores tipo II y, 317-323, 350-351, 378-379, 394-395
inferencias de muestras pequeñas y, 397
intervalos de confianza con, 281-282, 396, 397
pruebas de hipótesis y, 330-331
Muestras grandes, pruebas con, 331-333, 346-349, 367-369, 392-394
Muestreo
estratificado, 10
marco de, 9
variabilidad, 189, 276, 301, 318, 332, 338, 510, 519
Muestreo estratificado, 10
Muestreo, marco de, 9
Multicolinealidad, 606
Multinomial, distribución, 207
Multinomial, experimento, 207, 620
Multivariantes, datos, 4, 24

N

Nivel α, prueba de, 331
Nivel de calidad aceptable (AQL, por sus siglas en inglés), 710
Nivel de significancia observado (OSL, por sus siglas en inglés), 323-324
Nivel de significancia, 316, 319, 353
Niveles de confianza, 281-282
intervalo Wilcoxon de rangos con signo, A-26
intervalo Wilcoxon de suma de rangos, A-27-A-28
Niveles de confianza simultáneos, 346
Niveles del factor, 409
No centralizada, distribución *F*, 427-428
No centralidad, parámetro de, 427-428
No restringido, modelo, 456, 457
Nomograma, 706-707
Normalidad, 636-637
Ryan-Joiner prueba para, A-23
Número de datos defectuosos, 697-698

O

Observación de regresión sin eliminar, 605
Observaciones
influyentes, 604-605
retrospectivas, 366
Observaciones influyentes, 604-605
Orden estándar, 471-472

P

P, valor, 312-317
como una variable aleatoria, 324, 341, 343
definición, 316
prueba *F*, 400-403
prueba ji-cuadrada, 624-625
prueba *z*, 326-334
región de rechazo, 314, 325, 328, 338, 344, 352-353, 669
variación, 341-344
Paramétrica, función, 424-425
Parámetro(s), 451-452
de una distribución de probabilidad, 103
efectos fijos, 451-452
escala, 157, 177, 190-191
forma, 173, 177, 191
interacción, 451-452
no centralidad, 427-428
símbolo genérico, 248
Parámetros, estimación de, 496-510
de una función de, 270-271
en pruebas ji-cuadradas, 628-631
gráficas de control basadas en, 683-685
regresión lineal simple, 496-510
regresión múltiple, 504-505, 576-580
regresión polinomial, 563-566
usando mínimos cuadrados, 497-498
Véase también Estimación puntual
Pares distorsionados, 477
Pares ordenados, regla del producto para, 67-68
Peligro de extrapolación, 499
Pendiente, 510-512
intervalo de confianza, 512-514
procedimiento de prueba de hipótesis, 514-516
Percentil, 32-33
distribución continua, 150-152
distribución normal, 163-164
muestra, 184-185
Permutaciones, 69-73
Planes de muestreo doble, 711-712
Planes de muestreo estándar, para el muestreo de aceptación, 713
Planes de un solo muestreo, en muestreo de aceptación, 709-710
Población, 3-7
conceptual, 7
definición, 3
desviación estándar, 38-39, 304-306
discreta, 164-165
distribución normal, media muestral y, 231-232
hipotética, 7
media, 30-31, 362-373, 378
mediana, 31-32
objetivo, 10
varianza, 304-306
Población conceptual, 7
Población discreta, 164-165
Población hipotética, 7
Población objetivo, 10

Poisson, distribución de, 131-136
bondad del ajuste, 619, 631-632
como límite, 132-133
distribución binomial y, 117-125, 133
distribución exponencial y, 170-172
estimación puntual y, 269
intervalos de confianza y, 374
media y varianza, 134
razón del uso, 132-133
tablas, A-4-A-5
transformaciones de datos y, 432
Ponderados, mínimos cuadrados, 547
Porcentaje defectuoso de tolerancia del lote, 710
Posibilidades, 558-559
Posibilidades, cociente de, 559, 597-599
Potencia, 340-341
curvas, 341, 428
Potencia, modelo de, 551-552, 597
Precisión, 281-282
Predicción puntual, 299
Predicción, intervalo de, 299-300, 523-524
Predicción, nivel de, 300
Predictoras, variables, 572
Principal, bloque, 476-477
Principio de mínimos cuadrados, 496-497
Probabilidad, 6, 52-94
axiomas de, 58-59
cobertura, 290
condicional, 75-80
de rebase, 694
definición, 52, 76-77
determinación sistemática, 63
error, 122, 319
estadística inferencial y, 5-6
histograma, 102, 143f
interpretación de, 59-61
ley del total, 80-82
límites de control, 685-686
posterior, 80-82
previa, 80-82
propiedades de, 61-63
regla de multiplicación de, 77-80, 86-87
resultados igualmente probables y, 63-64
técnicas de conteo y, 66-75
Probabilidad condicional, 75-85
regla de la multiplicación y, 77-80
teorema de Bayes y, 80-82
Probabilidad de rebase, 694
Probabilidad posterior, 80-82
Probabilidad previa, 80-82
Probabilidad, cobertura de, 290
Probabilidad, distribución de, 100, 143
Bernoulli, 97
beta, 181-182
binomial, 126-131
binomial negativa, 128-130
Cauchy, 257-258
condicional, 75-80
conjunta, 205, 208, 218, 271, 355
continua, 98, 142-146
de una combinación lineal, 238-243
de una media muestral, 230-238
discreta, 98-103
exponencial, 170-172
F, 399-403, 414-416, 580-581
familia, 103
gamma, 172-174, 265
geométrica, 103, 129
hipergeométrica, 126-128
ji-cuadrada, 174-175, A-21-A-22
k-ésimo momento de, 264
lognormal, 179-181
muestreo, 222
multinomial, 207, 620
normal, 156-170
normal bivariante, 218-219
normal estándar, 158-161
paramétro de, 103
Poisson, 131-136
rango estudentizado, 420-421 A-20
simétrica, 152
t, 295-297
uniforme, 144-145, 148f, 149f
Weibull, 177-179
Probabilidad, función de masa, 100-102
condicional, 209
conjunta, 199, 267
definición, 100
función de distribución acumulada y, 104-106
marginal, 200-201
Probabilidad, funciones de densidad de, 142-147
condicional, 209
conjunta, 201-202
marginal, 202-203
simétrica, 399-400, 621, 653-654
Probabilidad, gráfica de, 184-193
definición, 184
no normal, 189f, 190-192
normal, 185-190
percentiles muestrales y, 184-185
seminormal, 193
Probabilidad, histograma de, 102, 143
Probabilidades de Poisson, acumuladas, A-4-A-5
Procedimientos de prueba libres de distribución, 356
ANOVA, 671-675
prueba Wilcoxon con signo de rango, 667-669, A-24
prueba Wilcoxon de suma de rangos, 669-671, A-25
signo, 653-654
Procedimientos no paramétricos. *Véase* Procedimientos de prueba libres de distribución
Procedimientos *t* de dos muestras, 361-408
grados de libertad para, 399-400
intervalo de confianza, 374-379
prueba de hipótesis, 362-374
Proceso de nacimientos puro, 274
Proceso de Poisson, 134-135
distribuciones exponenciales y, 170-172
no homogéneo, 139-140
Proceso de Poisson no homogéneo, 139-140
Proceso de ubicación, 681-690
Propiedad de no memoria, 172
Proporción(es) de población
diferencia entre, 336-337, 391-398
intervalo de confianza, 285, 289-291
muestra, 34, 286-288
prueba de hipótesis, 346-352
Prueba de Ansari-Bradley, 677
Prueba de cola inferior, 328
Prueba de hipótesis, 326-334. *Véase también* Hipótesis, prueba de
Prueba de una cola
cola inferior, 336
cola superior, 336
Pruebas de bondad de ajuste, 619-639
distribuciones continuas y, 633-636
distribuciones discretas y, 631-633
hipótesis compuestas y, 627-639
normalidad y, 636-637
probabilidades categóricas y, 620-627
Pruebas ji-cuadrada,
bondad de ajuste, 627-637
homogeneidad, 640-643
independencia, 643-646
normalidad, 636-637
valores *P* para, 624-625, 633, 635
prueba *t*,
apareados, 383-385
dos muestras, 374-382, 386-387
prueba Wilcoxon de rango con signo y, 665
prueba Wilcoxon de suma de rangos y, 661
pruebas *F* y, 400-401, 428, 429
t agrupada, 377-378
una muestra, 297-299, 335-340
valor *P* para, 341-344
Puntuación, intervalo de confianza del, 289-290

R

Rango, 36
Rango con signo, secuencias de, 654-655
Rango estudentizado, distribución de, 420-421 A-20
Rango intercuartil (IQR, por su nombre en inglés), 40-41, 44, 688
Rango medio, 49
Rayleigh, distribución de, 146, 263, 274
Recta de las medias, 492
Recta de regresión
verdadera, 491-493, 496-509
Recta de regresión verdadera, 500
Rectificación, 712-713
Regla de multiplicación para probabilidades, 77-80, 86-87
Regla del producto
general, 68-69
para pares ordenados, 67-68
Regresión
a través del origen, 255
adecuación de modelo, 587-588
análisis, 487-488, 505-506
ANOVA y, 516
calibración y, 346, 656
coeficiente de regresión verdadero, 572
coeficientes, 503-505, 527-530
cúbica, 571
efecto de, 506
exponencial, 555, 597
función, 542, 548, 550, 553, 555, 562, 563-564
función de regresión verdadera, 550, 562
intrínsecamente lineal, 550-552
lineal simple, 487-496
logística, 557-560
LOWESS (por sus siglas en inglés de suavizador de gráfica de dispersión localmente ponderada), 556
modelo cuadrático de, 572-574
modelo cúbico de, 563, 570, 571
multicolinealidad, 606
múltiple, 504-505
no lineal, 542-557, 595
observación influyente, 604-605
polinomial, 565-571
potencia, 550-553
recta, 491
recta de regresión verdadera, 491-493, 496-500
selección de variable, 599-603
transformaciones, 532-534, 550-562, 595-598
Regresión lineal simple, 487-527
alcance de, 505-506
coeficiente de determinación en, 503-505
inferencias basadas en, 510-527
introducción, 487-491
modelo probabilístico lineal, 491-496
parámetros estimados en el modelo en, 496-503
procedimiento de prueba de hipótesis, 514-516
terminología, 505-506
Regresión logística, 557-560
Regresión múltiple, 504-505, 572-594
coeficiente de determinación múltiple en, 503-505, 565, 578

ecuación general del modelo aditivo, pruebas de hipótesis, 572
estimación de parámetros, 496-509, 563-566, 576-580
evaluación de la adecuación del modelo, 544-550, 587-588
inferencias en, 582-587
intervalo de predicción, 523-524
intervalos de confianza, 512-514
modelos con predictores, 572-576
multicolinealidad, 606
observación influyente, 604-605
otros problemas en, 595-610
prueba de la utilidad del modelo, 514-516, 580-582
prueba *F* para grupo de predictores, 516, 584-585
selección de variable, 599-603
transformaciones, 532-533, 550-562, 595-598
variables estandarizadas, 598-599
Regresión no lineal, 550-562
Regresión polinomial, 562-571
centrado de valores *x*, 567-568
coeficiente de determinación múltiple, 565, 578
ecuación del modelo, 562
estimación de parámetros, 563-566
intervalos estadísticos, 566-567
procedimientos de prueba, 566-567
Regresión por pasos, 602
Regresión, análisis de, 488, 505-506
Regresión, efecto de, 506
Regresión, suma de cuadrados de, 505, 578, 580
Relación lineal, 217
correlación y, 217-218
Réplica fraccionaria, 477-480
Residuo estandarizado, 543-544
Residuos, 500, 543-544
estandarizados, 543-544
suma de cuadrados, 502
Residuos estandarizados, 543-544
Resultados igualmente probables, 63-64
Ryan-Joiner, prueba de, A-23

S

Segundo orden, modelo de regresión múltiple de, 572-573, 585, 586-587, 598, 616
Siegel-Tukey, prueba de, 677
Significancia
nivel, 316-317
nivel observado de (OSL, por sus siglas en inglés), 323-324
práctica frente a estadística, 352-353
probabilidad y, 319
Significancia estadística, 352
Significancia práctica, 352-353
Signo, intervalo de, 676
Simulación, experimento de, 225-229
Subrayado, 421-522, 423, 431, 444, 445, 455
Sumas de cuadrados, 416-417
ANOVA, 417
error, 416-417, 502
interacción, 461
regresión, 502
total, 486, 504, 516, 578
tratamiento, 416-417
Suma total de cuadrados, 416-417, 504, 516

T

Tabla de probabilidad conjunta, 199-200, 204, 205
Tablas de contingencia, 639-648
Tablas de contingencia mutuas, 639-648
definición, 640
prueba de homogeneidad, 640-643
prueba de independencia, 643-646
pruebas ji-cuadradas y, 641-648
Taguchi, métodos de, 467, 480, 678-679
Tallo y hoja, representación de, 5, 13-15
comparativa, 25-26
Tamaños de muestra desiguales, 430-431
Tasa de error experimental, 355, 424
Tasa de falla, función, 196
Teorema del límite central (TLC), 232-235
distribución binomial y, 235
distribución de Poisson y, 236
distribución lognormal y, 236
regla empírica para, 234
Teorema fundamental del cálculo, 150
Teoría de conjuntos, relacionada a eventos, 55-56
Tiempo, serie de, 50
Tolerancia, intervalos de, 300-301
Transformación
ANOVA, 431-432
gráfica de control, 698-699
Tratamiento, suma de los cuadrados del, 416-417, 504
Tratamiento, media de los cuadrados del, 413-414, 417, 422, 445
Tukey, procedimiento, 420-424

U

Ubicación
gráficas de control para, 681-690
medidas de. Véase Medidas de ubicación
Ubicación, parámetro de, 157, 178
Unión de eventos, 55

V

V, mascarilla, 700-703
Validación cruzada, 560
Valor crítico para distribuciones *t*, A-9
Valor esperado, 109-114, 213-214
covarianza, 214-216
de la diferencia, 362-363
de una función, 112-113
de una función lineal, 113-114, 491
reglas de, 113
variable aleatoria continua, 98, 152-154, 213
variable aleatoria discreta, 110-117
varianza y, 113-114, 115-116
Valor futuro, predicción de, 299-300, 519-527
Valor nulo, 312
Valores ajustados, 500
Valores atípicos leves, 16, 42
Valores críticos, F, 399, A-14-A-19 A.23-A.27
intervalo Wilcoxon de rango con signo, 667-669, A-26
intervalo de suma de rango de Wilcoxon, 669, A-27
ji-cuadrada, 304, A-21-A-22
normales estándar, 160-161
notación z_α, 160-161
prueba Wilcoxon de rango con signo, 653-661, A-24
prueba de Ryan-Joiner, A-23
prueba Wilcoxon de suma de rango de, 661-666, A-25
rango estudentizado, A 20
t, 296, A-9
tolerancia, A-10
Valores críticos de tolerancia para distribuciones normales de población, A-10
Valores pronosticados, 500
Variabilidad, medidas de, 36-47
Variable aleatoria binomial negativa, 128-130
Variable aleatoria continua, 98, 201-204
desviación estándar de, 154
distribución de probabilidad de, 95, 98, 201-204
distribución gamma, 173
función de distribución acumulada, 104-107
valores esperados, 147-156
varianza de, 154, 180
Variable aleatoria discreta, 98
conjuntamente distribuida, 199-201
distribuciones de probabilidad, 99-109
función de distribución acumulada, 104-107
introducción a, 95-99
valor esperado, 109-117
varianza, 113-114
Variable aleatoria geométrica, 129-130
Variable aleatoria normal, 158, 240-241
Variable aleatoria normal estándar, 158
Variable continua, 98
Variable discreta, 16
Variable estandarizada, 161, 598-599
Variable explicativa, 488
Variable independiente estandarizada, 571
Variable indicadora, 574
Variable(s) aleatoria(s), 96-99
Bernoulli, 97
binomial, 119-121
binomial negativa, 128-130
coeficiente de correlación de, 216
conjuntamente distribuida, 199-212
continua, 98, 201-204
covarianza entre, 214-216
dependientes, 204
diferencia entre, 239-240
discreta, 199-201
distribuida normalmente, 195, 240, 243, 299-300, 426, 448, 456, 562
geométrica, 129
independientes, 204-205, 207
lognormal, 179-181
más que dos, 205-208
no correlacionado, 216, 239
normal estándar, 158
valor esperado de, 109-117
varianza de, 664
Weibull, 177-178, 181, 221
Variable(s) independiente(s), 488
Variables, 95-117
aleatorias, 96-99, 239-240
aleatorias normal estándar, 158
categóricas, 574-576
codificadas, 598
continuas, 98, 142-146
de respuesta, 488
definición, 3
dependientes, 488
discretas, 98
estandarizadas, 598-599
explicativas, 488
independientes, 488
indicadoras, 574
no correlacionadas, 216
tipos de, 98
transformadas, 550-562
Variables aleatorias conjuntamente distribuidas, 198-212
condicional, 209
dos continuas, 201-204
dos discretas, 199-201
independencia de, 204-205
más de dos, 205-208
Variables aleatorias independientes, 204-205, 207
Variables aleatorias no correlacionadas, 216
Variables categóricas, 574-576
Variables de la respuesta, 488
Variable, selección de, 599-603
criterio para, 599-600, 601

eliminación inversa, 602
por pasos, 602
selección directa, 602
Variación
coeficiente de, 48, 183, 332
gráficas de control para, 690-695
valores *P*, 341-344
Variación de proceso, 690-695
Varianza de la muestra, 37-38
fórmula de cálculo, 39-40
motivación para, 38-39
Varianza, 113-114
de una combinación lineal, 239-240
definición, 114
estimador agrupado de, 377-378
fórmula abreviada para σ^2, 114-116
intervalo de confianza, 304-306, 402
muestral, 37-38
población, 304-306
poblaciones normales con, conocida, 363-365
prueba de hipótesis, 363-365
prueba *F* para igualdad de, 399-402
valor esperado y, 110-114
variable aleatoria continua, 98, 154
variable aleatoria discreta, 98
Venn, diagrama de, 56
Verificación del modelo, 543-550
Verosimilitud (probabilidad), función de, 269
Verosimilitud (probabilidad), principio del cociente de, 355-356

W

Weibull, distribución de, 177-179
distribución de muestras, 221
estimación puntual, 221
gráfica de probabilidad, 187, 189, 190-191
Weibull, variable aleatoria, 221
Wilcoxon, intervalo de rango con signo de, 667-669, A-26
Wilcoxon, intervalo de suma de rangos de, 669-671, A-27
Wilcoxon, prueba de rango con signo de, 653-661
aproximación de muestra grande, 658-659
descripción general, 655-656
eficiencia de, 659-660
observaciones apareadas y, 657-658
valor críticos para, A-24
Wilcoxon, prueba de suma de rangos de, 661-666, A-25
aproximación de muestra grande, 658-659
aproximación normal, 664-665
desarrollo de, 661-663
descripción general de, 663-664
eficiencia de, 665-666
valor críticos para, A-25

X

X, gráfica de control, 681-686, 688
límites de probabilidad y, 119
parámetros calculados y, 683-686
reglas suplementarias para, 688
valores de parámetros conocidos y, 681-683

Y

Yates, método de, 472, 473, 475, 478

Z

z, curva, 158-159
z, prueba, 326-334
distribución normal de población con σ conocida, 327-331
dos muestras, 362-371
media poblacional, 371-373
muestra grande, 331-333, 368
una muestra, 297, 335-336
valor *P* para, 326-327
z_α, notación, 160-161

Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias, novena edición, introduce ampliamente los modelos y métodos que es muy probable que encuentren y utilicen los estudiantes de ingeniería en todas sus especialidades. La obra tiene un gran valor y relevancia, y quienes la estudien podrán conectarse con la estadística mediante el uso de numerosos ejemplos y ejercicios que combinan sus experiencias diarias con sus intereses científicos. Este libro permitirá que los estudiantes logren mayor comprensión y apreciación a partir de ejercicios de dificultad variable, desde aquellos que implican el uso del material que se incluye en el texto, hasta los ejercicios donde le piden al lector que extienda los conceptos analizados a situaciones nuevas. La descripción de los ejemplos y ejercicios ha sido perfeccionada para ayudar a los estudiantes a que adquieran una comprensión intuitiva de los diferentes conceptos de esta área de especialidad.

CENGAGE Learning®

Visite nuestro sitio en http://latinoamerica.cengage.com

ISBN-13: 978-607-522-827-3
ISBN-10: 607-522-827-6

9 786075 228273